Derivadas Parciais - Cadeias de funções

Diretorio de Apoio Ácadêmico

October 27, 2024

1 Conceito

No último texto, fora visto a definição de uma derivação parcial e como é feito a mesma. Vimos também como as regras de derivação que utilizavamos quando tinhamos apenas uma variável, se comportam quando temos duas ou mais objetos variáveis, restando apenas abordar sobre a regra da cadeia, a qual tinhamos funções dependentes, ou seja:

$$f(h) = h^3 + 2$$
$$h(x) = \sqrt{x+6}$$

Aqui temos que f depende uma função h que é dependente de x. Tal que podemos dizer que f também dependerá de x:

$$f(x) = \sqrt{x+6}^3 + 2$$

E relembrando o que já foi visto sobre a regra da cadeia, quando derivamos uma cadeia de funções, fazemos o produto da derivada da função exterior, nesse caso de $f(h)$, com a derivada da função interior, no nosso caso $h(x)$:

$$f(h) = h^3 + 2 \Rightarrow f'(h) = 3 * h^2$$
$$h(x) = \sqrt{x+6} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{x+6}}$$
$$f'(x) = f'(h(x)) * h'(x) = \frac{df}{dh} * \frac{dh}{dx}$$
$$f(x) = \sqrt{x+6}^3 + 2 \Rightarrow f'(x) = 3 * h(x)^2 * h'(x) = 3 * \sqrt{x+6}^2 * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{x+6}} = \frac{3 * \sqrt{x+6}}{2}$$

Em relação a derivada da cadeia para as derivadas parciais seguem a mesma regra, porém é necessário ressaltar que quando lidavamos com uma função de única variável e derivavamos em relação a mesma, obtemos uma derivada *completa*, já no caso das funções de múltipla variáveis não teremos o mesmo, e sim uma parte do todo. Dado isso é necessário destacar as diferenças na anotação de uma derivada completa e parcial.
Uma derivada completa podiamos escrever das seguintes formas:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

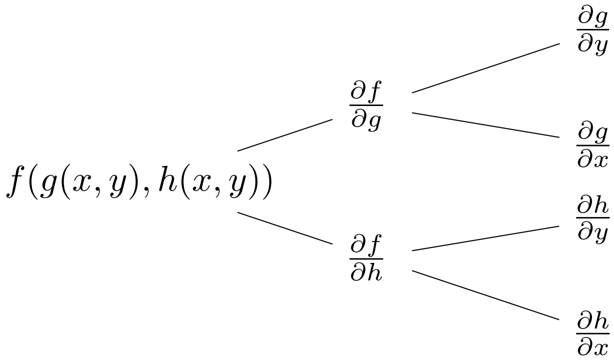
Já as parciais as anotações são da seguinte forma:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

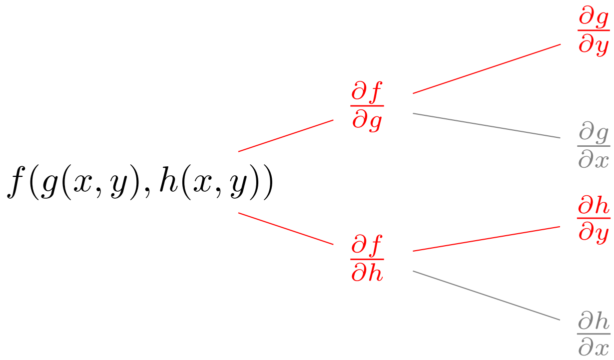
Observem que quando temos a derivada de uma função com uma única variavel utilizamos d e quando temos a derivada de uma função com múltiplas variáveis utilizamos o símbolo ∂, que podemos denotar como *parcial* ou *del*. Dado, o conhecimento da existência de derivadas completas e parciais, pode ocorrer a indagação de como obter a derivada completa de uma função de duas ou mais variáveis, a solução é mais simples do que parece, basta somar as parciais, ou seja:

$$f'(x,y) = f_x(x,y) + f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Porém o que aconteceria caso, tivessemos uma função que depende de outras funções, que por fim depende de nossas variáveis x e y? Para ajudar a visualizar o comportamento da cadeia de derivadas, vejam a imagem a baixo:



Seguindo a lógica vista anteriormente, tanto da regra da cadeia quanto de derivada completa, se fosse pedido pela derivada parcial de f em relação a y, como seria feito?



Calculariamos então, a derivada parcial de f em relação a y a partir de g, lembrando que pela regra da cadeia devemos fazer o produto da função exterior com a função interior:

$$\frac{\partial f}{\partial g} * \frac{\partial g}{\partial y}$$

E após calculamos a derivada parcial de f em relação a y, porém a partir de h:

$$\frac{\partial f}{\partial h} * \frac{\partial h}{\partial y}$$

Com isso basta somar ambas derivadas, para obter $f_y(g(x,y),h(x,y))$.

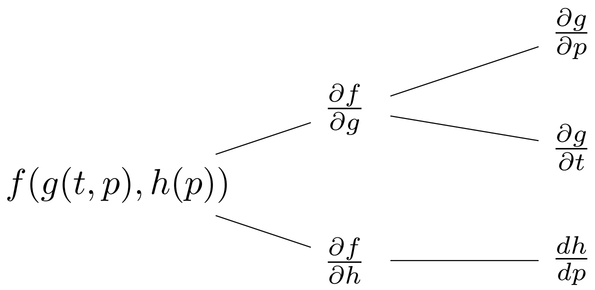
$$f_y(g(x,y),h(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial g} * \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial h} * \frac{\partial h}{\partial y}$$

Para obter a derivada parcial em relação a x segue a mesma lógica, tal que no fim poderiamos obter a derivada completa somando todas as derivadas:

$$f'(g(x,y),h(x,y)) = f_x(g(x,y),h(x,y)) + f_y(g(x,y),h(x,y)) = (\frac{\partial f}{\partial g} * \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial h} * \frac{\partial h}{\partial x}) + (\frac{\partial f}{\partial g} * \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial h} * \frac{\partial h}{\partial y})$$

Vamos para um outro exemplo, considere a seguinte função:

$$f(g(t,p),h(p))$$

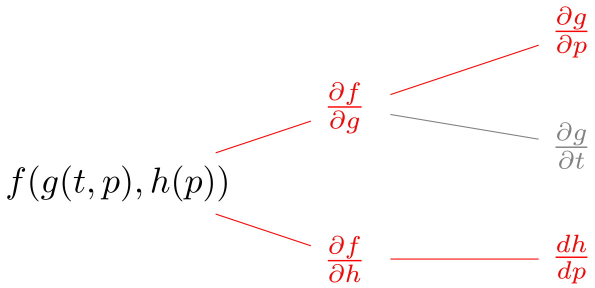


Observe que utilizamos da notação de derivada completa apenas para a derivada de h em relação a p, pois diferentemente das outras ela é a única que depende de apenas uma única variável, o f depende tanto do g quanto do h, e o g depende de p e t.
Com isso vamos obter as seguintes derivadas:

$$f_p(g,h)$$

$$f_t(g,h)$$

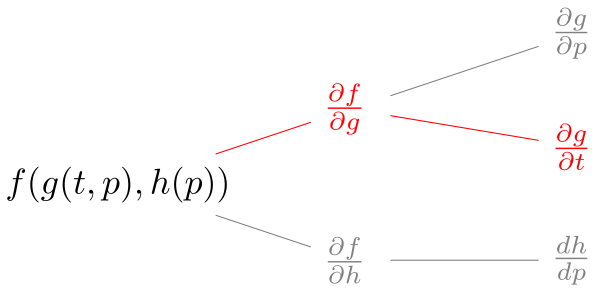
Para o primeiro caso teriamos:



Logo,

$$f_p(g,h) = \frac{\partial f}{\partial g} * \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial h} * \frac{dh}{dp}$$

Para o segundo caso:



Com isso temos que:

$$f_t(g,h) = \frac{\partial f}{\partial g} * \frac{\partial g}{\partial t}$$

Concluindo, a derivada completa da função f seria:

$$f'(t,p) = f_t(g,h) + f_p(g,h)$$

Capítulo de referência 14.3, do livro de James Stewart Cálculo vol. 2, 7^a edição. O próximo assunto a ser abordado será ***Planos Tangentes e Aproximações Lineares***, capítulo 14.4 do mesmo livro.