Lista 11

Curso de Ciências Atuariais
Disciplina Probabilidade 1- Professora Cristina
26/09/2022 - Exercícios distribuição bidimensional

1) Um aluno faz um teste de múltipla escolha com 4 questões do tipo Verdadeiro-Falso. Suponha que o aluno esteja "chutando" todas as questões, uma vez que ele não estudou a matéria da prova. Defina as seguintes variáveis aleatórias:
X_1 = número de acertos entre as duas primeiras questões da prova
Y_1 = número de acertos entre as duas últimas questões da prova
X_2 = número de acertos entre as três primeiras questões da prova
Y_2 = número de acertos entre as três últimas questões da prova
a) Construa uma tabela com o espaço amostral associado a este experimento, listando todas as possibilidades de acerto e os valores de X_1, Y_1, X_2, Y_2 e suas probabilidades.

	X_1	X_1	X_2	X_2
(E, E, E, E)	0	0	0	0
(E, E, E, C)	0	1	0	1
(E, E, C, E)	0	1	1	1
(E, C, E, E)	1	0	1	1
(C, E, E, E)	1	0	1	0
(E, E, C, C)	0	2	1	2
(E, C, E, C)	1	1	1	1
(C, E, E, C)	1	1	1	1
(C, E, C, E)	1	1	2	1
(C, C, E, E)	2	0	2	1
(E, C, C, E)	1	1	2	2
(E, C, C, C)	1	2	2	3
(C, E, C, C)	1	2	2	2
(C, C, E, C)	2	1	2	2
(C, C, C, E)	2	1	3	2
(C, C, C, C)	2	2	3	3

$$S_{X_1} = \begin{cases} (E, E, \_, \_) = 0 \\ (E, C, \_, \_); (C, E, \_, \_) = 1 \\ (C, C, \_, \_) = 2 \end{cases}$$

$$S_{Y_1} = \begin{cases} (\_, \_, E, E) = 0 \\ (\_, \_, E, C); (\_, \_, C, E) = 1 \\ (\_, \_, C, C) = 2 \end{cases}$$

$$S_{X_2} = \begin{cases} (E, E, E, \_) = 0 \\ (E, E, C, \_); (E, C, E, \_); (C, E, E, \_) = 1 \\ (E, C, C, \_); (C, E, C, \_); (C, C, E, \_) = 2 \\ (C, C, C, \_) = 3 \end{cases}$$

$$S_{Y_2} = \begin{cases} (\_, E, E, E) = 0 \\ (\_, E, E, C); (\_, E, C, E); (\_, C, E, E) = 1 \\ (\_, E, C, C); (\_, C, E, C); (\_, C, C, E) = 2 \\ (\_, C, C, C) = 3 \end{cases}$$

Variável	Probabilidade
X_1	$\mathbb{P}(X_1{=}0) = \binom{2}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
	$\mathbb{P}(X_1{=}1) = \binom{2}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2}{4}$
	$\mathbb{P}(X_1{=}2) = \binom{2}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$
Y_1	$\mathbb{P}(Y_1{=}0) = \binom{2}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
	$\mathbb{P}(Y_1{=}1) = \binom{2}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2}{4}$
	$\mathbb{P}(Y_1{=}2) = \binom{2}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$

Variável	Probabilidade
X_2	$\mathbb{P}(X_2{=}0) = \binom{3}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
	$\mathbb{P}(X_2{=}1) = \binom{3}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$
	$\mathbb{P}(X_2{=}2) = \binom{3}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$
	$\mathbb{P}(X_2{=}3) = \binom{3}{3} * \left(\frac{1}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$
Y_2	$\mathbb{P}(Y_2{=}0) = \binom{3}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
	$\mathbb{P}(Y_2{=}1) = \binom{3}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$
	$\mathbb{P}(Y_2{=}2) = \binom{3}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$
	$\mathbb{P}(Y_2{=}3) = \binom{3}{3} * \left(\frac{1}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

b) Construa a função de distribuição conjunta de (X_1, Y_1) com as respectivas marginais.

X_1	Y_1			$\mathbb{P}(X_1 = x)$
	0	1	2	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}(Y_1 = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

c) Construa a função de distribuição conjunta de (X_2, Y_2) com as respectivas marginais.

X_1	Y_1				$\mathbb{P}(X_1 = x)$
	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
$\mathbb{P}(Y_1 = y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

2) Uma moeda honesta é lançada 4 vezes. Seja X o número de caras nos 2 primeiros lançamentos e seja Y o número de caras nos 3 últimos lançamentos.
a) Liste todos os elementos do espaço amostral deste experimento, especificando os valores de X e Y.

	X	Y
(c, c, c, c)	0	0
(c, c, c, k)	0	0
(c, c, k, c)	0	1
(c, k, c, c)	1	1
(k, c, c, c)	1	1
(c, c, k, k)	0	1
(c, k, c, k)	1	1
(k, c, c, k)	1	1
(c, k, k, c)	1	2
(k, k, c, c)	2	2
(k, c, k, c)	1	2
(c, k, k, k)	1	2
(k, c, k, k)	1	2
(k, k, c, k)	2	2
(k, k, k, c)	2	3
(k, k, k, k)	2	3

$$S_X = \begin{cases} (c, c, \_, \_) = 0 \\ (k, c, \_, \_); (c, k, \_, \_) = 1 \\ (k, k, \_, \_) = 2 \end{cases}$$

$$S_Y = \begin{cases} (c, c, c, \_) = 0 \\ (k, c, c, \_); (c, k, c, \_)(c, c, k, \_) = 1 \\ (k, k, c, \_); (k, c, k, \_); (c, k, k, \_) = 2 \\ (k, k, k, \_) = 3 \end{cases}$$

b) Construa a função de distribuição conjunta de X e Y.

X	Y				$\mathbb{P}$(X=x)
	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{4}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}$(Y=y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

c) Encontre a distribuição condicional de X dado Y=3

X	$\mathbb{P}$(X=x | Y=3)
0	$\frac{0}{\frac{1}{8}} = 0$
1	$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$
2	$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

d) Calcule E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)

$$E(X) = 0 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{2}{4} + 2 * \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$E(X^2) = 0^2 * \frac{1}{4} + 1^2 * \frac{2}{4} + 2^2 * \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$$

$$E(Y) = 0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 2 * \frac{3}{8} + 3 * \frac{1}{8} = \frac{12}{8}$$

$$E(Y^2) = 0^2 * \frac{1}{8} + 1^2 * \frac{3}{8} + 2^2 * \frac{3}{8} + 3^2 * \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$V(X) = E(X^2) \text{ - } E^2(X) = \frac{6}{4} - 1^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$V(Y) = E(Y^2) \text{ - } E^2(Y) = 3 - \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

3) Em uma clínica médica foram coletados dados em 150 pacientes, referentes ao último ano. Observou-se a ocorrência de infecções urinárias (U) e o número de parceiros sexuais (N). Os valores em % encontram-se a seguir:

U	Número de Parceiros			Total
	0	1	2+	
Sim	10	20	45	75
Não	10	10	5	25
Total	20	30	50	100

Encontre todas as distribuições condicionais.

U	$\mathbb{P}(\text{U=u} \mid \text{N=0})$
Sim	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{20}{100}} = \dfrac{1}{2}$
Não	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{20}{100}} = \dfrac{1}{2}$

U	$\mathbb{P}(\text{U=u} \mid \text{N=1})$
Sim	$\dfrac{\frac{20}{100}}{\frac{30}{100}} = \dfrac{2}{3}$
Não	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{30}{100}} = \dfrac{1}{3}$

U	$\mathbb{P}(\text{U=u} \mid \text{N=2+})$
Sim	$\dfrac{\frac{45}{100}}{\frac{50}{100}} = \dfrac{9}{10}$
Não	$\dfrac{\frac{5}{100}}{\frac{50}{100}} = \dfrac{1}{10}$

N	$\mathbb{P}(\text{N=n} \mid \text{U=Sim})$
0	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{75}{100}} = \dfrac{10}{75}$
1	$\dfrac{\frac{20}{100}}{\frac{75}{100}} = \dfrac{20}{75}$
2+	$\dfrac{\frac{45}{100}}{\frac{75}{100}} = \dfrac{45}{75}$

N	$\mathbb{P}(\text{N=n} \mid \text{U=Não})$
0	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \dfrac{2}{5}$
1	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \dfrac{2}{5}$
2+	$\dfrac{\frac{5}{100}}{\frac{25}{100}} = \dfrac{1}{5}$