Пусть два массивных тела массами M_1 и M_2 вращаются вокруг их общего центра масс по эллиптическим орбитам с угловой скоростью ω и расстоянием L. Выберем в конкретный момент времени систему отсчета с началом отсчета в их центре масс, ось x напривам от тела массой M_1 к телу массой M_2, ось y направим перпендикулярно оси x. Тела в этой системе отсчета имеют координаты $-r_1$ и r_2 соответственно:

$$M_1 r_1 = M_2 r_2$$

Второй закон Ньютона для первого тела в этой системе отсчета:

$$M_1 \ddot{r}_1 = -\frac{M_1 M_2 G}{L^2} + M_1 \omega^2 r_1$$

$$\frac{\ddot{r}_1}{r_1} = -\frac{M_2 G}{r_1 L^2} + \omega^2 = \omega^2 - \frac{(M_1 + M_2)\,G}{L^3}$$

Предположим, что есть точка с координатами $\overrightarrow{r} = (x; y)$, удовлетворяющая равенствам:

$$\frac{\ddot{x}}{x} = \frac{\ddot{y}}{y} = \frac{\ddot{r}_1}{r_1}$$

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = \overrightarrow{r}\frac{\ddot{r}_1}{r_1}$$

Поместим в эту точку тело массой m, $m \ll M_1$, $m \ll M_2$. Запишем для нее второй закон Ньютона:

$$\overrightarrow{d_1} = \begin{bmatrix} -r_1 - x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{d_2} = \begin{bmatrix} r_2 - x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{m M_1 G}{d_1^3}\overrightarrow{d_1}$$

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{m M_2 G}{d_2^3}\overrightarrow{d_2}$$

$$\overrightarrow{F_r} = m\omega^2 |\overrightarrow{r}|\hat{\overrightarrow{r}} = m\omega^2 \overrightarrow{r}$$

$$m\ddot{\overrightarrow{r}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_r}$$

$$m\overrightarrow{r}\left(\omega^2 - \frac{(M_1 + M_2)\,G}{L^3}\right) = \frac{m M_1 G}{d_1^3}\overrightarrow{d_1} + \frac{m M_2 G}{d_2^3}\overrightarrow{d_2} + m\omega^2\overrightarrow{r}$$

$$-\frac{(M_1 + M_2)}{L^3}\overrightarrow{r} = \frac{M_1}{d_1^3}\overrightarrow{d_1} + \frac{M_2}{d_2^3}\overrightarrow{d_2}$$

Перепишем для каждой оси поотдельности:

$$-\frac{(M_1 + M_2)}{L^3}x = \frac{M_1}{d_1^3}(-r_1 - x) + \frac{M_2}{d_2^3}(r_2 - x)$$

$$-\frac{(M_1 + M_2)}{L^3}y = -\frac{M_1}{d_1^3}y - \frac{M_2}{d_2^3}y$$

Рассмотрим случай, когда $y \neq 0$:

$$-\frac{(M_1 + M_2)}{L^3} = -\frac{M_1}{d_1^3} - \frac{M_2}{d_2^3}$$

$$\frac{M_1 r_1}{d_1^3} = \frac{M_2 r_2}{d_2^3}$$

$$d_1 = d_2$$

$$(r_1 + x)^2 + y^2 = (r_2 - x)^2 + y^2$$

$$|r_1 + x| = |r_2 - x|$$

$$x = \frac{r_2 - r_1}{2}$$

$$d_1 = d_2 = d = \sqrt{\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\frac{(M_1 + M_2)}{L^3} = \frac{M_1 + M_2}{d^3}$$

$$d = L$$

$$\left(r_2 - \frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 + y^2 = (r_2 + r_1)^2$$

$$\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)^2 + y^2 = (r_2 + r_1)^2$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} L$$

Теперь рассмотрим случай, когда $y = 0$:

$$\frac{(M_1 + M_2)}{L^3} x = \frac{M_1}{|r_1 + x|^3}(r_1 + x) + \frac{M_2}{|x - r_2|^3}(x - r_2)$$

Такое уравнение можно решить только численными методами, или если сделать предположение, что $M_1 \gg M_2$. Рассмотрим каждый из четырех вариантов расскрытия модуля. Первый случай, когда маленькое тело слева от обоих больших тел:

$$|r_1 + x| < 0 \wedge |x - r_2| < 0$$

$$\frac{(M_1 + M_2)}{L^3} x = -\frac{M_1}{(r_1 + x)^2} - \frac{M_2}{(x - r_2)^2}$$

$$\frac{(M_1 + M_2)}{L^3} x (r_1 + x)^2 (x - r_2)^2 = -M_1 (x - r_2)^2 - M_2 (r_1 + x)^2$$

$$\frac{x (r_1 + x)^2}{L^3} = -1$$

$$x \approx -L$$

Второй и третий случай, когда маленькое тело находится справа от первого тела и поочередно слева и справа от меньшего тела. Решение будем искать в виде $x = L \mp l$

$$|r_1 + x| > 0 \wedge |x - r_2| < 0$$

$$\frac{(M_1 + M_2)}{L^3}(L - l) = \frac{M_1}{(r_1 + L - l)^2} - \frac{M_2}{l^2}$$

$$|r_1 + x| > 0 \wedge |x - r_2| > 0$$

$$\frac{(M_1+M_2)}{L^3}(L+l)=\frac{M_1}{(r_1+L+l)^2}+\frac{M_2}{l^2}$$

$$\frac{2\,(M_1+M_2)\,l}{L^3}=\frac{2M_2}{l^2}+\frac{M_1}{(r_1+L+l)^2}-\frac{M_1}{(r_1+L-l)^2}$$

$$\frac{2\,(M_1+M_2)\,l}{L^3}=\frac{2M_2}{l^2}+\frac{M_1\left((L-l)^2-(L+l)^2\right)}{L^4}$$

$$\frac{3\,(M_1+M_2)\,l}{L^3}=\frac{M_2}{l^2}$$

$$l^3=\frac{M_2}{3M_1}L^3$$

$$l=\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}L$$

Расскрытие $|r_1+x|<0\wedge|x-r_2|>0$ не имеет смысла, так как в таком случае малое тело левее левого тела, но правее правого.

Рассмотрим частный случай когда тела двигаются по окружности. Тогда найденные точки называются точками Лагранжа. Первую пару точек принято обозначать L_4 и L_5. Вторую тройку – L_3, L_1 и L_2 соответственно. В точках L_4 и L_5 малое тело находится в устойчивом равновесии при условие, что отношение масс больших тел не менее 25. Тогда при малом отклонении оно будет вращаются вокруг них. В точках L_1, L_2 и L_3 равновесие неустойчивое. В система Солнце-Земля, в точке L_1 размещаются космической обсерватории для наблюдения Солнца, в точке L_2 в 2021 будет размещен телескоп "Джеймс Уэбб". В системе Земля-Луна, точка L_1 могла бы использовать для завправочной станции, точка L_1 – для спутниковой связи с обратной стороной Луны. В точках L_4 и L_5 обычно скапливаются астероиды.

Источники:

`https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B8_%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6%D0%B0`

`https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_point`

`https://solarsystem.nasa.gov/resources/754/what-is-a-lagrange-point`

`https://www.youtube.com/playlist?list=PLbfY1f0QFa4OmdgNEP_vESH6w31aFJS5y`