

Экзаменационная программа по курсу «Введение в  
математический анализ», осенний семестр 2020–2021  
учебного года

## Содержание

<b>1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>10</b>

# 1

## Действительные числа

### Дедекиндовы сечения

Сечение множества рациональных чисел  $\mathbb{Q} (A_*, A^*)$  – разбиение  $\mathbb{Q}$  на два таких непустых множества  $A_*$  и  $A^*$ , таких, что:

- $A_* \cup A^* = \mathbb{Q}$
- $A_* \cap A^* = \emptyset$
- $\forall x \in A_*, \forall y \in A^* \mapsto y > x$

### Иррациональные числа

В сечении вида  $\textcircled{A}$   $A_*$  не имеет наибольшего элемента, а  $A^*$  имеет наименьший. В сечении вида  $\textcircled{B}$   $A_*$  имеет наибольший элемент, а  $A^*$  не имеет наименьшего. В сечении вида  $\textcircled{C}$   $A_*$  не имеет наибольшего элемента, а  $A^*$  не имеет наименьшего.

Иррациональным числом называется сечение вида  $\textcircled{C}$ .

### Действительные числа

Действительным числом называется любое сечение множества  $\mathbb{Q}$  вида  $\textcircled{A}$  или  $\textcircled{C}$ .

### Упорядоченность, плотность и непрерывность действительных чисел

Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$

$\alpha = \beta$  если  $A_* = B_*$

Предложение:

Если  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$ , то имеет место одно из включений:  $A_* \subset B_*$  либо  $A_* \supset B_*$

**Доказательство:** пусть  $A_* \not\subset B_*$  и  $A_* \not\supset B_*$

Тогда  $\exists a \in \mathbb{Q} : a \in A_* \wedge a \notin B_* \implies a \in B^*$  и  $\exists b \in \mathbb{Q} : b \notin A_* \wedge b \in B_* \implies b \in A^*$

так как  $a \neq b$

$a \in A_*, b \in A^* \implies b > a$

$b \in B_*, a \in B^* \implies a > b$

противоречие

Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$

$\alpha < \beta$  если  $A_* \neq B_* \wedge A_* \subset B_*$

Упорядоченность  $\mathbb{R}$ :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  имеет место либо  $\alpha = \beta$ , либо  $\alpha < \beta$ , либо  $\alpha > \beta$ .

$\alpha = \beta, \beta = \gamma \implies \alpha = \gamma$

$\alpha < \beta, \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma$

Плотность  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{R}$ :

Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$ , тогда  $\exists c \in \mathbb{Q} : \alpha < c < \beta$

**Доказательство:**  $\alpha < \beta \implies A_* \subset B_* \implies \exists c \in \mathbb{Q} : c \in B_* \wedge c \notin A_*$ .

Так как в нижнем классе нет наибольшего элемента,  $\alpha \leq c < \beta$ .

Если  $\alpha \in \mathbb{I}$ , то  $c \neq \alpha \implies \alpha < c < \beta$ . Если  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , то можно взять  $c \in B_* : c > \alpha$ .

Сечение множества действительных чисел  $\mathbb{R} (\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$  – разбиение  $\mathbb{Q}$  на два таких непустых множества  $\mathcal{A}_*$  и  $\mathcal{A}^*$ , таких, что:

- $\mathcal{A}_* \cup \mathcal{A}^* = \mathbb{R}$
- $\mathcal{A}_* \cap \mathcal{A}^* = \emptyset$
- $\forall x \in \mathcal{A}_*, \forall y \in \mathcal{A}^* \implies y > x$

Теорема Дедекинда:

Среди сечений множества  $\mathbb{R}$  сечений вида  $\textcircled{C}$  нет  $\implies$  непрерывность  $\mathbb{R}$ .

### Десятичные дроби

Пусть числу  $\alpha \in \mathbb{R}$  соответствует сечение  $(\mathcal{A}_*; \mathcal{A}^*)$ . За  $a_0$  обозначим наибольшее целое число из  $\mathcal{A}_*$ . Отрезок  $[a_0; a_0 + 1]$  поделим на 10 отрезков одинаковой длины и выберем среди них тот, который содержит  $\alpha$ :  $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10}; a_0 + \frac{a_1+1}{10}]$ . На шаге  $n$   $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}; a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n+1}{10^n}]$ . Бесконечную десятичную дробь  $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  можно считать представлением действительного числа  $\alpha$ . Заметим, что если  $\alpha$  можно представить как  $\frac{p}{10^n}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , (то есть  $\alpha$  – сократимая десятичная дробь) то  $\alpha$  соответствуют две десятичные дроби:  $a_0, a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots$  и  $a_0, a_1 a_2 \dots (a_n - 1) 999 \dots$ .

### Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу)

Множество  $X$  ограничено сверху, если  $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \implies x \leq C$

Число  $M$  называется верхней гранью множества  $X$ , если  $\forall x \in X \implies x \leq M$

Число  $\alpha = \sup X$  называется точной верхней гранью множества  $X$ , если  $\forall x \in X \implies x \leq \alpha \wedge \forall \alpha' \exists x \in X : x > \alpha'$ .

**Лемма:** если множество  $X \subset \mathbb{R}$  имеет наибольший элемент  $M = \max X$ , то  $M = \sup X$ .

**Доказательство:** так как  $M$  – наибольший элемент  $X$ , то все остальные элементы  $X$  меньше  $M$  и не являются верхней гранью  $X$ , так как  $M \in X$  и  $M > x$ . Следовательно,  $M$  – точная верхняя грань  $X$ .

**Теорема:** для ограниченного сверху множества  $X \subset \mathbb{R}$  существует единственная точная верхняя грань.

**Доказательство:** если в  $X$  есть наибольший элемент, то  $\alpha$  равно ему. Если в  $X$  наибольшего элемента нет, то построим сечение  $(\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$ , такое, что в  $\mathcal{A}^*$  содержатся все верхние грани  $X$ , а в  $\mathcal{A}_*$  – все остальные числа, при этом множество  $\mathcal{A}^*$  не пусто, так как  $X$  ограничено сверху, а  $X \subset \mathcal{A}_*$ , так как если элемент из  $X \in \mathcal{A}^*$ , то он является максимальным. По теореме Дедекинда, если либо больший элемент в  $\mathcal{A}_*$ , либо меньший в  $\mathcal{A}^*$ . Если в  $\mathcal{A}_*$  есть наибольший элемент, то он является верхней гранью  $X$  – противоречие. Следовательно есть наименьший элемент в  $\mathcal{A}^*$ , который по определению является точной верхней гранью  $X$ .

Теперь докажем единственность точной верхней грани. Пусть  $\alpha, \alpha'$  – точные верхние грани множества  $X$ ,  $\alpha' < \alpha$ . Так как  $\alpha$  – точная верхняя грань,  $\forall \beta < \alpha \exists x \in X : x > \beta \implies \exists x' \in X : x' > \alpha' \implies \alpha' \neq \sup X$ .

## Счетность множества рациональных чисел

Докажем счетность множества положительных рациональных чисел.

Пусть  $H \geq 2 \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим все взаимно простые пары чисел  $p, q \in \mathbb{N}$ , такие что  $p + q = H$ , и соответствующие им рациональные числа. Понятно, что таких пар конечное число, и таким образом представляется любое рациональное число.

Теперь расставим соответствующие каждому  $H$  рациональные числа по порядку и пронумеруем их:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots$$

Так как множество положительных рациональных чисел счетно, то и аналогичным образом счетно множество отрицательных рациональных чисел, а их объединение в объединении вместе с конечным множеством, состоящим из 0, так же счетно и является  $\mathbb{R}$ .

## Несчетность множества действительных чисел

Если подмножество множества несчетно, то и само оно несчетно.

Рассмотрим числа на интервале  $(0; 1)$ , представленные в виде десятичных дробей:

$$\alpha_1 = 0, a_1^1 a_2^1 \dots a_n^1 \dots$$

$$\alpha_2 = 0, a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 \dots$$

...

$$\alpha_k = 0, a_1^k a_2^k \dots a_n^k \dots$$

...

Допустим, что подмножество  $(0; 1)$  счетно.

Построим число  $\gamma$  такое, что  $\gamma = 0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$ ;  $c_i \neq a_i^i, c_i \neq 9$ .  $\gamma$  не равно ни одному из  $a_i$ , что противоречит тому, что  $(0; 1)$  счетно. Следовательно, само множество действительных чисел также счетно.

## 2

### Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно большой, если:

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| > M$$

Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно малой, если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| < \epsilon$$

**Теорема:** сумма двух бесконечно малых последовательностей также является бесконечно малой.

**Доказательство:** пусть последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  – бесконечно малые:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_x = N_x(\epsilon) : \forall n \geq N_x \mapsto |x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_y = N_y(\epsilon) : \forall n \geq N_y \mapsto |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_x(\epsilon), N_y(\epsilon)) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

следовательно,  $\{x_n\} + \{y_n\}$  – также бесконечно малая последовательность.

**Теорема:** бесконечно малая последовательность ограничена.

**Доказательство:** пусть последовательность  $\{x_n\}$  – бесконечно малая:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| < \epsilon$$

Возьмем произвольное  $\epsilon_0$ . Тогда  $\forall n \geq N(\epsilon_0) \mapsto |x_n| < \epsilon_0$ . Выберем среди первых  $N(\epsilon_0)$  членов последовательности максимальный по модулю и обозначим его модуль за  $\epsilon_1$ . Тогда  $\forall x : 1 \leq x \leq N(\epsilon_0) \mapsto |x_n| \leq \epsilon_1$ . Следовательно,  $\forall n \in \mathbb{N} \mapsto |x_n| \leq \epsilon = \max(\epsilon_0, \epsilon_1) \implies \{x_n\}$  ограничена.

**Теорема:** произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей – бесконечно малая последовательность.

**Доказательство:** пусть  $\{x_n\}$  – ограниченная последовательность,  $\{y_n\}$  – бесконечно малая:

$$\exists C > 0 : \forall n \mapsto |x_n| \leq C$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |y_n| < \frac{\epsilon}{C}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n y_n| \leq C |y_n| < \epsilon$$

**Теорема:** произведение двух бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая последовательность.

**Доказательство:** Любая бесконечно малая последовательность ограничена, следовательно про-

изведение двух бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая, как и произведение бесконечно малой и ограниченной.

**Теорема:** если все члены бесконечно малой последовательности с какого-то номера равны  $\gamma$ , то  $\gamma = 0$ .

**Доказательство:** пусть  $\gamma \neq 0$ . Последовательность  $\{x_n\}$  бесконечно мала, возьмем  $\epsilon_0 = |\gamma|$  и проверим для него условие:

$$\exists N = N(\gamma) : \forall n \geq N \mapsto |\gamma| < |\gamma|$$

получается противоречие.

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  – бесконечно большая, то с какого-то номера определена бесконечно малая последовательность  $\{y_n\} = \{\frac{1}{x_n}\}$ .

**Доказательство:** так как  $\{x_n\}$  – бесконечно большая:

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| > \frac{1}{M} \implies \frac{1}{|x_n|} < M$$

Следовательно  $\{y_n\}$  – бесконечно малая.

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  – ограниченная, а  $\{y_n\}$  – бесконечно большая, то с какого-то номера определена бесконечно малая последовательность  $\{z_n\} = \{\frac{x_n}{y_n}\}$ .

**Доказательство:** так как  $\{y_n\}$  – бесконечно большая,  $\{y'_n\}$ , где  $y'_n = \frac{1}{y_n}$ , – бесконечно малая. Тогда  $\{z_n\}$  – бесконечно малая как произведение бесконечно малой и ограниченной.

**Теорема:** если последовательность  $\{|x_n|\}$  ограничена снизу  $c > 0$ , а  $\{y_n\}$  – бесконечно малая и  $y_n \neq 0 \forall n$ , то  $\{z_n\} = \{\frac{x_n}{y_n}\}$  – бесконечно большая.

**Доказательство:** так как  $\{y_n\}$  – бесконечно малая:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |y_n| < \frac{1}{\epsilon} \implies \frac{1}{|y_n|} > \epsilon$$

Следовательно  $\{y_n\}$  – бесконечно большая.  $|x_n y_n| > C |y_n| > \epsilon$ , следовательно  $\{z_n\}$  – бесконечно большая.

## Предел числовой последовательности

Последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ , если последовательность  $\{y_n\}$ , где  $y_n = x_n - a$ , бесконечно мала.

Число  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n - a| < \epsilon$$

## Единственность предела

**Доказательство:** пусть  $a_1$  – предел последовательности  $\{x_n\}$  и  $a_2$  – предел  $\{x_n\}$ . Тогда:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\epsilon) : \forall n \geq N_1 \mapsto |x_n - a_1| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\epsilon) : \forall n \geq N_2 \mapsto |x_n - a_2| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)) : \forall n \geq N \mapsto x_n \in (a_1 - \epsilon; a_1 + \epsilon) \cap (a_2 - \epsilon; a_2 + \epsilon)$$

При  $\epsilon \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$   $(a_1 - \epsilon; a_1 + \epsilon) \cap (a_2 - \epsilon; a_2 + \epsilon) = \emptyset$  – противоречие.

## Арифметические операции со сходящимися последовательностями

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ , а  $\{y_n\}$  – к  $b$ , то их сумма  $\{z_n\} = \{x_n\} + \{y_n\}$  сходится к  $a + b$ .

**Доказательство:**  $x_n = a_n + a$ ,  $y_n = b_n + b$ , где  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  – бесконечно малые последовательности. Последовательность  $\{c_n\}$ , где  $c_n = x_n - a + y_n - b = a_n + b_n$ , – бесконечно мала, следовательно  $a + b$  – предел  $\{z_n\}$

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ , а  $\{y_n\}$  – к  $b$ , то их произведение  $\{z_n\} = \{x_n\} \cdot \{y_n\}$  сходится к  $ab$ .

**Доказательство:**  $x_n = a_n + a$ ,  $y_n = b_n + b$ , где  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  – бесконечно малые последовательности. Последовательность  $\{c_n\}$ , где  $c_n = x_n y_n - ab = (a_n + a)(b_n + b) - ab = a_n b_n + ba_n + ab_n$ , – бесконечно мала, следовательно  $ab$  – предел  $\{z_n\}$

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ , а  $\{y_n\}$  – к  $b \neq 0$ , то с какого-то номера определена последовательность их частного  $\{z_n\} = \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}$ , которая сходится к  $\frac{a}{b}$ .

**Доказательство:**  $x_n = a_n + a$ ,  $y_n = b_n + b$ , где  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  – бесконечно малые последовательности. Докажем сначала существование  $\{z_n\}$ . Пусть  $\epsilon_0 = \frac{|b|}{2}$ .

$$\exists N = N(\epsilon_0) : \forall n \geq N \mapsto |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

$$\frac{|b|}{2} < y_n < \frac{3|b|}{2}$$

$$\frac{1}{y_n} < \frac{2}{|b|}$$

Видно, что  $\{y_n\}$  с  $N(\epsilon_0)$  не равна 0, и что последовательность  $\{\frac{1}{y_n}\}$  ограничена.

Последовательность  $\{c_n\}$ , где  $c_n = \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n + a}{b_n + b} - \frac{a}{b} = \frac{ba_n + ab - ab - ab_n}{b(b_n + b)} = \frac{1}{b_n + b}(a_n - \frac{a}{b}b_n)$ , – бесконечно мала как произведение ограниченной и бесконечно малой, следовательно  $\frac{a}{b}$  – предел  $\{z_n\}$

## Свойства пределов, связанные с неравенствами

**Теорема:** Если для последовательности  $\{x_n\}$   $\exists n_0 \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R} : \forall n \geq n_0 \mapsto x_n \geq b \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то  $a \geq b$ .

**Доказательство:** Пусть  $a < b$ :

$$\epsilon_0 = b - a$$

$$\exists n_1 = n_1(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_1 \mapsto |x_n - a| < b - a$$

$$x_n - a < b - a$$

$$x_n < b$$

что противоречит тому, что  $x_n \geq b$

**Теорема:** Если для последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$   $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \mapsto x_n \geq y_n \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то  $a \geq b$ .



**Доказательство:** Пусть  $a < b$ :

$$\epsilon_0 = \frac{b-a}{2}$$

$$\exists n_1 = n_1(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_1 \mapsto |x_n - a| < \frac{b-a}{2}$$

$$\exists n_2 = n_2(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_2 \mapsto |y_n - b| < \frac{b-a}{2}$$

$$x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} < y_n$$

$$x_n < y_n$$

что противоречит тому, что  $x_n \geq y_n$

**Теорема:** Если для последовательностей  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  и  $\{z_n\}$  то  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .  $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \mapsto \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ ,

**Доказательство:**

$$x_n - a \geq y_n - a \geq z_n - a$$

$$|y_n - a| \leq \max(|x_n - a|, |z_n - a|)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\epsilon_0) : \forall n \geq N_1 \mapsto |x_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\epsilon_0) : \forall n \geq N_2 \mapsto |z_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\epsilon_0), N_2(\epsilon_0)) : \forall n \geq N \mapsto |y_n - a| < \epsilon$$

## Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

**Теорема:** Если последовательность  $\{x_n\}$  ограничена и монотонна, то она сходится к своей точной верхней грани (если она неубывает или возрастает), или к своей точной нижней грани (если она невозрастает или убывает).

**Доказательство:** пусть  $\{x_n\}$  возрастает.

$$a = \sup\{x_n\} \implies \forall \epsilon \exists N = N(\epsilon) : x_N > a - \epsilon$$

$$0 \leq a - x_N < \epsilon$$

так как  $\{x_n\}$  возрастает

$$\forall n > N \mapsto x_n > x_N \implies 0 \leq a - x_n < a - x_N < \epsilon$$

следовательно  $\{x_n\}$  сходится к  $a = \sup\{x_n\}$ .

## Теорема Кантора о вложенных отрезках

Системой стягивающихся отрезков называют последовательность  $\{[a_n; b_n]\}$ , если:

- $\forall n \mapsto [a_{n+1}; b_{n+1}] \subseteq [a_n; b_n]$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

**Теорема:** система стягивающихся отрезков имеет единственную точку, принадлежащую им всем.

**Доказательство:**  $\{a_n\}, \{b_n\}$  ограничены и монотонны, следовательно  $\exists c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$ .

Пусть  $\exists c' > c : c' \in [a_n; b_n] \forall n$ . Тогда  $\forall n b_n - a_n \geq c' - c > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) > 0$ , что противоречит тому, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ .

## Число $e$

**Теорема:** число  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

**Доказательство:**

$$x_n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!} \frac{1}{n^n}$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$x_{n+1} > x_n$$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Последовательность монотонно возрастает и ограничена, следовательно  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = e$ .

### 3

## Подпоследовательности, частичные пределы

### Подпоследовательности

Пусть  $\{x_n\}$  – произвольная последовательность,  $\{k_n\}$  – возрастающая последовательность из натуральных чисел. Тогда  $\{x_{k_n}\}$  называется подпоследовательностью  $\{x_n\}$ .

### Частичные пределы

Если  $\{x_{k_n}\}$  сходится к  $a$ , то  $a$  – частичный предел  $\{x_n\}$ .

## Теорема Больцано-Вейерштрасса

**Теорема:** если последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, то у нее есть сходящаяся последовательность  $\{x_{k_n}\}$ .

**Доказательство:** Так как  $\{x_n\}$  ограничена,  $\exists \alpha, \beta : \alpha \leq x_n \leq \beta \forall n$ . На отрезке  $[\alpha; \beta]$  лежит бесконечное количество членов последовательности. Выберем такой отрезок  $[\alpha_1; \beta_1]$ , на котором лежит бесконечное количество членов последовательности и для которого  $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta - \alpha}{2}$ . На шаге  $n$  имеем  $\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}}{2}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b - a) \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma$$

Выберем  $x_{k_1}$  такое, что  $x_{k_1} \in [a_1; b_1]$ . Выберем  $x_{k_2}$  такое, что  $x_{k_2} \in [a_2; b_2]$  и  $k_2 > k_1$ . Такое  $k_2$  существует, потому что если не учитывать все элементы последовательности, чей номер меньше или равен  $k_1$ , на  $[a_2; b_2]$  все равно лежит бесконечное количество членов  $\{x_n\}$ . На шаге  $n$  выбираем  $x_{k_n}$  такое, что  $x_{k_n} \in [a_n; b_n]$  и  $k_n > k_{n-1}$ .

$$a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = \gamma$$

## Критерий Коши существования конечного предела последовательности

### Фундаментальная последовательность

Если для последовательности  $\{x_n\}$  выполняется следующее условие:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n, m \geq N \implies |x_n - x_m| < \epsilon$$

то она называется фундаментальной.

### Критерий Коши

**Теорема:** чтобы у последовательности  $\{x_n\}$  существовал конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

### Доказательство:

Необходимость: пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Тогда:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n, m \geq N \implies |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\frac{-\epsilon}{2} < x_n - a < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\frac{-\epsilon}{2} < a - x_m < \frac{\epsilon}{2}$$

$$-\epsilon < x_n - x_m < \epsilon$$

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

следовательно,  $\{x_n\}$  – фундаментальная.

Достаточность: если  $\{x_n\}$  фундаментальная, то она ограничена, следовательно у нее есть подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$ , сходящаяся к  $a$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\epsilon) : \forall n \geq N_1 \mapsto |x_{k_n} - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

Так как  $\{x_n\}$  фундаментальная:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\epsilon) : \forall n, m \geq N_2 \mapsto |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)) : \forall n \geq N \mapsto |x_n - a| = |x_n - x_{k_N} + x_{k_N} - a| \leq |x_n - x_{k_N}| + |x_{k_N} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

следовательно,  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ .