Lab Valeurs Propres

Définitions

Valeur propre :

Soit M une Matrice d’ordre n. Un scalaire λ est une valeur propre de M s’il existe un vecteur non nul X tel que :

$$MX = \lambda X \text{ ou bien } (M - \lambda I_n)X = 0$$

La matrice $M - \lambda I_n$ est donc non inversible si λ est une valeur propre de M.

Vecteur propre :

Soit M une Matrice d’ordre n. X est un vecteur propre de M s’il existe une scalaire λ tel que MX = λX. On dit que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Polynome Caractéristique :

Soit M une Matrice d’ordre n. On appelle Polynome caractéristique de M, le polynome définit par le déterminant $P_M(X) = \det(X * I_n - M)$.

Propositions et démonstrations :

Démontrez les propositions suivantes :

- Proposition :
  Le polynome caractéristique d’une Matrice M s’annule en M : $P_M(M) = 0$.
- Proposition :
  Les valeurs propres de la Matrice M sont exactement les racines du polynome caractéristique.
  <u>Indice</u> : Si A est une matrice non inversible -> il existe une vecteur X non nul tel que AX = 0.
- Proposition :
  Sachant que le polynome caractéristique d’une Matrice M est de degré égal à la taille de la matrice, montrez que M admet au plus n valeurs propres.
- Proposition :
  Montrez que pour une matrice d’ordre n=2, le polynome caractéristique de M s’écrit de la manière suivante :
  $$P_M(X) = X^2 - tr(M)X + \det(M)$$
  Avec tr(M) la trace de M (somme de ses éléments diagonaux) et det(M) son déterminant.

Exercices :

1 – Soit A la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

- Trouvez les valeurs propres de A. Trouvez un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres.
- Montrez que les vecteurs propres $u_1\ et\ u_2$ trouvés forment une base de R^2. i.e : Pour tout X dans R^2, il existe $\alpha_1, \alpha_2\ \in\ \mathbb{R}$ tel que X = $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$.
- Soient e_1= (1,0) et e_2=(0,1) la base cannonique de R^2.
  Calculez les coefficients de la matrice P_{12} vérifiant $P_{12}.e_1 = u_1$ et $P_{12}.e_2 = u_2$.
  P_{12} s'appelle la matrice de passage de la base (e_1, e_2) vers la base (u_1, u_2).
- Calculez les coefficients de la matrice de passage P_{21} de labase (u_1, u_2) vers la base (e_1, e_2)
  Verifiez que $P_{12}.P_{21} = I_2$, I_2 étant la mtrice identité de $M_2(R)$.
- La matrice $M' = P_{12}MP_{21}$ est la représentation de la matrice M dans la nouvelle base des vecteurs propres (u_1, u_2).
  Calculez les coefficients de M'. Faites votre conclusion.

2- On considère comme acquis la proposition suivante :

Si M, une matrice d'ordre n, admet n valeurs propres non nulles, alors M est diagonalisable : Il existe une base dans laquelle la représentation de M est une matrice diagonale.

En sachant ceci, montrez que $\forall\ a, d\ \in R^*, a\ \neq d\ et\ c\ \in R$, la matrice suivante est diagonalisable :

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

3- On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et par la relation de réccurence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$$

a) Déterminez la matrice $A\ \in M_2(R)$ telle que, $\forall\ n \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

b) Déterminez le polynome caractéristique de A, $P_A(X)$ et calculez ses racines λ_1 et λ_2

c) Soit $R_n(X) = a_nX + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculez a_n et b_n.

d) Montrez que $A^n = a_nA + b_nI_2$, en déduire que la matrice A^n converge losque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞que l'on déterminera. Calculez $\lim_{n\to\infty} u_n$.