Lab Calcul Matriciel 2

Les cofacteurs d'une matrice (Définition)

Définition :

Soit A une matrice carrée. On appelle mineur $M_{i,j}$ du couple (i,j) le déterminant de la matrice où on a barré la i-ème ligne et la j-ième colonne. Le cofacteur du couple (i,j) est $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$.

Exemple :

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{matrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Le cofacteur (1,3) est le determinant de la matrice suivante :

$$A_{1,3} = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \end{matrix}$$

Obtenue en supprimant la ligne 1 et la colonne 3 de la matrice A. i.e :

$$C_{1,3} = \det(A_{1,3}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -7$$

Théorème :

Soit $A_{i,j} = (a_{i,j}) \in M_n(R)$, et $C_{i,j}$ ses cofacteurs. Alors on a :

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, C_{i,j} \quad , pour\ i\ fixe\ \in [1, n]$ (Développement par rapport à l a ligne i)

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, C_{i,j} \quad , pour\ j\ fixe\ \in [1, n]$ (Développement par rapport à la colonne j)

Les cofacteurs d'une matrice (Exercice)

Ecrire une fonction récursive Determinant qui prend A,n comme paramètres A étant une matrice carrée et n sa taille, et retourne le déterminant de A en utilisant la méthode des cofacteurs, énoncée dans le théorème.

Rappel : Pour une matrice carrée, le déterminant est :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$