

1st Intilaq DSA Test (Maths)

I. Probabilité Discrètes

Soit $r \in \mathbb{N}$,

1. On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p . On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?
2. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de faces obtenus avant le r -ième pile. Quel est la loi de Y ?

II. Probabilité Continues

On suppose que les performances fournies par une équipe de foot lors d'un match est une quantité mesurable sur \mathbb{R} représentée par la variable X qui suit la distribution suivante :

$$\begin{cases} f(x) = c \cdot e^{-\frac{x}{p}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ avec } p \text{ un réel désignant la puissance de l'équipe et } c \text{ une constante dans } \mathbb{R}.$$

1. Calculer c en fonction de p .
2. Montrer que $E[X] = p$.
3. On considère un match quelconque disputé entre une équipe $E1$ de puissance $p1$ et une équipe $E2$ de puissance $p2$. Le gagnant du match est celui qui fournit la meilleure performance. Quelle est la probabilité que l'équipe $E1$ gagne le match en fonction de $p1$ et $p2$?

III. Matrices et Valeurs propres

Soit une matrice réelle M d'ordre 2.

1. Montrer que le polynome caractéristique de M est de la forme :

$$P_M(X) = X^2 - \text{tr}(M)X + \det(M)$$

Avec $\text{tr}(M)$ la trace de M et $\det(M)$ son déterminant.

2. On considère pour la suite de l'exercice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs propres de M ainsi que des vecteurs propres qui leur sont associés.

3. Calculer la matrice de passage P_{12} de la base canonique de \mathbb{R}^2 $((1,0),(0,1))$ vers la base des vecteurs propres trouvés dans la question précédente.
4. Calculer la matrice de passage P_{21} de la base des vecteurs propres vers la base canonique de \mathbb{R}^2
5. Vérifier la relation $P_{21} P_{12} = I_2$.