

Экзаменационная программа по курсу «Введение в  
математический анализ», осенний семестр 2020–2021  
учебного года

# 1

## Действительные числа

### Дедекиндовы сечения

Сечение множества рациональных чисел  $\mathbb{Q} (A_*, A^*)$  – разбиение  $\mathbb{Q}$  на два таких непустых множества  $A_*$  и  $A^*$ , таких, что:

- $A_* \cup A^* = \mathbb{Q}$
- $A_* \cap A^* = \emptyset$
- $\forall x \in A_*, \forall y \in A^* \mapsto y > x$

### Иррациональные числа

В сечении вида  $\textcircled{A}$   $A_*$  не имеет наибольшего элемента, а  $A^*$  имеет наименьший. В сечении вида  $\textcircled{B}$   $A_*$  имеет наибольший элемент, а  $A^*$  не имеет наименьшего. В сечении вида  $\textcircled{C}$   $A_*$  не имеет наибольшего элемента, а  $A^*$  не имеет наименьшего. Иррациональным числом называется сечение вида  $\textcircled{C}$ .

### Действительные числа

Действительным числом называется любое сечение множества  $\mathbb{Q}$  вида  $\textcircled{A}$  или  $\textcircled{C}$ .

### Упорядоченность, плотность и непрерывность действительных чисел

Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$   
 $\alpha = \beta$  если  $A_* = B_*$

Предложение:

Если  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$ , то имеет место одно из включений:  $A_* \subset B_*$  либо  $A_* \supset B_*$

Доказательство:

От противного:

Пусть  $A_* \not\subset B_*$  и  $A_* \not\supset B_*$

Тогда  $\exists a \in \mathbb{Q} : a \in A_* \wedge a \notin B_* \implies a \in B^*$  и  $\exists b \in \mathbb{Q} : b \notin A_* \wedge b \in B_* \implies b \in A^*$

так как  $a \neq b$

$a \in A_*, b \in A^* \implies b > a$

$b \in B_*, a \in B^* \implies a > b$

противоречие

Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$   
 $\alpha < \beta$  если  $A_* \neq B_* \wedge A_* \subset B_*$

Упорядоченность  $\mathbb{R}$ :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  имеет место либо  $\alpha = \beta$ , либо  $\alpha < \beta$ , либо  $\alpha > \beta$ .

$\alpha = \beta, \beta = \gamma \implies \alpha = \gamma$

$\alpha < \beta, \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma$

Плотность  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{R}$ :

Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$ , тогда  $\exists c \in \mathbb{Q} : \alpha < c < \beta$

Доказательство:

$\alpha < \beta \implies A_* \subset B_* \implies \exists c \in \mathbb{Q} : c \in B_* \wedge c \notin A_*$ .

Так как в нижнем классе нет наибольшего элемента,  $\alpha \leq c < \beta$ .

Если  $\alpha \in \mathbb{I}$ , то  $c \neq \alpha \implies \alpha < c < \beta$ . Если  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , то можно взять  $c \in B_* : c > \alpha$ .

Сечение множества действительных чисел  $\mathbb{R} (A_*, A^*)$  – разбиение  $\mathbb{Q}$  на два таких непустых множества  $A_*$  и  $A^*$ , таких, что:

- $A_* \cup A^* = \mathbb{R}$

- $\mathcal{A}_* \cap \mathcal{A}^* = \emptyset$
- $\forall x \in \mathcal{A}_*, \forall y \in \mathcal{A}^* \mapsto y > x$

Теорема Дедекинда:

Среди сечений множества  $\mathbb{R}$  сечений вида  $\textcircled{C}$  нет  $\implies$  непрерывность  $\mathbb{R}$ .

### Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу)

Множество  $X$  ограничено сверху, если  $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \mapsto x \leq C$

Число  $M$  называется верхней гранью множества  $X$ , если  $\forall x \in X \mapsto x \leq M$

Число  $\alpha = \sup X$  называется точной верхней гранью множества  $X$ , если  $\forall x \in X \mapsto x \leq \alpha \wedge \forall \alpha' \exists x \in X : x > \alpha'$ .

Лемма: если множество  $X \subset \mathbb{R}$  имеет наибольший элемент  $M = \max X$ , то  $M = \sup X$ .

Доказательство:

Так как  $M$  – наибольший элемент  $X$ , то все остальные элементы  $X$  меньше  $M$  и не являются верхней гранью  $X$ , так как  $M \in X$  и  $M > x$ . Следовательно,  $M$  – точная верхняя грань  $X$ .

Теорема: для ограниченного сверху множества  $X \subset \mathbb{R}$  существует единственная точная верхняя грань.

Доказательство:

Если в  $X$  есть наибольший элемент, то  $\alpha$  равно ему. Если в  $X$  наибольшего элемента нет, то построим сечение  $(\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$ , такое, что в  $\mathcal{A}^*$  содержатся все верхние грани  $X$ , а в  $\mathcal{A}_*$  – все остальные числа, при этом множество  $\mathcal{A}^*$  не пусто, так как  $X$  ограничено сверху, а  $X \subset \mathcal{A}_*$ , так как если элемент из  $X \in \mathcal{A}^*$ , то он является максимальным. По теореме Дедекинда, если либо больший элемент в  $\mathcal{A}_*$ , либо меньший в  $\mathcal{A}^*$ . Если в  $\mathcal{A}_*$  есть наибольший элемент, то он является верхней гранью  $X$  – противоречие. Следовательно есть наименьший элемент в  $\mathcal{A}^*$ , который по определению является точной верхней гранью  $X$ .

Теперь докажем единственность точной верхней грани. Пусть  $\alpha, \alpha'$  – точные верхние грани множества  $X$ ,  $\alpha' < \alpha$ . Так как  $\alpha$  – точная верхняя грань,  $\forall \beta < \alpha \exists x \in X : x > \beta \implies \exists x' \in X : x' > \alpha' \implies \alpha' \neq \sup X$ .

### Счетность множества рациональных чисел

Докажем счетность множества положительных рациональных чисел.

Пусть  $H \geq 2 \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим все взаимно простые пары чисел  $p, q \in \mathbb{N}$ , такие что  $p + q = H$ , и соответствующие им рациональные числа. Понятно, что таких пар конечное число, и таким образом представляется любое рациональное число.

Теперь расставим соответствующие каждому  $H$  рациональные числа по порядку и пронумеруем их:

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots$

Так как множество положительных рациональных чисел счетно, то и аналогичным образом счетно множество отрицательных рациональных чисел, а их объединение в объединении вместе с конечным множеством, состоящим из 0, так же счетно и является  $\mathbb{R}$ .

### Несчетность множества действительных чисел

Если подмножество множества несчетно, то и само оно несчетно.

Рассмотрим числа на интервале  $(0; 1)$ , представленные в виде десятичных дробей:

$\alpha_1 = 0, a_1^1 a_2^1 \dots a_n^1 \dots$

$\alpha_2 = 0, a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 \dots$

...

$\alpha_k = 0, a_1^k a_2^k \dots a_n^k \dots$

...

Допустим, что подмножество  $(0; 1)$  счетно.

Построим число  $\gamma$  такое, что  $\gamma = 0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$ ;  $c_i \neq a_i^i, c_i \neq 9$ .  $\gamma$  не равно ни одному из  $a_i$ , что противоречит тому, что  $(0; 1)$  счетно. Следовательно, само множество действительных чисел также счетно.

