

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

Баргатын Михаил

Момент инерции для однородных тел простой формы легко вычислить математически. Однако для неоднородных тел или тел сложной формы это сделать не всегда возможно. В данном опыте предлагается измерить момент инерции сложных тел при помощи трифилярного подвеса. Принцип его работы следующий: к верхней неподвижной пластине на расстоянии r от ее центра крепятся три нити, другой конец которых закреплен на расстоянии R от центра нижней подвижной пластины. По периоду T крутильных колебаний нижней пластины с расположенным на ней твердым телом общей массой m можно определить их суммарный момент импульса I .

Если в процессе малых колебания маятника затухание происходит медленно, можно считать, что сохраняется полная механическая энергия E . Ее составляющие – кинетическая энергия вращения тела с пластиной и их потенциальная энергия:

$$\frac{I\dot{\phi}^2}{2} + mg(h - h') = E \quad (1)$$

В положении равновесия расстояние между пластинами h и длина нити L связаны следующим образом:

$$(R - r)^2 + h^2 = L^2 \quad (2)$$

Так как нить нерастяжима, при повороте на угол ϕ расстояние между пластинами уменьшится до h' :

$$(R \cos \phi - r)^2 + (R \sin \phi)^2 + h'^2 = L^2 \quad (3)$$

$$(R \cos \phi - r)^2 + (R \sin \phi)^2 + h'^2 = (R - r)^2 + h^2 \quad (4)$$

$$h'^2 = h^2 - 2rR(1 - \cos \phi) \quad (5)$$

Так как колебания малы воспользуемся следующим приближением:

$$\cos \phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$$

$$h'^2 = h^2 - rR\phi^2 \quad (6)$$

$$h' = h \sqrt{1 - \frac{rR\phi^2}{h^2}} = h - \frac{rR\phi^2}{2h} \quad (7)$$

Подставим результат в (1):

$$\frac{I\dot{\phi}^2}{2} + mg\frac{rR\phi^2}{2h} = E \quad (8)$$

И продифференцируем по ϕ :

$$I\dot{\phi}\ddot{\phi} + mg\frac{rR\dot{\phi}}{h} = 0 \quad (9)$$

Получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\phi} + mg\frac{rR}{Ih} = 0 \quad (10)$$

$$\omega^2 = mg\frac{rR}{Ih} \quad (11)$$

Период колебаний и момент инерции тела с пластиной связаны следующим образом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$I = mg\frac{rRT^2}{4\pi^2h} \quad (12)$$

Для нахождения момента инерции тела без пластины необходимо провести измерения для ненагруженной пластины. Так как момент инерции обладает свойством аддитивности, момент инерции самого тела будет равен разности полученных результатов.