Экзаменационная программа по курсу «Введение в математический анализ», осенний семестр 2020–2021 учебного года

1

Действительные числа

Дедекиндовы сечения

Сечение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (A_*, A^*) – разбиение $\mathbb{Q}$ на два таких непустых множества A_* и A^*, таких, что:

- $A_* \cup A^* = \mathbb{Q}$
- $A_* \cap A^* = \emptyset$
- $\forall x \in A_*, \forall y \in A^* \longmapsto y > x$

Иррациональные числа

В сечении вида (A) A_* не имеет наибольшего элемента, а A^* имеет наименьший. В сечении вида (B) A_* имеет наибольший элемент, а A^* не имеет наименьшего. В сечении вида (C) A_* не имеет наибольшего элемента, а A^* не имеет наименьшего.
Иррациональным числом называется сечение вида (C).

Действительные числа

Действительным числом называется любое сечение множества $\mathbb{Q}$ вида (A) или (C).

Упорядоченность, плотность и непрерывность действительных чисел

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$
$\alpha = \beta$ если $A_* = B_*$

Предложение:
Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$, то имеет место одно из включений: $A_* \subset B_*$ либо $A_* \supset B_*$
Доказательство:
От противного:
Пусть $A_* \not\subset B_*$ и $A_* \not\supset B_*$
Тогда $\exists a \in \mathbb{Q} : a \in A_* \wedge a \notin B_* \implies a \in B^*$ и $\exists b \in \mathbb{Q} : b \notin A_* \wedge b \in B_* \implies b \in A^*$
так как $a \neq b$
$a \in A_*, b \in A^* \implies b > a$
$b \in B_*, a \in B^* \implies a > b$
противоречие

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$
$\alpha < \beta$ если $A_* \neq B_* \wedge A_* \subset B_*$

Упорядоченность $\mathbb{R}$:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha > \beta$.
$\alpha = \beta, \beta = \gamma \implies \alpha = \gamma$
$\alpha < \beta, \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma$

Плотность $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$:
Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, тогда $\exists c \in \mathbb{Q} : \alpha < c < \beta$
Доказательство:
$\alpha < \beta \implies A_* \subset B_* \implies \exists c \in \mathbb{Q} : c \in B_* \wedge c \notin A_*$.
Так как в нижнем классе нет наибольшего элемента, $\alpha \leq c < \beta$.
Если $\alpha \in \mathbb{I}$, то $c \neq \alpha \implies \alpha < c < \beta$. Если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то можно взять $c \in B_* : c > \alpha$.

Сечение множества действительных чисел $\mathbb{R}$ $(\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$ – разбиение $\mathbb{Q}$ на два таких непустых множества $\mathcal{A}_*$ и $\mathcal{A}^*$, таких, что:

- $\mathcal{A}_* \cup \mathcal{A}^* = \mathbb{R}$

- $\mathcal{A}_* \cap \mathcal{A}^* = \emptyset$

- $\forall x \in \mathcal{A}_*, \forall y \in \mathcal{A}^* \longmapsto y > x$

Теорема Дедекинда:
Среди сечений множества $\mathbb{R}$ сечений вида Ⓒ нет $\implies$ непрерывность $\mathbb{R}$.

Десятичные дроби

Пусть числу $\alpha \in \mathbb{R}$ соответствует сечение $(\mathcal{A}_*; \mathcal{A}^*)$. За a_0 обозначим наибольшее целое число из $\mathcal{A}_*$. Отрезок $[a_0; a_0+1]$ поделим на 10 отрезков одинаковой длины и выберем среди них тот, который содержит α: $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10}; a_0 + \frac{a_1+1}{10}]$. На шаге n $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10}; a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n+1}{10}]$. Бесконечную десятичную дробь $a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ можно считать представлением действительного числа α. Заметим, что если α можно представить как $\frac{p}{10^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, (то есть α – сократимая десятичная дробь) то α соответствуют две десятичные дроби: $a_0, a_1 a_2 ... a_n 000...$ и $a_0, a_1 a_2 ...(a_n - 1)999...$.

Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу)

Множество X ограничено сверху, если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \longmapsto x \leq C$

Число M называется верхней гранью множества X, если $\forall x \in X \longmapsto x \leq M$

Число $\alpha = \sup X$ называется точной верхней гранью множества X, если $\forall x \in X \longmapsto x \leq \alpha \wedge \forall \alpha' \exists x \in X : x > \alpha'$.

Лемма: если множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент $M = \max X$, то $M = \sup X$.
Доказательство:
Так как M – наибольший элемент X, то все остальные элементы X меньше M и не являются верхней гранью X, так как $M \in X$ и $M > x$. Следовательно, M – точная верхняя грань X.

Теорема: для ограниченного сверху множества $X \subset \mathbb{R}$ существует единственная точная верхняя грань.
Доказательство:
Если в X есть наибольший элемент, то α равно ему. Есть в X наибольшего элемента нет, то построим сечение $(\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$, такое, что в $\mathcal{A}^*$ содержатся все верхние грани X, а в $\mathcal{A}_*$ – все остальные числа, при этом множество $\mathcal{A}^*$ не пусто, так как X ограничено сверху, а $X \subset \mathcal{A}_*$, так как если элемент из $X \in \mathcal{A}^*$, то он является максимальным. По теореме Дедекинда, если либо больший элемент в $\mathcal{A}_*$, либо меньший в $\mathcal{A}^*$. Если в $\mathcal{A}_*$ есть наибольший элемент, то он является верхней гранью X – противоречие. Следовательно есть наименьший элемент в $\mathcal{A}^*$, который по определению является точной верхней гранью X.
Теперь докажем единственность точной верхней грани. Пусть α, α' – точные верхние грани множества X, $\alpha' < \alpha$. Так как α – точная верхняя грань, $\forall \beta < \alpha \exists x \in X : x > \beta \implies \exists x' \in X : x' > \alpha' \implies \alpha' \neq \sup X$.

Счетность множества рациональных чисел

Докажем счетность множества полжительных рациональных чисел.
Пусть $H \geq 2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим все взаимно простые пары чисел $p, q \in N$, такие что $p + q = H$, и соответствующие им рациональные числа. Понятно, что таких пар конечное число, и таким образом представляется любое рациональное число.
Теперь расставим соответствующие каждому H рациональные числа по порядку и пронумеруем их:
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, ...$
Так как множество положительных рациональных чисел счетно, то и аналогичным образом счетно множество отрицательных рациональных чисел, а их объединение в объединении вместе с конечным множетсвом, состоящим из 0, так же счетно и является $\mathbb{R}$.

Несчетность множества действительных чисел

Если подмножество множества несчетно, то и само оно несчетно.
Рассмотрим числа на интервале $(0;1)$, представленные в виде десятичных дробей:
$\alpha_1 = 0, a_1^1 a_2^1 ... a_n^1 ...$
$\alpha_2 = 0, a_1^2 a_2^2 ... a_n^2 ...$
...
$\alpha_k = 0, a_1^k a_2^k ... a_n^k ...$
...
Допустим, что подмножество $(0;1)$ счетно.
Построим число γ такое, что $\gamma = 0, c_1 c_2 ... c_n ...; \ c_i \neq a_i^i, c_i \neq 9$. γ не равно ни одному из a_i, что противоречит тому, что $(0;1)$ счетно. Следовательно, само множество действительных чисел также счетно.

2