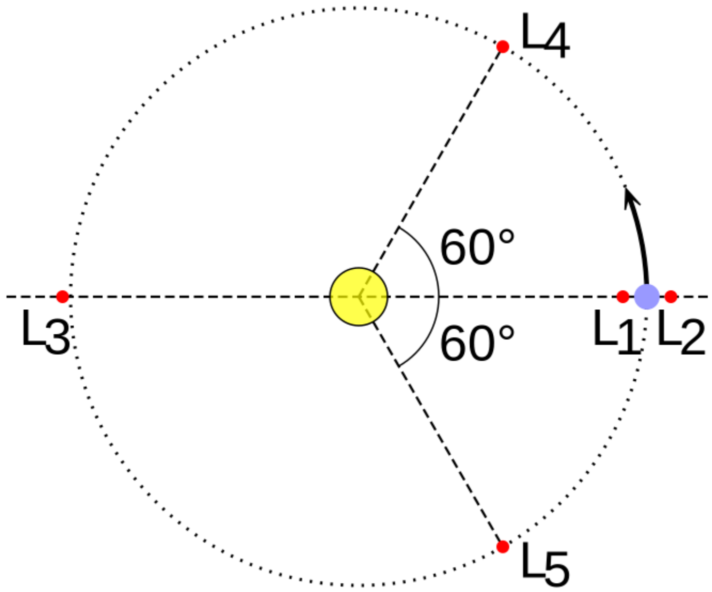
Формулировка задачи

Пусть два массивных тела массами M_1 и M_2 на расстояние L друг от друга вращаются вокруг их общего центра масс по круговым орбитам с угловой скоростью ω. Выберем в конкретный момент времени систему отсчета с началом отсчета в их центре масс, ось x напривам от тела массой M_1 к телу массой M_2, ось y направим перпендикулярно оси x. Тела в этой системе отсчета имеют координаты $-r_1$ и r_2 соответственно:

$$r_1 + r_2 = L$$

$$M_1 r_1 = M_2 r_2$$

Тогда в этой система отсчета найдется пять так называемых точек Лагранжа, в которых третье тело с массой $m : m \ll M_1, m \ll M_2$ будет оставаться неподвижным во вращающейся системе отсчёта, связанной с массивными телами. То есть гравитационные силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$, действующие на тело с массой m будут равны центробежной, необходимой для движения по окружности с угловой скоростью ω.



Решение задачи

Поместим в такую точку тело массой m. Запишем для нее второй закон Ньютона:

$$\overrightarrow{d_1} = \begin{bmatrix} -r_1 - x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{d_2} = \begin{bmatrix} r_2 - x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{mM_1G}{d_1^3}\overrightarrow{d_1}$$

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{mM_2G}{d_2^3}\overrightarrow{d_2}$$

$$\overrightarrow{F_r} = -m\omega^2 r \hat{\overrightarrow{r}} = -m\omega^2 \overrightarrow{r}$$

$$\overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

Перепишем для каждой оси поотдельности:

$$-m\omega^2 x = \frac{mM_1G}{d_1^3}(-r_1 - x) + \frac{mM_2G}{d_2^3}(r_2 - x)$$

$$-m\omega^2 y = -\frac{mM_1G}{d_1^3}y - \frac{mM_2G}{d_2^3}y$$

Рассмотрим случай, когда $y \neq 0$, то есть для треугольных точек Лагранжа L_4 и L_5:

$$m\omega^2 = \frac{mM_1G}{d_1^3} + \frac{mM_2G}{d_2^3}$$

$$-\left(\frac{mM_1G}{d_1^3} + \frac{mM_2G}{d_2^3}\right)x = \frac{mM_1G}{d_1^3}(-r_1 - x) + \frac{mM_2G}{d_2^3}(r_2 - x)$$

$$\frac{M_1r_1}{d_1^3} = \frac{M_2r_2}{d_2^3}$$

$$d_1 = d_2$$

$$(r_1 + x)^2 + y^2 = (r_2 - x)^2 + y^2$$

$$|r_1 + x| = |r_2 - x|$$

$$x = \frac{r_2 - r_1}{2}$$

$$d_1 = d_2 = d = \sqrt{\left(r_2 - \frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\omega^2 = \frac{(M_1 + M_2)G}{d^3}$$

Так как вращение происходит с постоянной угловой скоростью:

$$M_1\omega^2 r_1 = \frac{M_1M_2G}{L^2}$$

$$M_2\omega^2 r_2 = \frac{M_1M_2G}{L^2}$$

$$\omega^2(r_1 + r_2) = \frac{(M_1 + M_2)\,G}{L^2}$$

$$\omega^2 = \frac{(M_1 + M_2)G}{L^3}$$

$$d = L$$

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 = L^2$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}L$$

То есть точки L_4 и L_5 находятся в третьих вершинах равносторонних треугольников, построенных на соединящем тела массами M_1 и M_2 отрезке.

Теперь рассмотрим случай, когда $y = 0$ для так называемых коллинеарных точек Лагранжа L_1,

L_2 и L_3:

$$m\omega^2 x = \frac{m\,(M_1+M_2)\,G}{L^3}x = \frac{M_1}{|r_1+x|^3}(r_1+x) + \frac{M_2}{|x-r_2|^3}(x-r_2)$$

Такое уравнение можно решить только численными методами, или если сделать предположение, что $M_1 \gg M_2$ (как например в система Солнце-Земля или Земля-Луна).
Рассмотрим каждый из четырех вариантов расскрытия модуля.
Первый случай, когда малое тело слева от обоих больших тел (точка L_3):

$$|r_1+x| < 0 \wedge |x-r_2| < 0$$

$$\frac{(M_1+M_2)}{L^3}x = -\frac{M_1}{(r_1+x)^2} - \frac{M_2}{(x-r_2)^2}$$

$$\frac{(M_1+M_2)}{L^3}x(r_1+x)^2(x-r_2)^2 = -M_1(x-r_2)^2 - M_2(r_1+x)^2$$

$$\frac{x(r_1+x)^2}{L^3} = -1$$

$$x \approx -L$$

Второй и третий случай, когда малое тело находится справа от тела массой M_1 и поочередно слева и справа от тела массой M_2 (точки L_1 и L_2). Решение будем искать в виде $x = L \mp l$:

$$|r_1+x| > 0 \wedge |x-r_2| < 0$$

$$\frac{(M_1+M_2)}{L^3}(L-l) = \frac{M_1}{(r_1+L-l)^2} - \frac{M_2}{l^2}$$

$$|r_1+x| > 0 \wedge |x-r_2| > 0$$

$$\frac{(M_1+M_2)}{L^3}(L+l) = \frac{M_1}{(r_1+L+l)^2} + \frac{M_2}{l^2}$$

$$\frac{2\,(M_1+M_2)\,l}{L^3} = \frac{2M_2}{l^2} + \frac{M_1}{(r_1+L+l)^2} - \frac{M_1}{(r_1+L-l)^2}$$

$$\frac{M_1 l}{L^3} = \frac{M_2}{l^2} + \frac{M_1}{2(L+l)^2} - \frac{M_1}{2(L-l)^2}$$

$$\frac{M_1 l}{L^3} = \frac{M_2}{l^2} - \frac{2M_1 l}{L^3}$$

$$\frac{3M_1 l}{L^3} = \frac{M_2}{l^2}$$

$$l^3 = \frac{M_2}{3M_1}L^3$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}L$$

Расскрытие $|r_1+x| < 0 \wedge |x-r_2| > 0$ не имеет смысла, так как в таком случае малое тело левее левого тела, но правее правого.

Практическое применение решения задачи

В точках L_4 и L_5 малое тело находится в устойчивом равновесии при условие, что отношение масс больших тел не менее 25. Тогда при малом отклонении оно будет вращаться вокруг них. В

точках L_1, L_2 и L_3 равновесие неустойчивое. В системе Солнце-Земля, в точке L_1 размещаются космической обсерватории для наблюдения Солнца, в точке L_2 в 2021 будет размещен телескоп "Джеймс Уэбб".
В системе Земля-Луна, точка L_1 могла бы использовать для заправочной станции, точка L_2 – для спутниковой связи с обратной стороной Луны.
В точках L_4 и L_5 обычно скапливаются астероиды.

Источники

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B8_%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6%D0%B0
https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_point
https://solarsystem.nasa.gov/resources/754/what-is-a-lagrange-point
https://www.youtube.com/playlist?list=PLbfY1f0QFa4OmdgNEP_vESH6w31aFJS5y