Corrigé Lab Valeurs Propres

Définitions

Valeur propre :

Soit M une Matrice d'ordre n. Un scalaire λ est une valeur propre de M s'il existe un vecteur non nul X tel que :

$$MX = \lambda X \text{ ou bien } (M - \lambda I_n)X = 0$$

La matrice $M - \lambda I_n$ est donc non inversible si λ est une valeur propre de M.

Vecteur propre :

Soit M une Matrice d'ordre n. X est un vecteur propre de M s'il existe une scalaire λ tel que MX = λX. On dit que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Polynome Caractéristique :

Soit M une Matrice d'ordre n. On appelle Polynome caractéristique de M, le polynome définit par le déterminant $P_M(X) = \det(XI_n - M)$.

Propositions et démonstrations :

Démontrez les propositions suivantes :

- Proposition :
  Le polynome caractéristique d'une Matrice M s'annule en M : $P_M(M) = 0$.

$$\boxed{P_M(M) = \det(MI_n - M) = \det(0_n) = 0}$$

- Proposition :
  Les valeurs propres de la Matrice M sont exactement les racines du polynome caractéristique.
  <u>Indice</u> : Si A est une matrice non inversible -> il existe une vecteur X non nul tel que AX = 0.

. Soit λ une valeur propre de M et $P_M(X) = \det(\lambda I_n - M)$ son polynome caractéristique,
Alors selon la définition, $M - \lambda I_n$ est une matrice non inversible.
Donc det($M - \lambda I_n$) = det($\lambda I_n - M$) = 0
D'où $P_M(\lambda) = 0$ et donc λ est bien une racine du polynome caractéristique.

. Soit r une racine du polynome caractéristique de M,
Donc $P_M(r) = \det(rI_n - M) = 0$

Vu que son déterminant est nul, la matrice $rI_n - M$ est donc non inversible.
Alors il existe X non nul tel que $(rI_n - M)X = 0$. Ce qui est la définition même d'une valeur propre.

⇨ R est une valeur propre de M.

On vient donc de montrer que λ est une valeur propre de M si et seulement si elle est une racine de son polynome caractéristique.

- Proposition :

  Sachant que le polynome caractéristique d'une Matrice M est de degré égal à la taille de la matrice, montrez que M admet au plus n valeurs propres.

On va démpontrer ce résultat grace à un résonnement par l'absurde.
Supposons que M, une matrice d'ordre n, admet k valeurs propres $k > n$:
Alors , selon le résultat de la question précédente, ces k valeurs propres sont eux mêmes des racines du polynôme caractéristique de M, $P_M(X)$.
Donc, $P_M(X) = \prod_{i=0}^{k}(X - \lambda_i)$ qui est un polynome de degré k > n.
Absurde, car le degré du polynome caractéristique est de degré n.
On vient donc de montrer qu'une matrice M, d'ordre n, admet au plus n valeurs propres.

- Proposition :

  Montrez que pour une matrice d'ordre n=2, le polynome caractéristique de M s'écrit de la manière suivante :

$$P_M(X) = X^2 - tr(M)X + \det(M)$$

Avec tr(M) la trace de M (somme de ses éléments diagonaux) et det(M) son déterminant.

Soit $M \in M_2(R)$, donc $\exists\ a, b, c, d \in R\ tel\ que$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors $P_M(X)$ le polynome caractéristique de M s'écrit :

$$P_M(X) = \det(XI_n - M) = \begin{vmatrix} X - a & b \\ c & X - d \end{vmatrix}$$

Donc,

$$P_M(X) = (X - a)(X - d) - cb = X^2 - (a + d)X + ad - bc$$

Or ,

$$a + d = tr(M)\ \ et\ ad - bc = \det(M)$$

Ainsi on a bien le résultat attendu :

$$P_M(X) = X^2 - tr(M)X + \det(M)\ , \forall M \in M_2(R)$$

Exercices :

1 – Soit A la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

- Trouvez les valeurs propres de A. Trouvez un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres.
- Montrez que les vecteurs propres u_1 et u_2 trouvés forment une base de R^2. i.e : Pour tout X dans R^2, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tel que X = $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$.
- Soient e_1= (1,0) et e_2=(0,1) la base cannonique de R^2.
  Calculez les coefficients de la matrice P_{12} vérifiant $P_{12}.e_1 = u_1$ et $P_{12}.e_2 = u_2$.
  P_{12} s'appelle la matrice de passage de la base (e_1, e_2) vers la base (u_1, u_2).
- Calculez les coefficients de la matrice de passage P_{21} de labase (u_1, u_2) vers la base (e_1, e_2)
  Verifiez que $P_{12}.P_{21} = I_2$, I_2 étant la mtrice identité de $M_2(R)$.
- La matrice $A' = P_{12}AP_{21}$ est la représentation de la matrice A dans la nouvelle base des vecteurs propres (u_1, u_2).
  Calculez les coefficients de A'. Faites votre conclusion.

1. La matrice A est d'ordre 2 donc sont polynome caractéristique est :

$$P_A(X) = X^2 - tr(A)X + \det(A) = X^2 - 3X + 2$$

Les racines de ce polynomes sont

$$\lambda_1 = 2 \; et \; \lambda_2 = 1$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et 2.

- Les vecteur propres associés a ces v.p :

Soit X_1 un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1,
Alors X_1 verifie :

$$AX_1 = \lambda_1 X_1$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On obtient donc l'équation :

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 2x$$

Donc les coordonnées x,y de X_1 vérifient :

$$x = y$$

Ainsi le vecteur (1,1) par exemple est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

- De même pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$, on trouve que les coordonnées des vecteurs propres associés vérifient :

$$x = -y$$

Donc (1,-1) est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

2. Soit $u_1 = (1,1)\ et\ u_2 = (1,-1)$ les deux vecteurs propres trouvé précédemment et soit X(x,y) un vecteur de R^2.
Dans la base cannonique de R^2 X s'ecrit :

$$\mathrm{X} = \mathrm{x} * (1,0) + \mathrm{y} * (0,1)$$

Or,

$$(1,0) = \frac{1}{2}\big((1,1) + (1,-1)\big)\ et\ (0,1) = \frac{1}{2}\ \big((1,1) - (1,-1)\big)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \mathrm{x} * \frac{1}{2}\big((1,1) + (1,-1)\big) + \mathrm{y} * \frac{1}{2}\ \big((1,1) - (1,-1)\big) \\ &= \frac{1}{2}(x+y)\, u_1 + \frac{1}{2}\ (x-y)\, u_2 \end{aligned}$$

Ainsi on vient de démontrer que (u_1, u_2) forment bien une base de R^2.
Tout vecteur X de R^2 peut s'écrire sous la forme X = $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ avec
$\alpha_1 = \frac{1}{2}(x+y)\ et\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(x-y)$ x et y étant les coordonnées X dans la base cannonique (1,0), (0,1) de R^2.

3. La matrice P_{12} vérifie l'équation suivant :

$$P_{12}\, e_1 = u_1$$

Donc ,

$$P_{12} e_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \qquad a = 1\ \ et\ c = 1$$

P_{12} vérifie aussi ,

$$P_{12}\, e_2 = u_2$$

Donc,

$$P_{12} e_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad => \qquad b = 1\ \ et\ d = -1$$

D'où ,

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. La matrice P_{21} de passage de la base (u_1, u_2) vers la base (e_1, e_2) , par opposition à la matrice P_{12} vérifie les équations :

$$P_{21} u_1 = e_1 \quad => \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad => \quad a + b = 1 \quad et \quad c + d\ = 0$$

$$P_{21} u_2 = e_2 \quad => \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \quad a - b = 0 \quad et \quad c - d\ = 1$$

Donc , d'après le système d'équations obtenu on conclut que :

$$a = b = c = \frac{1}{2} \qquad et \quad d = -\frac{1}{2}$$

⇨ $P_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Verification $P_{12}P_{21} = I_2$:

$$P_{12}P_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Ce résultat s'explique par la la logique suivante :
P_{12} étant la matrice de passage de la base (e_1, e_2) vers (u_1, u_2) et P_{21} la matrice de passage inverse (de (u_1, u_2) vers (e_1, e_2)) donc :

$\forall\, X \in R^2$, $\quad P_{12}P_{21}X = P_{12}X' = X, \quad X'$ *étant le vecteur* X *dans la base* (u_1, u_2)

Donc , le produit $P_{12}P_{21}$ est un élément neutre de la loi multiplication définie sur l'anneau $M_2(R)$. Et comme il ne peut exister qu'un seul élément neutre alors :

$$P_{12}P_{21} = I_2$$

5. On a

$$A' = P_{12}AP_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La nouvelle représentation de la matrice A est diagonale. C'est une forme de matrice qui est très facile à manipuler, dont les valeurs propres sont sur la diagonales, qu'il est facile d'inverser , etc ....

2- On considère comme acquis la proposition suivante :

Si M, une matrice d'ordre n, admet n valeurs propres non nulles, alors M est diagonalisable : Il existe une base dans laquelle la représentation de M est une matrice diagonale.

En sachant ceci, montrez que $\forall\, a, d \in R^*, a \neq d$ *et* $c \in R$, la matrice suivante est diagonalisable :

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$$

Soit $P_M(X)$ le polynime caractéristique de M.

$$P_M(X) = X^2 - tr(M)X + \det(M) = X^2 - (a+d)X + (ad - c^2)$$

Le déterminant de ce polynome est :

$$\delta = (a+d)^2 - 4(ad - c^2) = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4c^2$$
$$= (a-d)^2 + 4c^2 > 0$$

Donc $P_M(X)$ admet deux racines distinces => M admets deux valeur propres distinctes .
D'où M est diagonalisable.

3- On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et par la relation de réccurence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$$

a) Déterminez la matrice $A \in M_2(R)$ telle que, $\forall\, n \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

b) Déterminez le polynome caractéristique de A, $P_A(X)$ et calculez ses racines λ_1 et λ_2

c) Soit $R_n(X) = a_n X + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$. Calculez a_n et b_n.

d) Montrez que $A^n = a_n A + b_n I_2$, en déduire que la matrice A^n converge losque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞que l'on déterminera. Calculez $\lim_{n\to\infty} u_n$.

a)
*Pour n = 1,

$$u_1 = u_1 \ \ et \ \ u_2 = \frac{1}{2}\,(u_1 + u_0)$$

Donc

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad => \quad A^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$$

Donc pour n = 2,

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

On peut donc démontrer par récurrence que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

b)

$$P_A(X) = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} \ \ de \ déterminant \ \delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

Donc les deux racines de ce polynomes sont :

$$\lambda_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2} \ \ et \ \lambda_2 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$$

c)
On a :

$$X^2 = P_A($$