DERIVADAS

ANÁLISE MARGINAL E APROXIMAÇÃO POR INCREMENTOS

Na análise marginal buscamos saber o impacto que causará no valor da função ao incrementar mais uma unidade, normalmente quando queremos saber o impacto ***exato*** faríamos apenas uma diferença, por exemplo considere que uma produção tenha feito *40 unidades* de certo produto, que rendeu um lucro de *L(40)* qual seria o lucro extra na produção de mais uma unidade?

$$L(41) - L(40)$$

Aplicando uma simples diferença já oferece o valor, porém existem funções que seriam complicadas ou tomam muito tempo para realizar tal diferença, para isso há uma forma de ***estimar*** tal valor por meio das derivadas, lembrando da sua fórmula pela definição:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Observe que quando o incremento h é igual a 1, chegamos na mesma equação da diferença.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+1) - f(x)}{1} \approx f(x+1) - f(x)$$

Dado que esse incremento se aproxima de 0, é cometido alguns pequenos desvios do valor ***exato***, tal que é feito uma aproximação desses valores:

$$L'(40) \approx L(41) - L(40)$$

Utilizando de uma questão do Hoffman 9.ed do capítulo 2.5 como exemplo de resolução:

11. ANÁLISE MARGINAL O custo total de um fabricante é $C(q) = 0{,}1q^3 - 0{,}5q^2 + 500q + 200$ reais, onde q é o número de unidades produzidas.

a. Use os métodos de análise marginal para estimar o custo de fabricação da quarta unidade.

b. Calcule o custo real de fabricação da quarta unidade.

Vejam que a questão pede primeiro para ***estimar*** o custo de fabricação da 4^aunidade. E como vimos anteriormente quando buscamos estimar o valor da fabricação de uma unidade a mais, aplicamos a derivada no valor que antecede essa unidade adicional.

$$\boldsymbol{C(q) = 0,1q^3 - 0,5q^2 + 500q + 200}\, reais$$

$$\boldsymbol{C'(q) = 0,3q^2 - 1q + 500}\, reais$$

$$C'(3) = 0{,}3(3)^2 - (3) + 500 = 499{,}7\, reais$$

Ou seja, o custo adicional na fabricação da 4^aunidade é de 499,7 reais, lembrem-se que isso é a ***estimativa***. Já na letra b é pedido o cálculo do custo real dessa fabricação, lembrando que:

$$f'(x) \approx f(x+1) - f(x)$$

Onde $f'(x)$ é uma *estimativa* e $f(x+1) - f(x)$ o valor *exato*, logo teríamos:

$$\boldsymbol{C(4) - C(3)} = 2198{,}4 - 1698{,}2 = \boldsymbol{500,2\, reais}$$

$$\boldsymbol{C(4) = 0,1(4)^3 - 0,5(4)^2 + 500(4) + 200} = 2198{,}4\, reais$$

$$\boldsymbol{C(3) = 0,1(3)^3 - 0,5(3)^2 + 500(3) + 200} = 1698{,}2\, reais$$

Chegamos então que o exato custo da fabricação dessa unidade adicional seria de 500,2 reais, 50 centavos a mais da estimativa feita.

Porém se caso não quiséssemos saber o impacto na adição de uma unidade a mais, e sim de um valor menor, por exemplo essa outra questão do mesmo capítulo de Hoffman:

16. FABRICAÇÃO O custo total de um fabricante é $C(q) = 0{,}1q^3 - 0{,}5q^2 + 500q + 200$ reais quando o nível de produção é q unidades. O nível atual de produção é 4 unidades, mas o fabricante pretende aumentá-la para 4,1 unidades. Estime a variação do custo total em conseqüência deste aumento de produção.

A qual busca saber o impacto em incrementar não 1 unidade, e sim 0,1 unidades na mesma equação utilizada anteriormente. Sabemos que uma aproximação para uma única unidade de incremente é a derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para resolver nosso problema vamos considerar que $0 < h < 1$, e utilizar dessa aproximação e mexer um pouco nessa equação:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Observe que na forma exata buscaríamos $f(x+h) - f(x)$, e que quando $h = 1$ a parte de baixo do quociente é ignorável, porém agora que o tamanho do incremente é diferente temos de considerar o mesmo. Dessa forma para alcançar a forma exata, devemos então tirar a divisão, para tal multiplicaria ambos os lados pelo h e iremos obter:

$$h \cdot f'(x) \approx f(x+h) - f(x)$$

Logo temos que uma estimativa para um incremento fracional, pode ser dado pela derivada multiplicada por esse pequeno incremento. Com isso o nosso exemplo seria resolvido da seguinte forma:

$$0{,}1 \cdot C'(4) \approx C(4{,}1) - C(4)$$

Utilizando da derivada que já fora feita no exemplo anterior:

$$\boldsymbol{C'(q) = 0,3q^2 - 1q + 500}\, reais$$

$$\boldsymbol{C'(4) = 0,3(4)^2 - 1(4) + 500} = 400\, reais$$

$$C(4{,}1) - C(4) \approx 0{,}1C'(4) = 0{,}1 \cdot 400 = 40\, reais$$

Logo temos que a estimativa do custo no aumento em 0,1 unidades no nível de produção atual de 4 unidades, é de 40 reais.