Integrais Múltiplas

Diretório de Apoio Acadêmico

1 Revendo Integrais de uma varíavel

Quando iniciamos o estudo sobre integrais, considerando uma variável, tinhamos dois objetivos, encontrar a função **PRIMITIVA**, ou calcular a **ÁREA** em baixo de uma curva. Tal que podiamos dizer que:

$$F(.) = \int_a^b f(.)\ dA = K$$

(a integral de uma função qualquer de uma variável, dentre um intervalo definido$[a : b]$ retorna a aréa embaixo dessa integral)

$$F(.) = \int f(.)\ dA$$

(quando o intervalo não é definido, a função retorna outra função, essa considerada como função **PRIMITIVA**)

Considerando a seguinte função como exemplo:

$$f'(x) = 4x + 5$$

Poderiamos obter a função *PRIMITIVA* que gerou tal função ao integrar de forma não definida, ou seja, sem intervalo.

$$F(x) = \int f'(x)\ dx = \int 4x + 5\ dx = \frac{4}{2}x^2 + 5x + K = 2x^2 + 5x + K$$

Observe que obtemos não apenas uma outra função, e sim uma família, pois k é uma constante que pode assumir qualquer valor, assim tendo diversas funções possíveis a qual se fossemos derivar a mesma, obteriamos a função inicial. Outro caso, poderiamos considerar um intervalo $[5 : 12]$ e buscar calcular a área entre tal intervalo:

$$\int_5^{12} 4x + 5\ dx = \left[2x^2 + 5x\right] |_5^{12} = (2 * 12^2 + 5 * 12) - (2 * 5^2 + 5 * 5) = (348) - (75) = 273$$

Observe que aquilo visto em cima, poderia ser reescrito como a diferença entre a função *PRIMITIVA* quando $x = 12$ e quando $x = 5$:

$$F(12) - F(5) = \int_5^{12} f(x)\ dx$$

2 Integrais Duplas

Em integrais duplas nossos objetivos não mudam, iremos ou buscar pela função **PRIMITIVA**, e ao ínves de buscar a área dentre o intervalo dado, estamos em busca do valor da **SUPERFÍCIE** nos intervalos dados, veja que agora estaremos lidando com duas variáveis, logo será necessário o intervalo para as duas, tal que:

$$F(x, y) = \int\int f'(x, y)\ dS$$

E como lidariamos com tal tipo de integral? Utilizaremos da mesma lógica que viemos utilizando para lidar com funções com mais de uma variável, escolhemos uma delas para fixar como constante, e trabalhamos em cima da outra. Podemos relembrar as derivadas parciais, se tinhamos:

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy + 6y^2$$

Derivamos de forma parcial, fixando uma delas e derivando em relação a outra:

$$f_x(x, y) = 4x + 4y + 0 = 4x + 4y$$

(y é uma constante, por tal como $6y^2$ não está acompanhado do x, o mesmo é zerado)

$$f_y(x, y) = 4x + 12y$$

(nesse caso $2x^2$ é zerado)
Nas integrais duplas seguimos a mesma ideia, escolhemos um para integrar primeiro, para então integrar o outro, observe o próximo caso, vamos calcular a função *PRIMITIVA* primeiro:

$$f'(x, y) = 5xy^2 + 2y + x^2$$

$$F(x, y) = \int\int f'(x, y)\ dx\ dy = \int\int 5xy^2 + 2y + x^2 dx\ dy$$

Podemos integrar primeiramente em relação a x, considerando y como uma constante:

$$\int 5xy^2 + 2y + x^2\ dx = \frac{5}{2}x^2 * y^2 + \frac{2}{1}y * x^1 + \frac{1}{3}x^3 = \frac{5x^2y^2}{2} + 2xy + \frac{x^3}{3}$$

(observe que nesse caso não colocamos a *constante* **k** ainda, a razão por trás é simples, como iremos ainda integrar uma segunda vez, podemos deixar para colocar no fim)
Como terminamos de integrar em relação a x, resta integrar em relação a y, veja como ficaria nossa integral:

$$F(x, y) = \int \left[\int 5xy^2 + 2y + x^2\ dx\right]\ dy = \int \frac{5x^2y^2}{2} + 2xy + \frac{x^3}{3}\ dy$$

Para termina, fazemos essa integração em relação a y:

$$\int \frac{5x^2y^2}{2} + 2xy + \frac{x^3}{3}\ dy = \frac{5}{2}x^2 * \frac{1}{3}y^3 + 2x * \frac{1}{2}y^2 + \frac{x^3}{3} * y = \frac{5x^2y^3}{6} + xy^2 + \frac{x^3y}{3} + K$$

Logo nossa família de funções **PRIMITIVA** é:

$$F(x, y) = \frac{5x^2y^3}{6} + xy^2 + \frac{x^3y}{3} + K$$

Uma pergunta que poderia ocorrer é, e se integrassemos em relação a y primeiro, ao invés de começar por x. Logo, vamos ver aquilo que ocorreria nesse caso:

$$f'(x,y) = 5xy^2 + 2y + x^2$$
$$F(x,y) = \int\int f'(x,y)\ dy\ dx = \int \left[\int 5xy^2 + 2y + x^2 dy\right]\ dx$$
$$\int 5xy^2 + 2y + x^2 dy = \frac{5}{3}xy^3 + y^2 + x^2y$$
$$F(x,y) = \int \left[\int 5xy^2 + 2y + x^2 dy\right]\ dx = \int \frac{5}{3}xy^3 + y^2 + x^2y\ dx = \frac{5}{6}x^2y^3 + xy^2 + \frac{x^3y}{3} + K$$

Observe que chegamos no mesmo resultado, independente por qual variável começamos a integrar, ou seja, logo vai da escolha de cada um, por qual das variáveis integrar primeiro. Haverá casos onde integrar primeiro uma das variáveis facilitará mais do que começar pela outra, ou seja, é possível ir por um caminho mais simples se escolher a variável certa.

3 Integrais Triplas

Mesma lógica, mesmo objetivos, nesse caso, ao invés da *Superfície* buscamos calcular o **VOLUME**:

$$F(x,y,z) = \int\int\int f(x,y,z)\ dV$$

E como no caso das integrais duplas, independente da ordem de integração, o resultado será o mesmo:

$$F(x,y,z) = \int\int\int f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int f(x,y,z)dydxdz = \int\int\int f(x,y,z)dydzdx$$

Para concluir com essa parte, vamos realizar a 3^a questão do livro de Cálculo, por James Stewart, Vol. 2 no Capítulo 15.7:

$$\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x-y)dxdydz$$

(Observe que nos intervalos dados, dois deles estão relação a alguma variável, tal relação definirá a ordem de integração, caso não houvesse nenhuma variável no intervalo de alguma integração a ordem não importaria)

$$\int_0^{y-z} (2x-y)dx = \left[x^2 + xy\right]_0^{y-z} = \left[(y-z)^2 + (y-z)*y)\right] - (0^2 + 0*y) = y^2 - 2yz + z^2 + y^2 - yz$$
$$\int_0^{y-z} (2x-y)dx = 2y^2 - 3yz + z^2$$

(integramos em relação a x primeiro, pois a mesma não se encontra em nenhum dos intervalos)

Calculado a integral em relação x, aplicamos a mesma na integral tripla inicial:

$$\int_0^2 \int_0^{z^2} \left[\int_0^{y-z} (2x-y)dx\right] dydz = \int_0^2 \int_0^{z^2} 2y^2 - 3yz + z^2 dydz$$

(nesse caso iremos integrar em relação a y, pois quem está no intervalo é z)

$$\int_0^{z^2} 2y^2 - 3yz + z^2\ dy = \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2z + z^2y\right]_0^{z^2} = \left[\frac{2}{3}(z^2)^3 - \frac{2}{3}(z^2)^2z + z^2(z^2)\right] - (0 - 0 + 0)$$

$$\int_0^{z^2} 2y^2 - 3yz + z^2 dy = \frac{2}{3}z^6 - \frac{3}{2}z^4 + z^4 = \frac{2}{3}z^6 - \frac{1}{2}z^4$$

Agora resta integrar uma última vez, em relação a z, veja que o intervalo é apenas de *valores*, logo sabemos que no fim a função irá retornar um **valor**:

$$\int_0^2 \left[\int_0^{z^2} 2y^2 - 3yz + z^2 dy\right] dz = \int_0^2 \frac{2}{3}z^6 - \frac{1}{2}z^4 dz$$

$$\int_0^2 \frac{2}{3}z^6 - \frac{1}{2}z^4 dz = \left[\frac{2}{3} * \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{2} * \frac{1}{5}z^5\right]_0^2 = \left[\frac{2}{21} * (2)^7 - \frac{1}{10}(2)^5\right] - (0 - 0) = \frac{256}{21} - \frac{32}{10} \approx 9$$

Logo, sabemos que a integral tripla inicial possui um vólume de 9 *u.m.*, onde *u.m.* é a **unidade de medida** utilizada. Com isso finalizamos esse tópico, o próximo assunto será **MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS**.