Vetores no Plano e no Espaço

Diretório de Apoio Acadêmico

1 Espaço Vetorial

Em nosso último tópico, observamos que *vetores* a qual seguem as seguintes propriedades:

$$I.\ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w};$$

$$II.\ \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v};$$

$$III.\ \vec{v} + \mathbf{0} = \vec{v};$$

$$IV.\ \vec{v} + (-\vec{v}) = \mathbf{0};$$

$$V.\ k(\vec{v} + \vec{w}) = k\vec{v} + k\vec{w};$$

$$VI.\ (k+m)\vec{v} = k\vec{v} + m\vec{v};$$

$$VII.\ (km)\vec{v} = k(m\vec{v});$$

$$VIII.\ 1 * \vec{v} = \vec{v}$$

Fazem parte de um conjunto *não vázio*, e com duas operações **soma** e **multiplicação**, denominado como **V**, é chamado de ***ESPAÇO VETORIAL***. Com isso, podemos considerar:

$$V = \mathbf{R}^n = \{\langle x_1, x_2, x_3, ..., x_n\rangle,\ x_i \in \mathbf{R}\}$$

V é um conjunto de vetores no espaço de *dimensão* **n**, a quais seus elementos *pertencem* aos números *Reais.*

Exemplos:

$$V = \mathbf{R}^2 = \{\langle a, b\rangle;\ a, b \in \mathbf{R}\}$$

$$V = \mathbf{R}^5 = \{\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\rangle;\ x_i \in \mathbf{R}\}$$

$$\vec{v} = \langle a, b, c\rangle,\ \vec{v} \in V = \mathbf{R}^3 = \{\langle a, b, c\rangle;\ a, b, c \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0, 0\rangle \in V = \mathbf{R}^4 = \{\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle;\ x_i \in \mathbf{R}\}$$

Quando o conjunto **V** é composto de ***n*** *vetores*, de mesma *dimensão* ***p***, podemos dizer que **V** é:

$$V = M(n,p) = R^p = \{\langle x_{11}, x_{12}, ..., x_{1p}\rangle, \langle x_{21}, x_{22}, ..., x_{2p}\rangle, ..., \langle x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{np}\rangle; x_{ij} \in \mathbf{R}\}$$

V é um conjunto de matrizes de *n linhas* e *p colunas*.

Exemplos:

$$V = M(3,2) = \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix};\ x_{ij} \in \mathbf{R} \right\}$$

$$V = M(1,3) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix};\ a,b,c \in \mathbf{R} \right\} = \mathbf{R}^3$$

Observe que quando a *Matriz* possui uma única matriz, a mesma pode ser vista como um conjunto de *vetores*, logo:

$$V = M(1,p) = \mathbf{R}^p$$

E da mesma forma que existe um ***vetor nulo***, há uma ***matriz nula***:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in V = M(n,p)$$

Uma curiosidade que sabemos é que o produto de uma **matriz-linha** com uma **matriz-coluna** retorna uma equação, veja abaixo:

$$A = M(1,3) = \begin{bmatrix} a, b, c \end{bmatrix};$$

$$B = M(3,1) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$A * B = M(1,1) = a * a + b * b + c * c = a^2 + b^2 + c^2$$

E como as matrizes pertecem ao **ESPAÇO VETORIAL**, o *Polinómio* resultante dessas matrizes também está nesse espaço, tal que:

$$P^n = \left\{ a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n;\ a_i \in \mathbf{R} \right\}$$

Exemplo:

$$P^2 = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ a_i \in \mathbf{R} \right\}$$

se

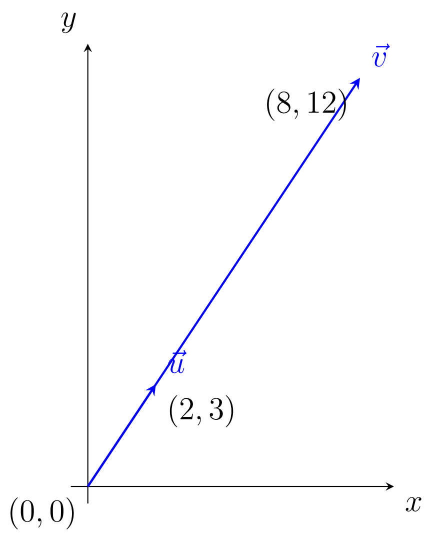
$$A = M(1,3) = [\sqrt{a_0}, \sqrt{a_1 * x}, x\sqrt{a_2}]$$

$$B = M(3,1) = \begin{bmatrix} \sqrt{a_0} \\ \sqrt{a_1 * x} \\ x\sqrt{a_2} \end{bmatrix}$$

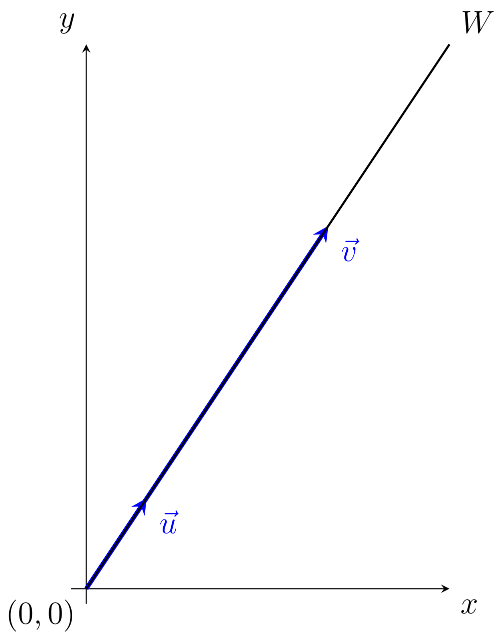
$$A * B = M(1,1) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = P^2$$

Algo interessantes dentro dos **Espaços Vetorias** é a existência de pequenos *vetores* dentro de um outro vetor, por exemplo:

$$\vec{u} = (2,3) \ e \ \vec{v} = (8,12)$$



Observe como o *vetor* $\vec{u}$ faz parte de um outro *vetor* $\vec{v}$, e poderia haver outro vetor a qual $\vec{v}$ pertenceria também. Tal que poderiamos pensar que existe um *subconjunto* **W**, formado por esses pequenos vetores:



Esse *subconjunto* **W**, será chamado de ***SUBESPAÇO VETORIAL***.

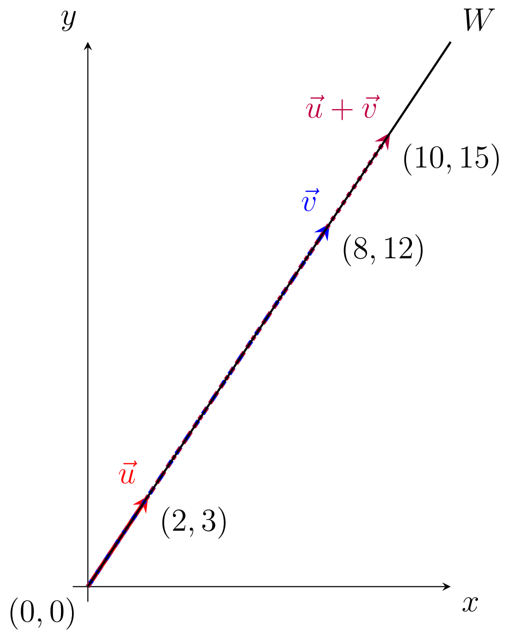
2 Subespaço Vetorial

O *Subespaço Vetorial* é um subconjunto ($\mathbf{W}$) do *Espaço Vetorial* ($\mathbf{V}$), identificado quando temos:

$$I.\ \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{W} \ e\ se\ \vec{u} + \vec{v} \in \mathbf{W}$$

$$II.\ Para\ quaisquer\ constante\ \mathbf{k} \in \mathbf{R},\ \ e\ \vec{v} \in \mathbf{W},\ \ logo\ é\ necessário\ que\ \mathbf{k}\vec{v} \in \mathbf{W}$$

Podemos visualizar isso ocorrendo em nossa última figura:



Vejam que a soma dos dois vetores, resultou em outro vetor pertecente ao subespaço $\mathbf{W}$. Podemos observar também que o *vetor* $\vec{v}$ poderia ser obtido ao **múltiplicar** o *vetor* $\vec{u}$ por **4**:

$$k = 4;\ \ k\vec{u} = 4\vec{u} = 4 * \langle 2, 3\rangle = \langle 8, 12\rangle = \vec{v}$$

Logo, teriamos que tanto o vetor $\vec{u}$ e o vetor $\vec{v}$ *pertencem* ao **Subespaço Vetorial**. E pelo mesmo ser um subconjunto do **Espaço Vetorial** todas as 8 propriedades vistas anteriormente, também se aplicam ao mesmo. Abaixo vamos praticar a identificação de certos *Subespaços* dado ao *Espaço* indicado.

Exemplo 1:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}^3,\ \ W = \{\langle x_0, x_1, 0\rangle; x_i \in \mathbf{R}\}$$

(Temos um Espaço Vetorial de terceira dimensão, onde um de seus subconjuntos, Subespaço Vetorial, possui a terceira coordenada nula)

$$Considere:\ \ \vec{v} = (a_1, b_1, 0)\ e\ \vec{w} = (a_2, b_2, 0)$$

$$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{W} = \{\langle x_0, x_1, 0\rangle; x_i \in \mathbf{R}\}$$

Aplicando os dois *axiomas* vistos:

$$I.\ \vec{v} + \vec{w} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0)$$

(Observem que falamos que o subespaço possui a terceira coordenada nula, e ao fazermos a soma de dois vetores pertecentes a W obtivemos um outro vetor seguindo o mesmo padrão)

$$\vec{v} + \vec{w} \in \mathbf{W}$$

$$II.\ k * \vec{v} = (ka_1, ka_2, 0) \in \mathbf{W}$$

(Temos que o produto de um vetor qualquer com quaisquer constante ainda resultará em um vetor dentro do subespaço)

Logo, como as duas propriedades se demonstram verdadeiras para esse caso, temos que $W \in \mathbf{V}$.

Exemplo 2:

Vamos refazer o exemplo anterior, porém ao invés de temos a terceira coordenada nula, iremos considerar a mesma como uma constante qualquer:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}^3,\ \ W = \{\langle x_0, x_1, k\rangle; x_i, k \in \mathbf{R}\}$$

(Temos um Espaço Vetorial de terceira dimensão, onde um de seus subconjuntos, Subespaço Vetorial, possui a terceira coordenada constante em um valor k)

$$Considere:\ \ \vec{v} = (a_1, b_1, k)\ e\ \vec{w} = (a_2, b_2, k)$$

$$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{W} = \{\langle x_0, x_1, k\rangle; x_i, k \in \mathbf{R}\}$$

$$I.\ \vec{v} + \vec{w} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 2k)$$

(Observem que falamos que o subespaço possui a terceira coordenada como uma específica ***constante****, e ao fazermos a soma de dois vetores dentro desse conjunto, tal constante se modifica logo saindo do padrão)*

$$\vec{v} + \vec{w} \notin \mathbf{W}$$

Na primeira propriedade já observamos que uma das propriedades não ocorre, logo $W \notin \mathbf{V}$.

Exemplo 3:

Considere:

$$\mathbf{V} = M(3,3)$$

(O espaço vetorial é uma matriz de 3 linhas e 3 colunas, ou 3 por 3)

$$W = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{bmatrix}$$

(W é o subespaço de matrizes triângulares superiores)

Dados as seguintes matrizes, quais delas podem ser consideradas parte desse Subespaço W:

$$a.\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$b.\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c.\ C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d.\ D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

Desses **4** casos, apenas *duas matrizes* satisfazem o formato do subconjunto, sendo elas **A** e **C**, lembrando que os elementos podem assumir qualquer valor dentro dos ***Números REAIS*** sendo *zero* um deles, por essa razão que consideramos que todo *espaço e subespaço* apresentam algo em *comum*, o elemento **NULO**. E por fim, as razões por trás de **B** e **D** não fazerem parte do subconjunto são:

$$B: \textit{ Uma matriz triangular superior não apresenta elementos abaixo da diagonal};$$

$$D: \ Essa\ Matriz\ é\ uma\ triangular\ Inferior;$$

Tendo em conhecimento que **A** e **C** fazem parte do subconjunto, podemos aplicar os axiomes para verificar o caso:

$$I.\ A + C = \begin{bmatrix} a_{11} + c_{11} & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & a_{32} \end{bmatrix} \in \mathbf{W};$$

$$II.\ k * A = k * \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ 0 & ka_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ka_{33} \end{bmatrix} \in \mathbf{W};$$

Exemplo 4:

Um fato importante dos subconjuntos é que quando vimos anteriormente questões de sistema de equações e procuramos por uma solução, conseguimos saber pelo determinante se a mesma possui uma ou várias soluções. Como um sistema se comporta como uma matriz:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poderiamos obter um *subconjunto* de soluções para o mesmo, considerando:

$$V = M(2,1) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};\ x, y \in \mathbf{R} \right\}$$

Teriamos um subespaço que conteria as soluções para a matriz, primeiro obtemos duas soluções para o caso, e verificamos se ambas se encaixam nos axiomas visto de *Subespaço Vetorial*:

$$Dado\ duas\ solu\text{ç}\tilde{o}es: \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\ e\ \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Teriamos:

$$I.\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$II.\ k * \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se ambos demonstram ocorrer, teriamos um subconjunto de soluções.

2.1 Intersecção e União de Subespaços

Vamos nos aprofundar mais um pouco nos *Subespaços Vetoriais*, vimos as caraterísticas dos mesmos de forma isolada, agora iremos abordar as relações entre *diferentes subespaços.* Considerando:

$$\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2 \in \mathbf{V} = \mathbf{R}^4$$

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, 0);\ x_i \in \mathbf{R}\}\ e\ W_2 = \{(y_1, y_2, 0, y_4);\ y_i \in \mathbf{R}\}$$

2.1.1 Intersecção:

Quando abordamos sobre a intersecção de diferentes conjuntos quaisquer, estamos buscando por elementos compartilhados entre os mesmos, ou seja:

$$W_1 \cap W_2 = \{(z_1, z_2, 0, 0);\ z_i \in \mathbf{R}\}$$

*(Pois para pertencer tanto ao subespaço W_1 e ao subespaço W_2, a terceira e quarta coordenada devem ser iguais a **zero**)*

por exemplo, considere os seguintes vetores:

$$\vec{v} = (a, b, 0, 0)\ e\ \vec{w} = (0, c, 0, 0)$$

(Observem que ambos vetores pertencem a ambos os subespaços considerados inicialmente)

$$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{W}_1\ e\ \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{W}_2$$

Logo, temos que:

$$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$$

Sabemos que ambos subespaços pertencem ao espaço vetorial $\boldsymbol{V}$, e $W_1 \cap W_2$ também é um subespaço do mesmo? Para isso vamos verificar as condições de subespaço com ambos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são verídicos com todos os três vetores $W_1, W_2\ e\ W_1 \cap W_2$:

$$I.\ \vec{v} + \vec{w} = (a, b + c, 0, 0) \in W_1, W_2\ e\ W_1 \cap W_2$$

$$II.\ k\vec{v} = (ka, kb, 0, 0) \in W_1, W_2\ e\ W_1 \cap W_2$$

Em si nenhuma intersecção entre subespaços do espaço vetorial **V** é *vazio*, pois como já dito anteriormente, todos compartilham entre si o ***ELEMENTO NULO***. Vamos analisar outro caso de intersecção:

$$\mathbf{V} = M(3,3)$$

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{bmatrix};\ x_{ij} \in \mathbf{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix};\ y_{ij} \in \mathbf{R} \right\}$$

Temos que $\mathbf{W}_1$ é o subconjunto de *matrizes triangulares superiores* e que $\mathbf{W}_2$ é o subconjunto de *matrizes triangulares inferiores*, e se fossemos fazer a **intersecção** entre ambas matrizes obteriamos uma *matriz diagonal*:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} z_{11} & 0 & 0 \\ 0 & z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & z_{33} \end{bmatrix};\ z_{ij} \in \mathbf{R} \right\}$$

2.1.2 União:

Ao contrário da *intersecção* onde pegavamos apenas os elementos compartilhados por ambos subespaços, a *União* junta os subespaços sem repetir elementos já existentes, o mesmo pode ser visto de duas formas diferentes:

$$Soma\ Indireta : W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$$

$$Soma\ Direta : W_1 \cup W_2 = W_1 \oplus W_2$$

A **SOMA INDIRETA** ocorre quando ambos conjuntos possuem algum elemento além do *nulo* compartilhado entre ambos, já a **SOMA DIRETA** ocorre quando não há nenhum outro elemento além do *nulo* sendo compartilhado entre ambos vetores:

$$Exemplo\ 1 :\ W_1 = \{(0, x_1, x_2, 0);\ x_i \in \mathbf{R}\}\ e\ W_2 = \{(y_1, y_2, 0, y_3);\ y_i \in \mathbf{R}\}$$

$$W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2 = \{(w_1, \mathbf{w}_2, w_3, w_4);\ w_i \in \mathbf{R}\}$$

*(Nesse exemplo ambos podem compartilhar da mesma **segunda coordenada**)*

$$Exemplo\ 2 :\ W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, 0);\ x_i \in \mathbf{R}\}\ e\ W_2 = \{(0, 0, 0, y_1);\ y_1 \in \mathbf{R}\}$$

$$W_1 \cup W_2 = W_1 \oplus W_2 = \{(w_1, w_2, w_3, w_4);\ w_i \in \mathbf{R}\}$$

*(Nesse exemplo, nenhuma das coordenadas em dos conjuntos pode ser encontrada na outra, exceto claro pela coordenada nula **0**)*

Observe que diferentemente do caso de *intersecção*, na *união* os conjuntos estão contidos na relação, porém não são compartilhados, por exemplo:

$$\vec{v} \in W_1\ e\ \vec{w} \in W_2$$

(temos que o vetor v pertence ao primeiro subespaço, e o vetor w ao segundo subespaço)

$$\vec{v}, \vec{w} \in W_1 \cup W_2$$

*(ambos pertencem a **união** dos subconjuntos)*

$$\vec{v} + \vec{w} \notin W_1\ e\ \vec{v} + \vec{w} \notin W_2$$

(como o vetor w não pertence a W_1 a soma desses dois vetores não pertencem a esse subespaço, o mesmo ocorre com W_2)

$$\vec{v} + \vec{w} \in W_1 \cup W_2$$

(porém ambos estão contido na união, tal que a soma faz parte do subespaço vetorial do mesmo)

É necessário notar que essa **UNIÃO** de *subespaços* irá criar um novo conjunto:

$$W = W_1 + W_2$$

Esse novo conjunto em si será um plano de vetores, como visto abaixo:

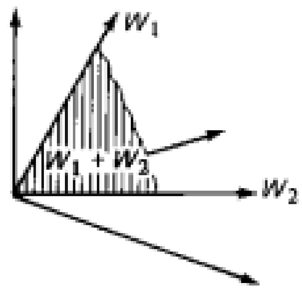


Figure 1: Figura 4.3.7, Algebra Linear, Boldrini

Toda região entre W_1 e W_2 se encontra contida no conjunto de W, junto com os mesmos. Com isso, concluímos com o tópico atual, o próximo assunto a ser abordado será ***Combinação Linear, Indepedência Linear, Base e suas características***.