

Экзаменационная программа по курсу «Введение в
математический анализ», осенний семестр 2020–2021
учебного года

1

Действительные числа

Дедекиндовы сечения

Сечение множества рациональных чисел \mathbb{Q} (A_*, A^*) – разбиение \mathbb{Q} на два таких непустых множества A_* и A^* , таких, что:

- $A_* \cup A^* = \mathbb{Q}$
- $A_* \cap A^* = \emptyset$
- $\forall x \in A_*, \forall y \in A^* \mapsto y > x$

Иррациональные числа

В сечении вида \textcircled{A} A_* не имеет наибольшего элемента, а A^* имеет наименьший. В сечении вида \textcircled{B} A_* имеет наибольший элемент, а A^* не имеет наименьшего. В сечении вида \textcircled{C} A_* не имеет наибольшего элемента, а A^* не имеет наименьшего.

Иррациональным числом называется сечение вида \textcircled{C} .

Действительные числа

Действительным числом называется любое сечение множества \mathbb{Q} вида \textcircled{A} или \textcircled{C} .

Упорядоченность, плотность и непрерывность действительных чисел

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$

$\alpha = \beta$ если $A_* = B_*$

Предложение:

Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$, то имеет место одно из включений: $A_* \subset B_*$ либо $A_* \supset B_*$

Доказательство: пусть $A_* \not\subset B_*$ и $A_* \not\supset B_*$

Тогда $\exists a \in \mathbb{Q} : a \in A_* \wedge a \notin B_* \implies a \in B^*$ и $\exists b \in \mathbb{Q} : b \notin A_* \wedge b \in B_* \implies b \in A^*$

так как $a \neq b$

$a \in A_*, b \in A^* \implies b > a$

$b \in B_*, a \in B^* \implies a > b$

противоречие

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$

$\alpha < \beta$ если $A_* \neq B_* \wedge A_* \subset B_*$

Упорядоченность \mathbb{R} :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha > \beta$.

$\alpha = \beta, \beta = \gamma \implies \alpha = \gamma$

$\alpha < \beta, \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma$

Плотность \mathbb{Q} в \mathbb{R} :

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, тогда $\exists c \in \mathbb{Q} : \alpha < c < \beta$

Доказательство: $\alpha < \beta \implies A_* \subset B_* \implies \exists c \in \mathbb{Q} : c \in B_* \wedge c \notin A_*$.

Так как в нижнем классе нет наибольшего элемента, $\alpha \leq c < \beta$.

Если $\alpha \in \mathbb{I}$, то $c \neq \alpha \implies \alpha < c < \beta$. Если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то можно взять $c \in B_* : c > \alpha$.

Сечение множества действительных чисел $\mathbb{R} (\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$ – разбиение \mathbb{Q} на два таких непустых множества \mathcal{A}_* и \mathcal{A}^* , таких, что:

- $\mathcal{A}_* \cup \mathcal{A}^* = \mathbb{R}$
- $\mathcal{A}_* \cap \mathcal{A}^* = \emptyset$
- $\forall x \in \mathcal{A}_*, \forall y \in \mathcal{A}^* \implies y > x$

Теорема Дедекинда:

Среди сечений множества \mathbb{R} сечений вида \textcircled{C} нет \implies непрерывность \mathbb{R} .

Десятичные дроби

Пусть числу $\alpha \in \mathbb{R}$ соответствует сечение $(\mathcal{A}_*; \mathcal{A}^*)$. За a_0 обозначим наибольшее целое число из \mathcal{A}_* . Отрезок $[a_0; a_0 + 1]$ поделим на 10 отрезков одинаковой длины и выберем среди них тот, который содержит α : $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10}; a_0 + \frac{a_1+1}{10}]$. На шаге n $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}; a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n+1}{10^n}]$. Бесконечную десятичную дробь $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ можно считать представлением действительного числа α . Заметим, что если α можно представить как $\frac{p}{10^n}$, $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, (то есть α – сократимая десятичная дробь) то α соответствуют две десятичные дроби: $a_0, a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots$ и $a_0, a_1 a_2 \dots (a_n - 1) 999 \dots$.

Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу)

Множество X ограничено сверху, если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \implies x \leq C$

Число M называется верхней гранью множества X , если $\forall x \in X \implies x \leq M$

Число $\alpha = \sup X$ называется точной верхней гранью множества X , если $\forall x \in X \implies x \leq \alpha \wedge \forall \alpha' \exists x \in X : x > \alpha'$.

Лемма: если множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент $M = \max X$, то $M = \sup X$.

Доказательство: так как M – наибольший элемент X , то все остальные элементы X меньше M и не являются верхней гранью X , так как $M \in X$ и $M > x$. Следовательно, M – точная верхняя грань X .

Теорема: для ограниченного сверху множества $X \subset \mathbb{R}$ существует единственная точная верхняя грань.

Доказательство: если в X есть наибольший элемент, то α равно ему. Если в X наибольшего элемента нет, то построим сечение $(\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$, такое, что в \mathcal{A}^* содержатся все верхние грани X , а в \mathcal{A}_* – все остальные числа, при этом множество \mathcal{A}^* не пусто, так как X ограничено сверху, а $X \subset \mathcal{A}_*$, так как если элемент из $X \in \mathcal{A}^*$, то он является максимальным. По теореме Дедекинда, если либо больший элемент в \mathcal{A}_* , либо меньший в \mathcal{A}^* . Если в \mathcal{A}_* есть наибольший элемент, то он является верхней гранью X – противоречие. Следовательно есть наименьший элемент в \mathcal{A}^* , который по определению является точной верхней гранью X .

Теперь докажем единственность точной верхней грани. Пусть α, α' – точные верхние грани множества X , $\alpha' < \alpha$. Так как α – точная верхняя грань, $\forall \beta < \alpha \exists x \in X : x > \beta \implies \exists x' \in X : x' > \alpha' \implies \alpha' \neq \sup X$.

Счетность множества рациональных чисел

Докажем счетность множества положительных рациональных чисел.

Пусть $H \geq 2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим все взаимно простые пары чисел $p, q \in \mathbb{N}$, такие что $p + q = H$, и соответствующие им рациональные числа. Понятно, что таких пар конечное число, и таким образом представляется любое рациональное число.

Теперь расставим соответствующие каждому H рациональные числа по порядку и пронумеруем их:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots$$

Так как множество положительных рациональных чисел счетно, то и аналогичным образом счетно множество отрицательных рациональных чисел, а их объединение в объединении вместе с конечным множеством, состоящим из 0, так же счетно и является \mathbb{R} .

Несчетность множества действительных чисел

Если подмножество множества несчетно, то и само оно несчетно.

Рассмотрим числа на интервале $(0; 1)$, представленные в виде десятичных дробей:

$$\alpha_1 = 0, a_1^1 a_2^1 \dots a_n^1 \dots$$

$$\alpha_2 = 0, a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 \dots$$

...

$$\alpha_k = 0, a_1^k a_2^k \dots a_n^k \dots$$

...

Допустим, что подмножество $(0; 1)$ счетно.

Построим число γ такое, что $\gamma = 0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$; $c_i \neq a_i^i, c_i \neq 9$. γ не равно ни одному из a_i , что противоречит тому, что $(0; 1)$ счетно. Следовательно, само множество действительных чисел также счетно.

2

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если:

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| > M$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| < \epsilon$$

Теорема: сумма двух бесконечно малых последовательностей также является бесконечно малой.

Доказательство: пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно малые:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_x = N_x(\epsilon) : \forall n \geq N_x \mapsto |x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_y = N_y(\epsilon) : \forall n \geq N_y \mapsto |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_x(\epsilon), N_y(\epsilon)) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

следовательно, $\{x_n\} + \{y_n\}$ – также бесконечно малая последовательность.

Теорема: бесконечно малая последовательность ограничена.

Доказательство: пусть последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно малая:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| < \epsilon$$

Возьмем произвольное ϵ_0 . Тогда $\forall n \geq N(\epsilon_0) \mapsto |x_n| < \epsilon_0$. Выберем среди первых $N(\epsilon_0)$ членов последовательности максимальный по модулю и обозначим его модуль за ϵ_1 . Тогда $\forall x : 1 \leq x \leq N(\epsilon_0) \mapsto |x_n| \leq \epsilon_1$. Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N} \mapsto |x_n| \leq \epsilon = \max(\epsilon_0, \epsilon_1) \implies \{x_n\}$ ограничена.

Теорема: произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей – бесконечно малая последовательность.

Доказательство: пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, $\{y_n\}$ – бесконечно малая:

$$\exists C > 0 : \forall n \mapsto |x_n| \leq C$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |y_n| < \frac{\epsilon}{C}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n y_n| \leq C |y_n| < \epsilon$$

Теорема: произведение двух бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая последовательность.

Доказательство: Любая бесконечно малая последовательность ограничена, следовательно про-

изведение двух бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая, как и произведение бесконечно малой и ограниченной.

Теорема: если все члены бесконечно малой последовательности с какого-то номера равны γ , то $\gamma = 0$.

Доказательство: пусть $\gamma \neq 0$. Последовательность $\{x_n\}$ бесконечно мала, возьмем $\epsilon_0 = |\gamma|$ и проверим для него условие:

$$\exists N = N(\gamma) : \forall n \geq N \mapsto |\gamma| < |\gamma|$$

получается противоречие.

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то с какого-то номера определена бесконечно малая последовательность $\{y_n\} = \{\frac{1}{x_n}\}$.

Доказательство: так как $\{x_n\}$ – бесконечно большая:

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) : \forall n \geq N \mapsto |x_n| > \frac{1}{M} \implies \frac{1}{|x_n|} < M$$

Следовательно $\{y_n\}$ – бесконечно малая.

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ – ограниченная, а $\{y_n\}$ – бесконечно большая, то с какого-то номера определена бесконечно малая последовательность $\{z_n\} = \{\frac{x_n}{y_n}\}$.

Доказательство: так как $\{y_n\}$ – бесконечно большая, $\{y'_n\}$, где $y'_n = \frac{1}{y_n}$, – бесконечно малая. Тогда $\{z_n\}$ – бесконечно малая как произведение бесконечно малой и ограниченной.

Теорема: если последовательность $\{|x_n|\}$ ограничена снизу $c > 0$, а $\{y_n\}$ – бесконечно малая и $y_n \neq 0 \forall n$, то $\{z_n\} = \{\frac{x_n}{y_n}\}$ – бесконечно большая.

Доказательство: так как $\{y_n\}$ – бесконечно малая:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |y_n| < \frac{1}{\epsilon} \implies \frac{1}{|y_n|} > \epsilon$$

Следовательно $\{y_n\}$ – бесконечно большая. $|x_n y_n| > C |y_n| > \epsilon$, следовательно $\{z_n\}$ – бесконечно большая.

Предел числовой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ сходится к a , если последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = x_n - a$, бесконечно мала.

Число $a = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \mapsto |x_n - a| < \epsilon$$

Единственность предела

Доказательство: пусть a_1 – предел последовательности $\{x_n\}$ и a_2 – предел $\{x_n\}$. Тогда:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\epsilon) : \forall n \geq N_1 \mapsto |x_n - a_1| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\epsilon) : \forall n \geq N_2 \mapsto |x_n - a_2| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)) : \forall n \geq N \mapsto x_n \in (a_1 - \epsilon; a_1 + \epsilon) \cap (a_2 - \epsilon; a_2 + \epsilon)$$

При $\epsilon \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$ $(a_1 - \epsilon; a_1 + \epsilon) \cap (a_2 - \epsilon; a_2 + \epsilon) = \emptyset$ – противоречие.

Арифметические операции со сходящимися последовательностями

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a , а $\{y_n\}$ – к b , то их сумма $\{z_n\} = \{x_n\} + \{y_n\}$ сходится к $a + b$.

Доказательство: $x_n = a_n + a$, $y_n = b_n + b$, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{c_n\}$, где $c_n = x_n - a + y_n - b = a_n + b_n$, – бесконечно мала, следовательно $a + b$ – предел $\{z_n\}$

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a , а $\{y_n\}$ – к b , то их произведение $\{z_n\} = \{x_n\} \cdot \{y_n\}$ сходится к ab .

Доказательство: $x_n = a_n + a$, $y_n = b_n + b$, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{c_n\}$, где $c_n = x_n y_n - ab = (a_n + a)(b_n + b) - ab = a_n b_n + ba_n + ab_n$, – бесконечно мала, следовательно ab – предел $\{z_n\}$

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a , а $\{y_n\}$ – к $b \neq 0$, то с какого-то номера определена последовательность их частного $\{z_n\} = \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}$, которая сходится к $\frac{a}{b}$.

Доказательство: $x_n = a_n + a$, $y_n = b_n + b$, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Докажем сначала существование $\{z_n\}$. Пусть $\epsilon_0 = \frac{|b|}{2}$.

$$\exists N = N(\epsilon_0) : \forall n \geq N \mapsto |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

$$\frac{|b|}{2} < y_n < \frac{3|b|}{2}$$

$$\frac{1}{y_n} < \frac{2}{|b|}$$

Видно, что $\{y_n\}$ с $N(\epsilon_0)$ не равна 0, и что последовательность $\{\frac{1}{y_n}\}$ ограничена.

Последовательность $\{c_n\}$, где $c_n = \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n + a}{b_n + b} - \frac{a}{b} = \frac{ba_n + ab - ab - ab_n}{b(b_n + b)} = \frac{1}{b_n + b}(a_n - \frac{a}{b}b_n)$, – бесконечно мала как произведение ограниченной и бесконечно малой, следовательно $\frac{a}{b}$ – предел $\{z_n\}$

Свойства пределов, связанные с неравенствами

Теорема: Если для последовательности $\{x_n\}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R} : \forall n \geq n_0 \mapsto x_n \geq b \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $a \geq b$.

Доказательство: Пусть $a < b$:

$$\epsilon_0 = b - a$$

$$\exists n_1 = n_1(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_1 \mapsto |x_n - a| < b - a$$

$$x_n - a < b - a$$

$$x_n < b$$

что противоречит тому, что $x_n \geq b$

Теорема: Если для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \mapsto x_n \geq y_n \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то $a \geq b$.

Доказательство: Пусть $a < b$:

$$\epsilon_0 = \frac{b-a}{2}$$

$$\exists n_1 = n_1(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_1 \mapsto |x_n - a| < \frac{b-a}{2}$$

$$\exists n_2 = n_2(\epsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_2 \mapsto |y_n - b| < \frac{b-a}{2}$$

$$x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} < y_n$$

$$x_n < y_n$$

что противоречит тому, что $x_n \geq y_n$

Теорема: Если для последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \mapsto \wedge \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$,

Доказательство:

$$x_n - a \geq y_n - a \geq z_n - a$$

$$|y_n - a| \leq \max(|x_n - a|, |z_n - a|)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\epsilon_0) : \forall n \geq N_1 \mapsto |x_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\epsilon_0) : \forall n \geq N_2 \mapsto |z_n - a| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\epsilon_0), N_2(\epsilon_0)) : \forall n \geq N \mapsto |y_n - a| < \epsilon$$

Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

Теорема: Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена и монотонна, то она сходится к своей точной верхней грани (если она неубывает или возрастает), или к своей точной нижней грани (если она невозрастает или убывает).

Доказательство: пусть $\{x_n\}$ возрастает.

$$a = \sup\{x_n\} \implies \forall \epsilon \exists N = N(\epsilon) : x_N > a - \epsilon$$

$$0 \leq a - x_N < \epsilon$$

так как $\{x_n\}$ возрастает

$$\forall n > N \mapsto x_n > x_N \implies 0 \leq a - x_n < a - x_N < \epsilon$$

следовательно $\{x_n\}$ сходится к $a = \sup\{x_n\}$.

Теорема Кантора о вложенных отрезках

Системой стягивающихся отрезков называют последовательность $\{[a_n; b_n]\}$, если:

- $\forall n \mapsto [a_{n+1}; b_{n+1}] \subseteq [a_n; b_n]$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

Теорема: система стягивающихся отрезков имеет единственную точку, принадлежащую им всем.

Доказательство: $\{a_n\}, \{b_n\}$ ограничены и монотонны, следовательно $\exists c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$.

Пусть $\exists c' > c : c' \in [a_n; b_n] \forall n$. Тогда $\forall n b_n - a_n \geq c' - c > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) > 0$, что противоречит тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Число e

Теорема: число $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Доказательство:

$$x_n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!} \frac{1}{n^n}$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$x_{n+1} > x_n$$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Последовательность монотонно возрастает и ограничена, следовательно $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = e$.