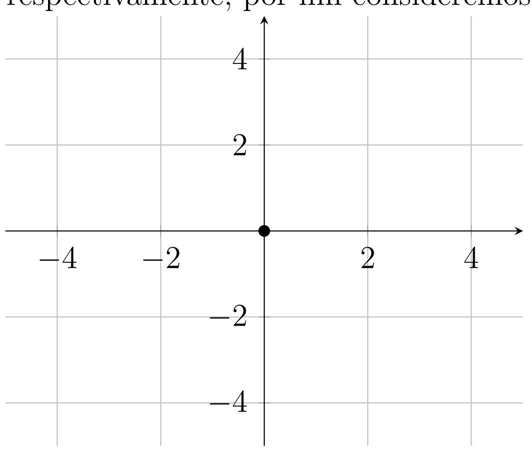
Derivadas Direcionais e Gradiente

Diretório de Apoio Acadêmico

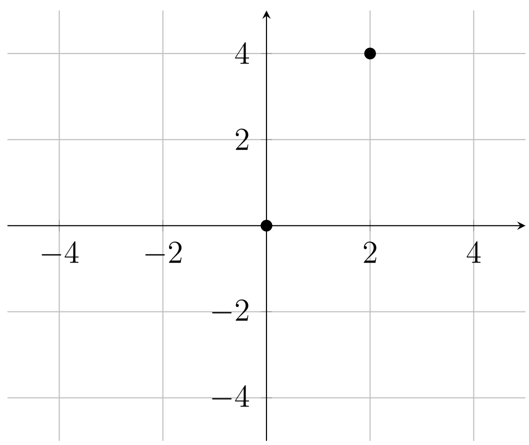
November 2024

1 Derivadas Direcionais

Em si as derivadas direcionais não são diferentes de uma derivada qualquer, as diferenças se dão na parte da interpretação e na forma que é utilizado a informação. Logo, dado o seguinte cenário, onde uma pessoa se encontra no centro de uma localização, e passaremos a considerar x e y como direções, x sendo leste quando positivo e oeste quando negativo, y será norte quando positivo e sul quando negativo, ou quando utilizamos os vetores direcionais i e j respectivamente, por fim consideremos que tal centro seja o ponto $(0, 0)$.



Considerando que a pessoa se encontra nesse centro, ela queira ir para o ponto $(2, 4)$ desse local.

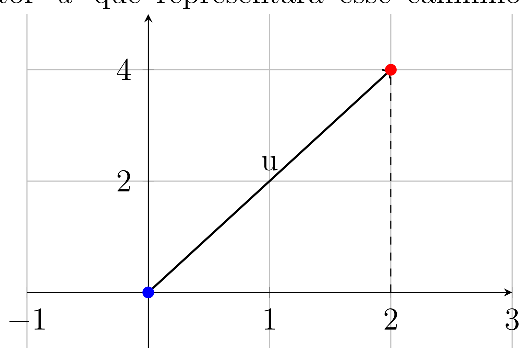


Nosso objetivo será descobrir a taxa de variação de nossa velocidade seguindo a direção para chegar nesse ponto. Para descobrir tal poderiamos buscar pela taxa de variação da velocidade no ponto de interesse, tomando a seguinte função $f(x,y) = 0,2xy + 0,6y^2\ m/s$ como a função que definirá a velocidade do indivíduo, obteriamos que:

$$f_x = 0,2y \rightarrow f_x(2,4) = 0,2 * 4 = 0,8$$

$$f_y = 0,2x + 1,2y \rightarrow f_y(2,4) = 0,2 * 2 + 1,2 * 4 = 5,2$$

Com esses resultados temos que, quando nos aproximamos do ponto de nosso interesse $(2,4)$ estamos variando em x em $0,8\ m$ e variando em y em $5,2\ m$. Temos a variação de velocidade conforme nos aproximamos do ponto, porém ainda falta saber a direção que estamos seguindo, e a quantidade de passos que estamos dando, para isso vamos considerar um vetor $\overrightarrow{u}$ que representará esse caminho do ponto $(0,0)$ para o ponto $(2,4)$



Nos casos mais simples, quanto passos dariamos? Poderiamos primeiro dar *2* passo em direção x e mais *4* em direção a y, ou vice-versa, somando ao todo seriam *6* passos, de um formato mais técnico:

$$\vec{u} = \langle 2, 4 \rangle = 2i + 4j$$

Percebam que os caminhos abordados foram seguindo os catetos, mas poderiamos chegar mais rapidamente se tomassemos como direção a diagonal dessa figura, a qual pela imagem é possível observar que seria nossa hipotenusa, logo teriamos:

$$||\vec{u}|| = ||\langle 2, 4 \rangle|| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

O símbolo utilizado $||\vec{u}||$ é chamado de môdulo do vetor. Como isso temos que seguindo pela diagonal, seria necessário apenas $\sqrt{20} \approx 4,5$ passos, logo comparando com os outros caminhos percebemos que seguir por tal se torna mais rápido do que os outros.

Outra pergunta que pode ocorrer seria, quantos *metros* o indíviduo teria pecorrido com um *único* passo. Sabemos que o vetor $\vec{u}$ representa a quantidade de passos dados até o ponto de nosso interesse $(2, 4)$ e que a direção ou caminho mais rápido é pela diagonal $||\vec{u}||$, porém queremos dar apenas *1* passo. Para isso utilizaremos de um outro vetor, a qual chamaremos o mesmo de *vetor unitário* ou $\vec{\hat{u}}$, a qual obtemos quando seu môdulo é igual a 1, ou seja:

$$||\vec{\hat{u}}|| = ||\langle a, b \rangle|| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

Sabemos que :

$$||\vec{u}|| = ||\langle 2, 4 \rangle|| = \sqrt{20}$$

E se dividissemos todo o vetor pelo resultado do môdulo?

$$\frac{||\vec{u}||}{\sqrt{20}} = \frac{||\langle 2, 4 \rangle||}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} = 1$$

A partir da fórmula acima, vamos ver um pouco a seguinte parte:

$$\frac{\sqrt{2^2 + 4^2}}{\sqrt{20}}$$

Para obter o vetor que buscamos $\vec{\hat{u}}$, vamos manipular um pouco essa parte da função, vejam o passo a passo a seguir:

$$\frac{\sqrt{2^2 + 4^2}}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{2^2}{20} + \frac{4^2}{20}} = \sqrt{(\frac{2}{\sqrt{20}})^2 + (\frac{4}{\sqrt{20}})^2}$$

Primeiro, como tanto o denominador e numerador estão em raízes quadradas, fora possível junta-las em uma única raiz. O próxima passo fora uma simples manipulação, percebam que $\sqrt{20}^2 = 20$, logo para colocar toda a fração ao quadrado fora necessário colocar o *20* em uma raiz.
Dito isto, vamos verificar aquilo que restou,

$$\sqrt{(\frac{2}{\sqrt{20}})^2 + (\frac{4}{\sqrt{20}})^2}$$

percebam que oque temos seria um outro módulo de vetor, porém no lugar de a e b, temos respectivamente, $\frac{2}{\sqrt{20}}$ e $\frac{4}{\sqrt{20}}$, logo podemos dizer que nosso *vetor unitário* ($\vec{\hat{u}}$) seria $(\frac{2}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}})$, que poderiamos visualizar também da seguinte forma:

$$\vec{\hat{u}} = (\frac{2}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}}) = \frac{1}{\sqrt{20}} * (2, 4) = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$$

Com isso obtemos:

$$\vec{\hat{u}} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$$

Por fim, agora que sabemos que *1* passo em direção ao ponto é formado por $\vec{\hat{u}} = \langle\frac{2}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}}\rangle = \frac{2}{\sqrt{20}}i + \frac{4}{\sqrt{20}}j$, ou seja, com um passo andamos $\frac{2}{\sqrt{20}}$ em direção a i, ou x como tinhamos abordado inicialmente, e $\frac{4}{\sqrt{20}}$ em direção a j, ou y. Podemos calcular a Derivada Direcional em relação a $(2, 4)$:

$$\begin{aligned}
D_u f(2,4) &= \langle f_x, f_y\rangle * \vec{\hat{u}} \\
&= \langle f_x, f_y\rangle * \langle\frac{2}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}}\rangle \\
&= \langle 0,2y; 0,2x + 1,2y\rangle * \langle\frac{2}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}}\rangle \\
&= \langle 0,2 * 4; 0,2 * 2 + 1,2 * 4\rangle * \langle\frac{2}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}}\rangle \\
&= \langle 0,8; 5,2\rangle * \langle\frac{2}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}}\rangle \\
&= 0,8 * \frac{2}{\sqrt{20}} + 5,2 * \frac{4}{\sqrt{20}} \\
&\approx 5\ m/s
\end{aligned}$$

E a interpretação do resultado é que na direção do ponto estamos variando 5 m/s a cada passo dado.

2 Gradiente

Na função de Derivada direcional $D_u f$, vista acima fora mostrado um termo ainda não abordado $\langle f_x, f_y \rangle$, um vetor que contém as derivadas parciais de nossa função, enquanto o $\overrightarrow{\hat{u}}$ representava nossos passos, teremos tal vetor representando a velocidade em torno de um ponto (a, b) qualquer, a qual é denominado como *gradiente*, como estamos considerando uma função *f*, logo chamamos de *gradiente de f* representado pelo seguinte símbolo:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle \ = \frac{\partial f}{\partial x} * \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} * \mathbf{j}$$

Um dos usos do gradiente, é na criação do plano tangente à uma superfície de nível. Para isso vamos considerar o seguinte plano:

$$f(x(t), y(t), z(t)) = k$$

(onde temos que as variáveis da função depende de uma outra váriavel que é o *tempo*, pois consideramos que essas mudem com o tempo) Se fossemos atrás do gradiente da função, teriamos então:

$$\nabla f(x(t), y(t), z(t)) = \langle \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{dx}{dt}, \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{dy}{dt}, \frac{\partial f}{\partial z} * \frac{dz}{dt} \rangle = 0$$

(lembrando que estamos derivando ambos os lados da igualdade da função, logo a derivada da constante k é 0, continuando como temos produto em nosso vetor, poderiamos separar o mesmo em 2 vetores diferentes)

$$\nabla f(x(t), y(t), z(t)) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \rangle * \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \rangle = \nabla F * r'(t) = 0$$

(temos então o *gradiente* de F, que contém as derivadas parciais da função f em relação á suas variáveis, e temos o vetor r' que representa a variação dessas variaveis no tempo) É interessante saber que a derivada é uma aproximação entre a distância entre 2 pontos:

$$p(t_1) - p(t_0) \approx p'(t_0)$$

(um conceito já visto nos fundamentos de cálculo I)

Logo, poderiamos reescrever de outro jeito a função acima. Sabendo que somamos os elementos dentro do vetor, teriamos:

$$\nabla F * r'(t_0) = \frac{\partial F}{\partial x_0} * \frac{dx}{dt_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} * \frac{dy}{dt_0} + \frac{\partial F}{\partial z_0} * \frac{dz}{dt_0} = \frac{\partial F}{\partial x_0} * (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y_0} * (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z_0} * (z - z_0) = 0$$

(percebam que no fim chegamos na fórmula do plano tangente, vista anteriormente)

$$F_{x_0} * (x - x_0) + F_{y_0} * (y - y_0) + F_{z_0} * (z - z_0) = 0$$

E a partir desse plano tangente, podemos obter as retas normais, ao dividir a distância pecorrida por cada direção pela sua taxa de variação, da seguinte forma:

$$\frac{(x - x_0)}{F_{x_0}} = \frac{(y - y_0)}{F_{y_0}} = \frac{(z - z_0)}{F_{z_0}}$$

O gradiente possui diveras outras utilidades que podem ser exploradas, como por exemplo, obter a direção de máxima variação, para isso é necessário perceber que todo gradiente é perpendicular á curva de nível em que está sendo cálculada. Ou seja, ela estará sempre na direção onde hávera a maior taxa de variação, como mostra a imagem abaixo, retirada do livro de James Stewart.

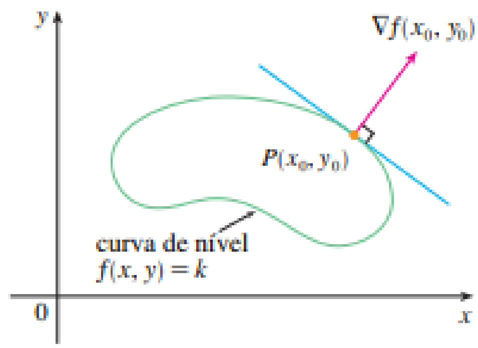


Figure 1: Figura 11, capítulo 14.6 de Cálculo vol.2 de James Stewart

Logo, o indívidúo estaria em máxima velocidade, quando estivesse na mesma direção do vetor *gradiente*, em termos matemáticos, o *vetor unitário* e o *vetor gradiente* possuem a mesma direção.
Para concluir vamos resolver um problema de plano tangente e reta normal. Dada a seguinte função, o nosso objetivo será obter o plano e a reta na superfície oferecida:

$$x + y + z = e^{xyz}; S_0 : (0, 0, 1)$$

(primeiro vamos arrumar a equação para que a igualdade seja igual a zero, ao passar o exponencial para o outro lado subtraindo)

$$x + y + z - e^{xyz} = 0; S_0 : (0, 0, 1)$$

(depois calculemos o gradiente dessa função)

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \langle 1 - yz * e^{xyz}, 1 - xz * e^{xyz}, 1 - xy * e^{xyz} \rangle$$

(utilizando ponto da superfície inicial dado, teriamos)

$$\nabla f(0, 0, 1) = \langle 1 - 0 * 1 * e^{0*0*1}, 1 - 0 * 1 * e^{0*0*1}, 1 - 0 * 0 * e^{0*0*1} \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

(aplicando o mesmo na fórmula do plano tangente, obteriamos)

$$f_x * (x - x_0) + f_y * (y - y_0) + f_z * (z - z_0) = 0$$

$$1 * (x - 0) + 1 * (y - 0) + 1 * (z - 1) = x + y + z - 1 = 0$$

$$x + y + z = 1$$

(obtemos então a equação do plano) Obtida a equação do plano tangente, resta buscar as retas normais desse mesmo plano, e como visto anteriormente a equação da reta normal é dada por:

$$\frac{(x - x_0)}{F_{x_0}} = \frac{(y - y_0)}{F_{y_0}} = \frac{(z - z_0)}{F_{z_0}} \rightarrow \frac{(x - 0)}{1} = \frac{(y - 0)}{1} = \frac{(z - 1)}{1} \rightarrow x = y = z{-}1$$

Logo, a equação da reta normal simétrica é dada por

$$x = y = z - 1$$

. Com isso terminamos esse tópico, no próximo abordaremos sobre valores máximos, mínimos e os multiplicadores de *Lagrange*.