K 演習第 14 回レポート課題

A クラス 2311009 アハメドアティフ

1　宿題 2-1

1. 標本空間は 0 以上の整数で, $\Omega = \{\ 0, 1, 2\cdots\ \}$, 母数空間は正の実数で,$\{\lambda | 0 < \lambda < \infty\}$ である.

2. ポアソン分布の平均は期待値を求めることで以下の式ように求められた.

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1} e^{-\lambda}}{(x-1)!} = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = \lambda \tag{1}$$

以上の式では，$y = x - 1$ という置換と，$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$ がポアソン分布の全確率の和を表していることから $\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = 1$ であることを利用している．したがって，求める平均値は $\boxed{\lambda}$ である.

3. まず $E[X(X-1)]$ を求めると以下のようになった.

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2} e^{-\lambda}}{(x-2)!} = \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = \lambda^2 \tag{2}$$

以上の式では，$y = x - 2$ という置換と,2 と同様に $\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$ がポアソン分布の全確率の和を表していることから $\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = 1$ であることを利用している．したがって，求める分散の値は以下のように求められた.

$$V[X] = E[X(X-1)] + E[X] + -E[X^2] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \tag{3}$$

よって，求める分散の値は $\boxed{\lambda^2}$.

4. ポアソン分布のモーメント母関数は以下のように求めた.

$$M(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x e^{-\lambda}}{x!} \tag{4}$$

ここで，$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ という性質から,

$$M(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{\lambda e^t} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)} \tag{5}$$

したがって，求めるモーメント母関数は $\boxed{e^{\lambda(e^t-1)}}$ である.

5. 4 で求めたモーメント母関数を t で一回微分したものに $t=0$ を代入することによって X の期待値を得ることができる．まず $M(t)$ を一回微分すると，以下のようになる．

$$M'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} \tag{6}$$

よって，ここに $t=0$ を代入すると，

$$E[X] = M'(0) = \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)} = \lambda \cdot 1 \cdot 1 = \lambda \tag{7}$$

と以上のようになり，求める X の期待値 $E[X]$ は $\boxed{\lambda}$ である．

次に，X^2 の期待値は，$M'(t)$ をさらに微分して，$t=0$ を代入することによって得られる．まず微分をすると，

$$M''(t) = (\lambda e^{\lambda(e^t-1)+t})' = \lambda(\lambda e^t + 1)e^{\lambda(e^t-1)+t} \tag{8}$$

よって，$t=0$ を代入すると，X^2 の期待値は，

$$E[X^2] = M''(0) = \lambda(\lambda e^0 + 1)e^{\lambda(e^0-1)+0} = \lambda(\lambda \cdot 1 + 1) \cdot 1 = \lambda^2 + \lambda \tag{9}$$

と以上のようになり，X^2 の期待値は $\boxed{\lambda^2 + \lambda}$ である．

6. X_1 と X_2 が互いにポアソン分布 $Pois(\lambda_1)$ と $Pois(\lambda_2)$ に従うとき，その X_1 と X_2 の和の確率変数 Y のモーメント母関数は以下のように変形できる．

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)} \tag{10}$$

よって，これはポアソン分布の表現に整理できているので，Y もポアソン分布に従っていて，その確率関数は

$$p(y;\lambda_1+\lambda_2) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^y e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} \tag{11}$$

と表されるので，$\boxed{p(y;\lambda_1+\lambda_2) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^y e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!}}$.

2　宿題 2-2

1. 正規分布の定義から，標本空間は $\Omega = \{\ \infty < x < x\}$, 母数空間は $\{\mu | -\infty < \mu < \infty\}$,$\{\sigma^2 | 0 < \sigma^2 < \infty\}$ である．

2. 正規分布の平均値を求めるにあたって，最初に $E[X - \mu]$ について考えていくと，

$$E[X-\mu] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \tag{12}$$

ここで，以上の式の被積分関数は奇関数であり，$x = \mu$ に関して対称な関数であるから，

$$\int_{-\infty}^{\mu} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = -\int_{\mu}^{\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \tag{13}$$

のような関係が導ける．

これより，$E[X - \mu]$ は，

$$\begin{aligned} E[X-\mu] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx + \int_{\mu}^{\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx - \int_{-\infty}^{\mu} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

となる. よって, 線形性から

$$E[X-\mu] = 0 \Longleftrightarrow E[X] = \mu \tag{15}$$

が得られ，求める平均値は $\boxed{\mu}$ となる．

3. 分散を求めるにあたり，置換積分を用いて解いていきたいので，$E[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}]$ を考えると，

$$E[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \tag{16}$$

ここで，

$$y = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} \Longleftrightarrow x = \mu \pm \sigma\sqrt{2y}, dx = \left|\frac{\sigma}{\sqrt{2y}}\right| \tag{17}$$

という変数変換と,

$$\int_0^{\infty} y^{\frac{3}{2}-1} e^{-y}\, dy = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{18}$$

というガンマ関数の性質, そして被積分関数が偶関数であることから,

$$\begin{aligned} E[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= 2\int_0^{\infty} 2y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-y) \frac{\sigma}{\sqrt{2y}}\, dy \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}} exp(-y)\, dy \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{19}$$

したがって, 分散は

$$V[X] = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2 \tag{20}$$

より, $\boxed{\sigma^2}$ である.

4. 正規分布のモーメント母関数は以下のように求めた.

$$\begin{aligned} M(t) = E[e^{tX}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + tx\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 xt}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + \mu^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2 - 2\mu\sigma^2 t - \sigma^4 t^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dx \end{aligned} \tag{21}$$

ここで，$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) dx$ とは，平均が $\mu+\sigma^2$ で分散が σ^2 の正規分布 $N(\mu+\sigma^2, \sigma^2)$ の全確率を表しているので，$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) dx = 1$ であるから，

$$\begin{aligned} M(t) &= exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right) dx \\ &= exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2 \right) \end{aligned} \tag{22}$$

したがって，求めるモーメント母関数は $\boxed{exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2 \right)}$ である．

5. 4 で求めたモーメント母関数を t で一回微分したものに $t=0$ を代入することによって X の期待値を得ることができる．まず $M(t)$ を一回微分すると，以下のようになる．

$$M'(t) = \left(\mu + \sigma^2 t \right) \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2 \right) \tag{23}$$

よって，ここに $t=0$ を代入すると，

$$E[X] = M'(0) = \left(\mu + \sigma^2 \cdot 0 \right) \exp\left(\mu \cdot 0 + \frac{\sigma^2}{2} \cdot 0^2 \right) = \mu \tag{24}$$

のようになり，求める X の期待値 $E[X]$ は $\boxed{\mu}$ である．

次に，X^2 の期待値は，$M'(t)$ をさらに微分して，$t=0$ を代入することによって得られる．まず微分をすると，

$$M''(t) = \sigma^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2 \right) + \left(\mu + \sigma^2 t \right)^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2 \right) \tag{25}$$

よって，$t=0$ を代入すると，X^2 の期待値は，

$$\begin{aligned} E[X^2] = M''(0) &= \sigma^2 \exp\left(\mu \cdot 0 + \frac{\sigma^2}{2} \cdot 0^2 \right) + \left(\mu + \sigma^2 \cdot 0 \right)^2 \exp\left(\mu \cdot 0 + \frac{\sigma^2}{2} \cdot 0^2 \right) \\ &= \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned} \tag{26}$$

のようになり，X^2 の期待値は $\boxed{\sigma^2+\mu^2}$ である．

6. 前問より正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ のモーメント母関数は $M(t) = exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2 \right)$ であり，X_1 と X_2 が互いに独立に正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ と $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとき，その X_1 と X_2 の和の確率変数 Y のモーメント母関数は以下のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \\
&= exp\left(\ \mu_1 t + \frac{\sigma_1^2}{2}t^2\right)\ exp\left(\ \mu_2 t + \frac{\sigma_2^2}{2}t^2\right) \\
&= exp\left(\ (\mu_1 + \mu_2)t + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}t^2\right)
\end{aligned} \tag{27}
$$

よって，これは平均が $\mu_1 + \mu_2$ で分散が $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ の正規分布の表現に整理できているので，Y は正規分布 $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ に従っていて，その確率密度関数は,

$$
f(y; \mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} exp\left[\ -\frac{\{\ x - (\mu_1 + \mu_2)\}\ ^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right] \tag{28}
$$

と表されるので, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} exp\left[\ -\frac{\{\ x-(\mu_1+\mu_2)\}\ ^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]}$.