

Экзаменационная программа по курсу «Введение в  
математический анализ», осенний семестр 2020–2021  
учебного года

## Содержание

<b>1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>20</b>
<b>8</b>	<b>22</b>
<b>9</b>	<b>27</b>
<b>10</b>	<b>29</b>

# 1

## Действительные числа

### Дедекиндовы сечения

Сечение множества рациональных чисел  $\mathbb{Q} (A_*, A^*)$  – разбиение  $\mathbb{Q}$  на два таких непустых множества  $A_*$  и  $A^*$ , таких, что:

- $A_* \cup A^* = \mathbb{Q}$
- $A_* \cap A^* = \emptyset$
- $\forall x \in A_*, \forall y \in A^* \mapsto y > x$

### Иррациональные числа

В сечении вида  $\textcircled{A}$   $A_*$  не имеет наибольшего элемента, а  $A^*$  имеет наименьший. В сечении вида  $\textcircled{B}$   $A_*$  имеет наибольший элемент, а  $A^*$  не имеет наименьшего. В сечении вида  $\textcircled{C}$   $A_*$  не имеет наибольшего элемента, а  $A^*$  не имеет наименьшего.

Иррациональным числом называется сечение вида  $\textcircled{C}$ .

### Действительные числа

Действительным числом называется любое сечение множества  $\mathbb{Q}$  вида  $\textcircled{A}$  или  $\textcircled{C}$ .

### Упорядоченность, плотность и непрерывность действительных чисел

Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$

$\alpha = \beta$  если  $A_* = B_*$

Предложение:

Если  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$ , то имеет место одно из включений:  $A_* \subset B_*$  либо  $A_* \supset B_*$

**Доказательство:** пусть  $A_* \not\subset B_*$  и  $A_* \not\supset B_*$

Тогда  $\exists a \in \mathbb{Q} : a \in A_* \wedge a \notin B_* \implies a \in B^*$  и  $\exists b \in \mathbb{Q} : b \notin A_* \wedge b \in B_* \implies b \in A^*$

так как  $a \neq b$

$a \in A_*, b \in A^* \implies b > a$

$b \in B_*, a \in B^* \implies a > b$

противоречие

Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$

$\alpha < \beta$  если  $A_* \neq B_* \wedge A_* \subset B_*$

Упорядоченность  $\mathbb{R}$ :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  имеет место либо  $\alpha = \beta$ , либо  $\alpha < \beta$ , либо  $\alpha > \beta$ .

$\alpha = \beta, \beta = \gamma \implies \alpha = \gamma$

$\alpha < \beta, \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma$

Плотность  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{R}$ :

Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$ , тогда  $\exists c \in \mathbb{Q} : \alpha < c < \beta$

**Доказательство:**  $\alpha < \beta \implies A_* \subset B_* \implies \exists c \in \mathbb{Q} : c \in B_* \wedge c \notin A_*$ .

Так как в нижнем классе нет наибольшего элемента,  $\alpha \leq c < \beta$ .

Если  $\alpha \in \mathbb{I}$ , то  $c \neq \alpha \implies \alpha < c < \beta$ . Если  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , то можно взять  $c \in B_* : c > \alpha$ .

Сечение множества действительных чисел  $\mathbb{R} (\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$  – разбиение  $\mathbb{Q}$  на два таких непустых множества  $\mathcal{A}_*$  и  $\mathcal{A}^*$ , таких, что:

- $\mathcal{A}_* \cup \mathcal{A}^* = \mathbb{R}$
- $\mathcal{A}_* \cap \mathcal{A}^* = \emptyset$
- $\forall x \in \mathcal{A}_*, \forall y \in \mathcal{A}^* \implies y > x$

Теорема Дедекинда:

Среди сечений множества  $\mathbb{R}$  сечений вида  $\textcircled{C}$  нет  $\implies$  непрерывность  $\mathbb{R}$ .

### Десятичные дроби

Пусть числу  $\alpha \in \mathbb{R}$  соответствует сечение  $(\mathcal{A}_*; \mathcal{A}^*)$ . За  $a_0$  обозначим наибольшее целое число из  $\mathcal{A}_*$ . Отрезок  $[a_0; a_0 + 1]$  поделим на 10 отрезков одинаковой длины и выберем среди них тот, который содержит  $\alpha$ :  $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10}; a_0 + \frac{a_1+1}{10}]$ . На шаге  $n$   $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}; a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n+1}{10^n}]$ . Бесконечную десятичную дробь  $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  можно считать представлением действительного числа  $\alpha$ . Заметим, что если  $\alpha$  можно представить как  $\frac{p}{10^n}$ ,  $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ , (то есть  $\alpha$  – сократимая десятичная дробь) то  $\alpha$  соответствуют две десятичные дроби:  $a_0, a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots$  и  $a_0, a_1 a_2 \dots (a_n - 1) 999 \dots$ .

### Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу)

Множество  $X$  ограничено сверху, если  $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \implies x \leq C$

Число  $M$  называется верхней гранью множества  $X$ , если  $\forall x \in X \implies x \leq M$

Число  $\alpha = \sup X$  называется точной верхней гранью множества  $X$ , если  $\forall x \in X \implies x \leq \alpha \wedge \forall \alpha' \exists x \in X : x > \alpha'$ .

**Лемма:** если множество  $X \subset \mathbb{R}$  имеет наибольший элемент  $M = \max X$ , то  $M = \sup X$ .

**Доказательство:** так как  $M$  – наибольший элемент  $X$ , то все остальные элементы  $X$  меньше  $M$  и не являются верхней гранью  $X$ , так как  $M \in X$  и  $M > x$ . Следовательно,  $M$  – точная верхняя грань  $X$ .

**Теорема:** для ограниченного сверху множества  $X \subset \mathbb{R}$  существует единственная точная верхняя грань.

**Доказательство:** если в  $X$  есть наибольший элемент, то  $\alpha$  равно ему. Если в  $X$  наибольшего элемента нет, то построим сечение  $(\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$ , такое, что в  $\mathcal{A}^*$  содержатся все верхние грани  $X$ , а в  $\mathcal{A}_*$  – все остальные числа, при этом множество  $\mathcal{A}^*$  не пусто, так как  $X$  ограничено сверху, а  $X \subset \mathcal{A}_*$ , так как если элемент из  $X \in \mathcal{A}^*$ , то он является максимальным. По теореме Дедекинда, если либо больший элемент в  $\mathcal{A}_*$ , либо меньший в  $\mathcal{A}^*$ . Если в  $\mathcal{A}_*$  есть наибольший элемент, то он является верхней гранью  $X$  – противоречие. Следовательно есть наименьший элемент в  $\mathcal{A}^*$ , который по определению является точной верхней гранью  $X$ .

Теперь докажем единственность точной верхней грани. Пусть  $\alpha, \alpha'$  – точные верхние грани множества  $X$ ,  $\alpha' < \alpha$ . Так как  $\alpha$  – точная верхняя грань,  $\forall \beta < \alpha \exists x \in X : x > \beta \implies \exists x' \in X : x' > \alpha' \implies \alpha' \neq \sup X$ .

## Счетность множества рациональных чисел

Докажем счетность множества положительных рациональных чисел.

Пусть  $H \geq 2 \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим все взаимно простые пары чисел  $p, q \in \mathbb{N}$ , такие что  $p + q = H$ , и соответствующие им рациональные числа. Понятно, что таких пар конечное число, и таким образом представляется любое рациональное число.

Теперь расставим соответствующие каждому  $H$  рациональные числа по порядку и пронумеруем их:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots$$

Так как множество положительных рациональных чисел счетно, то и аналогичным образом счетно множество отрицательных рациональных чисел, а их объединение в объединении вместе с конечным множеством, состоящим из 0, так же счетно и является  $\mathbb{R}$ .

## Несчетность множества действительных чисел

Если подмножество множества несчетно, то и само оно несчетно.

Рассмотрим числа на интервале  $(0; 1)$ , представленные в виде десятичных дробей:

$$\alpha_1 = 0, a_1^1 a_2^1 \dots a_n^1 \dots$$

$$\alpha_2 = 0, a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 \dots$$

...

$$\alpha_k = 0, a_1^k a_2^k \dots a_n^k \dots$$

...

Допустим, что подмножество  $(0; 1)$  счетно.

Построим число  $\gamma$  такое, что  $\gamma = 0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$ ;  $c_i \neq a_i^i, c_i \neq 9$ .  $\gamma$  не равно ни одному из  $a_i$ , что противоречит тому, что  $(0; 1)$  счетно. Следовательно, само множество действительных чисел также счетно.

## 2

### Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно большой, если:

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| > M$$

Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно малой, если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| < \epsilon$$

**Теорема:** сумма двух бесконечно малых последовательностей также является бесконечно малой.

**Доказательство:** пусть последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  – бесконечно малые:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_x = N_x(\epsilon) : \forall n \geq N_x \mapsto |x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_y = N_y(\epsilon) : \forall n \geq N_y \mapsto |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_x(\epsilon), N_y(\epsilon)) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

следовательно,  $\{x_n\} + \{y_n\}$  – также бесконечно малая последовательность.

**Теорема:** бесконечно малая последовательность ограничена.

**Доказательство:** пусть последовательность  $\{x_n\}$  – бесконечно малая:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| < \epsilon$$

Возьмем произвольное  $\epsilon_0$ . Тогда  $\forall n \geq N(\epsilon_0) \mapsto |x_n| < \epsilon_0$ . Выберем среди первых  $N(\epsilon_0)$  членов последовательности максимальный по модулю и обозначим его модуль за  $\epsilon_1$ . Тогда  $\forall x : 1 \leq x \leq N(\epsilon_0) \mapsto |x_n| \leq \epsilon_1$ . Следовательно,  $\forall n \in \mathbb{N} \mapsto |x_n| \leq \epsilon = \max(\epsilon_0, \epsilon_1) \implies \{x_n\}$  ограничена.

**Теорема:** произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей – бесконечно малая последовательность.

**Доказательство:** пусть  $\{x_n\}$  – ограниченная последовательность,  $\{y_n\}$  – бесконечно малая:

$$\exists C > 0 : \forall n \mapsto |x_n| \leq C$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |y_n| < \frac{\epsilon}{C}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n y_n| \leq C |y_n| < \epsilon$$

**Теорема:** произведение двух бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая последовательность.

**Доказательство:** Любая бесконечно малая последовательность ограничена, следовательно про-

изведение двух бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая, как и произведение бесконечно малой и ограниченной.

**Теорема:** если все члены бесконечно малой последовательности с какого-то номера равны  $\gamma$ , то  $\gamma = 0$ .

**Доказательство:** пусть  $\gamma \neq 0$ . Последовательность  $\{x_n\}$  бесконечно мала, возьмем  $\epsilon_0 = |\gamma|$  и проверим для него условие:

$$\exists N = N(\gamma) : \forall n \geq N \mapsto |\gamma| < |\gamma|$$

получается противоречие.

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  – бесконечно большая, то с какого-то номера определена бесконечно малая последовательность  $\{y_n\} = \{\frac{1}{x_n}\}$ .

**Доказательство:** так как  $\{x_n\}$  – бесконечно большая:

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| > \frac{1}{M} \implies \frac{1}{|x_n|} < M$$

Следовательно  $\{y_n\}$  – бесконечно малая.

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  – ограниченная, а  $\{y_n\}$  – бесконечно большая, то с какого-то номера определена бесконечно малая последовательность  $\{z_n\} = \{\frac{x_n}{y_n}\}$ .

**Доказательство:** так как  $\{y_n\}$  – бесконечно большая,  $\{y'_n\}$ , где  $y'_n = \frac{1}{y_n}$ , – бесконечно малая. Тогда  $\{z_n\}$  – бесконечно малая как произведение бесконечно малой и ограниченной.

**Теорема:** если последовательность  $\{|x_n|\}$  ограничена снизу  $c > 0$ , а  $\{y_n\}$  – бесконечно малая и  $y_n \neq 0 \forall n$ , то  $\{z_n\} = \{\frac{x_n}{y_n}\}$  – бесконечно большая.

**Доказательство:** так как  $\{y_n\}$  – бесконечно малая:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |y_n| < \frac{1}{\epsilon} \implies \frac{1}{|y_n|} > \epsilon$$

Следовательно  $\{y_n\}$  – бесконечно большая.  $|x_n y_n| > C |y_n| > \epsilon$ , следовательно  $\{z_n\}$  – бесконечно большая.

## Предел числовой последовательности

Последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ , если последовательность  $\{y_n\}$ , где  $y_n = x_n - a$ , бесконечно мала.

Число  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n - a| < \epsilon$$

## Единственность предела

**Доказательство:** пусть  $a_1$  – предел последовательности  $\{x_n\}$  и  $a_2$  – предел  $\{x_n\}$ . Тогда:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\epsilon) : \forall n \geq N_1 \mapsto |x_n - a_1| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\epsilon) : \forall n \geq N_2 \mapsto |x_n - a_2| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)) : \forall n \geq N \mapsto x_n \in (a_1 - \epsilon; a_1 + \epsilon) \cap (a_2 - \epsilon; a_2 + \epsilon)$$

При  $\epsilon \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$   $(a_1 - \epsilon; a_1 + \epsilon) \cap (a_2 - \epsilon; a_2 + \epsilon) = \emptyset$  – противоречие.

## Арифметические операции со сходящимися последовательностями

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ , а  $\{y_n\}$  – к  $b$ , то их сумма  $\{z_n\} = \{x_n\} + \{y_n\}$  сходится к  $a + b$ .

**Доказательство:**  $x_n = a_n + a$ ,  $y_n = b_n + b$ , где  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  – бесконечно малые последовательности. Последовательность  $\{c_n\}$ , где  $c_n = x_n - a + y_n - b = a_n + b_n$ , – бесконечно мала, следовательно  $a + b$  – предел  $\{z_n\}$

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ , а  $\{y_n\}$  – к  $b$ , то их произведение  $\{z_n\} = \{x_n\} \cdot \{y_n\}$  сходится к  $ab$ .

**Доказательство:**  $x_n = a_n + a$ ,  $y_n = b_n + b$ , где  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  – бесконечно малые последовательности. Последовательность  $\{c_n\}$ , где  $c_n = x_n y_n - ab = (a_n + a)(b_n + b) - ab = a_n b_n + ba_n + ab_n$ , – бесконечно мала, следовательно  $ab$  – предел  $\{z_n\}$

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ , а  $\{y_n\}$  – к  $b \neq 0$ , то с какого-то номера определена последовательность их частного  $\{z_n\} = \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}$ , которая сходится к  $\frac{a}{b}$ .

**Доказательство:**  $x_n = a_n + a$ ,  $y_n = b_n + b$ , где  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  – бесконечно малые последовательности. Докажем сначала существование  $\{z_n\}$ . Пусть  $\epsilon_0 = \frac{|b|}{2}$ .

$$\exists N = N(\epsilon_0) : \forall n \geq N \mapsto |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

$$\frac{|b|}{2} < y_n < \frac{3|b|}{2}$$

$$\frac{1}{y_n} < \frac{2}{|b|}$$

Видно, что  $\{y_n\}$  с  $N(\epsilon_0)$  не равна 0, и что последовательность  $\{\frac{1}{y_n}\}$  ограничена.

Последовательность  $\{c_n\}$ , где  $c_n = \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n + a}{b_n + b} - \frac{a}{b} = \frac{ba_n + ab - ab - ab_n}{b(b_n + b)} = \frac{1}{b_n + b}(a_n - \frac{a}{b}b_n)$ , – бесконечно мала как произведение ограниченной и бесконечно малой, следовательно  $\frac{a}{b}$  – предел  $\{z_n\}$

## Свойства пределов, связанные с неравенствами

**Теорема:** Если для последовательности  $\{x_n\}$   $\exists n_0 \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R} : \forall n \geq n_0 \mapsto x_n \geq b \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то  $a \geq b$ .

**Доказательство:** Пусть  $a < b$ :

$$\epsilon_0 = b - a$$

$$\exists n_1 = n_1(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_1 \mapsto |x_n - a| < b - a$$

$$x_n - a < b - a$$

$$x_n < b$$

что противоречит тому, что  $x_n \geq b$

**Теорема:** Если для последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$   $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \mapsto x_n \geq y_n \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то  $a \geq b$ .



**Доказательство:** Пусть  $a < b$ :

$$\epsilon_0 = \frac{b-a}{2}$$

$$\exists n_1 = n_1(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_1 \mapsto |x_n - a| < \frac{b-a}{2}$$

$$\exists n_2 = n_2(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_2 \mapsto |y_n - b| < \frac{b-a}{2}$$

$$x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} < y_n$$

$$x_n < y_n$$

что противоречит тому, что  $x_n \geq y_n$

**Теорема:** Если для последовательностей  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  и  $\{z_n\}$  то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .  $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \mapsto \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ ,

**Доказательство:**

$$x_n - a \geq y_n - a \geq z_n - a$$

$$|y_n - a| \leq \max(|x_n - a|, |z_n - a|)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\epsilon_0) : \forall n \geq N_1 \mapsto |x_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\epsilon_0) : \forall n \geq N_2 \mapsto |z_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\epsilon_0), N_2(\epsilon_0)) : \forall n \geq N \mapsto |y_n - a| < \epsilon$$

## Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

**Теорема:** Если последовательность  $\{x_n\}$  ограничена и монотонна, то она сходится к своей точной верхней грани (если она неубывает или возрастает), или к своей точной нижней грани (если она невозрастает или убывает).

**Доказательство:** пусть  $\{x_n\}$  возрастает.

$$a = \sup\{x_n\} \implies \forall \epsilon \exists N = N(\epsilon) : x_N > a - \epsilon$$

$$0 \leq a - x_N < \epsilon$$

так как  $\{x_n\}$  возрастает

$$\forall n > N \mapsto x_n > x_N \implies 0 \leq a - x_n < a - x_N < \epsilon$$

следовательно  $\{x_n\}$  сходится к  $a = \sup\{x_n\}$ .

## Теорема Кантора о вложенных отрезках

Системой стягивающихся отрезков называют последовательность  $\{[a_n; b_n]\}$ , если:

- $\forall n \mapsto [a_{n+1}; b_{n+1}] \subseteq [a_n; b_n]$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

**Теорема:** система стягивающихся отрезков имеет единственную точку, принадлежащую им всем.

**Доказательство:**  $\{a_n\}, \{b_n\}$  ограничены и монотонны, следовательно  $\exists c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$ .

Пусть  $\exists c' > c : c' \in [a_n; b_n] \forall n$ . Тогда  $\forall n b_n - a_n \geq c' - c > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) > 0$ , что противоречит тому, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ .

## Число $e$

**Теорема:** число  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

**Доказательство:**

$$x_n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!} \frac{1}{n^n}$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$x_{n+1} > x_n$$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Последовательность монотонно возрастает и ограничена, следовательно  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = e$ .

### 3

## Подпоследовательности, частичные пределы

### Подпоследовательности

Пусть  $\{x_n\}$  – произвольная последовательность,  $\{k_n\}$  – возрастающая последовательность из натуральных чисел. Тогда  $\{x_{k_n}\}$  называется подпоследовательностью  $\{x_n\}$ .

### Частичные пределы

Если  $\{x_{k_n}\}$  сходится к  $a$ , то  $a$  – частичный предел  $\{x_n\}$ .

## Теорема Больцано-Вейерштрасса

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, то у нее есть сходящаяся последовательность  $\{x_{k_n}\}$ .

**Доказательство:** Так как  $\{x_n\}$  ограничена,  $\exists \alpha, \beta : \alpha \leq x_n \leq \beta \forall n$ . На отрезке  $[\alpha; \beta]$  лежит бесконечное количество членов последовательности. Выберем такой отрезок  $[\alpha_1; \beta_1]$ , на котором лежит бесконечное количество членов последовательности и для которого  $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta - \alpha}{2}$ . На шаге  $n$  имеем  $\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}}{2}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b - a) \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma$$

Выберем  $x_{k_1}$  такое, что  $x_{k_1} \in [a_1; b_1]$ . Выберем  $x_{k_2}$  такое, что  $x_{k_2} \in [a_2; b_2]$  и  $k_2 > k_1$ . Такое  $k_2$  существует, потому что если не учитывать все элементы последовательности, чей номер меньше или равен  $k_1$ , на  $[a_2; b_2]$  все равно лежит бесконечное количество членов  $\{x_n\}$ . На шаге  $n$  выбираем  $x_{k_n}$  такое, что  $x_{k_n} \in [a_n; b_n]$  и  $k_n > k_{n-1}$ .

$$a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = \gamma$$

## Критерий Коши существования конечного предела последовательности

### Фундаментальная последовательность

Если для последовательности  $\{x_n\}$  выполняется следующее условие:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n, m \geq N \implies |x_n - x_m| < \epsilon$$

то она называется фундаментальной.

### Критерий Коши

**Теорема:** чтобы у последовательности  $\{x_n\}$  существовал конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

### Доказательство:

Необходимость: пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Тогда:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n, m \geq N \implies |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\frac{-\epsilon}{2} < x_n - a < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\frac{-\epsilon}{2} < a - x_m < \frac{\epsilon}{2}$$

$$-\epsilon < x_n - x_m < \epsilon$$

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

следовательно,  $\{x_n\}$  – фундаментальная.

Достаточность: если  $\{x_n\}$  фундаментальная, то она ограничена, следовательно у нее есть подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$ , сходящаяся к  $a$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\epsilon) : \forall n \geq N_1 \mapsto |x_{k_n} - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

Так как  $\{x_n\}$  фундаментальная:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\epsilon) : \forall n, m \geq N_2 \mapsto |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)) : \forall n \geq N \mapsto |x_n - a| = |x_n - x_{k_N} + x_{k_N} - a| \leq |x_n - x_{k_N}| + |x_{k_N} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

следовательно,  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ .

## 4

### Определения предела функции в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность

Далее подразумевается, что функция  $f(x)$  определена в некой выколотой  $\Delta$  окрестности точки  $x_0$ :  $X = \{x : 0 < |x - x_0| < \Delta\}$ .

#### Предел функции в точке по Коши

Число  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \mapsto |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

#### Предел функции в точке по Гейне

Последовательностью Гейне назовем сходящуюся к  $x_0$  последовательность  $\{x_n\}$ , где  $x_n \neq x_0$ .

Число  $a$  называется пределом функции в точке  $x_0$ , если для произвольной сходящейся к  $x_0$  последовательности Гейне с какого-то  $n_0$  определена  $f(x_n)$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$

#### Эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне

**Теорема:** определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.

**Доказательство:**

Пусть  $a$  – предел функции в точке  $x_0$  по Коши:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall x \in X : 0 < |x_n - x_0| < \delta$$

Для любой последовательности Гейне, сходящейся к  $x_0$ , найдется  $N = N(\delta) = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto 0 < |x_n - x_0| < \delta \implies |f(x_n) - a| < \epsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ .  $f(x_n)$  сходится к  $a$  для произвольной последовательности Гейне, следовательно  $a$  – предел  $f(x)$  в точке  $x_0$  по Гейне.

Пусть  $a$  – предел функции в точке  $x_0$  по Гейне, а по Коши он не равен  $a$ :

$$\exists \epsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \mapsto |f(x_\delta) - a| \geq \epsilon_0$$

$$\delta_n = \frac{1}{n} > 0 \implies \exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \delta_n \mapsto |f(x_n) - a| \geq \epsilon_0$$

То есть существует такая сходящаяся к  $x_0$  последовательность Гейне  $\{x_n\}$ , для которой  $\{f(x_n)\}$  не сходится к  $a$ , что противоречит тому, что  $a$  – предел по Гейне.

### Свойства пределов функции

Вытекают из свойств предела последовательностей и применения определения предела функции по Гейне.

### Критерий Коши существования конечного предела функции

Функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Коши в точке  $x_0$ , если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall x_1, x_2 \in X : 0 < |x_1 - x_0| < \delta \wedge 0 < |x_2 - x_0| < \delta \mapsto |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

**Теорема:** для того, чтобы функция  $f(x)$  имела конечный предел в точке  $x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши в точке  $x_0$ .

**Доказательство:**

Необходимость: пусть  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x_1, x_2 \in X : 0 < |x_1 - x_0| < \delta \wedge 0 < |x_2 - x_0| < \delta \mapsto |(f(x_1) - f(x_0))| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |(f(x_0) - f(x_2))| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$-\frac{\epsilon}{2} < f(x_1) - f(x_0) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$-\frac{\epsilon}{2} < f(x_0) - f(x_2) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$-\epsilon < f(x_1) - f(x_2) < \epsilon$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

следовательно,  $f(x)$  удовлетворяет условию Коши в точке  $x_0$ .

Достаточность: пусть  $f(x)$  удовлетворяет условию Коши в точке  $x_0$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall x_1, x_2 \in X : 0 < |x_1 - x_0| < \delta \wedge 0 < |x_2 - x_0| < \delta \mapsto |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Возьмем произвольную сходящуюся к  $x_0$  последовательность Гейне.

$$\forall \delta \exists N = N(\delta) = N(\epsilon) : \forall n, m \geq N \mapsto 0 < |x_n - x_0| < \delta \wedge 0 < |x_m - x_0| < \delta \mapsto |f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$$

Следовательно  $\{f(x_n)\}$  фундаментальна и сходится к некому  $a$ .

Покажем, что  $\{f(x_n)\}$  сходится к одному  $a$  вне зависимости от выбора последовательности Гейне  $\{x_n\}$ .

Пусть  $\{x'_n\}$  и  $\{x''_n\}$  сходятся к  $x_0$ ,  $\{f(x'_n)\}$  сходится к  $a'$ ,  $\{f(x''_n)\}$  сходится к  $a''$ . Построим новую последовательность Гейне  $\{\bar{x}_n\} = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots, x'_n, x''_n, \dots\}$ .  $\{f(\bar{x}_n)\}$  – фундаментальная, значит она сходится к  $\bar{a}$ . Раз  $\{f(\bar{x}_n)\}$  сходится к  $\bar{a}$ , значит  $\{f(x'_n)\}$  и  $a'$ ,  $\{f(x''_n)\}$  сходятся к  $\bar{a}$ ,  $\bar{a} = a' = a''$ . Следовательно  $\bar{a}$  – предел  $f(x)$  в точке  $x_0$  по Гейне.

## Предел сложной функции

Пусть функция  $f(x)$  определена в выколотой  $\Delta_1$  окрестности точки  $x_0$ :  $X = \{x : 0 < |x - x_0| < \Delta_1\}$ , а функция  $g(y)$  определена в выколотой  $\Delta_2$  окрестности точки  $y_0$ :  $Y = \{y : 0 < |y - y_0| < \Delta_2\}$ ,  $f(X) \subseteq Y$ .

**Теорема:** Если предел функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  равен  $y_0$ , сама  $f(x)$  на  $X$  не принимает значения  $y_0$ , предел функции  $g(y)$  в точке  $y_0$  равен  $a$ , то предел функции  $h(x) = g(f(x))$  в точке  $x_0$  равен  $a$ .

**Доказательство:**

Для произвольной сходящейся к  $x_0$  последовательности Гейне  $\{x_n\}$   $\{f(x_n)\}$  является сходящейся к  $y_0$  последовательностью Гейне. Следовательно,  $\{g(f(x_n))\} = \{h(x_n)\}$  сходится к  $a$ ,  $a$  – предел в точке  $x_0$  функции  $h(x)$  по Гейне.

## Существование односторонних пределов у монотонных функций

**Теорема:** если  $f(x)$  определена и монотонна на  $(a; b)$ , то  $\forall x_0 \in (a; b) \exists f(x_0 - 0) \wedge \exists f(x_0 + 0)$ . Если  $f(x)$  неубывает или возрастает на  $(a; b)$ , то  $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$ . Если  $f(x)$  невозрастает или убывает на  $(a; b)$ , то  $f(x_0 - 0) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + 0)$ .

**Доказательство:** пусть  $f(x)$  возрастает на  $(a; b)$ . Докажем существование  $f(x - 0) \forall x$ :

$$\forall x_0 \in (a; b) \forall x \in (a; x_0) \mapsto f(x) < f(x_0) \implies \exists \sup_{(a; x_0)} f(x) = \alpha \leq f(x_0)$$

$$\forall \epsilon \exists x_\epsilon \in (a; x_0) : f(x_\epsilon) > \alpha - \epsilon$$

$$\delta = \delta(\epsilon) = x_0 - x_\epsilon > 0$$

$$\forall x : 0 < x_0 - x < \delta \mapsto \alpha - \epsilon < f(x) \leq \alpha$$

$$\alpha - \epsilon < f(x) < \alpha + \epsilon$$

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon$$

$$f(x_0 - 0) = \alpha$$

существование  $f(x + 0) \forall x$  доказывается аналогичным образом.

## 5

### Непрерывность функции в точке

Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

### Свойства функций, непрерывных в точке

**Теорема:** если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ , то функции  $f(x) + g(x)$  и  $f(x)g(x)$  тоже непрерывны в  $x_0$ . Если  $g(x_0) \neq 0$ , то функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  непрерывна в точке  $x_0$ .

**Доказательство:** Следует из свойств арифметических операций с пределами.

**Теорема:** если функция  $f(x)$  определена и непрерывна в точке  $x_0$ , то существует такая  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , в пределах которой  $f(x)$  сохраняет свой знак.

Функцию  $\Delta y(x_0, \Delta x)$  в точке  $x_0$  определим как  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

**Теорема:** если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y(x_0, \Delta x) = 0$ .

### Односторонняя непрерывность

Функция  $f(x)$  называется одностонне непрерывной в точке  $x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0)$$

### Непрерывность сложной функции

**Теорема:** если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , а функция  $g(y)$  непрерывна в точке  $y_0 = f(x_0)$ , то функция  $h(x) = g(f(x_0))$  непрерывна в точке  $x_0$ .

**Доказательство:** по теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g(f(x_0))$ .

### Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции

**Теорема:** если предел функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  равен  $y_0$ , а функция  $g(y)$  непрерывна в точке  $y_0 = f(x_0)$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$ .

**Доказательство:** возьмем сходящуюся к  $x_0$  последовательность Гейне  $\{x_n\}$ , тогда последовательность  $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$  сходится к  $y_0$ . Последовательность  $\{g(y_n)\}$  сходится к  $g(y_0) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n))$ . Следовательно  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$ .

### Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций

Классификация точек разрыва:

- точка  $x_0$  – устранимая точка разрыва, если  $f(x)$  либо не определена, либо не непрерывна в точке  $x_0$ .
- точка  $x_0$  – точка разрыва первого рода, если для  $f(x)$  существуют и не равны левый и правый пределы в точке  $x_0$ . Их разность  $\omega(x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  называется скачком функции в точке  $x_0$ .



- точка  $x_0$  – точка разрыва второго рода, если для  $f(x)$  не существует конечного левого или правого предела в точке  $x_0$ .

**Теорема:** монотонной функция, определенная на  $(a; b)$ , имеет только точки разрыва первого рода.

**Доказательство:** пусть  $f(x)$  возрастает на  $(a; b)$ . Точек разрыва второго рода нет в силу теоремы о существовании односторонних пределов у монотонных функций. В силу той же теоремы и неравенства  $f(x-0) \leq f(x_0) \leq f(x_0+0)$ ,  $f(x-0) = f(x_0+0) = \gamma \neq f(x_0)$  не может выполняться, и следовательно  $x_0$  не может быть устранимой точкой разрыва.

**Теорема:** множество точек разрыва определенной на  $(a; b)$  монотонной функции  $f(x)$  не более, чем счетно.

**Доказательство:** каждой точке разрыва  $x_0$  соответствует интервал  $(f(x_0-0); f(x_0+0))$  точки которого за исключением, быть может,  $f(x_0)$ , не входят в область определения  $f(x)$ . В силу монотонности  $f(x)$  эти интервалы не пересекаются. На каждом интервале выберем рациональную точку. Таким образом мы установили взаимнооднозначное соответствие между точками разрыва и подмножеством счетного множества рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ .

## 6

### Свойства функций, непрерывных на отрезке

#### Ограниченность

**Теорема:** если функции  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

**Доказательство:** пусть  $f(x)$  неограничена на  $[a; b]$ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : |f(x_n)| > n$$

$$\{y_n\} = \{f(x_n)\}$$

последовательность  $\{y_n\}$  – бесконечно большая. Последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, следовательно она содержит в себе сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$ . Раз последовательность  $\{x_{k_n}\}$  сходится, а  $f(x)$  непрерывна, последовательность  $\{f(x_{k_n})\}$  сходится и не является бесконечно большой, что противоречит тому, что  $\{f(x_n)\}$  – бесконечно большая.

#### Достижимость точных верхней и нижней граней

**Теорема:** если функции  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то она достигает свою точную верхнюю грань  $\alpha$  и свою точную нижнюю грань  $\beta$ .

**Доказательство:** пусть  $f(x)$  не достигает  $\alpha$ . Введем функцию  $g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}$ , непрерывную на  $[a; b]$ . Она ограничена сверху  $A$ .

$$\frac{1}{\alpha - f(x)} \leq A$$

$$f(x) \leq \alpha - \frac{1}{A}$$

следовательно  $\alpha - \frac{1}{A}$  – верхняя грань  $f(x)$ , что противоречит тому, что  $\alpha$  – точная верхняя грань.

#### Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

**Теорема:** если функции  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и принимает на его концах значения разных знаков, то существует такое  $x_0 \in (a; b)$ , что  $f(x_0) = 0$ .

**Доказательство:** пусть  $f(a) < 0$  и  $f(b) > 0$ .

$$X = \{x \in [a; b] : f(x) < 0\} \neq \emptyset$$

$$\exists x_0 = \sup X$$

так как  $f(x)$  непрерывна справа в точке  $a$ , она сохраняет свой знак в какой-то окрестности  $a$ , следовательно  $x_0 \in (a; b)$ . Предположим, что  $f(x_0) \neq 0$ . Тогда в некой  $\delta$  окрестности она сохраняет свой знак. Так как  $x_0 = \sup X$ ,  $\exists x' \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x') < 0$ . Однако  $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \mapsto f(x) \geq 0$ . Следовательно,  $f(x_0)$  не сохраняет свой знак ни в какой  $\delta$  окрестности и равна 0.

**Теорема:** если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то она достигает любого своего промежуточного значения.

**Доказательство:** пусть  $g(x) = f(x) - \gamma$ , где  $\gamma$  – некое промежуточное значение. Функция  $g(x)$  непрерывна и на концах  $[a; b]$  принимает значения разных знаков, следовательно она достигает 0 в некой точке  $x_0$ .  $f(x_0) = g(x_0) + \gamma = \gamma$ .

## Теорема об обратной функции

### Обратная функция

Пусть  $f(x)$  определена на множестве  $X$ ,  $Y$  – множество ее значений. Если выполняется условие:

$$\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$$

то на  $Y$  существует обратная функция  $f^{-1}(y)$ , каждому  $y \in Y$  сопоставляющая такой  $x \in X$ , что  $y = f(x)$ .

### Теорема об обратной функции

**Лемма:** если  $f(x)$  определена и строго монотонна на  $X$ ,  $Y$  – множество ее значений, тогда на  $Y$  определена и имеет такой же тип сторогой монотонности, что и  $f(x)$ , обратная функция  $f^{-1}(y)$ .

**Доказательство:** так как  $f(x)$  сторогой монотонна:

$$\forall x_1 \neq x_2 \mapsto f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2)$$

Следовательно, на  $Y$  существует обратная функция  $f^{-1}(y)$ . Пусть  $f(x)$  возрастает. Докажем возрастание  $f^{-1}(y)$ :

$$\forall y_1 > y_2 \in Y \mapsto f^{-1}(y_1) = x_1 > x_2 = f^{-1}(y_2)$$

пусть это не так:

$$x_1 \leq x_2$$

$$f(x_1) = y_1 \leq y_2 = f(x_2)$$

противоречие.

**Теорема:** пусть на  $[a; b]$  определена, непрерывна и сторогой монотонна функция  $f(x)$ ,  $\alpha = \inf_{[a; b]} f(x)$ ,  $\beta = \sup_{[a; b]} f(x)$ . Тогда на  $[\alpha; \beta]$  определена, непрерывна и сторогой монотонна в том же направлении, что  $f(x)$ , обратная функция  $f^{-1}(y)$ .

**Доказательство:** существование и строгая монотонность  $f^{-1}(y)$  следует из леммы. Докажем непрерывность обратной функции для возрастающей  $f(x)$ . Для монотонно возрастающей  $f^{-1}(y)$  для всех  $y_0 \in (\alpha; \beta)$  выполняется следующее неравенство:

$$f^{-1}(y_0 - 0) \leq f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y_0 + 0)$$

Пусть разрывна в какой-то точке  $y_0 \in (\alpha; \beta)$ :

$$f^{-1}(y_0 - 0) < f^{-1}(y_0) \vee f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0 + 0)$$

Пусть выполняется левое неравенство  $f^{-1}(y_0 - 0) < f^{-1}(y_0)$ :

$$\forall y \in [\alpha; y_0) \mapsto a \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0 - 0) = \sup_{[\alpha; y_0)} f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)$$

$$\forall y \in [y_0; \beta] \mapsto f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y) = \sup_{[y_0; \beta]} f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)$$

значит  $(f^{-1}(y_0 - 0); f^{-1}(y_0))$  не принадлежит области значений  $f^{-1}(y)$ . Интервал  $(f^{-1}(y_0 - 0); f^{-1}(y_0))$  лежит на отрезке  $[a; b]$ . Следовательно образом  $[\alpha; \beta]$  является множество  $[a; f^{-1}(y_0 - 0)) \cup (f^{-1}(y_0); b]$ ,

что противоречит тому, что образ  $[\alpha; \beta] = [a; b]$ .

К аналогичному противоречию приходим, рассмотрев правое неравенство  $f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0 + 0)$ . Для концов отрезка надо аналогичным образом доказать, что  $f^{-1}(\alpha + 0) = f^{-1}(\alpha)$  и  $f^{-1}(\beta - 0) = f^{-1}(\beta)$ .

## 7

### Второй замечательный предел

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

### Определение и свойства экспоненты, показательной функции, логарифмической и степенной функций

#### Степенная функция с рациональным показателем

Функцию  $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$  где  $x > 0 \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  назовем степенной с рациональным показателем. Если  $p = 0$ , то  $f(x) = 1$ , если  $p < 0$ , то  $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{-p}{q}}}$ .

Свойства степенной функции с рациональным показателем  $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = x^r$ :

- $(\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$
- $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \implies (x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}$
- $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \implies x^{r_1} x^{r_2} = x^{r_1 + r_2}$
- $x > 1, r > 0 \implies x^r > 1$
- $x > 1, r_1 < r_2 \in \mathbb{Q} \implies x^{r_1} < x^{r_2}$

#### Показательная функция

Пусть  $a > 0, x \in \mathbb{R}$ . Последовательность  $\{r_n\}$  сходится к  $x$ . Определим показательную функцию как

$$f(x) = a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$$

Свойства показательной функции  $f(x) = a^x$ :

- $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \implies (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \implies a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
- $a > 1 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
- $0 < a < 1 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

Если  $a = e$ , то  $f(x)$  называется экспоненциальной функцией, или экспонентой.

#### Логарифмическая функция

По теореме об обратной функции, на интервале  $(0; +\infty)$  определена обратная  $f(x) = a^x$  где  $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$  функция  $g(x) = \log_a x$ .

Свойства логарифмической функции:

- $a > 1 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$
- $0 < a < 1 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \wedge \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$

Если  $a = e$ , то  $f(x)$  называется натуральным логарифмом.

## Степенная функция с действительным показателем

Степенную функцию с действительным показателем определим как  $f(x) = x^\beta = (a^{\log_a x})^\beta = a^{\beta \log_a x}$ , где  $x > 0, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, \beta \in \mathbb{R}$ .

## Непрерывность элементарных функций

Элементарные функции непрерывны всюду, где определены.

## Производная функции одной переменной

Производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется следующий предел:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## Односторонние производные

Производные справа и слева определяются соответственно как:

$$f'(x_0 \pm 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## Непрерывность функции, имеющей производную

**Теорема:** если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то она непрерывна в точке  $x_0$

**Доказательство:** пусть  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ :

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = f(x) - f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

## Дифференцируемость функции в точке, дифференциал

Функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , если ее приращение  $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x$ , можно представить в виде  $\Delta f(x_0, \Delta x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ , где  $\alpha(\Delta x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow 0$ .

**Теорема:** понятие дифференцируемости функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  эквивалентно тому, что у функции  $f(x)$  существует производная в точке  $x_0$ .

**Доказательство:** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ :

$$\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = A$$

Пусть у функции  $f(x)$  есть производная в точке  $x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

## Геометрический смысл производной и дифференциала

Значение производной в точке – тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке.

## Производная суммы, произведения и частного двух функций

**Теорема:** пусть у функций  $f(x)$  и  $g(x)$  существуют производные в точке  $x_0$ . Тогда для функций  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x)g(x)$  и  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (если  $g(x_0) \neq 0$ ) существуют производные.

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

**Доказательство:**

Для суммы и разности:

$$\begin{aligned}(f(x) \pm g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x} \\(f(x) \pm g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) - f(x)) \pm (g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x} \\(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x)\end{aligned}$$

Для произведения функций:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\(f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\(f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)(g(x + \Delta x) - g(x)) + (f(x + \Delta x) - f(x))g(x)}{\Delta x} \\(f(x)g(x))' &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\end{aligned}$$

Для отношения функций:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)\Delta x} - \frac{f(x)}{g(x)\Delta x}\right) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x)g(x + \Delta x)\Delta x}\right) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

## Производная сложной функции

**Теорема:** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , функция  $g(y)$  дифференцируема в точке  $y_0 = f(x_0)$ . Тогда производная функции  $h(x) = g(f(x))$  в точке  $x_0$  равна  $h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned}\Delta g(y_0, \Delta y) &= g'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y)\Delta y \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \alpha(\Delta y) &= 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Delta x \rightarrow 0 &\implies \Delta y \rightarrow 0 \\ \frac{\Delta g(y_0, \Delta y)}{\Delta x} &= g'(y_0) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(y_0, \Delta y)}{\Delta x} &= (g(f(x)))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) + 0 = g'(f(x_0))f'(x_0)\end{aligned}$$

## Производная обратной функции

**Теорема:** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и строго монотонна на множестве  $X = x : |x - x_0| \leq \delta$  и в точке  $x_0$  имеет производную  $f'(x_0) \neq 0$ . Тогда обратная функция  $f^{-1}(y)$  в точке  $y_0 = f(x_0)$  имеет производную  $f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

**Доказательство:** Обратная функция  $f^{-1}(y)$  существует по теореме об обратной функции.

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ \Delta x &= f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) \\ \frac{\Delta x}{\Delta y} &= \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \\ \Delta x \rightarrow 0 &\implies \Delta y \rightarrow 0 \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \\ f^{-1}(y_0) &= \frac{1}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

## Производные элементарных функций

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \frac{1 + \Delta x - 1}{\Delta x} = e^x \\ (\ln x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{x \Delta x} = \frac{1}{x} \\ (x^\beta)' &= (e^{\beta \ln x})' = \frac{\beta}{x} e^{\beta \ln x} = \beta x^{\beta-1} \\ (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{\Delta x}{2}) \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \cos x \\ (\cos x)' &= (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \\ (\tan x)' &= (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\ (\arcsin x)' &= (\arcsin(\sin \varphi))' = \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ (\arccos x)' &= (\arcsin(\cos \varphi))' = \frac{-1}{\sin \varphi} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ (\arctan x)' &= (\arctan(\tan \varphi))' = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1}{1 + x^2}\end{aligned}$$

## Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной

### Определение дифференциала

Дифференциалом функции  $f(x)$   $df$  в точке  $x_0$  назовем линейную относительно  $\Delta x$  часть приращения  $\Delta f(x_0, \Delta x)$  функции  $f(x)$ , соответствующую приращению аргумента  $\Delta x$ .

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Дифференциалом независимой переменной  $x$   $dx$  назовем любое число.

$$dx = \Delta x$$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

$$f'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$$

### Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной

Пусть функция  $z = g(y)$  дифференцируемая в точке  $y_0$ :

$$dz = g'(y_0)dy$$

Пусть функция  $g(y)$  дифференцируемая в точке  $y_0 = f(x_0)$ ,  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ :

$$z = h(x) = g(f(x))$$

$$h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$$

$$h'(x_0) = \frac{dz}{dx} = g'(y_0)\frac{dy}{dx}$$

$$dz = g'(y_0)dy$$

Вне зависимости от того, является ли  $y$  независимой переменной или  $y = f(x)$ , дифференциал  $z = g(y)$  всегда имеет один вид  $dz = g'(y_0)dy$ .

## Функции, заданные параметрически, их дифференцирование

### Функции, заданные параметрически

Пусть функции  $x = u(t)$  и  $y = v(t)$  определены на множестве  $T = [\alpha; \beta]$ . Тогда функция  $y = f(x)$  задана параметрически, а  $t$  – параметр.

### Дифференцирование функций, заданных параметрически

**Теорема:** пусть функции  $x = u(t)$  и  $y = v(t)$  непрерывны и строго монотонны на множестве  $T = [\alpha; \beta]$  и дифференцированы в точке  $t_0$ ,  $u'(t_0) \neq 0$ . Тогда  $f'(x_0) = f'(x(t_0)) = \frac{v'(t_0)}{u'(t_0)}$

**Доказательство:** по теореме об обратной функции, существует обратная функция  $t = u^{-1}(x)$ .

$$y = v(t)$$

$$t'(x_0) = \frac{1}{u'(t_0)}$$

$$y(x_0) = v(t(x_0))$$

$$y'(x_0) = v'(t_0)t'(x_0) = \frac{v'(t_0)}{u'(t_0)}$$

## Производные высших порядков

Производная порядка  $n$  функции  $f(x)$  в точке  $x_0$   $f^{(n)}(x_0)$  – производная производной порядка  $n-1$  функции  $f(x)$  в точке  $x_0$   $f^{(n-1)}(x_0)$ .

Функция  $f(x)$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ , если в точке  $x_0$  у нее существует производная порядка  $n$   $f^{(n)}(x_0)$ .

## Формула Лейбница для $n$ -й производной произведения функций

**Теорема:** пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$   $n$  дифференцируемы в точке  $x_0$ . Тогда производная порядка  $n$  их произведения  $f(x)g(x)$  в точке  $x_0$   $(f(x)g(x))^{(n)}(x_0)$  равна  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0)$ .

**Доказательство:** докажем по индукции.

База:  $n = 1$ :

$$(f(x)g(x))'(x_0) = \binom{n}{0}f(x_0)g'(x_0) + \binom{n}{1}f'(x_0)g(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

база верна.

Переход: предположим верно для  $n$ :

$$(f(x)g(x))^{(n)}(x_0) = \binom{n}{0}f(x_0)g^{(n)}(x_0) + \binom{n}{1}f'(x_0)g^{(n-1)}(x_0) + \dots + \binom{n}{n}f^{(n)}(x_0)g(x_0)$$

Проверим для  $n+1$ :

$$(f(x)g(x))^{(n+1)}(x_0) = \binom{n}{0}(f(x)g^{(n)}(x))'(x_0) + \binom{n}{1}(f'(x)g^{(n-1)}(x))'(x_0) + \dots + \binom{n}{n}(f^{(n)}(x)g(x))'(x_0)$$

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))^{(n+1)}(x_0) &= \binom{n}{0}f(x_0)g^{(n+1)}(x_0) + \binom{n}{0}f'(x_0)g^{(n)}(x_0) + \\ &\quad \binom{n}{1}f'(x_0)g^{(n)}(x_0) + \binom{n}{1}f''(x_0)g^{(n-1)}(x_0) + \dots + \\ &\quad \binom{n}{n}(f^{(n)}(x_0)g'(x_0)) + \binom{n}{n}(f^{(n+1)}(x_0)g(x_0))' \end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

$$\binom{n}{n0} = \binom{n+1}{0}$$

$$(f(x)g(x))^{(n+1)}(x_0) = \binom{n+1}{0}f(x_0)g^{(n+1)}(x_0) + \binom{n+1}{1}f'(x_0)g^{(n)}(x_0) + \dots + \binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0)g(x_0)$$

## Дифференциал второго порядка

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в  $\Delta$  окрестности точки  $x_0$  и дважды дифференцируема в точке  $x_0$ . Тогда в  $\Delta$  окрестности точки  $x_0$  определена функция  $dy = f'(x)dx$ . Дифференциал второго порядка функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  – дифференциал ее дифференциала  $dy$  в точке  $x_0$   $d^2f(x_0)$ .

## Отсутствие инвариантности формы дифференциал второго порядка относительно замены переменной

Пусть  $z = g(y)$ . Тогда:

$$dz = g'(y_0)dy$$

$$d(dz)(y_0) = d(g'(y)dy)(y_0) = (d(g'(y))dy + g'(y)d(dy))(y_0) = g''(y_0)(dy)^2 + 0 = g''(y_0)(dy)^2$$

Пусть  $z = g(y)$ ,  $y = f(x)$ . Тогда:

$$dz(y_0) = g'(y_0)dy$$

$$d(dz)(y_0) = d(g'(y)dy)(y_0) = (d(g'(y))dy + g'(y)d(dy))(y_0) = g''(y_0)(dy)^2 + g'(y_0)d^2y$$

Как видно, дифференциал второго порядка не обладает инвариантностью формы.

Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума)

Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши

Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа

Основные разложения по формуле Тейлора

Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$

Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{\infty}{\infty}$