K 演習第 14 回レポート課題

A クラス 2311009 アハメドアティフ

1　宿題 2-1

1. 標本空間 $\Omega = \{\ 0, 1, 2\cdots\}$
   母数空間 $\{\lambda | 0 < \lambda < \infty\}$
2. ポアソン分布の平均は期待値を求めることで以下の式ように求められた.

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{6} \tag{1}$$

3. 「診断結果が感染ありであった」という結果を得た患者が実際に感染している確率は，ベイズの定理から, のようになった.

   上記の式より $\boxed{0.0386}$ が求めたい確率である.

4. 診断方法 B の時の,「診断結果が感染ありだった」時に患者が実際の感染している確率は，ベイズの定理より，以下の式 2 のようになった

$$\begin{aligned} P(\text{有} \mid \text{あり}) &= \frac{P(\text{あり} \mid \text{有})P(\text{有})}{P(\text{あり} \mid \text{有})P(\text{有}) + P(\text{あり} \mid \text{無})P(\text{無})} \\ &= \frac{0.90 \times 0.005}{0.90 \times 0.005 \times 0.20 \times 0.995} \\ &= \frac{9}{407} \approx 0.0221 \end{aligned} \tag{2}$$

   したがって，求めたい確率は $\boxed{0.0221}$ である.

2　宿題 2-2

1. (a) 累積分布関数 $F(x)$ を描いたグラフは図**??**の通りである.

   (b)X の平均と分散は以下の式 3 と式 4 のように求められた.

$$E[X] = \sum_{k=1}^{3} x_k p_k = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{6} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} V[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{2} - \frac{13^2}{6^2} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{9}{2} - \frac{169}{36} \\ &= \frac{29}{36} \end{aligned} \tag{4}$$

よって，平均は$\boxed{\frac{13}{6}}$，分散は$\boxed{\frac{29}{36}}$である．

2. 確率変数 X が一回に 1.5 の費用がかかる回収額を表すときのこの投資のリターンの平均と標準偏差は，線形性から，以下の式と式のように求められた．

$$E[X-1.5]=E[X]-1.5=\frac{13}{6}-\frac{3}{2}=\frac{2}{3} \tag{5}$$

$$\sigma[X-1.5]=\sqrt{V[X-1.5]}=\sqrt{V[X]}=\frac{\sqrt{29}}{6} \tag{6}$$

したがって，求める平均は$\boxed{\frac{2}{3}}$，標準偏差は$\boxed{\frac{\sqrt{29}}{6}}$である．

3. (a) 与式の確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ の累積分布関数は以下の図**??**のように描けた．

   (b) 次に X の平均と分散は以下の式 7，式 8，式 9 のように求められた．

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^1 xf(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x(4x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x(-4x+4)\,dx \\
&= \frac{4}{3}[x^3]_0^{\frac{1}{2}} + [-\frac{4}{3}x^3+2x^2]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_0^1 x^2f(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2(4x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2(-4x+4)\,dx \\
&= [x^4]_0^{\frac{1}{2}} + [-x^4+\frac{4}{3}x^3]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{16}+\frac{1}{3}-\frac{5}{48} \\
&= \frac{7}{24}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$V[X]=E[X^2]-E[X]^2=\frac{7}{24}-\frac{1}{2}^2=\frac{1}{24} \tag{9}$$

よって，平均は$\boxed{\frac{1}{2}}$，分散は$\boxed{\frac{1}{24}}$である．