K 演習第 6 回レポート課題

A クラス 2311009 アハメドアティフ

1　宿題 1

1. 問題文より，ある病気の感染率は 0.5 %であるから，その周辺確率は 0.005 で，感染していない確率は感染している場合の補集合より，0.995. よって，病気の感染の有無に関する周辺確率表は以下のようになった.

感染	あり	なし
周辺確率	0.005	0.995

2. 問題文より，感染している時に診断結果でも「あり」と診断される確率は 0.80 より，診断結果で「なし」と判定される確率は 0.20. また，感染していない時に「あり」という診断結果が出る確率は 0.10 であるから,「なし」という診断結果が出るのは 0.90. したがって，患者の感染の有無が判明しているときのそれぞれの診断結果の条件付確率表は以下のようになった.

	診断結果	
	あり	なし
感染あり	0.80	0.20
感染なし	0.10	0.90

3. 「診断結果が感染ありであった」という結果を得た患者が実際に感染している確率は，ベイズの定理から, 式 1 のようになった.

$$\frac{0.80 \times 0.005}{0.80 \times 0.005 \times 0.10 \times 0.095} = \frac{8}{207} \approx 0.0386 \tag{1}$$

上記の式より $\boxed{0.0386}$ が求めたい確率である.

4. 診断方法 B の時の,「診断結果が感染ありだった」時に患者が実際の感染している確率は，ベイズの定理より，以下の式 2 のようになった

$$\begin{aligned} P(\text{有} \mid \text{あり}) &= \frac{P(\text{あり} \mid \text{有})P(\text{有})}{P(\text{あり} \mid \text{有})P(\text{有}) + P(\text{あり} \mid \text{無})P(\text{無})} \\ &= \frac{0.90 \times 0.005}{0.90 \times 0.005 \times 0.20 \times 0.995} \\ &= \frac{9}{407} \approx 0.0221 \end{aligned} \tag{2}$$

したがって，求めたい確率は $\boxed{0.0221}$ である.

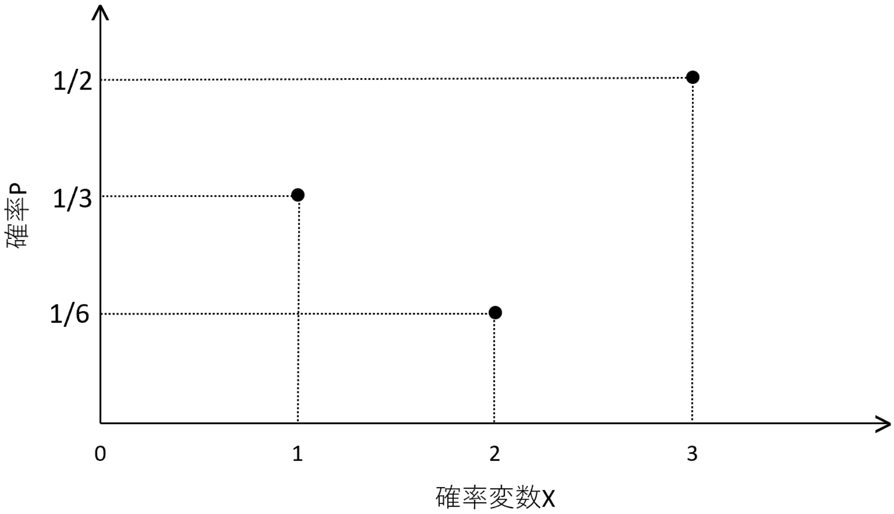

図 1: 累積分布関数

2　宿題 2

1. (a) 累積分布関数 $F(x)$ を描いたグラフは図 1 の通りである．

   (b)X の平均と分散は以下の式 3 と式 4 のように求められた．

$$E[X] = \sum_{k=1}^{3} x_k p_k = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{6} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} V[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{2} - \frac{13^2}{6^2} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{9}{2} - \frac{169}{36} \\ &= \frac{29}{36} \end{aligned} \tag{4}$$

   よって，平均は$\boxed{\frac{13}{6}}$，分散は$\boxed{\frac{29}{36}}$である．

2. 確率変数 X が一回に 1.5 の費用がかかる回収額を表すときのこの投資のリターンの平均と標準偏差は，線形性から，以下の式と式のように求められた．

$$E[X - 1.5] = E[X] - 1.5 = \frac{13}{6} - \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \tag{5}$$

$$\sigma[X - 1.5] = \sqrt{V[X - 1.5]} = \sqrt{V[X]} = \frac{\sqrt{29}}{6} \tag{6}$$

したがって，求める平均は$\boxed{\frac{2}{3}}$，標準偏差は$\boxed{\frac{\sqrt{29}}{6}}$である．

3. (a) 与式の確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ の累積分布関数は以下の図 2 のように描けた．

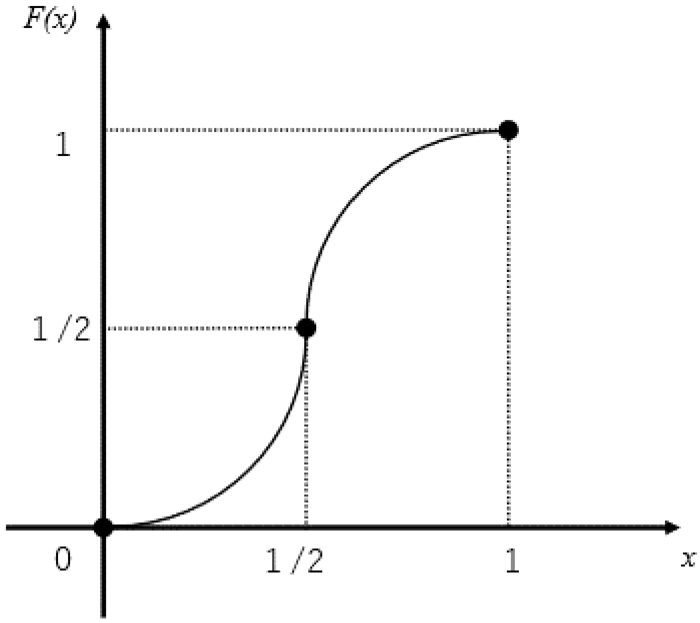

図 2: 累積分布関数

(b) 次に X の平均と分散は以下の式 7，式 8，式 9 のように求められた．

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^1 xf(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x(4x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x(-4x+4)\,dx \\
&= \frac{4}{3}[x^3]_0^{\frac{1}{2}} + [-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2(4x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2(-4x+4)\,dx \\
&= [x^4]_0^{\frac{1}{2}} + [-x^4 + \frac{4}{3}x^3]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{16} + \frac{1}{3} - \frac{5}{48} \\
&= \frac{7}{24}
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{7}{24} - \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{24} \tag{9}
$$

よって，平均は$\boxed{\frac{1}{2}}$，分散は$\boxed{\frac{1}{24}}$である．

3 宿題 3-1

与えられた確率表とその期待値 μ と分散 σ^2 から，任意の実数 a を用いて，分散 σ^2 は以下の式 11 のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= E[(X-\mu)^2] \\
&= \sum_{k=1}^{N}(k-\mu)^2 p_k \\
&\geq \sum_{k:(k-\mu)\leq -a}(k-\mu)^2 p_k + \sum_{k:(k-\mu)\geq a}(k-\mu)^2 p_k \\
&\geq \sum_{k:(k-\mu)\leq -a} a^2 p_k + \sum_{k:(k-\mu)\geq a} a^2 p_k \\
&\geq a^2 \left\{ \sum_{k:(k-\mu)\leq -a} p_k + \sum_{k:(k-\mu)\geq a} p_k \right\} \\
&= a^2 P\left((X-\mu)^2 \geq a^2\right)
\end{aligned} \tag{10}
$$

よって，式 11 の両辺を a^2 で割って，対称性から $a > 0$ の任意の実数 a を考えてあげることによって，以下のチェビチェフの不等式が証明された．

$$
\frac{\sigma^2}{a^2} = P\left(|X-\mu| \geq a\right) \tag{11}
$$

4 宿題 3-2

1. マルコフの不等式から

$$
P(X \geq 800) \leq \frac{400}{800} = \frac{1}{2} \tag{12}
$$

よって，求める最大の割合は$\boxed{\frac{1}{2}}$である．

2. マルコフの不等式から

$$P(X \geq 10000) \leq \frac{20}{10000} = \frac{1}{500} \tag{13}$$

よって，求める最大の割合は$\boxed{\frac{1}{500}}$である．

3. チェビチェフの不等式から

$$P(X - 400 \geq 800 - 400) \leq P(|X - 400| \geq 400) \leq \frac{200^2}{400^2} = \frac{1}{4} \tag{14}$$

よって，求める最大の割合は$\boxed{\frac{1}{4}}$である．

4. チェビチェフの不等式から

$$P(X - 400 \geq 10000 - 400) \leq P(|X - 400| \geq 9600) \leq \frac{200^2}{9600^2} = \frac{1}{2304} \tag{15}$$

よって，求める最大の割合は$\boxed{\frac{1}{2304}}$である．