Экзаменационная программа по курсу «Введение в математический анализ», осенний семестр 2020–2021 учебного года

Содержание

1

Действительные числа

Дедекиндовы сечения

Сечение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (A_*, A^*) – разбиение $\mathbb{Q}$ на два таких непустых множества A_* и A^*, таких, что:

- $A_* \cup A^* = \mathbb{Q}$
- $A_* \cap A^* = \varnothing$
- $\forall x \in A_*, \forall y \in A^* \longmapsto y > x$

Иррациональные числа

В сечении вида Ⓐ A_* не имеет наибольшего элемента, а A^* имеет наименьший. В сечении вида Ⓑ A_* имеет наибольший элемент, а A^* не имеет наименьшего. В сечении вида Ⓒ A_* не имеет наибольшего элемента, а A^* не имеет наименьшего.
Иррациональным числом называется сечение вида Ⓒ.

Действительные числа

Действительным числом называется любое сечение множества $\mathbb{Q}$ вида Ⓐ или Ⓒ.

Упорядоченность, плотность и непрерывность действительных чисел

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$
$\alpha = \beta$ если $A_* = B_*$

Предложение:
Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$, то имеет место одно из включений: $A_* \subset B_*$ либо $A_* \supset B_*$
Доказательство: пусть $A_* \not\subset B_*$ и $A_* \not\supset B_*$
Тогда $\exists a \in \mathbb{Q} : a \in A_* \land a \notin B_* \implies a \in B^*$ и $\exists b \in \mathbb{Q} : b \notin A_* \land b \in B_* \implies b \in A^*$
так как $a \neq b$
$a \in A_*, b \in A^* \implies b > a$
$b \in B_*, a \in B^* \implies a > b$
противоречие

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A_*, A^*), \beta = (B_*, B^*)$
$\alpha < \beta$ если $A_* \neq B_* \land A_* \subset B_*$

Упорядоченность $\mathbb{R}$:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha > \beta$.
$\alpha = \beta, \beta = \gamma \implies \alpha = \gamma$
$\alpha < \beta, \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma$

Плотность $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$:
Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, тогда $\exists c \in \mathbb{Q} : \alpha < c < \beta$
Доказательство: $\alpha < \beta \implies A_* \subset B_* \implies \exists c \in \mathbb{Q} : c \in B_* \land c \notin A_*$.

Так как в нижнем классе нет наибольшего элемента, $\alpha \le c < \beta$.
Если $\alpha \in \mathbb{I}$, то $c \ne \alpha \implies \alpha < c < \beta$. Если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то можно взять $c \in B_* : c > \alpha$.

Сечение множества действительных чисел $\mathbb{R}$ $(\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$ – разбиение $\mathbb{Q}$ на два таких непустых множества $\mathcal{A}_*$ и $\mathcal{A}^*$, таких, что:

- $\mathcal{A}_* \cup \mathcal{A}^* = \mathbb{R}$
- $\mathcal{A}_* \cap \mathcal{A}^* = \varnothing$
- $\forall x \in \mathcal{A}_*, \forall y \in \mathcal{A}^* \longmapsto y > x$

Теорема Дедекинда:
Среди сечений множества $\mathbb{R}$ сечений вида C нет $\implies$ непрерывность $\mathbb{R}$.

Десятичные дроби

Пусть числу $\alpha \in \mathbb{R}$ соответствует сечение $(\mathcal{A}_*; \mathcal{A}^*)$. За a_0 обозначим наибольшее целое число из $\mathcal{A}_*$. Отрезок $[a_0; a_0 + 1]$ поделим на 10 отрезков одинаковой длины и выберем среди них тот, который содержит α: $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10}; a_0 + \frac{a_1+1}{10}]$. На шаге n $\alpha \in [a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10}; a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n+1}{10}]$. Бесконечную десятичную дробь $a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ можно считать представлением действительного числа α. Заметим, что если α можно представить как $\frac{p}{10^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, (то есть α – сократимая десятичная дробь) то α соответствуют две десятичные дроби: $a_0, a_1 a_2 ... a_n 000...$ и $a_0, a_1 a_2 ... (a_n - 1) 999...$.

Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу)

Множество X ограничено сверху, если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \longmapsto x \le C$

Число M называется верхней гранью множества X, если $\forall x \in X \longmapsto x \le M$

Число $\alpha = \sup X$ называется точной верхней гранью множества X, если $\forall x \in X \longmapsto x \le \alpha \land \forall \alpha' \exists x \in X : x > \alpha'$.

Лемма: если множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент $M = \max X$, то $M = \sup X$.
Доказательство: так как M – наибольший элемент X, то все остальные элементы X меньше M и не являются верхней гранью X, так как $M \in X$ и $M > x$. Следовательно, M – точная верхняя грань X.

Теорема: для ограниченного сверху множества $X \subset \mathbb{R}$ существует единственная точная верхняя грань.
Доказательство: если в X есть наибольший элемент, то α равно ему. Есть в X наибольшего элемента нет, то построим сечение $(\mathcal{A}_*, \mathcal{A}^*)$, такое, что в $\mathcal{A}^*$ содержатся все верхние грани X, а в $\mathcal{A}_*$ – все остальные числа, при этом множество $\mathcal{A}^*$ не пусто, так как X ограничено сверху, а $X \subset \mathcal{A}_*$, так как если элемент из $X \in \mathcal{A}^*$, то он является максимальным. По теореме Дедекинда, если либо больший элемент в $\mathcal{A}_*$, либо меньший в $\mathcal{A}^*$. Если в $\mathcal{A}_*$ есть наибольший элемент, то он является верхней гранью X – противоречие. Следовательно есть наименьший элемент в $\mathcal{A}^*$, который по определению является точной верхней гранью X.

Теперь докажем единственность точной верхней грани. Пусть α, α' – точные верхние грани множества X, $\alpha' < \alpha$. Так как α – точная верхняя грань, $\forall \beta < \alpha \exists x \in X : x > \beta \implies \exists x' \in X : x' > \alpha' \implies \alpha' \neq \sup X$.

Счетность множества рациональных чисел

Докажем счетность множества полжительных рациональных чисел.
Пусть $H \geq 2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим все взаимно простые пары чисел $p, q \in N$, такие что $p + q = H$, и соответствующие им рациональные числа. Понятно, что таких пар конечное число, и таким образом представляется любое рациональное число.
Теперь расставим соответствующие каждому H рациональные числа по порядку и пронумеруем их:
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, ...$
Так как множество положительных рациональных чисел счетно, то и аналогичным образом счетно множество отрицательных рациональных чисел, а их объединение в объединении вместе с конечным множетсвом, состоящим из 0, так же счетно и является $\mathbb{R}$.

Несчетность множества действительных чисел

Если подмножество множества несчетно, то и само оно несчетно.
Рассмотрим числа на интервале $(0; 1)$, представленные в виде десятичных дробей:
$\alpha_1 = 0, a_1^1 a_2^1 ... a_n^1 ...$
$\alpha_2 = 0, a_1^2 a_2^2 ... a_n^2 ...$
...
$\alpha_k = 0, a_1^k a_2^k ... a_n^k ...$
...
Допустим, что подмножество $(0; 1)$ счетно.
Построим число γ такое, что $\gamma = 0, c_1 c_2 ... c_n ...$; $c_i \neq a_i^i, c_i \neq 9$. γ не равно ни одному из a_i, что противоречит тому, что $(0; 1)$ счетно. Следовательно, само множество действительных чисел также счетно.

2

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если:

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n| > M$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n| < \varepsilon$$

Теорема: сумма двух бесконечно маллых последовательностей также является бесконечно малой.
Доказательство: пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно малые:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_x = N_x(\varepsilon) : \forall n \geq N_x \longmapsto |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_y = N_y(\varepsilon) : \forall n \geq N_y \longmapsto |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_x(\varepsilon), N_y(\varepsilon)) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

следовательно, $\{x_n\} + \{y_n\}$ – также бесконечно малая последовательность.

Теорема: бесконечно малая последовательность ограничена.
Доказательство: пусть последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно малая:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n| < \varepsilon$$

Возьмем произвольное ε_0. Тогда $\forall n \geq N(\varepsilon_0) \longmapsto |x_n| < \varepsilon_0$. Выберем среди первых $N(\varepsilon_0)$ членов последовательности максимальный по модулю и обозначим его модуль за ε_1. Тогда $\forall x : 1 \leq x \leq N(\varepsilon_0) \longmapsto |x_n| \leq \varepsilon_1$. Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N} \longmapsto |x_n| \leq \varepsilon = \max(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \implies \{x_n\}$ ограничена.

Теорема: произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей – бесконечно малая последовательность.
Доказательство: пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, $\{y_n\}$ – бесконечно малая:

$$\exists C > 0 : \forall n \longmapsto |x_n| \leq C$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |y_n| < \frac{\varepsilon}{C}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n y_n| \leq C|y_n| < \varepsilon$$

Теорема: произведение двух бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая последовательность.
Доказательство: Любая бесконечно малая последовательность ограничена, следовательно про-

изведение двух бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая, как и произведение бесконечно малой и ограниченной.

Теорема: если все члены бесконечно малой последовательности с какого-то номера равны γ, то $\gamma = 0$.
Доказательство: пусть $\gamma \neq 0$. Последовательность $\{x_n\}$ бесконечно мала, возьмем $\varepsilon_0 = |\gamma|$ и проверим для него условие:

$$\exists N = N(\gamma) : \forall n \geq N \longmapsto |\gamma| < |\gamma|$$

получается противоречие.

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то с какого-то номера определена бесконечно малая последовательность $\{y_n\} = \{\frac{1}{x_n}\}$.
Доказательство: так как $\{x_n\}$ – бесконечно большая:

$$\forall M > 0 \exists N = N(M) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n| > \frac{1}{M} \implies \frac{1}{|x_n|} < M$$

Следовательно $\{y_n\}$ – бесконечно малая.

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ – ограниченная, а $\{y_n\}$ – бесконечно большая, то с какого-то номера определена бесконечно малая последовательность $\{z_n\} = \{\frac{x_n}{y_n}\}$.
Доказательство: так как $\{y_n\}$ – бесконечно большая, $\{y'_n\}$, где $y'_n = \frac{1}{y_n}$, – бесконечно малая. Тогда $\{z_n\}$ – бесконечно малая как произведение бесконечно малой и ограниченной.

Теорема: если последовательность $\{|x_n|\}$ ограничена снизу $c > 0$, а $\{y_n\}$ – бесконечно малая и $y_n \neq 0 \forall n$, то $\{z_n\} = \{\frac{x_n}{y_n}\}$ – бесконечно большая.
Доказательство: так как $\{y_n\}$ – бесконечно малая:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |y_n| < \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{|y_n|} > \varepsilon$$

Следовательно $\{y_n\}$ – бесконечно большая. $|x_n y_n| > C|y_n| > \varepsilon$, следовательно $\{z_n\}$ – бесконечно большая.

Предел числовой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, если последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = x_n - a$, бесконечно мала.
Число $a = \lim_{x \to \infty} x_n$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n - a| < \varepsilon$$

Единственность предела

Доказательство: пусть a_1 – предел последовательности $\{x_n\}$ и a_2 – предел $\{x_n\}$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1 \longmapsto |x_n - a_1| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2 \longmapsto |x_n - a_2| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)) : \forall n \geq N \longmapsto x_n \in (a_1 - \varepsilon; a_1 + \varepsilon) \cap (a_2 - \varepsilon; a_2 + \varepsilon)$$

При $\varepsilon \leq \frac{a_1+a_2}{2}$ $(a_1 - \varepsilon; a_1 + \varepsilon) \cap (a_2 - \varepsilon; a_2 + \varepsilon) = \varnothing$ – противоречие.

Арифметические операции со сходящимися последовательностями

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, а $\{y_n\}$ – к b, то их сумма $\{z_n\} = \{x_n\} + \{y_n\}$ сходится к $a + b$.
Доказательство: $x_n = a_n + a$, $y_n = b_n + b$, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{c_n\}$, где $c_n = x_n - a + y_n - b = a_n + b_n$, – бесконечно мала, следовательно $a + b$ – предел $\{z_n\}$

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, а $\{y_n\}$ – к b, то их произведение $\{z_n\} = \{x_n\} \cdot \{y_n\}$ сходится к ab.
Доказательство: $x_n = a_n + a$, $y_n = b_n + b$, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{c_n\}$, где $c_n = x_n y_n - ab = (a_n + a)(b_n + b) - ab = a_n b_n + b a_n + a b_n$, – бесконечно мала, следовательно ab – предел $\{z_n\}$

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, а $\{y_n\}$ – к $b \neq 0$, то с какого-то номера определена последовательность их частного $\{z_n\} = \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}$, которая сходится к $\frac{a}{b}$.
Доказательство: $x_n = a_n + a$, $y_n = b_n + b$, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Докажем сначала существование $\{z_n\}$. Пусть $\varepsilon_0 = \frac{|b|}{2}$.

$$\exists N = N(\varepsilon_0) : \forall n \geq N \longmapsto |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

$$\frac{|b|}{2} < y_n < \frac{3|b|}{2}$$

$$\frac{1}{y_n} < \frac{2}{|b|}$$

Видно, что $\{y_n\}$ с $N(\varepsilon_0)$ не равна 0, и что последовательность $\{\frac{1}{y_n}\}$ ограничена.
Последовательность $\{c_n\}$, где $c_n = \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n+a}{b_n+b} - \frac{a}{b} = \frac{ba_n+ab-ab-ab_n}{b(b_n+b)} = \frac{1}{b_n+b}(a_n - \frac{a}{b} b_n)$, – бесконечно мала как произведение ограниченной и бесконечно малой, следовательно $\frac{a}{b}$ – предел $\{z_n\}$

Свойства пределов, связанные с неравенствами

Теорема: Если для последовательности $\{x_n\}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R} : \forall n \geq n_0 \longmapsto x_n \geq b \land \exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $a \geq b$.
Доказательство: Пусть $a < b$:

$$\varepsilon_0 = b - a$$

$$\exists n_1 = n_1(\varepsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_1 \longmapsto |x_n - a| < b - a$$

$$x_n - a < b - a$$

$$x_n < b$$

что противоречит тому, что $x_n \geq b$

Теорема: Если для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \longmapsto x_n \geq y_n \land \exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \land \exists \lim_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \geq b$.

Доказательство: Пусть $a < b$:

$$\varepsilon_0 = \frac{b-a}{2}$$

$$\exists n_1 = n_1(\varepsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_1 \longmapsto |x_n - a| < \frac{b-a}{2}$$

$$\exists n_2 = n_2(\varepsilon_0) \geq n_0 : \forall n \geq n_2 \longmapsto |y_n - b| < \frac{b-a}{2}$$

$$x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} < y_n$$

$$x_n < y_n$$

что противоречит тому, что $x_n \geq y_n$

Теорема: Если для последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ то $\exists \lim_{n\to\infty} z_n = a$. $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \longmapsto \wedge \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$,
Доказательство:

$$x_n - a \geq y_n - a \geq z_n - a$$

$$|y_n - a| \leq \max(|x_n - a|, |z_n - a|)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\varepsilon_0) : \forall n \geq N_1 \longmapsto |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\varepsilon_0) : \forall n \geq N_2 \longmapsto |z_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\varepsilon_0), N_2(\varepsilon_0)) : \forall n \geq N_2 \longmapsto |y_n - a| < \varepsilon$$

Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

Теорема: Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена и монотонна, то она сходится к своей точной верхней грани (если она неубывает или возрастает), или к своей точной нижней грани (если она невозрастает или убывает).
Доказательство: пусть $\{x_n\}$ возрастает.

$$a = \sup\{x_n\} \implies \forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon) : x_N > a - \varepsilon$$

$$0 \leq a - x_N < \varepsilon$$

так как $\{x_n\}$ возрастает

$$\forall n > N \longmapsto x_n > x_N \implies 0 \leq a - x_n < a - x_N < \varepsilon$$

следовательно $\{x_n\}$ сходится к $a = \sup\{x_n\}$.

Теорема Кантора о вложенных отрезках

Системой стягивающихся отрезков называют последовательность $\{[a_n; b_n]\}$, если:

- $\forall n \longmapsto [a_{n+1}; b_{n+1}] \subseteq [a_n; b_n]$
- $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Теорема: система стягивающихся отрезков имеет единственную точку, принадлежащую им всем.
Доказательство: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ограничены и монотонны, следовательно $\exists c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$.
Пусть $\exists c' > c : c' \in [a_n; b_n] \forall n$. Тогда $\forall n b_n - a_n \geq c' - c > 0 \implies lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) > 0$, что противоречит тому, что $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Число e

Теорема: число $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
Доказательство:

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + ... + \frac{n(n-1)...(n-(n-1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + ... + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)...\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$x_{n+1} > x_n$$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x_n \leq 2 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Последовательность монотонно возрастает и ограничена, следовательно $\exists \lim_{n\to\infty}\{x_n\} = e$.

3

Подпоследовательности, частичные пределы

Подпоследовательности

Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, $\{k_n\}$ – возрастающая последовательность из натуральных чисел. Тогда $\{x_{k_n}\}$ называется подпоследовательностью $\{x_n\}$.

Частичные пределы

Если $\{x_{k_n}\}$ сходится к a, то a – частичный предел $\{x_n\}$.

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема: если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то у нее есть сходящаяся последовательность $\{x_{k_n}\}$.

Доказательство: Так как $\{x_n\}$ ограничена, $\exists \alpha, \beta : \alpha \leq x_n \leq \beta \forall n$. На отрезке $[\alpha; \beta]$ лежит бесконечное колличество членов последовательности. Выберем такой отрезок $[\alpha_1; \beta_1]$, на котором лежит бесконечное колличество членов последовательности и для которого $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta - \alpha}{2}$. На шаге n имеем $\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(b-a)\frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma$$

Выберем x_{k_1} такое, что $x_{k_1} \in [a_1; b_1]$. Выберем x_{k_2} такое, что $x_{k_2} \in [a_2; b_2]$ и $k_2 > k_1$. Такое k_2 существует, потому что если не учитывать все элементы последовательности, чей номер меньше или равен k_1, на $[a_2; b_2]$ все равно лежит бесконечное колличество членов $\{x_n\}$. На шаге n выбираем x_{k_n} такое, что $x_{k_n} \in [a_n; b_n]$ и $k_n > k_{n-1}$.

$$a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma \implies \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \gamma$$

Критерий Коши существования конечного предела последовательности

Фундаментальная последовательность

Если для последовательности $\{x_n\}$ выполняется следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \longmapsto |x_n - x_m| < \varepsilon$$

то она называется фундаментальной.

Критерий Коши

Теорема: чтобы у последовательности $\{x_n\}$ существовал конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство:

Необходимость: пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \longmapsto |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{-\varepsilon}{2} < x_n - a < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{-\varepsilon}{2} < a - x_m < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$-\varepsilon < x_n - x_m < \varepsilon$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

следовательно, $\{x_n\}$ – фундаментальная.
Достаточность: если $\{x_n\}$ фундаментальная, то она ограничена, следовательно у нее есть подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, сходящаяся к a:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\varepsilon) : \forall n \geq N_1 \longmapsto |x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $\{x_n\}$ фундаментальная:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_2 = N_2(\varepsilon) : \forall n, m \geq N_2 \longmapsto |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall\varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)) : \forall n \geq N \longmapsto |x_n - a| = |x_n - x_{k_N} + x_{k_N} - a| \leq |x_n - x_{k_N}| + |x_{k_N} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

следовательно, $\{x_n\}$ сходится к a.

4

Определения предела функции в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность

Далее подразумевается, что функция $f(x)$ определена в некой выколотой Δ окрестности точки x_0: $X = \{x : 0 < |x - x_0| < \Delta\}$.

Предел функции в точке по Коши

Число $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$ называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \longmapsto |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Предел функции а точке по Гейне

Последовательностью Гейне назовем сходящуюся к x_0 последовательность $\{x_n\}$, где $x_n \neq x_0$.
Число a называется пределом функции в точке x_0, если для произвольной сходящейся к x_0 последовательности Гейне с какого-то n_0 определена $f(x_n)$, и $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$

Эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне

Теорема: определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны.
Доказательство:
Пусть a – предел функции в точке x_0 по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in X : 0 < |x_n - x_0| < \delta$$

Для любой последовательности Гейне, сходящейся к x_0, найдется $N = N(\delta) = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \longmapsto 0 < |x_n - x_0| < \delta \implies |f(x_n) - a| < \varepsilon \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$. $f(x_n)$ сходится к a для произвольной последовательности Гейне, следовательно a – предел $f(x)$ в точке x_0 по Гейне.
Пусть a – предел функции в точке x_0 по Гейне, а по Коши он не равен a:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \longmapsto |f(x_\delta) - a| \geq \varepsilon_0$$

$$\delta_n = \frac{1}{n} > 0 \implies \exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \delta_n \longmapsto |f(x_n) - a| \geq \varepsilon_0$$

То есть существует такая сходящаяся к x_0 последовательность Гейне $\{x_n\}$, для которой $\{f(x_n)\}$ не сходится к a, что противоречит тому, что a – предел по Гейне.

Свойства пределов функции

Вытекают из свойств предела последовательностей и применения определения предела функции по Гейне.

Критерий Коши существования конечного предела функции

Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке x_0, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x_1, x_2 \in X : 0 < |x_1 - x_0| < \delta \wedge 0 < |x_2 - x_0| < \delta \longmapsto |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Теорема: для того, чтобы функция $f(x)$ в имела конечный предел в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши в точке x_0.
Доказательство:
Необходимость: пусть $a = \lim_{x\to x_0} f(x)$:

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x_1, x_2 \in X : 0 < |x_1 - x_0| < \delta \wedge 0 < |x_2 - x_0| < \delta \longmapsto |(f(x_1) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |(f(x_0) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(x_1) - f(x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) - f(x_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$-\varepsilon < f(x_1) - f(x_2) < \varepsilon$$
$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

следовательно, $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке x_0.
Достаточность: пусть $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке x_0:

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta = \delta(\varepsilon) : \forall x_1, x_2 \in X : 0 < |x_1 - x_0| < \delta \wedge 0 < |x_2 - x_0| < \delta \longmapsto |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Возьмем произвольную сходящуюся к x_0 последовательность Гейне.

$$\forall\delta\exists N = N(\delta) = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \longmapsto 0 < |x_n - x_0| < \delta \wedge 0 < |x_m - x_0| < \delta \longmapsto |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

Следовательно $\{f(x_n)\}$ фундаментальна и сходится к некому a.
Покажем, что $\{f(x_n)\}$ сходится к одному a вне зависимости от выбора последовательности Гейне $\{x_n\}$.
Пусть $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ сходятся к x_0, $\{f(x'_n)\}$ сходится к a', $\{f(x''_n)\}$ сходится к a''. Построим новую последовательность Гейне $\{\bar{x}_n\} = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, ..., x'_n, x''_n, ...\}$. $\{f(\bar{x}_n)\}$ – фундаментальная, значит она сходится к $\bar{a}$. Раз $\{f(\bar{x}_n)\}$ сходится к $\bar{a}$, значит $\{f(x'_n)\}$ и a', $\{f(x''_n)\}$ сходятся к $\bar{a}$, $\bar{a} = a' = a''$. Следовательно $\bar{a}$ – предел $f(x)$ в точке x_0 по Гейне.

Предел сложной функции

Пусть функция $f(x)$ определена в выколотой Δ_1 окрестности точки x_0: $X = \{x : 0 < |x - x_0| < \Delta_1\}$, а функция $g(x)$ определена в выколотой Δ_2 окрестности точки y_0: $Y = \{y : 0 < |y - y_0| < \Delta_2\}$, $f(X) \subseteq Y$.
Теорема: Если предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен y_0, сама $f(x)$ на X не принимает значения y_0, предел функции $g(y)$ в точке y_0 равен a, то предел функции $h(x) = g(f(x))$ в точке x_0 равен a.
Доказательство:
Для произвольной сходящейся к x_0 последовательности Гейне $\{x_n\}$ $\{f(x_n)\}$ является сходящейся к y_0 последовательностью Гейне. Следовательно, $\{g(f(x_n))\} = \{h(x_n)\}$ сходится к a, a – предел в точке x_0 функции $h(x)$ про Гейне.

Существование односторонних пределов у монотонных функций

Теорема: если $f(x)$ определена и монотонна на $(a; b)$, то $\forall x_0 \in (a; b)\exists f(x_0 - 0) \wedge \exists f(x_0 + 0)$. Если $f(x)$ неубывает или возрастает на $(a; b)$, то $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$. Если $f(x)$ невозрастает или убывает на $(a; b)$, то $f(x_0 - 0) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + 0)$.

Доказательство: пусть $f(x)$ возрастает на $(a;b)$. Докажем существование $f(x-0)\forall x$:

$$\forall x_0 \in (a;b)\forall x \in (a;x_0) \longmapsto f(x) < f(x_0) \implies \exists \sup_{(a;x_0)} f(x) = \alpha \leq f(x_0)$$

$$\forall \varepsilon \exists x_\varepsilon \in (a;x_0) : f(x_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon$$

$$\delta = \delta(\varepsilon) = x_0 - x_\varepsilon > 0$$

$$\forall x : 0 < x_0 - x < \delta \longmapsto \alpha - \varepsilon < f(x) \leq \alpha$$

$$\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$$

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

$$f(x_0 - 0) = \alpha$$

существование $f(x+0)\forall x$ доказывается аналогичным образом.

5

Непрерывность функции в точке

Функция $f(x)$ называет непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$ тоже непрерывны в x_0. Если $g(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.
Доказательство: Следует из свойств арифметических операций с пределами.

Теорема: если функция $f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0, то существует такая δ-окрестность точки x_0, в пределах которой $f(x)$ сохраняет свой знак.

Функцию $\Delta y(x_0, \Delta x)$ в точке x_0 определим как $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
Теорема: если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y(x_0, \Delta x) = 0$.

Односторонняя непрерывность

Функция $f(x)$ называет одностонне непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0)$$

Непрерывность сложной функции

Теорема: если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то функция $h(x) = g(f(x_0))$ непрерывна в точке x_0.
Доказательство: по теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g(f(x_0))$.

Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции

Теорема: если предел функции $f(x)$ точке x_0 равен y_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$.
Доказательство: возьмем сходящуюся к x_0 последовательность Гейне $\{x_n\}$, тогда последовательность $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$ сходится к y_0. Последовательность $\{g(y_n)\}$ сходится к $g(y_0) = g(\lim_{n \to \infty} f(x_n))$. Следовательно $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$.

Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций

Классификация точек разрыва:

- точка x_0 – устранимая точка разрыва, если $f(x)$ либо не определена, либо не непрерывна в точке x_0.
- точка x_0 – точка разрыва первого рода, если для $f(x)$ существуют и не равны левый и правый пределы в точке x_0. Их разность $\omega(x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции в точке x_0.

- точка x_0 – точка разрыва второго рода, если для $f(x)$ не существует конечного левого или правого предела в точке x_0.

Теорема: монотонной функция, определенная на $(a;b)$, имеет только точки разрыва первого рода.
Доказательство: пусть $f(x)$ возрастает на $(a;b)$. Точек разрыва второго рода нет в силу теоремы о существование односторонних пределов у монотонных функций. В силу той же теоремы и неравенстава $f(x-0) \leq f(x_0) \leq f(x_0+0)$, $f(x-0) = f(x_0+0) = \gamma \neq f(x_0)$ не может выполняться, и следовательно x_0 не может быть устранимой точкой разрыва.

Теорема: множество точек разрыва определенной на $(a;b)$ монотонной функции $f(x)$ не более, чем счетно.
Доказательство: каждой точке разрыва x_0 соответствует интервал $(f(x_0-0); f(x_0+0))$ точки которого за исключением, быть может, $f(x_0)$, не входят в область определения $f(x)$. В силу монотонности $f(x)$ эти интервалы не пересекаются. На каждом интервале выберем рациональную точку. Таким образом мы установили взаимнооднозначное соответствие между точками разрыва и подмножеством счетного множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

6

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Ограниченность

Теорема: если функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.
Доказательство: пусть $f(x)$ неограничена на $[a;b]$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a;b] : |f(x_n)| > n$$

$$\{y_n\} = \{f(x_n)\}$$

последовательность $\{y_n\}$ – бесконечно большая. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, следовательно она содержит в себе сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$. Раз последовательность $\{x_{k_n}\}$ сходится, а $f(x)$ непрерывна, последовательность $\{f(x_{k_n})\}$ сходится и не является бесконечно большой, что противоречит тому, что $\{f(x_n)\}$ – бесконечно большая.

Достижимость точных верхней и нижней граней

Теорема: если функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает свою точную верхнюю грань α и свою точную нижнюю грань β.
Доказательство: пусть $f(x)$ не достигает α. Введем функцию $g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}$, непрерывную на $[a;b]$. Она ограничена сверху A.

$$\frac{1}{\alpha - f(x)} \leq A$$

$$f(x) \leq \alpha - \frac{1}{A}$$

следовательно $\alpha - \frac{1}{A}$ – верхняя грань $f(x)$, что противоречит тому, что α – точная верхняя грань.

Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема: если функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то существует такое $x_0 \in (a;b)$, что $f(x_0) = 0$.
Доказательство: пусть $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$.

$$X = \{x \in [a;b] : f(x) < 0\} \neq \varnothing$$

$$\exists x_0 = \sup X$$

так как $f(x)$ непрерывна справа в точке a, она сохраняет свой знак в какой-то окрестности a, следовательно $x_0 \in (a;b)$. Предположим, что $f(x_0) \neq 0$. Тогда в некой δ окрестности она сохраняет свой знак. Так как $x_0 = \sup X$, $\exists x' \in (x_0 - \delta; x_0) : f(x') < 0$. Однако $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \longmapsto f(x) \geq 0$. Следовательно, $f(x_0)$ не сохраняет свой знак ни в какой δ окрестности и равна 0.

Теорема: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает любого своего промежуточного значения.
Доказательство: пусть $g(x) = f(x) - \gamma$, где γ – некое промежуточное значение. Функция $g(x)$ непрерывна и на концах $[a;b]$ принимает значения разных знаков, следовательно она достигает 0 в некой точке x_0. $f(x_0) = g(x_0) + \gamma = \gamma$.

Теорема об обратной функции

Обратная функция

Пусть $f(x)$ определена на множестве X, Y – множество ее значений. Если выполняется условие:

$$\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$$

то на Y существует обратная функция $f^{-1}(y)$, каждому $y \in Y$ сопоставляющая такой $x \in X$, что $y = f(x)$.

Теорема об обратной функции

Лемма: если $f(x)$ определена и строго монотонна на X, Y – множество ее значений, тогда на Y определена и имеет такой же тип сторогой монотонности, что и $f(x)$, обратная функция $f^{-1}(y)$.
Доказательство: так как $f(x)$ сторого монотонна:

$$\forall x_1 \neq x_2 \longmapsto f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2)$$

Следовательно, на Y существует обратная функция $f^{-1}(y)$. Пусть $f(x)$ возрастает. Докажем возрастание $f^{-1}(y)$:

$$\forall y_1 > y_2 \in Y \longmapsto f^{-1}(y_1) = x_1 > x_2 = f^{-1}(y_2)$$

пусть это не так:

$$x_1 \leq x_2$$

$$f(x_1) = y_1 \leq y_2 = f(x_2)$$

противоречие.

Теорема: пусть на $[a; b]$ определена, непрерывна и сторого монотонна функция $f(x)$, $\alpha = \inf_{[a;b]} f(x)$, $\beta = \sup_{[a;b]} f(x)$. Тогда на $[\alpha; \beta]$ определена, непрерывна и сторого монотонна в том же направлении, что $f(x)$, обратная функция $f^{-1}(y)$.
Доказательство: существование и строгая монотонность $f^{-1}(y)$ следует из леммы. Докажем непрерывность обратной функции для возрастающей $f(x)$. Для монотонно возрастающей $f^{-1}(y)$ для всех $y_0 \in (a; b)$ выполняется следующее неравенставо:

$$f^{-1}(y_0 - 0) \leq f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y_0 + 0)$$

Пусть разрывна в какой-то точке $y_0 \in (\alpha; \beta)$:

$$f^{-1}(y_0 - 0) < f^{-1}(y_0) \vee f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0 + 0)$$

Пусть выполняется левое неравенставо $f^{-1}(y_0 - 0) < f^{-1}(y_0)$:

$$\forall y \in [\alpha; y_0) \longmapsto a \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0 - 0) = \sup_{[\alpha; y_0)} f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)$$

$$\forall y \in [y_0; \beta] \longmapsto f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y) = \sup_{[\alpha; y_0)} f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)$$

значит $(f^{-1}(y_0 - 0); f^{-1}(y_0))$ не принадлежит области значений $f^{-1}(y)$. Интервал $(f^{-1}(y_0 - 0); f^{-1}(y_0))$ лежит на отрезке $[a; b]$. Следовательно образом $[\alpha; \beta]$ является множество $[a; f^{-1}(y_0 - 0)) \cup (f^{-1}(y_0); b]$,

что противоречит тому, что образ $[\alpha;\beta]$ – $[a;b]$.
К аналогичному противоречию проходим, рассмотрев правое неравенство $f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0+0)$.
Для концов отрезка надо аналогичным образом доказать, что $f^{-1}(\alpha+0) = f^{-1}(\alpha)$ и $f^{-1}(\beta-0) = f^{-1}(\beta)$.

7

Второй замечательный предел

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Определение и свойства экспоненты, показательной функции, логарифмической и степенной функций

Степенная функция с рациональным показателем

Функцию $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$ где $x > 0 \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ назовем степенной с рациональным показателем. Если $p = 0$, то $f(x) = 1$, если $p < 0$, то $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{-p}{q}}}$.
Свойства степенной функции с рациональным показателем $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = x^r$:

- $(\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$
- $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \implies (x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}$
- $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \implies x^{r_1}x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$
- $x > 1, r > 0 \implies x^r > 1$
- $x > 1, r_1 < r_2 \in \mathbb{Q} \implies x^{r_1} < x^{r_2}$

Показательная функция

Пусть $a > 0, x \in \mathbb{R}$. Последовательность $\{r_n\}$ сходится к x. Определим показательную функцию как

$$f(x) = a^x = \lim_{n\to\infty} r_n$$

Свойства показательной функции $f(x) = a^x$:

- $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \implies (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$
- $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \implies a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$
- $a > 1 \implies \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \wedge \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
- $0 < a < 1 \implies \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \wedge \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

Если $a = e$, то $f(x)$ называется экспоненциальной функцией, или экспонентой.

Логарифмическая функция

По теореме об обратной функции, на интервале $(0; +\infty)$ определена обратная $f(x) = a^x$ где $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ функция $g(x) = \log_a x$.
Свойства логарифмической функции:

- $a > 1 \implies \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \wedge \lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$
- $0 < a < 1 \implies \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \wedge \lim_{x\to+0} \log_a x = +\infty$

Если $a = e$, то $f(x)$ называется натуральным логарифмом.

Степенная функция с действительным показателем

Степенную функцию с действительным показателем определим как $f(x) = x^\beta = \left(a^{\log_a x}\right)^\beta = a^{\beta \log_a x}$, где $x > 0, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, \beta \in \mathbb{R}$.

Непрерывность элементарных функций

Элементарные функции непрервны всюду, где определены.

8

Производная функции одной переменной

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется следующий предел:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Односторонние производные

Производные справа и слева определяются соответственно как:

$$f'(x_0 \pm 0) = \lim_{x \to x_0 \pm 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Непрерывность функции, имеющей производную

Теорема: если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрервна в точке x_0
Доказательство: пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0:

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = f(x) - f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

Дифференцируемость функции в точке, дифференциал

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, если ее приращение $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, соответствующее приращению аргумента Δx, можно представить в виде $\Delta f(x_0, \Delta x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $x \to 0$.

Теорема: понятие дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0 эквивалентно тому, что у функции $f(x)$ существует производная в точке x_0.
Доказательство: Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0:

$$\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = A$$

Пусть у функции $f(x)$ есть производная в точке x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Геометрический смысл производной и дифференциала

Значение производной в точке – тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке.

Производная суммы, произведения и частного двух функций

Теорема: пусть у функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют производные в точке x_0. Тогда для функций $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ (если $g(x_0) \neq 0$) существуют производные.

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

Доказательство:
Для суммы и разности:

$$(f(x) \pm g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x}$$

$$(f(x) \pm g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x)) \pm (g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x}$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Для произведения функций:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x) - g(x)) + (f(x+\Delta x) - f(x))g(x)}{\Delta x}$$

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Для отношения функций:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\Delta x} - \frac{f(x)}{g(x)\Delta x}\right)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}\right)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Производная сложной функции

Теорема: Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, функция $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда производная функции $h(x) = g(f(x))$ в точке x_0 равна $h'(x_0) = g'(f(x_0)f'(x_0)$
Доказательство:

$$\Delta g(y_0, \Delta y) = g'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y)\Delta y$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \alpha(\Delta y) = 0$$

$$\Delta x \to 0 \implies \Delta y \to 0$$
$$\frac{\Delta g(y_0, \Delta y)}{\Delta x} = g'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(y_0, \Delta y)}{\Delta x} = (g(f(x))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) + 0 = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Производная обратной функции

Теорема: Пусть функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на множестве $X = x : |x - x_0| \leq \delta$ и в точке x_0 имеет производную $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $f^{-1}(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$ имеет производную $f'(y_0) = \frac{1}{f(x_0)}$.
Доказательство: Обратная функция $f^{-1}(y)$ существует по теореме об обратной функции.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$
$$\Delta x \to 0 \implies \Delta y \to 0$$
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$
$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Производные элементарных функций

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \frac{1 + \Delta x - 1}{\Delta x} = e^x$$
$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x\Delta x} = \frac{1}{x}$$
$$(x^\beta)' = (e^{\beta \ln x})' = \frac{\beta}{x} e^{\beta \ln x} = \beta x^{\beta - 1}$$
$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x$$
$$(\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$
$$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
$$(\arcsin x)' = (\arcsin(\sin \varphi))' = \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$(\arccos x)' = (\arcsin(\cos \varphi))' = \frac{-1}{\sin \varphi} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$(\arctan x)' = (\arctan(\tan \varphi))' = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной

Определение дифференциала

Дифференциалом функции $f(x)$ df в точке x_0 назовем линейную относительно Δx часть приращения $\Delta f(x_0, \Delta x)$ функции $f(x)$, соответствующую приращению аргумента Δx.

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Дифференциалом независимой переменной x dx назовем любое число.

$$dx = \Delta x$$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$
$$f'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$$

Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной

Пусть функция $z = g(y)$ дифференцируемая в точке y_0:

$$dz = g'(y_0)dy$$

Пусть функция $g(y)$ дифференцируемая в точке $y_0 = f(x_0)$, $f(x)$ дифференцируема в точке x_0:

$$z = h(x) = g(f(x))$$

$$h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$$
$$h'(x_0) = \frac{dz}{dx} = g'(y_0)\frac{dy}{dx}$$
$$dz = g'(y_0)dy$$

Вне зависимости от того, является ли y независимой переменной или $y = f(x)$, дифференциал $z = g(y)$ всегда имеет один вид $dz = g'(y_0)dy$.

Функции, заданные параметрически, их дифференцирование

Функции, заданные параметрически

Пусть функции $x = u(t)$ и $y = v(t)$ определены на множестве $T = [\alpha; \beta]$. Тогда функция $y = f(x)$ задана параметрически, а t – параметр.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Теорема: пусть функции $x = u(t)$ и $y = v(t)$ непрерывны и сторого монотонны на множестве $T = [\alpha; \beta]$ и дифференцированы в точке t_0, $u'(t_0) \neq 0$. Тогда $f'(x_0) = f'(x(t_0)) = \frac{u'(t_0)}{v'(t_0)}$
Доказательство: по теореме об обратной функции, существует обратная функция $t = u^{-1}(x)$.

$$y = v(t)$$

$$t'(x_0) = \frac{1}{u'(t_0)}$$

$$y(x_0) = v(t(x_0))$$

$$y'(x_0) = v'(t_0)t'(x_0) = \frac{v'(t_0)}{u'(t_0)}$$

9

Производные высших порядков

Производная порядка n функции $f(x)$ в точке x_0 $f^{(n)}(x_0)$ – производная производной порядка $n-1$ функции $f(x)$ в точке x_0 $f^{(n-1)}(x_0)$.
Функция $f(x)$ n раз диффиренцируема в точке x_0, если в точке x_0 у нее существует производная порядка n $f^{(n)}(x_0)$.

Формула Лейбница для n-й производной произведения функций

Теорема: пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ n дифференцируемы в точке x_0. Тогда производная порядка n их произведения $f(x)g(x)$ в точке x_0 $(f(x)g(x))^{(n)}(x_0)$ равна $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x_0)g^{n-k}(x_0)$.
Доказательство: докажем по индукции.
База: $n=1$:

$$(f(x)g(x))'(x_0) = \binom{n}{0}f(x_0)g'(x_0) + \binom{n}{1}f'(x_0)g(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

база верна.
Переход: предположим верно для n:

$$(f(x)g(x))^{(n)}(x_0) = \binom{n}{0}f(x_0)g^{(n)}(x_0) + \binom{n}{1}f'(x_0)g^{(n-1)}(x_0) + ... + \binom{n}{n}f^{(n)}(x_0)g(x_0)$$

Проверим для $n+1$:

$$(f(x)g(x))^{(n+1)}(x_0) = \binom{n}{0}(f(x)g^{(n)}(x))'(x_0) + \binom{n}{1}(f'(x)g^{(n-1)}(x))'(x_0) + ... + \binom{n}{n}(f^{(n)}(x)g(x))'(x_0)$$

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))^{(n+1)}(x_0) = \binom{n}{0}f(x_0)g^{(n+1)}(x_0) + \binom{n}{0}f'(x_0)g^{(n)}(x_0) + \\ \binom{n}{1}f'(x_0)g^{(n)}(x_0) + \binom{n}{1}f''(x_0)g^{(n-1)}(x_0) + ... + \\ \binom{n}{n}(f^{(n)}(x_0)g'(x_0)) + \binom{n}{n}(f^{(n+1)}(x_0)g(x_0))'\end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

$$\binom{n}{n0} = \binom{n+1}{0}$$

$$(f(x)g(x))^{(n+1)}(x_0) = \binom{n+1}{0}f(x_0)g^{(n+1)}(x_0) + \binom{n+1}{1}f'(x_0)g^{(n)}(x_0) + ... + \binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0)g(x_0)$$

Дифференциал второго порядка

Пусть функция $f(x)$ дифференципуема в Δ окрестности точки x_0 и дважды дифференцируема в точке x_0. Тогда в Δ окрестности точки x_0 определена функция $dy = f'(x)dx$. Дифференциал второго порядка функции $f(x)$ в точке x_0 – дифференциал ее дифференциала dy в точке x_0 $d^2f(x_0)$.

Отсутствие инвариантности формы дифференциал второго порядка относительно замены переменной

Пусть $z = g(y)$. Тогда:

$$dz = g'(y_0)dy$$

$$d(dz)(y_0) = d(g'(y)dy)(y_0) = (d(g'(y))dy + g'(y)d(dy)))(y_0) = g''(y_0)(dy)^2 + 0 = g''(y_0)(dy)^2$$

Пусть $z = g(y)$, $y = f(x)$. Тогда:

$$dz(y_0) = g'(y_0)dy$$

$$d(dz)(y_0) = d(g'(y)dy)(y_0) = (d(g'(y))dy + g'(y)d(dy))(y_0) = g''(y_0)(dy)^2 + g'(y_0)d^2y$$

Как видно, дифференциал второго порядка не обладает инвариантностью формы.

10

Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума)

Пусть $f(x)$ определена в точке x_0 и в некой Δ окрестности точки x_0.

Локальный экстремум

Точка x_0 называется локальным минимум функции $f(x)$, если есть такая выколотая $\delta \leq \Delta$ окрестность точки x_0, что для любого x в этой окрестности $f(x) > f(x_0)$. Точка x_0 называется локальным максимумом функции $f(x)$, если есть такая выколотая $\delta \leq \Delta$ окрестность точки x_0, что для любого x в этой окрестности $f(x) < f(x_0)$. Точка x_0 называется локальным экстремумом функции $f(x)$, она является либо локальным минимумом, либо локальным максимумом.

Возрастание и убывание функции в точке

Если функций $f(x)$ возрастает в точке x_0, то существует такая $\delta \leq \Delta$ окрестности точки x_0, что для всех $x < x_0$ $f(x) < f(x_0)$ и для всех $x > x_0$ $f(x) > f(x_0)$.
Если функций $f(x)$ убывает в точке x_0, то существует такая $\delta \leq \Delta$ окрестности точки x_0, что для всех $x < x_0$ $f(x) > f(x_0)$ и для всех $x > x_0$ $f(x) < f(x_0)$.

Возрастание и убывание дифференциремой функции в точке

Теорема: пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Если $f'(x_0) < 0$, то $f(x)$ убывает в точке x_0. Если $f'(x_0) > 0$, то $f(x)$ возрастает в точке x_0.
Доказательство: пусть $f'(x_0) > 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \longmapsto f'(x_0) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon < f'(x_0)$. Тогда из предыдущего неравенства следует возрастание $f(x)$.
Аналогично доказывается для $f'(x_0) < 0$.

Теорема Ферма

Теорема: если функция $f(x)$ дифференицируема в точке x_0 и точка x_0 является локальным экстремумом функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.
Доказательство: Если $f'(x_0) \neq 0$, то $f(x)$ возрастает или убывает в точке x_0, что противоречит определению локального экстремума. Следовательно, $f'(x_0) = 0$.

Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема Ролля

Теорема: пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$, и $f(a) = f(b)$. Тогда найдется такая точка x_0 на $(a; b)$, что $f'(x_0) = 0$.
Доказательство: так как $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, она достигает своей точной верхней грани α и точной нижней грани β. Если $\alpha = \beta$, то $f(x) = const$ и $f'(x) = 0 \forall x \in (a; b)$. Иначе, так

как $f(a) = f(b)$, найдется такая точка x_0, что $f(x_0) = \alpha$ или $f(x_0) = \beta$. По теорема Ферма в x_0 $f'(x_0) = 0$.

Теорема Лагранжа

Теорема: пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$. Тогда найдется такая точка x_0 на $(a;b)$, что $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$.
Доказательство: введем следующую функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, $F(a) = F(b) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля существует такая точка x_0, что $F'(x_0) = 0$. Тогда:

$$F'(x) = 0 = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$$

Теорема Коши

Теорема: пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируемы на $(a;b)$, $g'(x)$ не обращается на $(a;b)$ в 0. Тогда найдется такая точка x_0 на $(a;b)$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0}$.
Доказательство: введем следующую функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x)$$

$F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, $F(a) = F(b) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля существует такая точка x_0, что $F'(x_0) = 0$. Тогда:

$$F'(x) = 0 = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0}$$

Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа

Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ n раз дифференицируема в точке x_0. Многочлен степени n $P_n(x)$ такой, что $(P_n)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \forall k : 1 \leq k \leq n$ называется многочленом Тейлора $f(x)$ в точке x_0 и имеет следующий вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Если $f(x)$ не является многочленом, то $P_n(x)$ задает приближение функции $f(x)$ в открестности точки x_0. Остаточным членом $r_n(x)$ называют разность значений функции $f(x)$ и многочлена $P_n(x)$:

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Формула

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

называется формулой Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0. При $x_0 = 0$ формула Тейлора называется формулой Маклорена.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Теорема: пусть $f(x)$ $n+1$ раз дифференицируема в Δ окрестности точки x_0, тогда между точками x_0 и $x : |x - x_0| < \Delta$ найдется такая точка $\bar{x}$, что имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Доказательство: заметим, что

$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = ... = r_n^{(n)}(x_0) = 0$$

Для функций $r_n(x)$ и $(x - x_0)^{n+1}$ $n + 1$ раз применим теорему Коши. Найдется лежащая между x и x_0 точка x_1, такая, что:

$$\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r'_n(x_1)}{(n+1)(x_1 - x_0)^n}$$

На шаге $n + 1$ найдется между x_n и x_0 точка $\bar{x}$, такая, что:

$$\frac{r_n^{(n)}(x_n)}{(n+1)!(x_n - x_0)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}$$

$$\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r_n^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}$$

Продифференцировав формулу Тейлора $n + 1$ раз, получаем:

$$f^{(n+1)}(x) = r_n^{(n+1)}(x)$$

$$\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Теорема: пусть $f(x)$ n раз дифференицируема в точке x_0, тогда имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$r_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

Доказательство: заметим, что

$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = ... = r_n^{(n)}(x_0) = 0$$

Для функций $r_n(x)$ и $(x - x_0)^n$ $n - 1$ раз применим теорему Коши. Найдется лежащая между x и x_0 точка x_1, такая, что:

$$\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{r'_n(x_1)}{n(x_1 - x_0)^{n-1}}$$

На шаге $n - 1$ найдется между x_{n-2} и x_0 точка $\bar{x}$, такая, что:

$$\frac{r_n^{(n-2)}(x_n)}{\frac{n!}{2}(x_{n-2} - x_0)^2} = \frac{r_n^{(n-1)}(\bar{x})}{n!(\bar{x} - x_0)} = \frac{r_n^{(n-1)}(\bar{x}) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\bar{x} - x_0)}$$

$$x \to x_0 \implies \bar{x} \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(\bar{x}) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\bar{x} - x_0)} = \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

$$r_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

Основные разложения по формуле Тейлора

Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$

Теорема: пусть:

- $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} g(x) = 0$
- $f(x)$ и $g(x)$ дифференицируемы на $X = \{x : 0 < |x - \alpha| < \Delta\}$
- $g'(x) \neq 0 \forall x \in X$
- существует $\lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Доказательство: доопределим $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ как 0. Точка $\alpha + \Delta x$ принадлежит X. Применим к отрезку с концами α и $\alpha + \Delta x$ теорему Коши:

$$\exists \theta : 0 < \theta < 1$$

$$\frac{f(\alpha + \Delta x) - f(\alpha)}{g(\alpha + \Delta x) - g(\alpha)} = \frac{f'(\alpha + \theta \Delta x)}{g'(\alpha + \theta \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(\alpha + \theta \Delta x)}{g'(\alpha + \theta \Delta x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\alpha + \Delta x)}{g(\alpha + \Delta x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$$

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$

Теорема: пусть:

- $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = \pm\infty$
- $f(x)$ и $g(x)$ дифференицируемы на $X = (\alpha;\beta)$ или на $X = (\beta;\alpha)$.
- $g'(x) \neq 0 \forall x \in X$
- существует $\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда существует $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Доказательство: пусть $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$, $X = (\alpha;\beta)$. Найдется такое число $\Delta < \beta - \alpha$, что $g(x) > 1 \forall x \in (\alpha;\alpha+\Delta)$, следовательно $g(x)$ положительна на $(\alpha;\alpha+\Delta)$.

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) \in (0;\Delta) : \forall x : \alpha < x < \alpha + \delta_0 \longmapsto b - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < b + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$x_0 = \alpha + \delta_0$$

$$x : \alpha < x < x_0$$

К отрезку $[x;x_0]$ применим теормему Коши:

$$\exists\bar{x} \in (x;x_0) : \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}$$

$$b - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} < b + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - b = \frac{f(x_0) - bg(x_0)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - b\right)$$

$g(x)$ – бесконечно большая при $x \to \alpha$:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \in (0;\Delta) : \forall x : \alpha < x < \alpha + \delta_1 \longmapsto \left|\frac{f(x_0) - bg(x_0)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta = \min(\delta_0;\delta_1)$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) \in (0;\Delta) : \forall x : \alpha < x < \alpha + \delta \longmapsto \left|\frac{f(x)}{g(x)} - b\right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = b$$