Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Matemática - Geometria Analítica 1
Prof. Rodrigo Cavalcante

Quarta Lista
Produtos Escalar e Vetorial

1. Seja $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$. Determine as coordenadas do vetor unitário que é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (3, 1, 0)_\beta$ e $\vec{v} = (4, -1, 3)_\beta$.[1]

2. Considere a base $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e os vetores $\vec{u} = (1, 1, -1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 1)$.

   a) Mostre que a sequência $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortogonal de $\mathbb{V}^3$;

   b) Determine as coordenadas do vetor $\vec{r}$, em relação à base β, que tenha norma $\sqrt{5}$, tal que o vetor $\vec{r}$ seja ortogonal ao vetor $(2, 1, -1)_\beta$ e que os vetores $\vec{r}$, $(1, 1, 1)_\beta$ e $(0, 1, -1)_\beta$ sejam coplanares.

3. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores tais que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ e o vetor $\vec{u}$ é ortogonal ao vetor $\vec{v}$. Mostre que os vetores $\vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{u} + \vec{v}$ são ortogonais.

4. Mostre que

   $$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$$

   Qual a interpretação geométrica desse resultado?

5. Um vetor $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ ângulos de $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$, respectivamente. Determine as coordenadas do vetor $\vec{v}$, em relação à base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sabendo que $\|\vec{v}\| = 2$.

6. Em um quadrado $ABCD$ cujos lados medem 2, seja M o ponto médio do lado BC. Calcule a medida angular entre $\overrightarrow{DM}$ e $\overrightarrow{BD}$.

7. A medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{4}$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ e $\|\vec{v}\| = 1$. Calcule a medida angular entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

8. Determine todos os vetores unitários $\vec{u} = (x, y, z)$ cuja projeção ortogonal sobre $\vec{k}$ é $\vec{k}/2$ e tais que a medida angular entre $\vec{v} = (x, y, 0)$ e $\vec{i}$ seja $\frac{\pi}{6}$.

9. Mostre que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não-nulos, então

   $$\text{Proj}_{\vec{v}}\text{Proj}_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

10. Mostre que se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{t}$ e $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{t}$, então os vetores $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são LD.

11. Calular x, sabendo que o triângulo ABC, de área $\frac{\sqrt{29}}{2}$, temos $\overrightarrow{AB} = (1 - x, -2, -1)$ e $\overrightarrow{CB} = (-1, -2, 1)$

12. Encontre $\vec{u}$ de norma $\sqrt{6}$ tal que $\vec{u} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.

13. Seja ABC um triângulo qualquer e P e Q pontos tais que $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ e $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos BPQ e ABC.

14. Sejam $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)$. Encontre uma base ortonormal positiva $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ tal que:

    i. $\vec{w}_1$ e $\vec{u}$ sejam paralelos com o mesmo sentido;

    ii. $\vec{w}_2$ seja combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

    iii. $\vec{w}_3 \cdot \vec{k} > 0$.

[1] Tente fazer isso sem usar o produto vetorial e depois usando o produto vetorial.