# Lab Consolidation Probabilités Discrètes

## Exercice 1

On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note $X$ le plus grand des numéros obtenus.

Déterminer la loi de la variable aléatoire $X$.

$$P(X=1)=\frac{1}{36}$$
$$P(X=2)=\frac{3}{36}$$
$$P(X=3)=\frac{5}{36}$$
$$P(X=4)=\frac{7}{36}$$
$$P(X=5)=\frac{9}{36}$$
$$P(X=6)=\frac{11}{36}$$

## Exercice 2

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{0,1,\ldots,a\}$, où $a \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(X)=6$. Déterminer $a$.

X v.a uniforme donc :

$$E[X]=\sum_{i=0}^{a} iP(X=i)=\sum_{i=0}^{a}\frac{i}{a+1}=\frac{a}{2}=6$$

Donc a = 12

## Exercice 3

On lance $n$ fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces.

Si n est impair,
Obligatoirement on aura plus de pile que de face sinon plus de face que de pile. Avec la même probabilité. Donc P(Pile) = ½

Si n est pair,
2 solutions possibles :

1.
$$P(\text{Pile } > r) = \sum_{i=r+1}^{n} C_n^i \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=r+1}^{n} C_n^i$$

2.
Soit r tel que n = 2r,
P(Pile > r) + P(Pile < r) + P(Pile = r) = 1
P(Pile < r) = P(Face > r) = P(Pile > r)

- ⇨ 2 P(Pile > r) + P(Pile = r ) = 1
- ⇨ P(Pile > r) = ½ - P(Pile = r)/2

## Exercice 4

On dispose de $n$ urnes numérotées de $1$ à $n$, l'urne numérotée $k$ comprenant $k$ boules numérotées de $1$ à $k$. On choisit d'abord une urne, puis une boule dans cette urne, et on note $Y$ la variable aléatoire du numéro obtenu. Quelle est la loi de $Y$? Son espérance?

$$P(Y = k) = \sum_{i=1}^{n} P(Y = k \mid X = i)\, P(X = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P(Y = k \mid X = i)$$

Donc

$$P(Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$$

L'espérance de Y,

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{n} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{k}{i}$$

On permute les deux sommes

$$E[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{k}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \frac{i\,(i+1)}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^{n} i + n\right)$$

Donc,

$$E[X] = \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{n+3}{4}$$

## Exercice 5

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note $X$ la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de $X$ et calculer son espérance.

2. On pose $Y=1/X$. Déterminer la loi de $Y$, et son espérance.

$P(X = k) = kc \; (proportionnalité\ de\ la\ probabilité)$

Or, $\sum_{k=1}^{6} P(X = k) = 1$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{6} kc = c\sum_{k=1}^{6} k = c\frac{6 * 7}{2} = 1 \qquad => \qquad c = \frac{1}{21}$$

Espérance de X

$E[X] = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{21}$ or $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$

Donc,

$E[X] = \frac{13}{3}$