L.E.G.T.A. Le Chesnoy
D. Blottière

Recueil d'exercices de probabilités

Exercice 1 (uplets, arrangements, combinaisons)

1. Dans un sac, on a placé 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire simultanément 4 jetons du sac.
   (a) Comment peut-on modéliser mathématiquement un tirage ?
   (b) Donner alors une description mathématique de l'ensemble de tous les tirages.
   (c) Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Une urne contient 7 boules blanches et 13 boules rouges. On tire successivement, avec remise, 3 boules de l'urne.
   (a) Comment peut-on modéliser mathématiquement un tirage ?
   (b) Donner alors une description mathématique de l'ensemble de tous les tirages.
   (c) Quel est le nombre de tirages possibles ?
3. Sur un panneau de bois, on a disposé 20 ballons numérotés de 1 à 20. On jette successivement 3 fléchettes. On suppose que chaque fléchette touche un ballon et que l'on ne remplace pas un ballon déjà crevé.
   (a) Comment peut-on modéliser mathématiquement un résultat du jeu ?
   (b) Donner alors une description mathématique de l'ensemble de tous les résultats du jeu.
   (c) Quel est le nombre de résultats possibles ?

Exercice 2 (équiprobabilité, probabilité d'une réunion disjointe, événement contraire)

On jette deux dés à six faces numérotées de 1 à 6, équilibrés.

1. Associer un espace de probabilités à cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité que l'un des dés donne 1 et que l'autre donne 6.
3. Calculer la probabilité d'avoir un double.
4. Calculer la probabilité d'avoir deux numéros différents.

Exercice 3 (probabilités conditionnelles, formule de Bayes)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace de probabilités. Soient A, B deux événements non négligeables.

1. Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle $P(A/B)$ (que l'on note $P_B(A)$).
2. Énoncer et démontrer la formule de Bayes.

Exercice 4 (formule des probabilités composées)

On place 10 boules noires et 10 boules rouges dans une urne. On tire successivement 3 boules :

- si on tire une noire, on l'enlève ;
- si on tire une rouge, on l'enlève, et on ajoute une noire à la place.

Quelle est la probabilité de tirer 3 rouges à la suite ?

Exercice 5 (formule des probabilités totales et suites arithmético-géométriques)

Adèle débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette.

- Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au suivant est égale à $1/3$.
- Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au suivant est égale à $4/5$.
- On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chance d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$A_n \ : \ \ll \text{Adèle touche la cible au } n\text{-ième lancer} \gg$$

et $p_n = P(A_n)$.

1. Calculer p_1 et montrer que $p_2 = \dfrac{4}{15}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \dfrac{2}{15}p_n + \dfrac{1}{5}$.
3. Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Étudier le comportement asymptotique de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6 (formule des probabilités totales et formule de Bayes)

Une forêt est composée de 100 châtaigniers et de 200 chênes. 5% des châtaigniers et 6% des chênes sont atteints d'une maladie.
Quelle est la probabilité qu'un arbre malade soit un châtaignier ?

Exercice 7 (formules sommatoires)

Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. Calculer les sommes $S_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{2}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$.

Exercice 8 (reconnaissance de lois usuelles)

Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X, calculer son espérance, sa variance et la probabilité demandée.

1. Dans une ferme, vivent une poule, un canard et une oie. On jette au hasard 20 morceaux de pain dans la cour de la ferme, où sont rassemblés les trois animaux.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de morceaux de pain mangés par le canard.
   On s'intéresse à $P(X = 3)$.
2. Jeanne s'entraîne à servir au volley-ball. Elle réussit son service avec probabilité $1/4$. Elle essaie autant de fois que nécessaire pour que la balle tombe dans le terrain.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de tentatives effectuées pour avoir un premier service bon.
   On s'intéresse à $P(X \leq 4)$.
3. Dans une fête foraine, une roue est partagée en 20 secteurs numérotés de 1 à 20, d'aires égales. On lance la roue.
   On note X le numéro du secteur sur lequel s'arrête le curseur.
   On s'intéresse à $P(5 \leq X \leq 15)$.
4. Un jardinier ouvre un sac de graines de jachère fleurie qui contient :
   - 300 graines de cosmos ;
   - 50 graines de lupins ;
   - 650 graines de soucis.

   Il prend au hasard 100 graines dans le sac. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de graines de cosmos prélevées.
   On s'intéresse à $P(X \geq 1)$.
5. Un rat cherche à sortir d'un labyrinthe. Il réussit avec probabilité $2/5$.
   On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le rat réussit à sortir et 0 sinon.
   On s'intéresse à $P(X = 0)$.

Exercice 9 (système complet d'événements associé à une variable aléatoire)

On dispose d'un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4, équilibré et de 4 urnes numérotées de 1 à 4. Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, l'urne n°i contient i boules numérotées de 1 à i et $(4 - i)$ boules portant le numéro 0.
L'expérience consiste à jeter le dé, puis à piocher au hasard une boule dans l'urne correspondant au chiffre amené par le dé.
On note X la variable aléatoire égale au chiffre amené par le dé et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X, puis donner $E(X)$ et $V(X)$.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y, la loi de Y, $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 10 (loi binomiale et loi conditionnelle)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in]0, 1[$.
Une secrétaire donne n appels téléphoniques. À chacun de ces appels, la probabilité qu'elle parvienne à joindre son correspondant est p. On suppose que les résultats de tous ces appels sont indépendants.
Après cette première série d'essais, elle tente, le lendemain, de rappeler les correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre la veille. Les hypothèses sur ses chances de réussite sont les mêmes.
On note X le nombre de personnes jointes dès le premier jour et Y le nombre de personnes jointes l'un ou l'autre jour.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Soient $h, k \in [\![0, n]\!]$. Que vaut $P(Y = k/X = h)$?
3. En déduire la loi de Y.
4. Retrouver le résultat de 3. par un argument direct.

Exercice 11 (sommes de séries)

Étudier les sommes de séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

Exercice 12 (fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique)

Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$.

1. Rappeler $X(\Omega)$ et la valeur de $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
2. Calculer la valeur de $F_X(k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

Exercice 13 (loi de Bernoulli, loi de Poisson, loi conditionnelle, loi d'un couple, loi marginale)

Soit $p \in]0, 1[$ et soit $\lambda > 0$.
Dans un bureau de poste, il y a deux guichets. Chacune des personnes arrivant à la poste choisit le premier guichet avec une probabilité p ou le deuxième guichet avec une probabilité $q = 1 - p$. Les personnes effectuent leur choix de façon indépendante.
En une heure, le nombre X de personnes arrivées à la poste suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
On désigne par Y le nombre de personnes ayant choisi le premier guichet.

1. Soit $n, k \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = k/X = n)$.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. Déterminer la loi de Y.