LISTA DE PROVAS (ÁREA II)
Derivada pela Definição

Enunciados

1º EE. - 2008.1

2. (2,0) Se $f(x) = \frac{1}{3x+2}$, use a definição de derivada para calcular $f'(-1)$ (**não use as regras de derivação!**).

1º EE. - 2008.2

2. (*1.5 pt.*) **a)** Usando a definição da derivada, calcule $f'(0)$ se $f(x) = \sqrt{4+x}$.

   (*1.5 pt.*) **b)** Determine uma equação para a reta tangente à curva $y = \sqrt{4+x}$ no ponto $(0, 2)$.

1º EE. - 2009.1

(*1.5 pt.*) **c)** Usando a definição de derivada calcule $f'(0)$ dado que $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

1º EE. - 2012.1

3-(*2.0 pts*) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0\,, \\ -x^2 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Usando a definição calcule a derivada desta função no ponto $x = 0$.

1º EE. - 2012.2

4 - **a)** (1,5) Utilizando a definição, determine a derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ no ponto $x_o = 1$.

b) (0,5 ponto) Determine valores de a e b, tais que

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 + ax + b + 1, & \text{se } x \leq 0, \\ a\ cos(x) + 2b\ sen(x), & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

seja diferenciável em $x_o = 0$.

1º EE. - 2015.1

3. Considere a função $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$, definida para $x \neq -1$.

(a) (1,0 pt) Utilizando a definição da derivada de uma função, calcule $f'(0)$. (**Obs: Não é permitido o uso de nenhuma regra de derivação**)

1º EE. - 2015.2

3)(a)(2,0 pt.) Determine SE a função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{3}, & x \geq 1; \\ \\ -\dfrac{x^3}{3}, & x < 1. \end{cases}$$

é derivável em $x = 1$, PELA DEFINIÇÃO DE DERIVADA. Obs.: Não pode usar a Regra de L'Hôpital.

1º EE. - 2016.1

1. (2, 0 pontos) Considere a função

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{3 + x}.$$

Usando a definição de derivada, calcule $f'(a)$. Aqui, $a \neq -3$ é um número real qualquer.

2º EE. - 2016.1

1. (1,5 ponto) **Usando a definição de derivada**, calcule $f'(0)$, onde $f(x) = \sqrt{3x+1}$.
   OBS.: **Não** é permitido o uso da regra de l'Hôspital.

1º EE. - 2017.1

4ª Questão [1 pontos]: Use a definição precisa de derivada (via limite) e prove que se $f(x) = \sqrt{2x+1}$ então $f'(0) = 1$.

Gabarito

1º EE. - 2008.1

2. Por definição,

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3h-1}+1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{3}{3h-1} = -3$$

1º EE. - 2008.2

2ª Questão

a) Pela definição de derivada,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

b) Seja $y = ax+b$ uma equação para a reta tangente no ponto $(0,2)$. Então $a = f'(0) = \frac{1}{4}$ e $b = 2$, uma vez que o ponto $(0,2)$ pertence à reta. Portanto,

$$y = \frac{1}{4}x + 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1º EE. - 2009.1

(*1.5 pt.*) **c)** Usando a definição de derivada calcule $f'(0)$ dado que $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h+1}{h-2} - \frac{1}{-2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3\,h}{2\,h\,(h-2)} = -\frac{3}{4}\,.$$

1º EE. - 2012.1

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to0+}h=0\,.$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{-h^2}{h}=\lim_{h\to0+}-h=0\,.$$

Como os dois limites laterais existem e são iguais entre si, segue que

$$f'(0)=0.$$

1º EE. - 2012.2

4 - **Solução:**

a) (1,5) Utilizando a definição, de derivada, temos que:

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{1}}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{(x-1)\cdot\sqrt{x}}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $1+\sqrt{x}$ obtemos

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(x-1)\cdot\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})}\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}.$$

b) (0,5 ponto) Para que a função

$$g(x)=\begin{cases}x^3+2x^2+ax+b+1, & \text{se } x\le0,\\ a\ cos(x)+2b\ sen(x), & \text{se } x>0.\end{cases}$$

seja diferenciável em $x_o=0$, é necessário que pelo menos seja contínua neste ponto, e, consequentemente

$$\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^+}g(x)\quad\Rightarrow\quad b+1=a\,.$$

Agora, uma vez $g(x)$ sendo contínua em $x_o=0$, isto é, $a=b+1$, para que seja diferenciável neste ponto é necessário que

$$\lim_{x\to0^-}g'(x)=\lim_{x\to0^+}g'(x)\quad\Rightarrow\quad b+1=2b\quad\Rightarrow\quad b=1\,.$$

Assim, para que $g(x)$ seja diferenciável em $x_o=0$ os valores de a e b devem ser: $a=2$ e $b=1$.

1º EE. - 2015.1

Aplicando a definição da derivada de uma função, temos que

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} - 0}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = 1.$$

1º EE. - 2015.2

3)(a)(2,0 pt.) Determine SE a função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{4}{3}, & x \geq 1; \\ -\frac{x^3}{3}, & x < 1. \end{cases}$$

é derivável em $x = 1$, PELA DEFINIÇÃO DE DERIVADA. Obs.: Não pode usar a Regra de L'Hôpital.

Solução: Precisamos de verificar se o limite

$$f'(1) := \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

existe. De fato,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - (-\frac{1}{3})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) + \frac{1}{3}}{h}$$

Observe que a depender de como h tende a 0 (pela esquerda, ou pela direita), a fórmula que descreve $f(1+h)$ muda. Daí, precisamos fazer tais limites laterais (de quando $h \to 0_+$ e $h \to 0_-$). Portanto,

$$\lim_{h\to 0_-} \frac{f(1+h) + \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-(1+h)^3}{3} + \frac{1}{3}}{h} = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(1+h-1) \cdot \left((1+h)^2 + (1+h) + 1\right)}{h} = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{h\to 0} \left((1+h)^2 + (1+h) + 1\right) = -1\ .$$

Ademais, temos

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{f(1+h) + \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{1+h} - \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{1+h} = -1\ .$$

Como tais limites laterais existem e são iguais, então f é derivável em $x = 1$ e $f'(1) = -1$. $\square$

1º EE. - 2016.1

1. $(2,0$ pontos$)$ Considere a função
$$f(x) = \frac{1-2x}{3+x}.$$
Usando a definição de derivada, calcule $f'(a)$. Aqui, $a \neq -3$ é um número real qualquer.

Solução 1. Por definição, temos que

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1-2(a+h)}{3+(a+h)} - \dfrac{1-2a}{3+a}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(3+a)(1-2a-2h)-(3+a+h)(1-2a)}{(3+a+h)(3+a)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3-6a-6h+a-2a^2-2ah-3-a-h+6a+2a^2+2ah}{h(3+a+h)(3+a)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-7h}{h(3+a+h)(3+a)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-7}{(3+a+h)(3+a)} \\
&= \frac{-7}{(3+a)^2}.
\end{aligned}$$

Solução 2.

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{1-2x}{3+x} - \dfrac{1-2a}{3+a}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{(3+a)(1-2x)-(3+x)(1-2a)}{(3+x)(3+a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{3-6x+a-2ax-3+6a-x+2ax}{(3+x)(3+a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{-7(x-a)}{(3+x)(3+a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{-7(x-a)}{(3+x)(3+a)(x-a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{-7}{(3+x)(3+a)} \\
&= \frac{-7}{(3+a)^2}.
\end{aligned}$$

2º EE. - 2016.1

1. (1,5 ponto) **Usando a definição de derivada**, calcule $f'(0)$, onde $f(x) = \sqrt{3x+1}$.
OBS.: **Não** é permitido o uso da regra de l'Hôspital.

Solução. Por definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3h+1}-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3h+1}-1}{h} \cdot \frac{\sqrt{3h+1}+1}{\sqrt{3h+1}+1} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(3h+1)-1}{h(\sqrt{3h+1}+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h(\sqrt{3h+1}+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3}{(\sqrt{3h+1}+1)} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

1º EE. - 2017.1

4ª Questão [1 pontos]: Use a definição precisa de derivada (via limite) e prove que se $f(x) = \sqrt{2x+1}$ então $f'(0) = 1$.

Solução:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}+1}\right)$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1-1}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} = \frac{2}{\sqrt{0+1}+1} = 1.$$