

Изучение колебаний струны

Баргатын Михаил

1 Поперечные волны в струне

Уравнение бегущей волны в струне:

$$s(x, t) = A \cos\left(x \frac{\omega}{u} - \omega t\right) \quad (1)$$

где A – амплитуда волны, ω – ее угловая частота, u – скорость ее распространения.

Когда волна достигает одного из концов струны, она отражается и распространяется в противоположном направлении. Отраженная и исходная волны интерферируют и образуют стоячую волну:

$$h(x, t) = A \cos\left(x \frac{\omega}{u} - \omega t\right) + A \cos\left(x \frac{\omega}{u} + \omega t + \phi\right) \quad (2)$$

$$h(x, t) = 2A \cos\left(x \frac{\omega}{u} + \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \quad (3)$$

Концы струны покоятся, найдем из этих соображений частоту колебаний струны ν :

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\phi = \pi$$

$$x = l$$

$$n \in N$$

$$\frac{\omega}{u} l = n\pi \quad (5)$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\frac{2\pi\nu}{u} l = n\pi \quad (6)$$

$$\nu = n \frac{u}{2l} \quad (7)$$

2 Распространение колебательного процесса в струне

Рассмотрим вертикальные проекции сил, действующих на участок Δx струны:

$$\rho \Delta x S \ddot{h}(x) = T(x + \Delta x) \sin \alpha(x + \Delta x) - T(x) \sin \alpha(x) \quad (8)$$

где ρ – плотность материала струны, S – площадь ее поперечного сечения.

Сила натяжения, действующая на участок струны $T(x)$:

$$T(x) = \sigma(x)S \quad (9)$$

где $\sigma(x)$ – напряжение струны.

Будем считать, что напряжение не меняется вдоль струны:

$$\sigma(x) = \text{const} = \sigma \quad (10)$$

И что α мал:

$$\tan \alpha(x) = h'(x) \quad (11)$$

$$\sin \alpha(x) \approx \tan \alpha(x) \quad (12)$$

И тогда:

$$\rho \Delta x S \ddot{h}(x) = \sigma S (h'(x + \Delta x) - h'(x)) \quad (13)$$

$$\ddot{h}(x) = \frac{\sigma}{\rho} \frac{h'(x + \Delta x) - h'(x)}{\Delta x} \quad (14)$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (15)$$

Скорость распространения колебательного процесса внутри струны u :

$$\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \quad (16)$$

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (17)$$

3 Колебание струны

Введем понятия погонной плотности ρ_l и силы натяжения F :

$$\rho_l = \rho S$$

$$F = \sigma S$$

Тогда:

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} \quad (18)$$