1^{st} Intilaq DSA Test (Maths): Correction

I. Probabilité Discrètes

Soit $r \in \mathbb{N}$,

1. On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Soit k un entier naturel.

P(X = k) est la probabilité que le nombre de lancers nécessaire pour avoir r fois pile est de k lancers.

Donc si k < r, P(X = k) = 0.
Sinon si k >= r,
On sait que le dernier lancer à donné pile, le r-ième pile.
Donc parmis les k-1 lancers précédents, il y eu r-1 piles obetnus (k-1 expériences indépendantes, parmis lequelles il ya r-1 succès : la loi binomiale).

D’où,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{k-1-(r-1)} \; * \; p \\ &= C_{k-1}^{r-1} p^{r} (1-p)^{k-r} \end{aligned}$$

2. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de faces obtenus avant le r -ième pile. Quel est la loi de Y ?

Soit k un entier naturel.

P(Y = k) est la probabilité que le nombre de face obtenus avant d'avoir r fois pile est de k faces. Donc au total il y a eu k+r lancers :

- k lancers qui ont donné face et r qui ont donné pile.

P (Y = k) est donc la probabilité que k+r lancers soient nécessaires pour obtenir r fois piles. D'où,

$$P(Y = k) = P(X = k + r) = C_{k+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^k$$

II. Probabilité Continues

On suppose que les performances fournies par une équipe de foot lors d'un match est une quantité mesurable sur R représentée par la variable X qui suit la distribution suivante :

$\begin{cases} f(x) = c \,.\, e^{-\frac{x}{p}} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}$ avec p un réel désignant la puissance de l'équipe et c une constante dans R.

1. Calculer c en fonction de p.

f est une distribution de probabilité. Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

D'ou

$$\int_{0}^{+\infty} c \,.\, e^{-\frac{x}{p}} \, dx = c\left[-pe^{-\frac{x}{p}}\right]_0^{+\infty} = cp = 1$$

⇨ $c = \frac{1}{p}$

2. Montrer que E[X] = p.

On a,

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{p}\, e^{-\frac{x}{p}}\, dx$$

On pose u = x et v' = $e^{-\frac{x}{p}}$ donc u' = 1 et v = $-p\, e^{-\frac{x}{p}}$,
D'où,

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{p}\int_{0}^{+\infty} u\, v' dx = \frac{1}{p}\left([uv]_0^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} u'v\, dx \right) \\ &= \frac{1}{p}\left(\left[-p\, x\, e^{-\frac{x}{p}} \right]_0^{+\infty} + p \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{p}}\, dx \right) \\ &= \left(\left[-pe^{-\frac{x}{p}} \right]_0^{+\infty} \right) = p \end{aligned}$$

3. On considere un match quelconque disputé entre une équipe E1 de puissance p1 et une équipe E2 de puissance p2. Le gagnant du match est celui qui fourni la meilleur performance. Quelle est la probabilité que l'équipe E1 gagne le match en fonction de p1 et p2?
4.

Soit x un réel positif,

Soit Z_x l'évènement, E1 gagne le match sachant que E2 à fourni une performance x. Et soit Z l'évènement E1 gagne le match contre E2.

Don, par définition,

$$Z = \bigcup_{x \in R^{+*}} Z_x$$

En faisant l'hypothèse que les performances founrnies par les équipes sont idépendantes, on a :

$$\begin{aligned} P(Z_x) &= P(Performance(E_1) \geq x \,|Performance(E_2) = x) \\ &= P(Performance(E_1) \geq x).P(Performance(E_2) = x) \\ &= (1 - F_1(x)).P(Performance(E_2) = x) \end{aligned}$$

Avec F_1 la fonction de répartition de la variable aleatoire X_1 qui décrit les performances de l'équipe E_1.

Or, théoriquement $P(Performance(E_2) = x)$ est égale à 0. Donc nous allons approcher cette probabilité différemment :

$$\begin{aligned} P(Performance(E_2) = x) &= \lim_{\eta \to 0} P(x - \eta \leq Performance(E_2) \leq x + \eta) \\ &= \lim_{\eta \to 0} F_2(x + \eta)\big(1 - F_2(x - \eta)\big) \end{aligned}$$

Avec F_2 la fonction de répartition de la variable aleatoire X_2 qui décrit les performances de l'équipe E_2.

Calcul des fonctions de répartition :

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{p_i} e^{-\frac{t}{p_i}} dt = \frac{1}{p_i}\left[-p_i e^{-\frac{t}{p_i}}\right]_0^x$$

$$Donc\ F_i(x) = 1 - e^{-\frac{x}{p_i}}$$

D'où,

$$\begin{aligned} P(Z_x) &= \big(1 - F_1(x)\big).\lim_{\eta \to 0} 1 + F_2(x + \eta) - F_2(x - \eta) \\ &= \lim_{\eta \to 0} e^{-\frac{x}{p_1}}\left(1 - e^{-\frac{x-\eta}{p_2}}\right)e^{-\frac{x+\eta}{p_2}} \\ &= \lim_{\eta \to 0} e^{-\frac{x}{p_1}} e^{-\frac{x-\eta}{2p_2}}\left(e^{\frac{x-\eta}{2p_2}} - e^{-\frac{x-\eta}{2p_2}}\right)e^{-\frac{x+\eta}{p_2}} \\ &= \lim_{\eta \to 0} 2sh\left(\frac{x - \eta}{2p_2}\right)e^{-\frac{x}{p_1} - \frac{3x+\eta}{2p_2}} \end{aligned}$$

$$P(Z_x) = 2sh\left(\frac{x}{2p_2}\right)e^{-\frac{x}{p_1} - \frac{3x}{2p_2}}$$

$$P(Z) = P\left(\bigcup_{x \in R^{+*}} Z_x\right) = \int_0^{+\infty} P(Z_x)dx$$

D'où,

$$P(Z) = \int_0^{+\infty} 2sh\left(\frac{x}{2p_2}\right) e^{-\frac{x}{p_1}-\frac{3x}{2p_2}}\, dx$$

III. Matrices et Valeurs propres

Soit une matrice réelle M d'ordre 2.

1. Montrer que le polynome caratéristique de M est de la forme :

$$P_M(X) = X^2 - tr(M)X + \det(M)$$

Avec tr(M) la trace de M et det(M) son déterminant.

$$P(M) = \det(XI_n - M) = \begin{vmatrix} x-a & b \\ c & x-d \end{vmatrix} \quad a, b, c, d \; les\; coeffs\; de\; M$$

Donc

$$\begin{aligned} P(M) &= (x-a)(x-d) - cb \\ &= x^2 - dx - ax + ad - bc \\ &= x^2 - (a+d)x + ab - dc \end{aligned}$$

On a bien,

$$P(M) = X^2 - tr(M)X + \det(M)$$

2. On considère pour la suite de l'exercice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs propres de M ainsi que des vecteur propres qui leurs sont associés.

Les valeur propres de M sont les racines de son polynome caractéristique. Or d'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned} P(M) &= X^2 - tr(M)X + \det(M) \\ &= X^2 - 25 \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de M sont 5 et –5.

- Soit u_1 un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda_1 = 5$

Donc,

$$Mu_1 = 5u_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

D'où le systeme d'equations

$$\begin{cases} 3x_1 + 4y_1 = 5x_1 \\ 4x_1 - 3y_1 = 5y_1 \end{cases}$$

Ainsi , $x_1 = 2y_1$. Le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre de M associé à la valeur propre 5.

- Soit u_2 un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda_2 = -5$

Donc,

$$Mu_2 = -5u_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

D'où le systeme d'equations

$$\begin{cases} 3x_2 + 4y_2 = -5x_2 \\ 4x_2 - 3y_2 = -5y_2 \end{cases}$$

Ainsi , $x_2 = -\frac{1}{2}y_2$. Le vecteur $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre de M associé à la valeur propre -5.

3. Calculer la matrice de passage P_{12} de la base cannonique de R^2 ((1,0),(0,1)) vers la base des vecteurs propres trouvés dans la question précédentes.

Soient a,b,c,d les coefficients de la matrice de passage P_{12} et $e_1 = (1{,}0)$, $e_2 = (0{,}1)$ les vecteurs qui forment la base cannonique de R^2:

$$P_{12}e_1 = v_1 \; et \; P_{12}e_2 = v_2$$

⇨

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; et \; \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

⇨

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Calculer la matrice de passage P_{21} de la base des vecteurs propres vers la base cannonique de R^2

Soient a,b,c,d les coefficients de la matrice de passage P_{21} et $e_1 = (1{,}0)$, $e_2 = (0{,}1)$ les vecteurs qui forment la base cannonique de R^2:

$$P_{21}v_1 = e_1 \; et \; P_{21}v_2 = e_2$$

⇨

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; et \; \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇨

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2b + d = 0 \\ a - 2c = 0 \\ b - 2d = 1 \end{cases}$$

⇨

$$\begin{cases} 5a = 2 \; donc \; a = 2/5 \\ c = 1/5 \\ 5d = -2 \; donc \; d = -2/5 \\ b = 1/5 \end{cases}$$

⇨

$$P_{21} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

5. Verifier la relation $P_{21}\,P_{12} = I_2$.

$$\boxed{P_{12}P_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} + \frac{1}{5} & \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5} & \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$