# Corrigé Lab Probabilité Discrète 3

## Exercice 1

### 1.

a) On peut modéliser mathématiquement un tirage par un ensemble {i,j,k,l} ou i,j,k et l sont les numéros des jetons tirés.

b) Soit E l'ensemble de tous les tirages simultanés (sans ordre) de 4 jetons parmis 10 :
$E = \{\{i,j,k,l\} \forall\, i \in [1,10], j \ \in [1,10] - \{i\}, k \ \in [1,10] - \{i,j\}, l \ \in [1,10] - \{i,j,k\}\,\}$

c) Le nombre de tirages simultanés possibles est :
card(E) = card([1,10]) * card([1,9]) * card([1,8]) * card([1,7]) = 10*9*8*7=5040 tirages possibles.
On remarque que $card(E) = A_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$

### 2.

a) On peut modéliser mathématiquement ce tirage par un triplet (X1,X2,X3) avec Xi ayant comme valeur 1 si une le ieme tirage était une boule blanche, 0 sinon.

b) $\mathrm{E} = \{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) \text{avec } \mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z} \ \in \{0,1\}\}$

c) $\mathrm{card}(\mathrm{E}) = card(\{0,1\})^3 = 8$

### 3.

a) On peut modéliser mathématiquement le résultat du jeu par le triplet (X1,X2,X3) avec les Xi correspondant au numéro du ieme ballon touché.

b) Dans cet exemple, l'ordre des ballon touché est pris en compte :
$\mathrm{E} = \{(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_3) \text{ avec } \mathrm{X}_1 \ \in [1,20], \mathrm{X}_2 \in [1,20] - \{\mathrm{X}_1\}, \mathrm{X}_3 \in [1,20] - \{\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2\}\}$

c) Pour un ensemble $\{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$ avec $\mathrm{i} \ \neq \mathrm{j} \neq \mathrm{k}$, il existe $2^3$ triplets possibles $(X_1,X_2,X_3)$ telque les ensembles $\{X_1,X_2,X_3\}$ et $\{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$ soient identiques.
⇨ Card(E) = card([1,20]) * card([1,19]) * card([1,18]) * 8 = 20*19*18*8 = 54720

## Exercice 2

a) L'espace des probabilité associés est le triplet suivant :
$([1,6]\mathrm{x}[1,6], \mathrm{P}([1,6]\mathrm{x}[1,6]), \mathrm{p})$ avec P([1,6]x[1,6]) est l'ensembles des Parties de [1,6]x[1,6] et p la probabilité d'apparition d'un couple (i,j) suite à un jet de dé.

b) Soit $p_1$la probabilité qu'un des dé affiche 1 alors que l'autre afiche 6. Alors on a,
$p_1 = p(i = 1, j = 6) + p(i = 6, j = 1) = \frac{2}{card([1,6]\mathrm{x}[1,6])} = \frac{2}{36}$

c) Soit $p_2$la probabilité d'avoir un double.

$$p_2 = \sum_{k=1}^{6} p(i = k, j = k) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

d) Soit $p_3$la probabilité d'avoir deux numéro différents, évènement complémentaire à $p_2$.
⇨ $p_3 = 1 - p_2 = \frac{5}{6}$

## Exercice 3

1. P(A|B) est la probabilité que l'évènement A se produise sachant que l'évènement B s'est déja produit. Cette probabilité conditionnelle est définit par $\mathrm{P(A|B)P(B)} = \mathrm{P(A \cap B)}$.

2. La formule de Bayes :

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

### Démonstration :

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

## Exercice 4

La probabilité de tirer 3 boules rouges est :

P = $\frac{10}{20} * \frac{9}{20} * \frac{8}{20} = \frac{720}{20^3} = \frac{9}{100} = 0.09$

## Exercice 5

1 . Vu qu'au premier lancer Adèle a autant de chance de toucher la cible que de la rater, donc $p_1 = 0.5$.

Donc $p_2 = P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|A_1^c)P(A_1^c)$ avec $A_1^c$ *le complémentaire de* $A_1$.

D'ou,

$$p_2 = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{5} * \frac{1}{2} = \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|A_n^c)P(A_n^c)$$
$$p_{n+1} = \frac{1}{3} * P(A_n) + \frac{1}{5} * \big(1 - P(A_n)\big) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) p_n + \frac{1}{5} = \frac{2}{15} p_n + \frac{1}{5}$$

3. Démontrons par récurrence que :

$$p_n = \frac{2^{n-2}}{15^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{2}{15}\right)^i \frac{1}{5} \text{ }, pour\ n \geq 2$$

- Vérifions que c'est vrai au rang n = 2

$$\frac{2^{2-2}}{15^{2-1}} + \sum_{i=0}^{2-2} \left(\frac{2}{15}\right)^i \frac{1}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15} = p_2$$

- Supposons que cette égalitée reste vrai jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}, n > 2$
- Démontrons pour le rang n+1 :

$$p_{n+1} = \frac{2}{15} p_n + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{2}{15}\left(\frac{2^{n-2}}{15^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{2}{15}\right)^i \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{2^{n-1}}{15^n} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{2}{15}\right)^{i+1} \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{2^{n-1}}{15^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{2}{15}\right)^i \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$D'o$ù
$$p_{n+1} = \frac{2^{n-1}}{15^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{15}\right)^i \frac{1}{5}$$

Nous venons donc de démontrer par réccurence que $\forall n \geq 2$,

$$p_n = \frac{2^{n-2}}{15^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{2}{15}\right)^i \frac{1}{5}$$

4. Etudions le caractère aymptotique de la suite $(p_n)_{n\geq 2}$ :

$$p_n = \frac{2^{n-2}}{15^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{2}{15}\right)^i \frac{1}{5} = \frac{1}{2} * \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{2}{15}\right)^i$$

Or nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{2}{15}\right)^{i} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{1-\frac{2}{15}^{n-1}}{1-\frac{2}{15}}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{15}{13}\right) = \frac{3}{13}$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{13}$$

## Exercice 6

Soient X,Y les deux v.a suivantes :

- X : La probabilité qu'un arbre soit malade
- Y : La probabilité qu'un arbre soit un chataigner

La probabilité qu'un arbre malade soit un châtaigner s'exprime à travers la quantité P(Y|X). Donc, d'après la formule de Bayes

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y) * P(Y)}{P(X)}$$

Or,

$$P(X) = P(X|Y)P(Y) + P(X|Y^c)P(Y^c) = 0.05 * \frac{1}{3} + 0.06 * \frac{2}{3} = 0.057$$

$$P(Y) = \frac{1}{3}$$

$$P(X|Y) = 0.05$$

D'où,

$$P(Y|X) = \frac{0.05 * \frac{1}{3}}{0.057} = 0.29$$

Donc la probabilité qu'un arbre malade soit un chataigner est de 29%.

## Exercice 7

$$S_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \frac{3}{2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{4} - \frac{n-1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$S_2 = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{5}\right)^{k+3} = \frac{1}{5^3}\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{5}\right)^{k} = \frac{1}{5^3} * \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{4}{25}\frac{5^{n-1}-1}{5^{n-1}}$$