Экзаменационная программа по курсу «Введение в математический анализ», осенний семестр 2020–2021 учебного года

Содержание

1

Действительные числа

Дедекиндовы сечения

Сечение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (A_*, A^*) – разбиение $\mathbb{Q}$ на два таких непустых множества A_* и A^*, таких, что:

- $A_* \cup A^* = \mathbb{Q}$
- $A_* \cap A^* = \varnothing$
- $\forall x \in A_*, \forall y \in A^* \longmapsto y > x$

Иррациональные числа

В сечении вида Ⓐ A_* не имеет наибольшего элемента, а A^* имеет наименьший. В сечении вида Ⓑ A_* имеет наибольший элемент, а A^* не имеет наименьшего. В сечении вида Ⓒ A_* не имеет наибольшего элемента, а A^* не имеет наименьшего.
Иррациональным числом называется сечение вида Ⓒ.

Действительные числа

Действительным числом называется любое сечение множества $\mathbb{Q}$ вида Ⓐ или Ⓒ.

Упорядоченность, плотность и непрерывность действительных чисел

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$
$\alpha = \beta$ если $A_* = B_*$

Предложение:
Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$, то имеет место одно из включений: $A_* \subset B_*$ либо $A_* \supset B_*$
Доказательство: пусть $A_* \not\subset B_*$ и $A_* \not\supset B_*$
Тогда $\exists a \in \mathbb{Q} : a \in A_* \wedge a \notin B_* \implies a \in B^*$ и $\exists b \in \mathbb{Q} : b \notin A_* \wedge b \in B_* \implies b \in A^*$
так как $a \neq b$
$a \in A_*, b \in A^* \implies b > a$
$b \in B_*, a \in B^* \implies a > b$
противоречие

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$
$\alpha < \beta$ если $A_* \neq B_* \wedge A_* \subset B_*$

Упорядоченность $\mathbb{R}$:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha > \beta$.
$\alpha = \beta, \beta = \gamma \implies \alpha = \gamma$
$\alpha < \beta, \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma$

Плотность $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$:
Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, тогда $\exists c \in \mathbb{Q} : \alpha < c < \beta$
Доказательство: $\alpha < \beta \implies A_* \subset B_* \implies \exists c \in \mathbb{Q} : c \in B_* \wedge c \notin A_*$.

Так как в нижнем классе нет наибольшего элемента, $\alpha \le c < \beta$.
Если $\alpha \in \mathbb{I}$, то $c \ne \alpha \implies \alpha < c < \beta$. Если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то можно взять $c \in B_* : c > \alpha$.

Сечение множества действительных чисел $\mathbb{R}$ $(\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$ – разбиение $\mathbb{Q}$ на два таких непустых множества $\mathcal{A}_*$ и $\mathcal{A}^*$, таких, что:

- $\mathcal{A}_* \cup \mathcal{A}^* = \mathbb{R}$
- $\mathcal{A}_* \cap \mathcal{A}^* = \varnothing$
- $\forall x \in \mathcal{A}_*, \forall y \in \mathcal{A}^* \longmapsto y > x$

Теорема Дедекинда:
Среди сечений множества $\mathbb{R}$ сечений вида C нет $\implies$ непрерывность $\mathbb{R}$.

Десятичные дроби

Пусть числу $\alpha \in \mathbb{R}$ соответствует сечение $(\mathcal{A}_*; \mathcal{A}^*)$. За a_0 обозначим наибольшее целое число из $\mathcal{A}_*$. Отрезок $[a_0; a_0 + 1]$ поделим на 10 отрезков одинаковой длины и выберем среди них тот, который содержит α: $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10}; a_0 + \frac{a_1+1}{10}]$. На шаге n $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10}; a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n+1}{10}]$. Бесконечную десятичную дробь $a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ можно считать представлением действительного числа α. Заметим, что если α можно представить как $\frac{p}{10^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, (то есть α – сократимая десятичная дробь) то α соответствуют две десятичные дроби: $a_0, a_1 a_2 ... a_n 000...$ и $a_0, a_1 a_2 ... (a_n - 1) 999...$.

Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу)

Множество X ограничено сверху, если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \longmapsto x \le C$

Число M называется верхней гранью множества X, если $\forall x \in X \longmapsto x \le M$

Число $\alpha = \sup X$ называется точной верхней гранью множества X, если $\forall x \in X \longmapsto x \le \alpha \land \forall \alpha' \exists x \in X : x > \alpha'$.

Лемма: если множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент $M = \max X$, то $M = \sup X$.
Доказательство: так как M – наибольший элемент X, то все остальные элементы X меньше M и не являются верхней гранью X, так как $M \in X$ и $M > x$. Следовательно, M – точная верхняя грань X.

Теорема: для ограниченного сверху множества $X \subset \mathbb{R}$ существует единственная точная верхняя грань.
Доказательство: если в X есть наибольший элемент, то α равно ему. Есть в X наибольшего элемента нет, то построим сечение $(\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$, такое, что в $\mathcal{A}^*$ содержатся все верхние грани X, а в $\mathcal{A}_*$ – все остальные числа, при этом множество $\mathcal{A}^*$ не пусто, так как X ограничено сверху, а $X \subset \mathcal{A}_*$, так как если элемент из $X \in \mathcal{A}^*$, то он является максимальным. По теореме Дедекинда, если либо больший элемент в $\mathcal{A}_*$, либо меньший в $\mathcal{A}^*$. Если в $\mathcal{A}_*$ есть наибольший элемент, то он является верхней гранью X – противоречие. Следовательно есть наименьший элемент в $\mathcal{A}^*$, который по определению является точной верхней гранью X.

Теперь докажем единственность точной верхней грани. Пусть α, α' – точные верхние грани множества X, $\alpha' < \alpha$. Так как α – точная верхняя грань, $\forall \beta < \alpha \exists x \in X : x > \beta \implies \exists x' \in X : x' > \alpha' \implies \alpha' \neq \sup X$.

Счетность множества рациональных чисел

Докажем счетность множества полжительных рациональных чисел.
Пусть $H \geq 2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим все взаимно простые пары чисел $p, q \in N$, такие что $p + q = H$, и соответствующие им рациональные числа. Понятно, что таких пар конечное число, и таким образом представляется любое рациональное число.
Теперь расставим соответствующие каждому H рациональные числа по порядку и пронумеруем их:
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, ...$
Так как множество положительных рациональных чисел счетно, то и аналогичным образом счетно множество отрицательных рациональных чисел, а их объединение в объединении вместе с конечным множетсвом, состоящим из 0, так же счетно и является $\mathbb{R}$.

Несчетность множества действительных чисел

Если подмножество множества несчетно, то и само оно несчетно.
Рассмотрим числа на интервале $(0;1)$, представленные в виде десятичных дробей:
$\alpha_1 = 0, a_1^1 a_2^1 ... a_n^1 ...$
$\alpha_2 = 0, a_1^2 a_2^2 ... a_n^2 ...$
...
$\alpha_k = 0, a_1^k a_2^k ... a_n^k ...$
...
Допустим, что подмножество $(0;1)$ счетно.
Построим число γ такое, что $\gamma = 0, c_1 c_2 ... c_n ...; \ c_i \neq a_i^i, c_i \neq 9$. γ не равно ни одному из a_i, что противоречит тому, что $(0;1)$ счетно. Следовательно, само множество действительных чисел также счетно.

2

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если:

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n| > M$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n| < \epsilon$$

Теорема: сумма двух бесконечно маллых последовательностей также является бесконечно малой.
Доказательство: пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно малые:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_x = N_x(\epsilon) : \forall n \geq N_x \longmapsto |x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_y = N_y(\epsilon) : \forall n \geq N_y \longmapsto |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_x(\epsilon), N_y(\epsilon)) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

следовательно, $\{x_n\} + \{y_n\}$ – также бесконечно малая последовательность.

Теорема: бесконечно малая последовательность ограничена.
Доказательство: пусть последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно малая:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n| < \epsilon$$

Возьмем произвольное ϵ_0. Тогда $\forall n \geq N(\epsilon_0) \longmapsto |x_n| < \epsilon_0$. Выберем среди первых $N(\epsilon_0)$ членов последовательности максимальный по модулю и обозначим его модуль за ϵ_1. Тогда $\forall x : 1 \leq x \leq N(\epsilon_0) \longmapsto |x_n| \leq \epsilon_1$. Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N} \longmapsto |x_n| \leq \epsilon = \max(\epsilon_0, \epsilon_1) \implies \{x_n\}$ ограничена.

Теорема: произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей – бесконечно малая последовательность.
Доказательство: пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, $\{y_n\}$ – бесконечно малая:

$$\exists C > 0 : \forall n \longmapsto |x_n| \leq C$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |y_n| < \frac{\epsilon}{C}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n y_n| \leq C|y_n| < \epsilon$$

Теорема: произведение двух бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая последовательность.
Доказательство: Любая бесконечно малая последовательность ограничена, следовательно про-

изведение двух бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая, как и произведение бесконечно малой и ограниченной.

Теорема: если все члены бесконечно малой последовательности с какого-то номера равны γ, то $\gamma = 0$.
Доказательство: пусть $\gamma \neq 0$. Последовательность $\{x_n\}$ бесконечно мала, возьмем $\epsilon_0 = |\gamma|$ и проверим для него условие:

$$\exists N = N(\gamma) : \forall n \geq N \longmapsto |\gamma| < |\gamma|$$

получается противоречие.

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то с какого-то номера определена бесконечно малая последовательность $\{y_n\} = \{\frac{1}{x_n}\}$.
Доказательство: так как $\{x_n\}$ – бесконечно большая:

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n| > \frac{1}{M} \implies \frac{1}{|x_n|} < M$$

Следовательно $\{y_n\}$ – бесконечно малая.

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ – ограниченная, а $\{y_n\}$ – бесконечно большая, то с какого-то номера определена бесконечно малая последовательность $\{z_n\} = \{\frac{x_n}{y_n}\}$.
Доказательство: так как $\{y_n\}$ – бесконечно большая, $\{y'_n\}$, где $y'_n = \frac{1}{y_n}$, – бесконечно малая. Тогда $\{z_n\}$ – бесконечно малая как произведение бесконечно малой и ограниченной.

Теорема: если последовательность $\{|x_n|\}$ ограничена снизу $c > 0$, а $\{y_n\}$ – бесконечно малая и $y_n \neq 0 \forall n$, то $\{z_n\} = \{\frac{x_n}{y_n}\}$ – бесконечно большая.
Доказательство: так как $\{y_n\}$ – бесконечно малая:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |y_n| < \frac{1}{\epsilon} \implies \frac{1}{|y_n|} > \epsilon$$

Следовательно $\{y_n\}$ – бесконечно большая. $|x_n y_n| > C|y_n| > \epsilon$, следовательно $\{z_n\}$ – бесконечно большая.

Предел числовой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, если последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = x_n - a$, бесконечно мала.
Число $a = \lim_{x \to \infty} x_n$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n - a| < \epsilon$$

Единственность предела

Доказательство: пусть a_1 – предел последовательности $\{x_n\}$ и a_2 – предел $\{x_n\}$. Тогда:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\epsilon) : \forall n \geq N_1 \longmapsto |x_n - a_1| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\epsilon) : \forall n \geq N_2 \longmapsto |x_n - a_2| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)) : \forall n \geq N \longmapsto x_n \in (a_1 - \epsilon; a_1 + \epsilon) \cap (a_2 - \epsilon; a_2 + \epsilon)$$

При $\epsilon \leq \frac{a_1+a_2}{2}$ $(a_1 - \epsilon; a_1 + \epsilon) \cap (a_2 - \epsilon; a_2 + \epsilon) = \varnothing$ – противоречие.

Арифметические операции со сходящимися последовательностями

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, а $\{y_n\}$ – к b, то их сумма $\{z_n\} = \{x_n\} + \{y_n\}$ сходится к $a + b$.
Доказательство: $x_n = a_n + a$, $y_n = b_n + b$, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{c_n\}$, где $c_n = x_n - a + y_n - b = a_n + b_n$, – бесконечно мала, следовательно $a + b$ – предел $\{z_n\}$

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, а $\{y_n\}$ – к b, то их произведение $\{z_n\} = \{x_n\} \cdot \{y_n\}$ сходится к ab.
Доказательство: $x_n = a_n + a$, $y_n = b_n + b$, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{c_n\}$, где $c_n = x_n y_n - ab = (a_n + a)(b_n + b) - ab = a_n b_n + b a_n + a b_n$, – бесконечно мала, следовательно ab – предел $\{z_n\}$

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, а $\{y_n\}$ – к $b \neq 0$, то с какого-то номера определена последовательность их частного $\{z_n\} = \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}$, которая сходится к $\frac{a}{b}$.
Доказательство: $x_n = a_n + a$, $y_n = b_n + b$, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Докажем сначала существование $\{z_n\}$. Пусть $\epsilon_0 = \frac{|b|}{2}$.

$$\exists N = N(\epsilon_0) : \forall n \geq N \longmapsto |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

$$\frac{|b|}{2} < y_n < \frac{3|b|}{2}$$

$$\frac{1}{y_n} < \frac{2}{|b|}$$

Видно, что $\{y_n\}$ с $N(\epsilon_0)$ не равна 0, и что последовательность $\{\frac{1}{y_n}\}$ ограничена.
Последовательность $\{c_n\}$, где $c_n = \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n + a}{b_n + b} - \frac{a}{b} = \frac{b a_n + ab - ab - a b_n}{b(b_n + b)} = \frac{1}{b_n + b}(a_n - \frac{a}{b} b_n)$, – бесконечно мала как произведение ограниченной и бесконечно малой, следовательно $\frac{a}{b}$ – предел $\{z_n\}$

Свойства пределов, связанные с неравенствами

Теорема: Если для последовательности $\{x_n\}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R} : \forall n \geq n_0 \longmapsto x_n \geq b \wedge \exists \lim_{n \to \infty} x_n = a$, то $a \geq b$.
Доказательство: Пусть $a < b$:

$$\epsilon_0 = b - a$$

$$\exists n_1 = n_1(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_1 \longmapsto |x_n - a| < b - a$$

$$x_n - a < b - a$$

$$x_n < b$$

что противоречит тому, что $x_n \geq b$

Теорема: Если для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \longmapsto x_n \geq y_n \wedge \exists \lim_{n \to \infty} x_n = a \wedge \exists \lim_{n \to \infty} y_n = b$, то $a \geq b$.

Доказательство: Пусть $a < b$:

$$\epsilon_0 = \frac{b-a}{2}$$

$$\exists n_1 = n_1(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_1 \longmapsto |x_n - a| < \frac{b-a}{2}$$

$$\exists n_2 = n_2(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_2 \longmapsto |y_n - b| < \frac{b-a}{2}$$

$$x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} < y_n$$

$$x_n < y_n$$

что противоречит тому, что $x_n \geq y_n$

Теорема: Если для последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ то $\exists \lim_{n\to\infty} z_n = a$. $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \longmapsto \wedge \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$,
Доказательство:

$$x_n - a \geq y_n - a \geq z_n - a$$

$$|y_n - a| \leq \max(|x_n - a|, |z_n - a|)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\epsilon_0) : \forall n \geq N_1 \longmapsto |x_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\epsilon_0) : \forall n \geq N_2 \longmapsto |z_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\epsilon_0), N_2(\epsilon_0)) : \forall n \geq N_2 \longmapsto |y_n - a| < \epsilon$$

Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

Теорема: Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена и монотонна, то она сходится к своей точной верхней грани (если она неубывает или возрастает), или к своей точной нижней грани (если она невозрастает или убывает).
Доказательство: пусть $\{x_n\}$ возрастает.

$$a = \sup\{x_n\} \implies \forall \epsilon \exists N = N(\epsilon) : x_N > a - \epsilon$$

$$0 \leq a - x_N < \epsilon$$

так как $\{x_n\}$ возрастает

$$\forall n > N \longmapsto x_n > x_N \implies 0 \leq a - x_n < a - x_N < \epsilon$$

следовательно $\{x_n\}$ сходится к $a = \sup\{x_n\}$.

Теорема Кантора о вложенных отрезках

Системой стягивающихся отрезков называют последовательность $\{[a_n; b_n]\}$, если:

- $\forall n \longmapsto [a_{n+1}; b_{n+1}] \subseteq [a_n; b_n]$
- $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Теорема: система стягивающихся отрезков имеет единственную точку, принадлежащую им всем.
Доказательство: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ограничены и монотонны, следовательно $\exists c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$.
Пусть $\exists c' > c : c' \in [a_n; b_n] \forall n$. Тогда $\forall n b_n - a_n \geq c' - c > 0 \implies lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) > 0$, что противоречит тому, что $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Число e

Теорема: число $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
Доказательство:

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + ... + \frac{n(n-1)...(n-(n-1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + ... + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)...\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$x_{n+1} > x_n$$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Последовательность монотонно возрастает и ограничена, следовательно $\exists \lim_{n\to\infty}\{x_n\} = e$.

3

Подпоследовательности, частичные пределы

Подпоследовательности

Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, $\{k_n\}$ – возрастающая последовательность из натуральных чисел. Тогда $\{x_{k_n}\}$ называется подпоследовательностью $\{x_n\}$.

Частичные пределы

Если $\{x_{k_n}\}$ сходится к a, то a – частичный предел $\{x_n\}$.

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то у нее есть сходящаяся последовательность $\{x_{k_n}\}$.
Доказательство: Так как $\{x_n\}$ ограничена, $\exists \alpha, \beta : \alpha \leq x_n \leq \beta \forall n$. На отрезке $[\alpha; \beta]$ лежит бесконечное колличество членов последовательности. Выберем такой отрезок $[\alpha_1; \beta_1]$, на котором лежит бесконечное колличество членов последовательности и для которого $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta - \alpha}{2}$. На шаге n имеем $\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(b-a)\frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma$$

Выберем x_{k_1} такое, что $x_{k_1} \in [a_1; b_1]$. Выберем x_{k_2} такое, что $x_{k_2} \in [a_2; b_2]$ и $k_2 > k_1$. Такое k_2 существует, потому что если не учитывать все элементы последовательности, чей номер меньше или равен k_1, на $[a_2; b_2]$ все равно лежит бесконечное колличество членов $\{x_n\}$. На шаге n выбираем x_{k_n} такое, что $x_{k_n} \in [a_n; b_n]$ и $k_n > k_{n-1}$.

$$a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma \implies \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \gamma$$

Критерий Коши существования конечного предела последовательности

Фундаментальная последовательность

Если для последовательности $\{x_n\}$ выполняется следующее условие:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n, m \geq N \longmapsto |x_n - x_m| < \epsilon$$

то она называется фундаментальной.

Критерий Коши

Теорема: чтобы у последовательности $\{x_n\}$ существовал конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.
Доказательство:
Необходимость: пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n, m \geq N \longmapsto |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\frac{-\epsilon}{2} < x_n - a < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\frac{-\epsilon}{2} < a - x_m < \frac{\epsilon}{2}$$

$$-\epsilon < x_n - x_m < \epsilon$$

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

следовательно, $\{x_n\}$ – фундаментальная.
Достаточность: если $\{x_n\}$ фундаментальная, то она ограничена, следовательно у нее есть подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, сходящаяся к a:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\epsilon) : \forall n \geq N_1 \longmapsto |x_{k_n} - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

Так как $\{x_n\}$ фундаментальная:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\epsilon) : \forall n, m \geq N_2 \longmapsto |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$$

$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n - a| = |x_n - x_{k_N} + x_{k_N} - a| \leq |x_n - x_{k_N}| + |x_{k_N} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

следовательно, $\{x_n\}$ сходится к a.

4

Определения предела функции в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность

Далее подразумевается, что функция $f(x)$ определена в некой выколотой Δ окрестности точки x_0: $X = \{x : 0 < |x - x_0| < \Delta\}$.

Предел функции в точке по Коши

Число $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$ называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \longmapsto |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Предел функции а точке по Гейне

Последовательностью Гейне назовем сходящуюся к x_0 последовательность $\{x_n\}$, где $x_n \neq x_0$.
Число a называется пределом функции в точке x_0, если для произвольной сходящейся к x_0 последовательности Гейне с какого-то n_0 определена $f(x_n)$, и $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$

Эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне

Теорема: определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.
Доказательство:
Пусть a – предел функции в точке x_0 по Коши:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall x \in X : 0 < |x_n - x_0| < \delta$$

Для любой последовательности Гейне, сходящейся к x_0, найдется $N = N(\delta) = N(\epsilon) : \forall n \geq N \longmapsto 0 < |x_n - x_0| < \delta \implies |f(x_n) - a| < \epsilon \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$. $f(x_n)$ сходится к a для произвольной последовательности Гейне, следовательно a – предел $f(x)$ в точке x_0 по Гейне.
Пусть a – предел функции в точке x_0 по Гейне, а по Коши он не равен a:

$$\exists \epsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \longmapsto |f(x_\delta) - a| \geq \epsilon_0$$

$$\delta_n = \frac{1}{n} > 0 \implies \exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \delta_n \longmapsto |f(x_n) - a| \geq \epsilon_0$$

То есть существует такая сходящаяся к x_0 последовательность Гейне $\{x_n\}$, для которой $\{f(x_n)\}$ не сходится к a, что противоречит тому, что a – предел по Гейне.

Свойства пределов функции

Вытекают из свойств предела последовательностей и применения определения предела функции по Гейне.

Критерий Коши существования конечного предела функции

Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке x_0, если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall x_1, x_2 \in X : 0 < |x_1 - x_0| < \delta \wedge 0 < |x_2 - x_0| < \delta \longmapsto |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Теорема: для того, чтобы функция $f(x)$ в имела конечный предел в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши в точке x_0.
Доказательство:
Необходимость: пусть $a = \lim_{x\to x_0} f(x)$:

$$\forall\epsilon>0\exists\delta=\delta(\epsilon)>0:\forall x_1,x_2\in X:0<|x_1-x_0|<\delta\wedge 0<|x_2-x_0|<\delta\longmapsto|(f(x_1)-f(x_0)|<\frac{\epsilon}{2}\wedge|(f(x_0)-f(x_2)|<\frac{\epsilon}{2}$$

$$-\frac{\epsilon}{2}<f(x_1)-f(x_0)<\frac{\epsilon}{2}$$
$$-\frac{\epsilon}{2}<f(x_0)-f(x_2)<\frac{\epsilon}{2}$$
$$-\epsilon<f(x_1)-f(x_2)<\epsilon$$
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$$

следовательно, $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке x_0.
Достаточность: пусть $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке x_0:

$$\forall\epsilon>0\exists\delta=\delta(\epsilon):\forall x_1,x_2\in X:0<|x_1-x_0|<\delta\wedge 0<|x_2-x_0|<\delta\longmapsto|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$$

Возьмем произвольную сходящуюся к x_0 последовательность Гейне.

$$\forall\delta\exists N=N(\delta)=N(\epsilon):\forall n,m\geq N\longmapsto 0<|x_n-x_0|<\delta\wedge 0<|x_m-x_0|<\delta\longmapsto|f(x_n)-f(x_m)|<\epsilon$$

Следовательно $\{f(x_n)\}$ фундаментальна и сходится к некому a.
Покажем, что $\{f(x_n)\}$ сходится к одному a вне зависимости от выбора последовательности Гейне $\{x_n\}$.
Пусть $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ сходятся к x_0, $\{f(x'_n)\}$ сходится к a', $\{f(x''_n)\}$ сходится к a''. Построим новую последовательность Гейне $\{\bar{x}_n\}=\{x'_1,x''_1,x'_2,x''_2,...,x'_n,x''_n,...\}$. $\{f(\bar{x}_n)\}$ – фундаментальная, значит она сходится к $\bar{a}$. Раз $\{f(\bar{x}_n)\}$ сходится к $\bar{a}$, значит $\{f(x'_n)\}$ и a', $\{f(x''_n)\}$ сходятся к $\bar{a}$, $\bar{a}=a'=a''$.
Следовательно $\bar{a}$ – предел $f(x)$ в точке x_0 по Гейне.

Предел сложной функции

Пусть функция $f(x)$ определена в выколотой Δ_1 окрестности точки x_0: $X=\{x:0<|x-x_0|<\Delta_1\}$, а функция $g(x)$ определена в выколотой Δ_2 окрестности точки y_0: $Y=\{y:0<|y-y_0|<\Delta_2\}$, $f(X)\subseteq Y$.
Теорема: Если предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен y_0, сама $f(x)$ на X не принимает значения y_0, предел функции $g(y)$ в точке y_0 равен a, то предел функции $h(x)=g(f(x))$ в точке x_0 равен a.
Доказательство:
Для произвольной сходящейся к x_0 последовательности Гейне $\{x_n\}$ $\{f(x_n)\}$ является сходящейся к y_0 последовательностью Гейне. Следовательно, $\{g(f(x_n))\}=\{h(x_n)\}$ сходится к a, a – предел в точке x_0 функции $h(x)$ про Гейне.

Существование односторонних пределов у монотонных функций

Теорема: если $f(x)$ определена и монотонна на $(a;b)$, то $\forall x_0\in(a;b)\exists f(x_0-0)\wedge\exists f(x_0+0)$. Если $f(x)$ неубывает или возрастает на $(a;b)$, то $f(x_0-0)\leq f(x_0)\leq f(x_0+0)$. Если $f(x)$ невозрастает или убывает на $(a;b)$, то $f(x_0-0)\geq f(x_0)\geq f(x_0+0)$.

Доказательство: пусть $f(x)$ возрастает на $(a;b)$. Докажем существование $f(x-0)\forall x$:

$$\forall x_0 \in (a;b) \forall x \in (a;x_0) \longmapsto f(x) < f(x_0) \implies \exists \sup_{(a;x_0)} f(x) = \alpha \leq f(x_0)$$

$$\forall \epsilon \exists x_\epsilon \in (a;x_0) : f(x_\epsilon) > \alpha - \epsilon$$

$$\delta = \delta(\epsilon) = x_0 - x_\epsilon > 0$$

$$\forall x : 0 < x_0 - x < \delta \longmapsto \alpha - \epsilon < f(x) \leq \alpha$$

$$\alpha - \epsilon < f(x) < \alpha + \epsilon$$

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon$$

$$f(x_0 - 0) = \alpha$$

существование $f(x+0)\forall x$ доказывается аналогичным образом.

5

Непрерывность функции в точке

Функция $f(x)$ называет непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$ тоже непрерывны в x_0. Если $g(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.
Доказательство: Следует из свойств арифметических операций с пределами.

Теорема: если функция $f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0, то существует такая δ-окрестность точки x_0, в пределах которой $f(x)$ сохраняет свой знак.

Функцию $\Delta y(x_0, \Delta x)$ в точке x_0 определим как $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
Теорема: если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y(x_0, \Delta x) = 0$.

Односторонняя непрерывность

Функция $f(x)$ называет одностонне непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0)$$

Непрерывность сложной функции

Теорема: если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то функция $h(x) = g(f(x_0))$ непрерывна в точке x_0.
Доказательство: по теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g(f(x_0))$.

Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции

Теорема: если предел функции $f(x)$ точке x_0 равен y_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$.
Доказательство: возьмем сходящуюся к x_0 последовательность Гейне $\{x_n\}$, тогда последовательность $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$ сходится к y_0. Последовательность $\{g(y_n)\}$ сходится к $g(y_0) = g(\lim_{n \to \infty} f(x_n))$. Следовательно $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$.

Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций

Классификация точек разрыва:

- точка x_0 – устранимая точка разрыва, если $f(x)$ либо не определена, либо не непрерывна в точке x_0.
- точка x_0 – точка разрыва первого рода, если для $f(x)$ существуют и не равны левый и правый пределы в точке x_0. Их разность $\omega(x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции в точке x_0.

- точка x_0 – точка разрыва второго рода, если для $f(x)$ не существует конечного левого или правого предела в точке x_0.

Теорема: монотонной функция, определенная на $(a;b)$, имеет только точки разрыва первого рода.
Доказательство: пусть $f(x)$ возрастает на $(a;b)$. Точек разрыва второго рода нет в силу теоремы о существование односторонних пределов у монотонных функций. В силу той же теоремы и неравенстава $f(x-0) \leq f(x_0) \leq f(x_0+0)$, $f(x-0) = f(x_0+0) = \gamma \neq f(x_0)$ не может выполняться, и следовательно x_0 не может быть устранимой точкой разрыва.

Теорема: множество точек разрыва определенной на $(a;b)$ монотонной функции $f(x)$ не более, чем счетно.
Доказательство: каждой точке разрыва x_0 соответствует интервал $(f(x_0-0); f(x_0+0))$ точки которого за исключением, быть может, $f(x_0)$, не входят в область определения $f(x)$. В силу монотонности $f(x)$ эти интервалы не пересекаются. На каждом интервале выберем рациональную точку. Таким образом мы установили взаимнооднозначное соответствие между точками разрыва и подмножеством счетного множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

6

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Ограниченность

Теорема: если функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.
Доказательство: пусть $f(x)$ неограничена на $[a; b]$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a; b] : |f(x_n)| > n$$

$$\{y_n\} = \{f(x_n)\}$$

последовательность $\{y_n\}$ – бесконечно большая. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, следовательно она содержит в себе сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$. Раз последовательность $\{x_{k_n}\}$ сходится, а $f(x)$ непрерывна, последовательность $\{f(x_{k_n})\}$ сходится и не является бесконечно большой, что противоречит тому, что $\{f(x_n)\}$ – бесконечно большая.

Достижимость точных верхней и нижней граней

Теорема: если функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает свою точную верхнюю грань α и свою точную нижнюю грань β.
Доказательство: пусть $f(x)$ не достигает α. Введем функцию $g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}$, непрерывную на $[a; b]$. Она ограничена сверху A.

$$\frac{1}{\alpha - f(x)} \leq A$$

$$f(x) \leq \alpha - \frac{1}{A}$$

следовательно $\alpha - \frac{1}{A}$ – верхняя грань $f(x)$, что противоречит тому, что α – точная верхняя грань.

Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема: если функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то существует такое $x_0 \in (a; b)$, что $f(x_0) = 0$.
Доказательство: пусть $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$.

$$X = \{x \in [a; b] : f(x) < 0\} \neq \varnothing$$

$$\exists x_0 = \sup X$$

так как $f(x)$ непрерывна справа в точке a, она сохраняет свой знак в какой-то окрестности a, следовательно $x_0 \in (a; b)$. Предположим, что $f(x_0) \neq 0$. Тогда в некой δ окрестности она сохраняет свой знак. Так как $x_0 = \sup X$, $\exists x' \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x') < 0$. Однако $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \longmapsto f(x) \geq 0$. Следовательно, $f(x_0)$ не сохраняет свой знак ни в какой δ окрестности и равна 0.

Теорема: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает любого своего промежуточного значения.
Доказательство: пусть $g(x) = f(x) - \gamma$, где γ – некое промежуточное значение. Функция $g(x)$ непрерывна и на концах $[a; b]$ принимает значения разных знаков, следовательно она достигает 0 в некой точке x_0. $f(x_0) = g(x_0) + \gamma = \gamma$.

Теорема об обратной функции

Обратная функция

Пусть $f(x)$ определена на множестве X, Y – множество ее значений. Если выполняется условие:

$$\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$$

то на Y существует обратная функция $f^{-1}(y)$, каждому $y \in Y$ сопоставляющая такой $x \in X$, что $y = f(x)$.

Теорема об обратной функции

Лемма: если $f(x)$ определена и строго монотонна на X, Y – множество ее значений, тогда на Y определена и имеет такой же тип сторогой монотонности, что и $f(x)$, обратная функция $f^{-1}(y)$.
Доказательство: так как $f(x)$ сторого монотонна:

$$\forall x_1 \neq x_2 \longmapsto f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2)$$

Следовательно, на Y существует обратная функция $f^{-1}(y)$. Пусть $f(x)$ возрастает. Докажем возрастание $f^{-1}(y)$:

$$\forall y_1 > y_2 \in Y \longmapsto f^{-1}(y_1) = x_1 > x_2 = f^{-1}(y_2)$$

пусть это не так:

$$x_1 \leq x_2$$

$$f(x_1) = y_1 \leq y_2 = f(x_2)$$

противоречие.

Теорема: пусть на $[a;b]$ определена, непрерывна и сторого монотонна функция $f(x)$, $\alpha = \inf_{[a;b]} f(x)$, $\beta = \sup_{[a;b]} f(x)$. Тогда на $[\alpha;\beta]$ определена, непрерывна и сторого монотонна в том же направлении, что $f(x)$, обратная функция $f^{-1}(y)$.
Доказательство: существование и строгая монотонность $f^{-1}(y)$ следует из леммы. Докажем непрерывность обратной функции для возрастающей $f(x)$. Для монотонно возрастающей $f^{-1}(y)$ для всех $y_0 \in (a;b)$ выполняется следующее неравенставо:

$$f^{-1}(y_0 - 0) \leq f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y_0 + 0)$$

Пусть разрывна в какой-то точке $y_0 \in (\alpha;\beta)$:

$$f^{-1}(y_0 - 0) < f^{-1}(y_0) \vee f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0 + 0)$$

Пусть выполняется левое неравенставо $f^{-1}(y_0 - 0) < f^{-1}(y_0)$:

$$\forall y \in [\alpha; y_0) \longmapsto a \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0 - 0) = \sup_{[\alpha;y_0)} f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)$$

$$\forall y \in [y_0; \beta] \longmapsto f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y) = \sup_{[\alpha;y_0)} f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)$$

значит $(f^{-1}(y_0-0); f^{-1}(y_0))$ не принадлежит области значений $f^{-1}(y)$. Интервал $(f^{-1}(y_0-0); f^{-1}(y_0))$ лежит на отрезке $[a;b]$. Следовательно образом $[\alpha;\beta]$ является множество $[a; f^{-1}(y_0-0)) \cup (f^{-1}(y_0); b]$,

что противоречит тому, что образ $[\alpha;\beta]$ – $[a;b]$.
К аналогичному противоречию проходим, рассмотрев правое неравенство $f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0+0)$.
Для концов отрезка надо аналогичным образом доказать, что $f^{-1}(\alpha+0) = f^{-1}(\alpha)$ и $f^{-1}(\beta-0) = f^{-1}(\beta)$.