INTEGRAL INDEFINIDA

3EE-2008.1

1. Calcule as seguintes integrais

$(a)(1,0)\ \int_1^e x^{20}\ln x dx$ $(b)(1,0)\ \int x^{-\frac{1}{2}}\cos(\sqrt{x})dx$

$(c)(1,0)\ \int \frac{4x+1}{x^2-x-2}dx$ $(d)(1,0)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$

3EE-2008.1

2. Seja R a região compreendida entra a reta $y = x-1$ e a parábola $y = (x-1)(3-x)$.

   (a) (1,5) Determine a área de R.

   (b) (1,0) Determine o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo dos x.

   (c) (1,0) Determine o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo dos y.

3EE-2008.2

1ªQuestão:(5,0 pontos) *Calcule as integrais abaixo:*

a) $\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx$, b) $\int x^2 \ln x dx$ c) $\frac{6x}{(x+1)(x-5)}$

3EE-2012.2

1. Calcule as seguintes integrais:

a) (1,0 ponto) $\int arctg(x)\ dx$ **b)**(0,75 ponto) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+2}\ dx$

c) (0,75 ponto) $\int x^3e^{-2x^4}\ dx$ **d)**(1,0 ponto) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ dx$

3. (2,5 pontos) Obtenha uma primitiva $G(x)$ (integral indefinida) para a função racional $f(x) = \frac{2+2x-x^2}{x^2(x^2-2x+2)}$, $x \neq 0$, que satisfaz à condição $G(1) = 0$.

Sugestão: Escreva $f(x) = \frac{2+2x-x^2}{x^2(x^2-2x+2)}$ na forma $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$.

SEGUNDA CHAMADA-2012.2

1. Calcule as seguintes integrais:

b) (1,0 ponto) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$

3EE-2015.2

1) Determine as integrais indefinidas abaixo.

(a)(1,5 pto.) $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^3+x}dx$.

(b)(1,5 pto.) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$.

3EE-2016.1

1. Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(a) (1, 0 ponto) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx.$

(b) (1, 0 ponto) $\displaystyle\int x^{2016}\ln x\,dx.$

(c) (1, 0 ponto) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3 x\,dx.$

FINAL-2016.1

4. Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(a) (1, 0 ponto) $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^4}\,dt.$

(b) (1, 0 ponto) $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(3x)\,dx.$

(c) (1, 0 ponto) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

3EE-2017.1

4ª Questão [3 pontos]: Calcule as integrais indefinidas a seguir:

a. $\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$ **b.** $\int \sin^5 x\cos^3 x\,dx$

FINAL-2017.1

4ª Questão [3 pontos]: Calcule as integrais indefinidas:

a. $\int \frac{2x-3}{(x-1)^3}\,dx$ **b.** $\int \tan^3 x\,dx$

3EE-2018.1

Questão 2: calcule as seguintes integrais.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx$

3EE-2018.2

2) a) (1,5 pontos) Calcule $\int t^{2018}\ln(t)\,dt$.

b) (1,5 pontos) Determine a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumpre

$$F'(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}\,;\quad F(1)=\frac{\pi}{2}\,.$$

FINAL-2018.2

4) Calcule as seguintes primitivas

a) (1,0 pontos) $\displaystyle\int \frac{1}{z^2-2z}\,dz$; b) (1,0 pontos) $\int \theta^2\cos(2\theta)\,d\theta$;

c) (1,0 pontos) $\displaystyle\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt$.

3EE-2019.1

1. Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(a) (1, 5) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$

(b) (1, 5) $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+10x-6}{x^2-5x+6}\,dx.$

(c) (1, 5) $\displaystyle\int (\ln(x))^2\,dx.$

3EE-2019.2

1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $(1,5)\ \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx.$ (b) $(1,5)\ \displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3+x}\,dx.$

INTEGRAL DEFINIDA

3EE-2008.1

3. (1,0) Determine os limites de integração A, B no lado direito de modo que a igualdade abaixo esteja correta. Justifique!

$$\int_1^e \frac{e^{(2+\ln t)^2}}{t}dt = \int_A^B e^{x^2}\,dx.$$

4. (1,5) Considere a função definida por $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{\text{[illegible]}} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t^3)dt$. Determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 1$.

4. (1,5) Uma xícara de café, à temperatura de 90 graus no instante $t = 0$, é deixada esfriando em uma sala. Suponha que a temperatura do café varia a uma taxa de $-7e^{-0,1t}$ graus por minuto; aqui o tempo transcorrido t é medido em minutos. Determine a temperatura do café após 10 minutos; aproxime a resposta por um número inteiro.

3EE-2008.2

2ªQuestão:

a) (1,0 ponto) *Faça um esboço da região delimitada pelas curvas* $y = x^2 - 2x$ *e* $y = 2x$.

3ªQuestão: *Em cada item abaixo, verifique se a integral imprópria dada converge e, caso afirmativo, calcule seu valor:*

a) (1,0 ponto) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ **b)** (1,0 ponto) $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x^2}+e^{-x}\right)dx$

FINAL-2008.2

4ªQuestão: (1,25 pontos) Calcule a integral definida $\int_0^1 [(2x - x^2) - x]dx$. Em seguida faça o esboço de uma região do plano cuja área seja dada pela integral acima.

3EE-2011.2

3ª Questão Considere a região do plano R limitada pelas curvas dadas por $y = x^2 - 4x$ e $y = 2x - x^2$.

a) (0,5 pontos) Faça um esboço da região R.

b) (1,5 pontos) Utilizando a informação obtida no item ***a)***, calcule a área da região R.

3EE-2012.2

2. **a)** (1,0 ponto) Esboce a região do plano R delimitada pela parábola $y = x^2$, pela reta $y = 4x - 4$ e pelo eixo Ox.

b) (1,0 ponto) Calcule o valor da área da região R.

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \displaystyle\int_3^{2x^3+x} \frac{2t^3\, dt}{\sqrt{t^2+16}}$.

a) (1,0 ponto) Determine $f(1)$ e $f(-1)$.

b) (1,0 ponto) Calcule $f'(x)$, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo.

SEGUNDA CHAMADA-2012.2

1. Calcule as seguintes integrais:

a) (1,0 ponto) $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2^{-x}\, dx$

2. (1,5 ponto) Esboce a região do plano R limitada pelas curvas $y = x^3$ e $x = y^2$. Calcule o valor da área da região R.

3EE-2015.2

2) Para cada integral abaixo, determine seu valor ou decida sobre sua convergência.

(a)(1,5 pto.) $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}$.

(b)(1,5 ptos.) $\int_1^3 x\ln(x+1)dx$.

3) Considere $\mathcal{R}$ a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas $y=\frac{8}{x}$, $y=2x$ e $y=8x$.

(a)(0,5 pto.) Esboce a região $\mathcal{R}$.

(b)(1,5 pto.) Calcule a área de $\mathcal{R}$.

4) Considere a seguinte função

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$f(x)=\int_2^{x^2+x} e^{-t^2}dt\,.$$

(a)(0,5 pto.) Determine $f(1)$.

(b)(1,5 pto.) Calcule $f'(0)$.

3EE-2016.1

2. Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $(1,5$ ponto$)$ $\displaystyle\int_0^{1/2} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx.$

(b) $(1,5$ ponto$)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x-4}{(2x+1)(x^2+4)}\,dx.$

4. Seja R a região delimitada pelas curvas $y=x^{3/2}$ e $y=2x$.

(a) $(1,5$ ponto$)$ Esboce a região R e calcule sua área.

(b) $(1,5$ ponto$)$ Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo Ox.

FINAL-2016.2

5. Calcule as integrais abaixo:

(c) $(1,0)$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3EE.2017.1

1ª Questão [2 pontos]: Para a função f dada abaixo, esboce seu gráfico e em seguida calcule $\int_0^4 f(x)\,dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in [0,1], \\ x & \text{se} \quad x \in [1,2], \\ 2 & \text{se} \quad x \in [2,3], \\ -2x+8 & \text{se} \quad x \in [3,4]. \end{cases}$$

2ª Questão [2 pontos]: Esboce a região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$ e em seguida calcule a área desta região.

3ª Questão [3 pontos]: Calcule as integrais definidas a seguir:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\,dx$ **b.** $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

3EE-2018.1

Questão 1: calcule.

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$

3) Calcule as seguintes integrais definidas:

a) (1,5 pontos) $\int_0^{2\pi} \text{sen}^5(\theta)\cos^4(\theta)\,d\theta$;

b) (1,5 pontos) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-3x+2}{x^3+3x^2+2x}\,dx$.

3EE-2018.2

4) Considere a região $\mathcal{R}$ do plano limitada pelas curvas $y = 5x - x^2$ e $y = x$, com $0 \le x \le 5$.

a) (1,0 pontos) Faça um esboço das curvas envolvidas no problema, indicando os pontos notáveis e hachurando a região $\mathcal{R}$.

b) (1,5 pontos) Calcule a área da região $\mathcal{R}$.

3EE-2019.1

2. $(1,5)$ Calcule a seguinte integral definida: $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

3. $(2,0)$ Esboce a região do plano delimitada pelos gráficos $y = 2 - x$ e $y = 4 - x^2$ e calcule sua área.

4. (a) $(1,0)$ Para $F(x) = \displaystyle\int_{-7}^{x} e^{t^2}\,dt$, determine $\dfrac{dF}{dx}(1)$.

   (b) $(1,0)$ Considere $G(x) = \displaystyle\int_{-7}^{sen(x)} e^{t^2}\,dt$ e calcule $\dfrac{dG}{dx}(\pi)$.

INTEGRAL TRIGONOMÉTRICA

FINAL-2008.2

5ªQuestão: (3,0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

c) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\,dx =$

3EE-2011.2

1ª Questão Calcule cada uma das seguintes integrais:

a) (1,0 ponto) $\int_0^{\pi/3} \mathrm{sen}(x)\sec^2(x)\,dx$

b) (1,0 ponto) $\int \theta^3\cos(\theta^2)\,d\theta$

c) (1,5 pontos) $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$

d) (1,5 pontos) $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{1-x-2x^2}$

2ª Questão (1,5 pontos) Calcule a integral imprópria $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$

4ª Questão (1,5 pontos) Seja $F(x) = \int_0^{x^3} t\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt$. Determine $F'(x)$.

FINAL-2016.2

5. Calcule as integrais abaixo:

(a) (1,0) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ (b) (1,0) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

3EE-2018.1

Questão 4:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx$$

FINAL-2018.1

Questão 3: Calcule

a) $\displaystyle\int \sqrt{1-e^{2x}}\,e^x dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x(x^2+1)^3 dx$

3EE-2019.2

2. Calcule as integrais definidas abaixo:

(a) (1,5) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos(x)\,dx.$ (b) (1,5) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t^3}{\sqrt{4-t^2}}\,dt.$

3. (2,0) Esboce as regiões do plano delimitadas pelos gráficos de $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$ e calcule a área de cada uma dessas regiões.

4. (2,0) Seja $\mathcal{R}$ a região do plano limitada superiormente pelo gráfico de $y = 2\,\mathrm{e}^{-x} - 1$ e inferiormente pelo eixo $\overrightarrow{Ox}$, com $0 \leq x \leq \ln(2)$.
Determine o volume do sólido obtido pela revolução da região $\mathcal{R}$ em torno do eixo $\overrightarrow{Ox}$.

GABARITO

3EE-2008.1

1. a) Usando integração por partes temos que

$$\begin{aligned}\int_1^e x^{20}\ln x dx &= \frac{x^{21}\ln x}{21}\Big|_1^e - \frac{1}{21}\int_1^e x^{20}dx \\ &= \frac{x^{21}}{21}(\ln x - \frac{1}{21})\Big|_1^e = \frac{1}{21^2}(20e^{21}+1).\end{aligned}$$

b) Fazendo a substituição $u = \sqrt{x}$ temos que $\int x^{-\frac{1}{2}}\cos(\sqrt{x})dx = 2\int \cos u du = 2\sin(\sqrt{x}) + C$.

c) Usamos o método de decomposição em frações parciais. Como $\frac{4x+1}{x^2-x-2} = \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+1}$ concluímos que

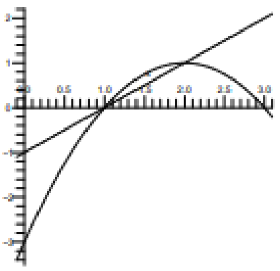
$$\int \frac{4x+1}{x^2-x-2} = 3\ln|x-2| + \ln|x+1| + C.$$

d) Fazendo a substituição trigonométrica $x = \tan\theta$ com $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta \\ &= \int \frac{du}{u^2}; u = \sin\theta \\ &= -\frac{1}{u} + C \\ &= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C\end{aligned}$$

3EE-2008.1

2. Os pontos de interseção são $x = 1$ e $x = 2$.



a) Área da região$= \int_1^2 [-(x^2-4x+3) - (x-1)]dx = \int_1^2 (-x^2+3x-2)dx = \frac{1}{6}$.

b) Volume$=\pi \int_1^2 [(x^2-4x+3)^2 - (x-1)^2]dx = \frac{\pi}{5}$.

c) Volume$=2\pi \int_1^2 x[-(x^2-4x+3) - (x-1)]dx = \frac{\pi}{2}$.

3EE-2008.1

3. Fazendo $x = 2 + \ln t$ temos que $dx = \frac{1}{t}dt$. Usando a regra da substituição concluímos que
$$\int_1^e \frac{e^{(2+\ln t)^2}}{t}dt = \int_2^3 e^{x^2}dx.$$
Logo $A = 2$ e $B = 3$.

4. (a) Como o integrando de f é uma função ímpar temos que $f(1) = 0$. Para calcular a derivada usamos o teorema fundamental do cálculo e a regra da cadeia.
$$f'(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x^6)(2x).$$
Daí, $f'(1) = 2$. Portanto, a equação da reta tangente é $y = 2(x - 1)$.

4. (b) Seja T a temperatura do café. Da hipótese do problema temos que $\frac{d}{dt}T(t) = -7e^{-\frac{t}{10}}$. Então, $T(t) - T(0) = \int_0^t T'(s)ds = -7\int_0^t e^{-\frac{s}{10}}ds$. Daí, $T(t) = 90 + 70(e^{-\frac{t}{10}} - 1)$.
Portanto, $T(10) = 90 + 70(e^{-1} - 1)$ aproximadamente 46 graus.

3EE2008.2

a) $\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{2x}{1+x^2}dx = \text{arctg}\, x + \ln(1+x^2) + C.$

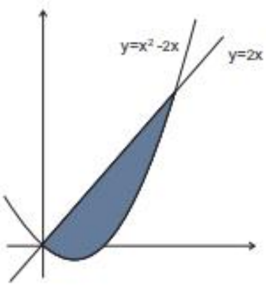
b) Integrando por partes, com $u = \ln x$ e $dv = x^2dx$ temos, $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$

c) Como $\frac{6x}{(x+1)(x-5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5} = \frac{1}{x+1} + \frac{5}{x-5}$, obtemos, $\int \frac{6x}{(x+1)(x-5)}dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{5}{x-5}dx = \ln|x+1| + \ln|x-5| + C$

3EE2008.2

2ªQuestão:

a) (1,0 ponto) *Faça um esboço da região delimitada pelas curvas $y = x^2 - 2x$ e $y = 2x$.* Estas curvas, que são, respectivamente, uma parábola e uma reta, interceptam-se quando $x^2 - 2x = 2x$. Disto segue que os pontos de interseção da reta e a parábola são: $(0,0)$ e $(4,8)$, e que a região em questão é ilustrada pela figura abaixo:



3EE2008.2

3ªQuestão: *Em cada item abaixo, verifique se a integral imprópria dada converge e, caso afirmativo, calcule seu valor:*

a) (1,0 ponto) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{a\to 1^-}\left[-(1-x)^{2/3}3/2\right]_{x=0}^{x=a} =$

$\lim_{a\to 1^-}\left[-3/2(1-a)^{2/3}+3/2\right] = 3/2$.

Portanto $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ converge e seu valor é 3/2.

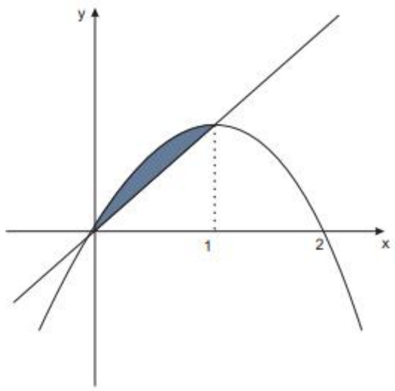
b) (1,0 ponto) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2}+e^{-x}\right)dx = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \left(\frac{1}{x^2}+e^{-x}\right)dx = \lim_{a\to+\infty}\left[-1/x-e^{-x}\right]_{x=1}^{x=a} =$

$\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\left[-1/a-e^{-a}-(-1-e^{-1})\right] = 1+1/e+\lim_{a\to+\infty}\left[-1/a-e^{-a}\right] = 1+1/e-0-0 = 1+1/e$.

Portanto $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2}+e^{-x}\right)dx$ converge e seu valor é $1+1/e$.

FINAL-2008.2

4ªQuestão: (1,25 pontos) Calcule a integral definida $\displaystyle\int_0^1 [(2x-x^2)-x]dx$. Em seguida faça o esboço de uma região do plano cuja área seja dada pela integral acima. $\displaystyle\int_0^1 [(2x-x^2)-x]dx =$ $\displaystyle\int_0^1 (x-x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. *Observe a área da região, a seguir esboçada, compreendida entre a parábola $y=2x-x^2$, e a reta $y=x$, é dada pela integral acima.*



FINAL-2008.2

5ªQuestão: (3,0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\text{sen}x - \int \text{sen}x dx = x\text{sen}x + \cos x + C$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|1+e^x| + C = \ln(1+e^x) + C$

c) $\displaystyle\int \text{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \text{tg}x - x + C$

3EE-2011.2

1ª Questão ***a)*** (1,0 ponto) Primeiro vamos achar uma primitiva da função $\mathbf{sen(x)\,sec^2(x)}$.

Opção 1: Como $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ então $\operatorname{sen}(x)\sec^2(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \cdot \sec(x) = \operatorname{tg}(x)\sec(x)$, e assim $\int \operatorname{sen}(x)\sec^2(x)\,dx = \int \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx = \mathbf{sec(x) + C}$.

Opção 2: Fazendo a substituição $u = \cos(x)$ teremos $\sec^2(x) = u^{-2}$ e $du = -\operatorname{sen}(x)\,dx$, logo $\int \operatorname{sen}(x)\sec^2(x)\,dx = \int u^{-2}(-du) = -\frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{u} + C = \mathbf{sec(x) + C}$.

Opção 3: Tomando $u = \operatorname{sen}(x)$, $dv = \sec^2(x)\,dx$ e fazendo integração por partes obtemos $du = \cos(x)\,dx$, $v = \operatorname{tg}(x)$, e assim

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(x)\sec^2(x)\,dx &= uv - \int v\,du = \operatorname{sen}(x)\operatorname{tg}(x) - \int \operatorname{tg}(x)\cos(x)\,dx \\
&= \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - \int \operatorname{sen}(x)\,dx \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)} + \cos(x) + C = \frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\cos(x)} + C \\
&= \frac{1}{\cos(x)} + C = \mathbf{sec(x) + C}
\end{aligned}$$

Portanto, pero teorema fundamental do cálculo (parte 2) teremos

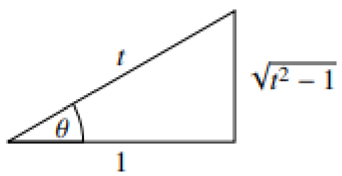
$$\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}(x)\sec^2(x)\,dx = \sec(x)\Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{\cos(\pi/3)} - \frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{1/2} - \frac{1}{1} = \mathbf{1}$$

b) (1,0 ponto) Fazendo a substituição $z = \theta^2$ obtemos $dz = 2\theta\,d\theta$, logo $\int \theta^3 \cos(\theta^2)\,d\theta = \int \theta^2 \cos(\theta^2)\theta\,d\theta = \int \mathbf{z\cos(z)\,\frac{dz}{2}}$. Agora fazendo $u = z$, $dv = \cos(z)\,dz$ e aplicando integração por partes obtemos $du = dz$, $v = \operatorname{sen}(z)$, logo

$$\int z\cos(z)\,dz = z\operatorname{sen}(z) - \int \operatorname{sen}(z)\,dz = z\operatorname{sen}(z) + \cos(z) + C\,,$$

e assim $\int \theta^3\cos(\theta^2)\,d\theta = \frac{1}{2}(z\operatorname{sen}(z) + \cos(z)) + C = \mathbf{\frac{1}{2}[\theta^2\,sen(\theta^2) + cos(\theta^2)] + C}$

c) (1,5 pontos) $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$. Já que temos o termo $\sqrt{t^2-1}$, podemos fazer uma substituição trigonométrica. Declaramos t como a hipotenusa e 1 como um dos catetos de um triângulo retângulo, por exemplo o cateto adjacente:



Temos então $\sec(\theta) = t/1 = t$, logo $dt = \sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,d\theta$, e $\sqrt{t^2-1} = \mathrm{tg}(\theta)$. Portanto

$$\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}} = \int \frac{\sec(\theta)\,\cancel{\mathrm{tg}(\theta)}\,d\theta}{\sec^2(\theta)\cancel{\mathrm{tg}(\theta)}} = \int \frac{d\theta}{\sec(\theta)} = \int \cos(\theta)\,d\theta$$

$$= \mathrm{sen}(\theta) + C = \boldsymbol{\frac{\sqrt{t^2-1}}{t} + C}$$

d) (1,5 pontos) $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{1-x-2x^2}$. Como o grau do numerador é menor do que o grau do denominador não precisamos fazer divisão de polinômios. Agora fatoramos o denominador: usando a fórmula quadrática, obtemos que as raízes do denominador são

$\dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)1}}{2(-2)} = \dfrac{1 \pm 3}{-4} = \mathbf{-1, \frac{1}{2}}$, logo $1-x-2x^2 = -2(x-(-1))(x-\frac{1}{2}) =$ $\mathbf{(1-2x)(x+1)}$. Portanto teremos $\dfrac{3}{1-x-2x^2} = \dfrac{A}{1-2x} + \dfrac{B}{x+1}$. Multiplicando os lados desta igualdade por $1-x-2x^2 = (1-2x)(x+1)$ obtemos $\mathbf{3 = A(x+1) + B(1-2x)}$. Tomando $x = -1$ obtemos $3 = 3B$, logo $B = 1$. Tomando $x = 1/2$ obtemos $3 = 3A/2$, logo $A = 2$. Assim, $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{1-x-2x^2} = \int \frac{2dx}{1-2x} + \int \frac{dx}{x+1}$. Fazendo as substituições $u = 1-2x, z = x+1$ nestas duas últimas integrais obtemos

3EE-2011.2

2ª Questão (1,5 pontos) Fazendo a substituição $u = -x^2$ obtemos $du = -2x\,dx$, logo

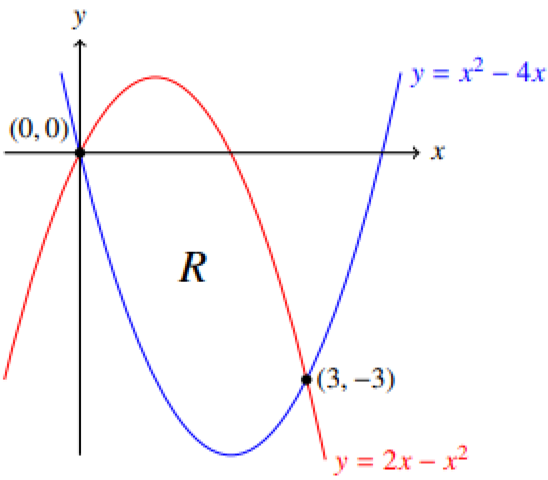
$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{x=0}^{x=t} xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{u=-0^2}^{u=-t^2} e^u \frac{du}{-2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{e^u}{-2}\bigg|_{u=0}^{u=-t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t^2}}{-2} - \frac{e^0}{-2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{e^{-t^2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-\infty}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

3EE-2011.2

3ª Questão ***a***) (0,5 pontos) Primeiro achamos os pontos de interseção das curvas, que neste caso são parábolas, resolvendo o sistema $y = x^2 - 4x$ e $y = 2x - x^2$. Igualando obtemos $x^2 - 4x = 2x - x^2$, logo $2x^2 - 6x = 0$, isto é, $2x(x-3) = 0$, cujas soluções são $x = 0, 3$. Quando $x = 0$ obtemos $y = 0$, e quando $x = 3$ obtemos $y = -3$. Assim, os pontos de interseção são $\mathbf{(0,0), (3,-3)}$.



b) (1,5 pontos) Do item ***a)*** concluímos que a função maior em todo o intervalo $[0, 3]$ é $y = 2x - x^2$, e a menor é $y = x^2 - 4x$, logo a área da região R é igual a

$$\int_0^3 (2x - x^2) - (x^2 - 4x)\,dx = \int_0^3 6x - 2x^2\,dx = \left[3x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Bigg|_0^3$$

$$= \left[3(3)^2 - \frac{2(3)^3}{3}\right] - \left[3 \cdot 0^2 - \frac{2 \cdot 0^3}{3}\right] = \mathbf{9}$$

3EE-2011.2

4ª Questão (1,5 pontos) **Opção 1:** Seja $F(x) = \int_0^{x^3} t\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt$. Usando o teorema fundamental do cálculo (parte 1) e a regra da cadeia teremos

$$F'(x) = t\,\mathrm{sen}(t^2)\Big|_{t=x^3} \cdot (x^3)' = x^3\,\mathrm{sen}((x^3)^2) \cdot 3x^2 = \mathbf{3x^5 sen(x^6)}$$

Opção 2: Fazendo a substituição $z = t^2$ obtemos $dz = 2t\,dt$, logo

$$F(x) = \int_{t=0}^{t=x^3} t\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt = \int_{z=0^2}^{z=(x^3)^2} \mathrm{sen}(z) \cdot \frac{dz}{2} = \frac{-\cos(z)}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=x^6}$$

$$= -\frac{\cos(x^6)}{2} - \left(-\frac{\cos(0)}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{\cos(x^6)}{2}}.$$

Portanto, pela regra da cadeia teremos

$$F'(x) = -\frac{-\mathrm{sen}(x^6) \cdot (x^6)'}{2} = \frac{\mathrm{sen}(x^6) \cdot 6x^5}{2} = \mathbf{3x^5 sen(x^6)}$$

3EE-2012.2

1. $\boxed{\textbf{Solução:}}$ *Calcule as seguintes integrais:*

a) Integrando por partes, fazemos $u = arctg(x)$ e $dv = dx$, obtendo deste modo $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ e $v = x$.

Assim,

$$\int arctg(x)\,dx = \int udv = uv - \int vdu = x \cdot arctg(x) - \int \frac{xdx}{1+x^2}$$

Logo, $\boxed{\int arctg(x)\,dx = x \cdot arctg(x) - ln(\sqrt{1+x^2}) + C.}$

b) Note que $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+2}\,dx = \int \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})^2}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$

Logo, $\boxed{\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+2}\,dx = 2\sqrt{x+2} + C.}$

c) Por substituição, fazemos $u = -2x^4$ e, portanto, $du = -8x^3dx$.

Assim,

$$\int x^3 e^{-2x^4}\,dx = -\int \frac{e^u\,du}{8} = -\frac{e^u}{8} + C \Longrightarrow \boxed{\int x^3 e^{-2x^4}\,dx = -\frac{e^{-2x^4}}{8} + C.}$$

d) Por substituição trigonométrica, fazemos $x = cos(t)$.

Deste modo, obtemos que $\sqrt{1-x^2} = sen(t)$ e $dx = -sen(t)dt$.

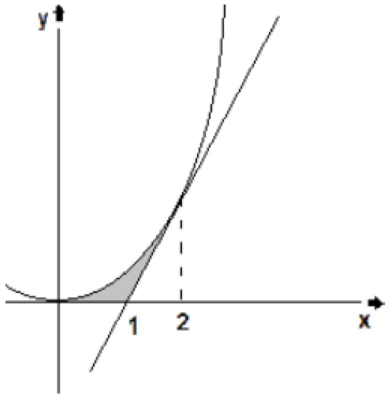
Logo, $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = -\int \frac{sen^2(t)}{cos(t)}\,dt = -\int \frac{1-cos^2(t)}{cos(t)}\,dt\,\cdot$

Ou seja, $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \int [cos(t) - sec(t)]\,dt = sen(t) - ln(sec(t) + tg(t)) + C.$

Portanto, $\boxed{\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{1-x^2} - ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C.}$

3EE-2012.2

2. **Solução:**



a) *Esboce a região do plano R delimitada pela parábola $y = x^2$, pela reta $y = 4x - 4$ e pelo eixo Ox.*

Intersectando a reta com a parábola, obtemos $x^2 = 4x - 4 \;\Rightarrow\; (x-2)^2 = 0$. Assim, $x = 2$ é a única solução. Deste modo, a região R é descrita ao lado.

b) *Calcule o valor da área da região R.*
Segue do item **(a)** que a área A da região R é dada por:

$$A = \int_0^2 x^2\,dx - \int_1^2 4x - 4\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 - \left.(2x^2 - 4x)\right|_1^2 .$$

Logo, o valor da área da região R é: $\boxed{A = \frac{8}{3} - \frac{0}{3} - (8-8) + (2-4) = \frac{2}{3}\,.}$

3EE-2012.2

3. *Obtenha uma primitiva $G(x)$ (integral indefinida) para a função racional $f(x) = \dfrac{2 + 2x - x^2}{x^2(x^2 - 2x + 2)}$, $x \neq 0$, que satisfaz à condição $G(1) = 0$.*

Solução:

Escrevemos $f(x) = \dfrac{2 + 2x - x^2}{x^2(x^2 - 2x + 2)}$ na forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2}$, ou seja,

$$\frac{2 + 2x - x^2}{x^2(x^2 - 2x + 2)} = \frac{(Ax + B)\cdot(x^2 - 2x + 2) + (Cx + D)\cdot x^2}{x^2(x^2 - 2x + 2)} \Longrightarrow \begin{cases} A = 2, & B = 1 \\ C = -2 & \text{e} \;\; D = 2\,. \end{cases}$$

Assim, $\displaystyle\int \frac{2 + 2x - x^2}{x^2(x^2 - 2x + 2)}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}\,dx\,.$

Logo, todas as primitivas de $f(x) = \dfrac{2 + 2x - x^2}{x^2(x^2 - 2x + 2)}$ são da forma

$$G(x) = 2ln(x) - \frac{1}{x} - ln(x^2 - 2x + 2) + C, \quad \text{onde } C \text{ é uma constante.}$$

Portanto, $G(1) = 0 \;\Longrightarrow\; \boxed{G(x) = 2ln(x) - \frac{1}{x} - ln(x^2 - 2x + 2) + 1\,.}$

3EE-2012.2

4. $\boxed{\textbf{Solução:}}$ *Considere a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dada por* $f(x)=\displaystyle\int_3^{2x^3+x}\frac{2t^3\,dt}{\sqrt{t^2+16}}$.

a) $f(1)=\displaystyle\int_3^{2+1}\frac{2t^3\,dt}{\sqrt{t^2+16}}=0$, pois os limites de integração são iguais.

$f(-1)=\displaystyle\int_3^{-3}\frac{2t^3\,dt}{\sqrt{t^2+16}}=-\int_{-3}^{3}\frac{2t^3\,dt}{\sqrt{t^2+16}}=0$, pois $h(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^2+16}}$ é uma função ímpar e os limites de integração são -3 e 3.

b) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo a função $G(x)=\displaystyle\int_3^{x}\frac{2t^3\,dt}{\sqrt{t^2+16}}$ é uma primitiva da função $h(x)=\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^2+16}}$.

Como $f(x)=G(2x^3+x)$, segue que $f'(x)=G'(2x^3+x)\cdot(2x^3+x)'$, pela regra da cadeia.

Portanto, $\boxed{f'(x)=h(2x^3+x)\cdot(6x^2+1)=\dfrac{2\cdot(2x^3+x)^3\cdot(6x^2+1)}{\sqrt{(2x^3+x)^2+16}}\,.}$

SEGUNDA CHAMADA-2012.2

1. $\boxed{\textbf{Solução:}}$ *Calcule as seguintes integrais:*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}2^{-x}\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int_1^{a}2^{-x}\,dx=\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{-2^{-x}}{ln(2)}\Bigg|_1^a\right).$

Logo, $\displaystyle\int_1^{+\infty}2^{-x}\,dx=\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{2ln(2)}-\frac{1}{2^a ln(2)}\right)=\frac{1}{ln(4)}\,.$

b) Substituindo $u=\sqrt{x+4}$, obtemos que $x=u^2-4$ e $dx=2u\,du$.

Assim, $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx=\int\frac{2u^2}{u^2-4}\,du=\int 2\,du+\int\frac{8}{u^2-4}\,du\,\cdot$

Escrevendo $\dfrac{8}{u^2-4}=\dfrac{2}{u-2}-\dfrac{2}{u+2}$ obtemos que

$$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx=\int 2\,du+\int\frac{2\,du}{u-2}-\int\frac{2\,du}{u+2}=2u+2ln\left(\frac{u-2}{u+2}\right)+C\,.$$

Portanto, substituindo $u=\sqrt{x+4}$, temos que

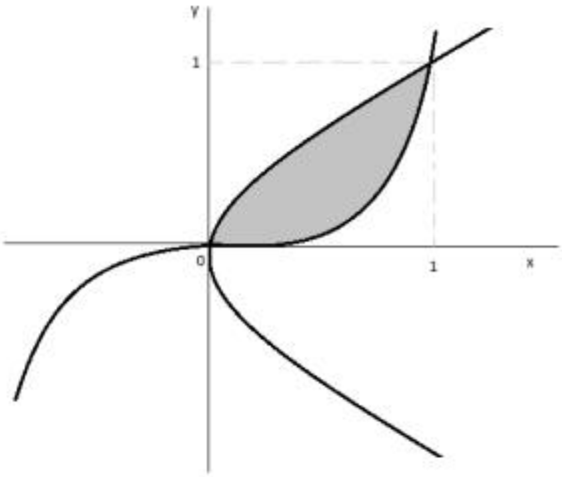
$$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx=2\sqrt{x+4}+4ln\left(\sqrt{x+4}-2\right)-2ln(x)+C\,.$$

SEGUNDA CHAMADA-2012.2

2. *Esboce a região do plano R limitada pelas curvas $y = x^3$ e $x = y^2$. Calcule o valor da área da região R.*

Solução:

Intersectando as curvas $y = x^3$ e $x = y^2$ obtermos $x = x^6$ e, portanto, duas soluções reais $x = 0$ ou $x = 1$.



Assim, a área A da região R é dada por

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\, dx = \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \,.$$

3EE-2015.2

1º)

a) $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x}\,dx$

Observe que $\frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}$

Vamos dividir esta em frações parciais:

$$\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\therefore\ 2x^2+1 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$$

$$2x^2+1 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \therefore \boxed{B=1} \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$$

Portanto,

$$\int \frac{2x^2+1}{x^3+x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+x}\right)dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + K$$

Obs. Para resolver $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + K$ basta fazer a substituição $u = x^2+1$ (direta) ∎

b) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$

Utilizando a subst. trig. inv. $x = 2\sec u$, temos

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec u \, tg\, u}{8\sec^3 u\sqrt{4\sec^2 u-4}}\, du$$

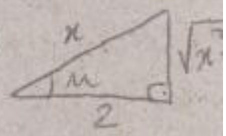
$$= \int \frac{\sec u \cdot tg\, u}{4\sec^3 u \cdot 2\sqrt{\sec^2 u-1}}\, du = \int \frac{\sec u \cdot tg\, u}{8\sec^3 u \cdot tg\, u}\, du$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sec^2 u}\, du = \frac{1}{8}\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{16}\int (1+\cos 2u)\, du$$

$$= \frac{1}{16}\int du + \frac{1}{16}\int \cos 2u\, du$$

$$= \frac{u}{16} + \frac{1}{16}\,\frac{sen\, 2u}{2} + K = \frac{u}{16} + \frac{sen\, u \cos u}{16} + K$$

Como $x = 2\sec u$, temos as relações:



Daí,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}} = \frac{arcsec(x/2)}{16} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \cdot \frac{2}{x} + K \quad \blacksquare$$

(Obs: Para resolver $\int \cos 2u\, du = \frac{1}{2}\, sen\, 2u + K$, basta fazer a substituição direta $v = 2u$.)

3EE-2015.2

2) Para cada integral abaixo, determine seu valor ou decida sobre sua convergência.

a) • $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}$. Como $(\ln 1) = 0$, então

$$\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

Vamos resolver $\int_t^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}$.

$$\begin{aligned}\int_t^e \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \int_{\ln t}^1 \frac{du}{u^2}, \text{ onde } \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x}\end{matrix} \\ &= \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln t}^1 = -1 + \frac{1}{\ln t}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \lim_{t\to 1^+} \int_t^e \frac{dx}{x(\ln x)^2} \\ &= \lim_{t\to 1^+}\left(-1 + \frac{1}{\ln t}\right) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

b) • $\int_1^3 x\ln(x+1)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int_1^3 x\ln(x+1)\,dx &= \int_{1+1}^{3+1} (u-1)\ln(u)\,du, \text{ onde } \begin{matrix} u = x+1 \\ du = dx\end{matrix} \\ &= \int_2^4 u\ln(u)\,du - \int_2^4 \ln(u)\,du.\end{aligned}$$

Vamos resolver por partes a primeira integral na última igualdade.

$$\begin{aligned}\int_2^4 u\ln(u)\,du &= \left[\frac{u^2}{2}\ln u\right]_2^4 - \frac{1}{2}\int_2^4 u^2\frac{du}{u}, \text{ onde } \begin{matrix} w = \ln u \\ dw = \frac{du}{u}\end{matrix} \text{ e } \begin{matrix} dv = udu \\ v = \frac{u^2}{2}\end{matrix} \\ &= 8\ln 4 - 2\ln 2 - \frac{1}{4}\left[u^2\right]_2^4 \\ &= 8\ln 4 - 2\ln 2 - 4 + 1 = 8\ln 4 - 2\ln 2 - 3.\end{aligned}$$

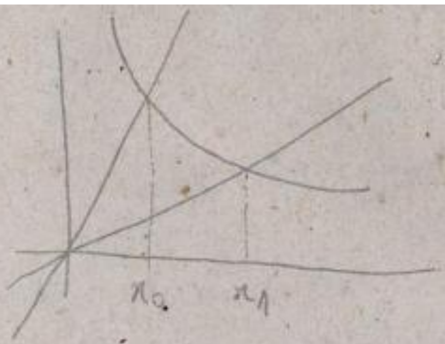
Assim,

$$\begin{aligned}\int_1^3 x\ln(x+1)\,dx &= 8\ln 4 - 2\ln 2 - 3 - \left[u\ln u - u\right]_2^4 \\ &= 8\ln 4 - 2\ln 2 - 3 - 4\ln 4 + 4 + 2\ln 2 - 2 \\ &= 4\ln 4 - 1.\end{aligned}$$

3EE-2015.2

3ª)

a)



Quem são x_0 e x_1?

$$8x_0 = \frac{8}{x_0} \quad \therefore \quad x_0^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_0 = 1}$$

$$\frac{8}{x_1} = 2x_1 \quad \therefore \quad x_1^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

b) $$\text{Area}(R) = \int_0^1 (8x - 2x)\,dx + \int_1^2 \left(\frac{8}{x} - 2x\right)dx$$

$$= (4x^2 - x^2)\Big|_0^1 + (8\ln|x| - x^2)\Big|_1^2$$

$$= (4.1^2 - 1^2) - (4.0^2 - 0^2) + (8\ln|2| - 2^2) - (8\ln|1| - 1^2)$$

$$= 3 + 8\ln 2 - 4 + 1 = 8\ln 2 \quad \blacksquare$$

3EE-2015.2

4) Considere a seguinte função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \int_2^{x^2+x} e^{-t^2}\,dt$$

a) • Determine $f(1)$.

$$f(1) = \int_2^2 e^{-t^2}\,dt = 0.$$

b) • Calcule $f'(0)$.

Para calcular $f'(0)$ precisamos usar o Teorema Fundamental do Cálculo. Sendo $f(x) = \int_2^{x^2+x} e^{-t^2}\,dt$, o Teorema fundamental do Cálculo nos permite concluir que,

$$f'(x) = e^{-(x^2+x)^2}(2x+1).$$

desta forma

$$f'(0) = 1.$$

3EE-2016.1

1. Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(a) (1,0 ponto) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx.$

Solução. Fazendo a mudança de variável $s = x^3+1$, obtemos $ds = 3x^2dx$. Daí,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{s}}\,ds = \frac{1}{3}\int s^{-1/2}\,ds = \frac{2}{3}s^{1/2} + C = \frac{2}{3}(x^3+1)^{1/2} + C, \text{ onde } C \in \mathbb{R}.$$

(b) (1,0 ponto) $\displaystyle\int x^{2016}\ln x\,dx.$

Solução. Sejam $u = \ln x$ e $dv = x^{2016}dx$. Então, $du = \dfrac{1}{x}dx$ e $v = \dfrac{x^{2017}}{2017}$. Integrando por partes, obtemos

$$\int x^{2016}\ln x\,dx = \frac{x^{2017}}{2017}\ln x - \int \frac{x^{2016}}{2017}\,dx = \frac{x^{2017}}{2017}\ln x - \frac{x^{2017}}{(2017)^2} + C, \text{ onde } C \in \mathbb{R}.$$

(c) (1,0 ponto) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3 x\,dx.$

Solução. Inicialmente, note que

$$\int \mathrm{tg}^3 x\,dx = \int \mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int \mathrm{tg}\,x\,(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \mathrm{tg}\,x\,\sec^2 x\,dx - \int \mathrm{tg}\,x\,dx. \quad (1)$$

Por outro lado, fazendo $s = \mathrm{tg}\,x$ (e, consequentemente $ds = \sec^2 x\,dx$), obtemos

$$\int \mathrm{tg}\,x\,\sec^2 x\,dx = \int s\,ds = \frac{s^2}{2} + C_1 = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + C_1, \text{ onde } C_1 \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Novamente por substituição simples, se $u = \cos x$, então $du = -\mathrm{sen}\,x\,dx$. Daí,

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}\,x\,dx &= \int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C_2 \\ &= -\ln|\cos x| + C_2 = \ln|\sec x| + C_2, \text{ onde } C_2 \in \mathbb{R}. \quad (3)\end{aligned}$$

Substituindo as expressões encontradas em (2) e (3) na identidade (1), concluímos que

$$\int \mathrm{tg}^3 x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \ln|\sec x| + C, \text{ onde } C = C_1 - C_2 \text{ é uma constante arbitrária.}$$

3EE-2016.1

2. Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) (1,5 ponto) $\int_0^{1/2} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Solução. Se $x = \operatorname{sen}\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, obtemos $dx = \cos\theta\, d\theta$. Ademais, note que

$$x = 0 \ \rightsquigarrow\ \theta = 0,$$
$$x = 1/2 \ \rightsquigarrow\ \theta = \pi/6.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{1/2} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^3\theta\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/6}\operatorname{sen}^3\theta\, \cos^2\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/6}\operatorname{sen}^2\theta\, \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/6}(1-\cos^2\theta)\, \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/6}(\cos^2\theta-\cos^4\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Fazendo $s = \cos\theta$, segue que $ds = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$. Além disso,

$$\theta = 0 \ \rightsquigarrow\ s = 1,$$
$$\theta = \pi/6 \ \rightsquigarrow\ s = \sqrt{3}/2.$$

Logo, pela igualdade (4), segue que

$$I = -\int_1^{\sqrt{3}/2}(s^2-s^4)\,ds = \int_{\sqrt{3}/2}^1 (s^2-s^4)\,ds = \left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^5}{5}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}/2}^1 = \frac{2}{15}-\frac{11\sqrt{3}}{160}.$$

(b) (1,5 ponto) $\int_0^1 \frac{x^2+x-4}{(2x+1)(x^2+4)}\,dx$.

Solução. Primeiramente, notamos que a decomposição em frações parciais do integrando tem a seguinte forma:

$$\frac{x^2+x-4}{(2x+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{2x+1}. \tag{5}$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $(2x+1)(x^2+4)$, obtemos

$$x^2+x-4 = (2A+C)x^2+(A+2B)x+(B+4C).$$

Isso resulta no seguinte sistema linear de equações para A, B e C:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2A & + & C & = & 1 \\ A & + & 2B & = & 1 \\ B & + & 4C & = & -4 \end{array}\right.,$$

cuja única solução é $A = 1$, $B = 0$ e $C = -1$. Assim, por (5):

$$I = \int_0^1 \frac{x^2+x-4}{(2x+1)(x^2+4)}\,dx = \int_0^1\frac{x}{x^2+4}\,dx - \int_0^1\frac{1}{2x+1}\,dx.$$

Usando substituição simples concluímos que

$$\int_0^1\frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^5\frac{1}{s}\,ds = \frac{1}{2}(\ln 5-\ln 4) \quad \text{e} \quad \int_0^1\frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Portanto,

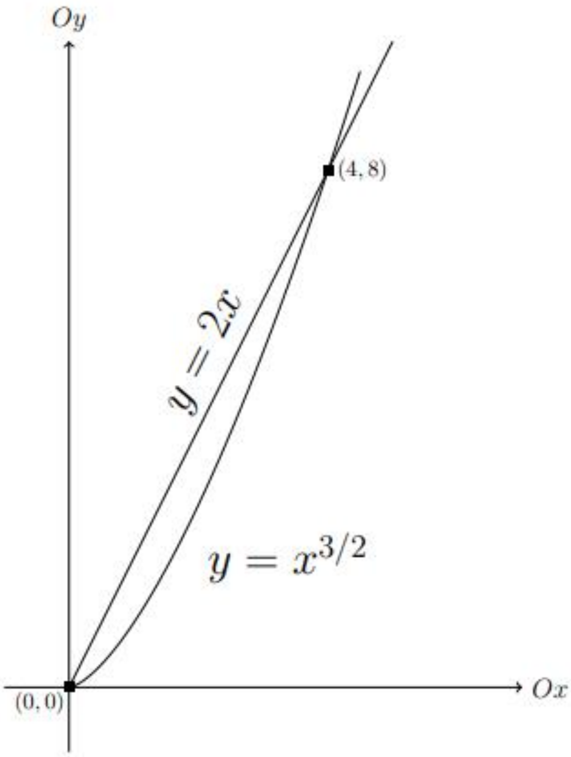
$$\int_0^1 \frac{x^2+x-4}{(2x+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 5-\ln 4-\ln 3) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{12}\right).$$

3EE-2016.1

4. Seja R a região delimitada pelas curvas $y = x^{3/2}$ e $y = 2x$.

(a) $(1,5$ ponto$)$ Esboce a região R e calcule sua área.

Solução. Um esboço da região R é apresentado na figura abaixo:



A área A da região R é dada por

$$A = \int_0^4 \left(2x - x^{3/2}\right) dx = \left(x^2 - \frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{16}{5} \text{ u.a.}$$

(b) $(1,5$ ponto$)$ Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo Ox.

Solução. Observe que as seções transversais são anéis com raio interno $x^{3/2}$ e raio externo $2x$. Assim, a área da seção transversal na posição x é

$$A(x) = \pi(2x)^2 - \pi(x^{3/2})^2 = \pi(4x^2 - x^3).$$

Portanto, o volume V procurado é

$$V = \int_0^4 A(x)\, dx = \pi \int_0^4 (4x^2 - x^3)\, dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{64\pi}{3} \text{ u.v.}$$

FINAL-2016.1

4. Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(a) (1,0 ponto) $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^4}\,dt.$

Solução. Fazendo a mudança de variável $s = t^2$, obtemos $ds = 2t\,dt$. Daí,

$$\int \frac{t}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+s^2}\,ds = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(s) + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t^2) + C, \text{ onde } C \in \mathbb{R}.$$

(b) (1,0 ponto) $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(3x)\,dx.$

Solução. Sejam $u = x$ e $dv = \mathrm{sen}(3x)\,dx$. Então, $du = dx$ e $v = -\dfrac{1}{3}\cos(3x)$. Integrando por partes, obtemos

$$\int x\,\mathrm{sen}(3x)\,dx = -\frac{x}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,dx = -\frac{x}{3}\cos(3x) + \frac{\mathrm{sen}(3x)}{9} + C, \text{ onde } C \in \mathbb{R}.$$

(c) (1,0 ponto) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Solução. Se $x = \mathrm{sen}\,\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, obtemos $dx = \cos\theta\,d\theta$. Assim,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\,\theta}}\cos\theta\,d\theta = \int \mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int [1-\cos(2\theta)]\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{2}\right] + C = \frac{1}{2}[\theta - \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta] + C, \text{ onde } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uma vez que $x = \mathrm{sen}\,\theta$, concluímos que $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ e que $\theta = \mathrm{arcsen}\,x$. Portanto:

$$I = \frac{1}{2}\left[\mathrm{arcsen}\,x - x\sqrt{1-x^2}\right] + C, \text{ onde } C \in \mathbb{R}.$$

FINAL-2016.2

5. Calcule as integrais abaixo:

(a) (1,0) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ $= 2\sqrt{e^x+1} + C$.

Por substituição:

$\begin{cases} u = e^x+1 \\ du = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}du = 2\sqrt{u} + C$

(b) (1,0) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ $= -\frac{\ln(x)+1}{x} + C$.

Por partes:

$\begin{cases} u = \ln(x), \quad dv = \frac{1}{x^2}dx \\ du = \frac{1}{x}dx, \quad v = -1/x \end{cases} \Rightarrow \int \frac{\ln(x)}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx$

$= -\frac{\ln(x)+1}{x} + C$

(c) (1,0) $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $= \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{24}$.

Por substituição trigonométrica:

$\begin{cases} x = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-x^2} = \cos\theta \\ dx = \cos\theta\, d\theta \end{cases}$

$\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{\cos\theta}}\cancel{\cos\theta}\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$

$= \frac{2\theta - \operatorname{sen}2\theta}{4}\Big|_0^{\pi/6} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{24}$.

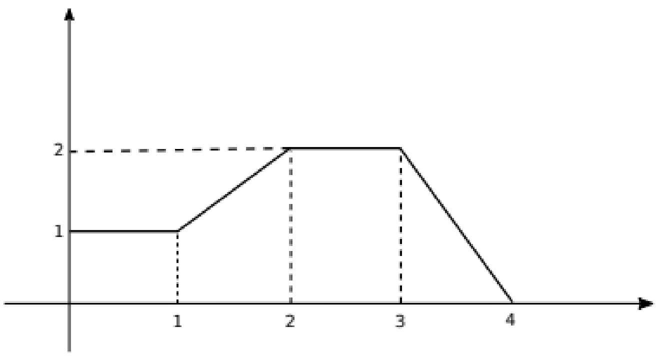
3EE-2017.1

1ª Questão [2 pontos]: Para a função f dada abaixo, esboce seu gráfico e em seguida calcule $\int_0^4 f(x)\,dx$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in [0,1], \\ x & \text{se} \quad x \in [1,2], \\ 2 & \text{se} \quad x \in [2,3], \\ -2x+8 & \text{se} \quad x \in [3,4]. \end{cases}$$

Solução:

Figura 1: Gráfico da função f



Temos que:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 x\,dx + \int_2^3 2\,dx + \int_3^4 (-2x+8)\,dx = [x]_0^1 + [\frac{x^2}{2}]_1^2 + [2x]_2^3 + [-x^2+8x]_3^4$$

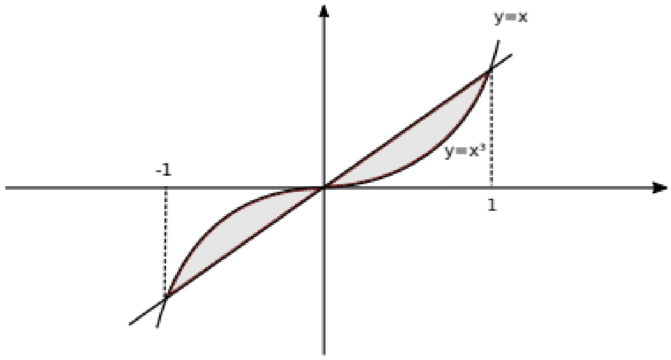
$$= 1 + (2 - \frac{1}{2}) + (6-4) + (16-15) = \frac{11}{2}$$

3EE-2017.1

2ª Questão [2 pontos]: Esboce a região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$ e em seguida calcule a área desta região.

Solução:

Figura 2: Região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$



Devemos inicialmente encontrar os pontos de interseção entre as curvas. Para isto, basta resolver a equação $x^3 = x$ cujas soluções são $x = 1$ e $x = -1$. Temos então que a área A da região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$A = \int_0^1 (x - x^3)\,dx + \int_{-1}^0 (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

3EE-2017.1

3ª Questão [3 pontos]: Calcule as integrais definidas a seguir:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\,dx$ **b.** $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

Solução:

a. Neste item usaremos a técnica de integração por partes.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos 2x)'\,dx = -\frac{1}{2}\left([x\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\cos\pi - 0\cos 0\right) + \frac{1}{4}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\sin\pi - \frac{1}{4}\sin 0 = \frac{\pi}{4}.$$

b. Neste item iremos completar o quadrado do denominador e em seguida uma mudança de variável

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,dx = [\arctan u]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

3EE-2017.1

4ª Questão

Solução:

a. Neste item vamos fazer uma decomposição por frações parciais. Note que

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x(A+B)+A-2B}{(x-2)(x+1)}.$$

Para determinarmos A e B basta resolvermos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases}$$

Cujas soluções são $B=-\frac{1}{3}$ e $A=\frac{1}{3}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}\,dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx=\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C$$

b. Neste item, vamos realizar a mudança de variável $u=\sin x$ de onde $du=\cos x dx$

$$\int \sin^5 x\cos^3 x\,dx=\int \sin^5 x\cos^2 x\cos x\,dx=\int \sin^5 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$=\int u^5(1-u^2)\,du=\int u^5\,du-\int u^7\,du=\frac{u^6}{6}-\frac{u^8}{8}+C=\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{8}+C$$

FINAL-2017.1

4ª Questão

Solução: **a.** Fazendo a mudança de variável $u=x-1$, temos que $du=dx$ e

$$\int\frac{2x-3}{(x-1)^3}\,dx=\int\frac{2(u+1)-3}{u^3}\,du=\int\frac{2u-1}{u^3}\,du=\int\frac{2}{u^2}-\frac{1}{u^3}\,du=-\frac{2}{u}+\frac{1}{2u^2}+K$$
$$=-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+K$$

b.

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan^2 x \tan x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan x\,dx = \int \sec^2 x \tan x\,dx - \int \tan x\,dx$$

Para a primeira integral, podemos realizar a mudança de variável $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\,dx$.

$$\int \sec^2 x \tan x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + K = \frac{\tan^2 x}{2} + K$$

Para a segunda integral, fazemos a mudança $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$.

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + K = -\ln|\cos x| + K.$$

Portanto,

$$\int \tan^3 x\,dx = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + K.$$

3EE-2018.1

Questão 1:

a) Fazendo $u = 1 + lnx$, temos que $du = \frac{dx}{x}$. Também, $x = 1 \Rightarrow u = 1$ e $x = 4 \Rightarrow u = 1 + ln4$.

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \int_1^{1+ln4} u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^{1+ln4} = \frac{2}{3}(\sqrt{(1+ln\ 4)^3} - 1)$$

b) Usaremos integração por partes com $f = lnx$, $f' = \frac{1}{x}$ e $g' = \frac{1}{x^2}$, $g = -\frac{1}{x}$. Temos

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{lnx}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{ln2}{2}$$

3EE-2018.1

Questão 2:

a) Fazendo $\frac{x}{2} = \sec u$, temos $dx = 2\sec u \tan u du$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}dx = \int \frac{1}{4\sec^2 u\sqrt{\sec^2 u - 1}}\sec u \tan u du$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sec u}du = \frac{1}{4}\int \cos u\,du = \frac{1}{4}sen\ u + c = \frac{1}{4}sen\ u + c.$$

Para voltar à variável x notamos que $\cos u = \frac{2}{x}$, logo $sen\ u = \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}$. Assim

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx = \frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} + c.$$

b)

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx = \int \frac{x^2+2x-1}{x(x-1)(x+1)}dx$$

Temos a soma de frações parcias:

$$\frac{x^2+2x-1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

1

Portanto

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx = \int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})dx$$
$$= ln\ |x| + ln\ |x-1| - ln\ |x+1| + c.$$

3EE-2018.1

Questão 4:

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}senx\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}senxdx = \int_0^\infty e^{-x}senxdx$$
$$= -e^{-x}cosx\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}cosxdx = 1 - \int_0^\infty e^{-x}cosxdx.$$

Portanto

$$2\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx = 1,$$

ou seja

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}$$

FINAL-2018.1

Questão 3: Calcule

a) Fazendo $u = e^x$, temos que $du = e^x dx$ e

$$\int \sqrt{1-e^{2x}}e^x dx = \int \sqrt{1-u^2}du.$$

Fazendo $v = \sin u$, temos $dv = \cos u du$ e

$$\int \sqrt{1-u^2}du = \int \cos^2 v dv = \int \frac{1+\cos(2v)}{2}dv = \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}\sin(2v).$$

Logo,

$$\int \sqrt{1-e^{2x}}e^x dx = \frac{1}{2}\sin(e^x) + \frac{1}{4}\sin(2\sin(e^x)).$$

b) Fazendo $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$, logo

$$\int_0^{\sqrt{2}} x(x^2+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3 du = \frac{u^4}{4}\Big|_1^3 = 10.$$

3EE-2018.2

2) a) (1,5 pontos) Calcule $\int t^{2018} \ln(t)\, dt$.

Solução

Usaremos integração por partes, tomando $u = \ln(t)$ e $dv = t^{2018}$. Então temos $du = \ln'(t)\, dt = t^{-1}\, dt$, enquanto $v = \int t^{2018}\, dt = \frac{t^{2019}}{2019}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\int t^{2018} \ln(t)\, dt &= \int u\, dv \\
&= uv - \int v\, du \\
&= \frac{t^{2019}\ln(t)}{2019} - \int \frac{t^{2019}}{2019} \cdot t^{-1}\, dt \\
&= \frac{t^{2019}\ln(t)}{2019} - \frac{1}{2019} \cdot \int t^{2018}\, dt \\
&= \boldsymbol{\frac{t^{2019}\ln(t)}{2019} - \frac{t^{2019}}{2019^2} + C}.
\end{aligned}$$

b) (1,5 pontos) Determine a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpre

$$F'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,; \quad F(1) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Solução

A primeira condição é satisfeita precisamente por **todas** as primitivas da função $\frac{1-x^2}{1+x^2}$. Assim, a função procurada F será da forma

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{2}{1+x^2} - 1\,\mathrm{d}x \\ &= 2\,\mathrm{arctg}(x) - x + C\,, \end{aligned}$$

com $C \in \mathbb{R}$. Neste caso temos $F(1) = 2\,\mathrm{arctg}(1) - 1 + C = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 + C = \frac{\pi}{2} - 1 + C$. Como queremos $F(1) = \frac{\pi}{2}$, concluímos que necessariamente vale $C = 1$. Assim, a função buscada é $\boldsymbol{F(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,(x) - x + 1}$.

Nota: A integral do problema também pode ser calculada fazendo a substituição $x = \mathrm{tg}(\theta)$, obtendo

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-\mathrm{tg}^2(\theta)}{1+\mathrm{tg}^2(\theta)}\,\sec^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int 1 - \mathrm{tg}^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int 1 - (\sec^2(\theta) - 1)\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\theta - \mathrm{tg}(\theta) + C \\ &= 2\,\mathrm{arctg}(x) - x + C\,. \end{aligned}$$

3EE-2018.2

3) Calcule as seguintes integrais definidas:

a) (1,5 pontos) $\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^5(\theta)\cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,;$

Solução 1

Fazendo a mudança de variável $z = \cos(\theta)$ obtemos $\mathrm{d}z = -\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Portanto

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5(\theta)\cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int \left[\operatorname{sen}^2(\theta)\right]^2\cos^4(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int \left[1-\cos^2(\theta)\right]^2\cos^4(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int (1-z^2)^2 z^4(-\,\mathrm{d}z) \\
&= \int -z^4(1-2z^2+z^4)\,\mathrm{d}z \\
&= \int -z^4+2z^6-z^8\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{z^5}{5}+\frac{2z^7}{7}-\frac{z^9}{9}+C \\
&= -\frac{\cos^5(\theta)}{5}+\frac{2\cos^7(\theta)}{7}-\frac{\cos^9(\theta)}{9}+C\,.
\end{aligned}$$

Aplicando o teorema fundamental do cálculo obtemos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5(\theta)\cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \left[-\frac{\cos^5(\theta)}{5}+\frac{2\cos^7(\theta)}{7}-\frac{\cos^9(\theta)}{9}\right]\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= \mathbf{0}\,,
\end{aligned}$$

pois $\cos(2\pi)=\cos(0)$.

Solução 2

Fazendo a mesma substituição da solução anterior, mas fazendo também a mudança dos limites de integração, obtemos que $z=\cos(\theta)$ vale 1 quando θ assume os valores 0 e 2π, e portanto

$$\begin{aligned}
\int_{\theta=0}^{2\pi} \operatorname{sen}^5(\theta)\cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int_{z=1}^{1} -\frac{z^5}{5}+\frac{2z^7}{7}-\frac{z^9}{9}\,\mathrm{d}z \\
&= \mathbf{0}\,,
\end{aligned}$$

pelas propriedades da integral definida.

Solução 3

Já que o integrando é periódico com período 2π, então vale

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^5(\theta)\cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^5(\theta)\cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Como a função seno é ímpar ($\operatorname{sen}(-\theta)=-\operatorname{sen}(\theta)$) e a função cosseno é par ($\cos(-\theta)=\cos(\theta)$), segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^5(-\theta)\cos^4(-\theta) &= (-1)^5\operatorname{sen}^5(\theta)\cos^4(\theta) \\
&= -\operatorname{sen}^5(\theta)\cos^4(\theta)\,.
\end{aligned}$$

Assim, o integrando $\operatorname{sen}^5\cos^4$ é uma função ímpar, logo pelas propriedades da integral definida teremos $\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^5(\theta)\cos^4(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\mathbf{0}$.

b) (1,5 pontos) $\int_1^2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x}\,dx$.

Solução

Temos $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x+1)(x+2)$. Portanto, pela teoria das frações parciais teremos

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2},$$

para algumas constantes $A, B, C \in \mathbb{R}$. Multiplicando ambos lados da igualdade por $x(x+1)(x+2)$, obtemos a igualdade polinomial

$$x^2 - 3x + 2 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1).$$

Avaliando nos valores $x = 0, -1$ e -2 obtemos, respectivamente, as igualdades

$$2 = 2A;\ 6 = -B;\ 12 = 2C.$$

Aplicando o teorema fundamental do cálculo, obtemos

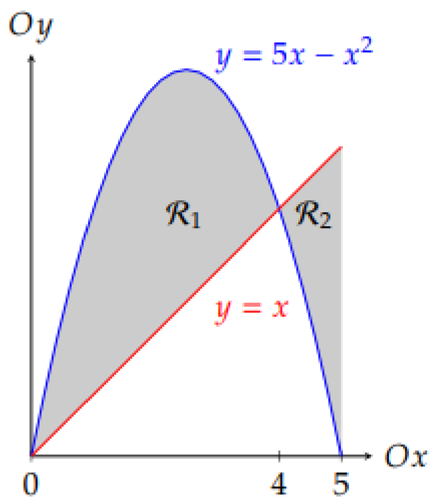
$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x}\,dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{6}{x+1} + \frac{6}{x+2}\,dx \\
&= \Big(\ln|x| - 6\ln|x+1| + 6\ln|x+2|\Big)\Big|_{x=1}^{x=2} \\
&= \Big(\ln|2| - 6\ln|3| + 6\ln|4|\Big) \\
&\quad - \Big(\ln|1| - 6\ln|2| + 6\ln|3|\Big) \\
&= \mathbf{7\ln(2) - 12\ln(3) + 6\ln(4)}.
\end{aligned}$$

Pelas propriedades do logaritmo, este valor é igual a $\ln\left(\frac{2^7 \cdot 4^6}{3^{12}}\right) = \mathbf{\ln\left(\frac{2^{19}}{3^{12}}\right)}$.

4) Considere a região $\mathcal{R}$ do plano limitada pelas curvas $y = 5x - x^2$ e $y = x$, com $0 \leq x \leq 5$.

a) (1,0 pontos) Faça um esboço das curvas envolvidas no problema, indicando os pontos notáveis e hachurando a região $\mathcal{R}$.

Solução
Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = 5x - x^2$. Então $f(x) - g(x) = x^2 - 4x = x(x-4)$, logo $f(x) - g(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = 4$, $f(x) - g(x) > 0$ quando $4 < x \leq 5$ e $f(x) - g(x) < 0$ no intervalo restante, isto é, quando $0 < x < 4$. Ainda, $g'(x) = 5 - 2x$, logo a função polinomial quadrática g (cujo gráfico é uma parábola) será crescente no intervalo $[0, 5/2]$ e decrescente no intervalo $[5/2, 5]$. Finalmente, a região $\mathcal{R}$ será a união das duas regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ destacadas na figura abaixo:



b) (1,5 pontos) Calcule a área da região $\mathcal{R}$.

Solução
Pelo item anterior temos área$(\mathcal{R})$ = área$(\mathcal{R}_1)$ + área$(\mathcal{R}_2)$. Usando o teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$\begin{aligned}
\text{área}(\mathcal{R}_1) &= \int_0^4 (5x - x^2) - x\,dx \\
&= \int_0^4 4x - x^2\,dx \\
&= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=4} \\
&= \mathbf{32 - \frac{64}{3}},
\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}
\text{área}(\mathcal{R}_2) &= \int_4^5 x - (5x - x^2)\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]\Bigg|_{x=4}^{x=5} \\
&= \left(\mathbf{\frac{125}{3} - 50}\right) - \left(\mathbf{\frac{64}{3} - 32}\right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\text{área}(\mathcal{R}) = \frac{125}{3} - 50 + 2\left(32 - \frac{64}{3}\right) = \mathbf{13}\,.$$

FINAL-2018.2

4) Calcule as seguintes primitivas

a) (1,0 pontos) $\displaystyle\int \frac{1}{z^2 - 2z}\,dz$;

Solução
Da teoria das frações parciais segue que

$$\frac{1}{z^2 - 2z} = \frac{1}{z(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2},$$

para algumas constantes $A, B \in \mathbb{R}$. Multiplicando ambos lados da igualdade por $z(z-2)$, obtemos a igualdade polinomial

$$1 = A(z-2) + Bz\,.$$

Avaliando nos valores $z = 0$ e 2 obtemos, respectivamente, as igualdades $1 = -2A$ e $1 = 2B$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{z^2 - 2z}\,dz &= \int \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-2}\right]dz \\
&= \mathbf{\frac{1}{2}\left[\ln|z-2| - \ln|z|\right] + C}\,.
\end{aligned}$$

b) (1,0 pontos) $\int \theta^2 \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta$;

Solução

Procederemos por integração por partes: tomando $u = \theta^2$ e $\mathrm{d}v = \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ obtemos $\mathrm{d}u = 2\theta\,\mathrm{d}\theta$ e $v = \mathrm{sen}(2\theta)/2$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \theta^2 \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int u\,\mathrm{d}v \\ &= uv - \int v\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\theta^2\,\mathrm{sen}(2\theta)}{2} - \int \theta\,\mathrm{sen}(2\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.\end{aligned}$$

Para calcular esta nova primitiva, aplicamos de novo integração por partes, tomando desta vez $u = \theta$ e $\mathrm{d}v = \mathrm{sen}(2\theta)\,\mathrm{d}\theta$, obtendo $\mathrm{d}u = \mathrm{d}\theta, v = -\cos(2\theta)/2$ e

$$\begin{aligned}\int \theta\,\mathrm{sen}(2\theta)\,\mathrm{d}\theta &= -\frac{\theta\cos(2\theta)}{2} - \int -\frac{\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{\theta\cos(2\theta)}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{4} + C\,.\end{aligned}$$

Substituindo este resultado na primeira igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}\int \theta^2 \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \frac{\theta^2\,\mathrm{sen}(2\theta)}{2} - \left[-\frac{\theta\cos(2\theta)}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{4} + C\right] \\ &= \boldsymbol{\frac{(2\theta^2-1)\,\mathrm{sen}(2\theta) + 2\theta\cos(2\theta)}{4} + C}\,.\end{aligned}$$

c) (1,0 pontos) $\displaystyle\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Solução

Fazendo a substituição $\theta = \sqrt{t}$ obtemos $\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$; ainda, quando t toma os valores $\pi^2/4$ e π^2, w assume os valores $\pi/2$ e π, respectivamente. Finalmente, aplicando o teorema fundamental do cálculo obtemos

$$\begin{aligned}\int_{t=\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \mathrm{sen}(\theta)\cdot 2\,\mathrm{d}\theta \\ &= -2\cos(\theta)\,\Big|_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} \\ &= -2\cos(\pi) + 2\cos(\pi/2) \\ &= \mathbf{2}\,.\end{aligned}$$

3EE-2019.1

1. Cálculo das integrais indefinidas:

(a) $$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \operatorname{arc\,tg}(e^x) + C\,, \quad \text{por substituição: } \begin{cases} u = e^x \\ du = e^x\,dx \end{cases}$$

(b) $$\int \frac{x^3-6x^2+10x-6}{x^2-5x+6}\,dx = \int (x-1)\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx - 3\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3-6x^2+10x-6}{x^2-5x+6}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln(x-2) - 3\ln(x-3) + C.$$

(c) $$\int (\ln(x))^2\,dx = x\,(\ln(x))^2 - 2\int \ln(x)\,\frac{1}{x}\,x\,dx = x\,(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + C\,,$$

por partes: $u = (\ln(x))^2\,,\quad du = 2\,(\ln(x))\,\dfrac{1}{x}\,dx\,,\quad dv = dx \quad \text{e} \quad v = x$

3EE-2019.1

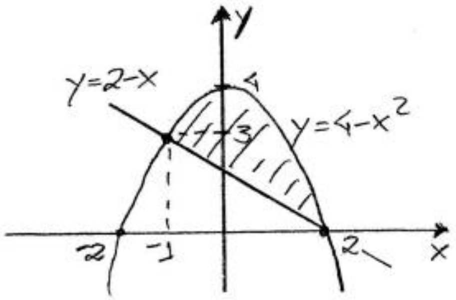
2. Primeiro obtemos uma primitiva:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\cos(t)}\cos(t)\,dt = \int \operatorname{sen}^2(t)\,dt = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{t - \operatorname{sen}(t)\cos(t)}{2}\,,$$

por substituição trigonométrica: $x = \operatorname{sen}(t)\,,\ \sqrt{1-x^2} = \cos(t) \quad \text{e} \quad dx = \cos(t)\,dt$

$$\Rightarrow \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\frac{\operatorname{arc\,sen}(x) - x\sqrt{1-x^2}}{2}\right]\Bigg|_0^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\,.$$

3.



$$A = \int_{-1}^{2} (4-x^2) - (2-x)\,dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} 2 + x - x^2\,dx$$

$$A = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{9}{2}\,.$$

4. (a) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$F(x) = \int_{-7}^{x} e^{t^2}\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{dF}{dx} = e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{dx}(1) = e^1 = e\,.$$

(b) Note que $G(x) = \displaystyle\int_{-7}^{sen(x)} e^{t^2}\,dt = F\,(\operatorname{sen}(x))$ e, portanto,

$$\frac{dG}{dx} = F'\,(\operatorname{sen}(x)) \cdot [\operatorname{sen}(x)]' \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{dx}(\pi) = e^0\cos(\pi) = -1\,.$$

3EE-2019.2

1. a) $\int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\int \text{sen}(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \text{sen}(u)du$

$= -2\cos(u) + C \Rightarrow \int \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = -2\cos(\sqrt{x}) + C$

Por substituição: $u = \sqrt{x}$ e $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

b) $\int \frac{x^3+1}{x^3+x}dx = \int \frac{x^3+x}{x^3+x} + \frac{1-x}{x^3+x}dx$

$= \int dx + \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx$

$= x + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \text{arctg}(x) + C$

Por frações parciais:

$\frac{1-x}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow Ax^2 + Bx^2 + Cx + A = 1 - x$

(2)

$$\begin{pmatrix} u = x^2 & dv = \cos x\,dx \\ du = 2x\,dx & v = \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$$

(a) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos(x)\,dx = x^2 \operatorname{sen} x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2x \operatorname{sen} x\,dx$

$\displaystyle = -2\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\,dx = -2\left[-x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx\right]$

$$\begin{pmatrix} u = x & dv = \operatorname{sen} x\,dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{pmatrix}$$

$= -2\left[(-\pi)(-1) + \operatorname{sen} x\Big|_0^\pi\right]$

$= \boxed{-2\pi}$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{t^3}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$

Fasa $t = 2\operatorname{sen}\theta$

$dt = 2\cos\theta\,d\theta$

$\sqrt{4-t^2} = 2\cos\theta$

$-1 \to t \to 0$

$-\frac{1}{2} \to \operatorname{sen}\theta \to 0$

$-\frac{\pi}{6} \to \theta \to 0$

||

$\displaystyle\int_{-\pi/6}^0 \frac{8\operatorname{sen}^3\theta\, 2\cos\theta\,d\theta}{2\cos\theta} = 8\int_{-\pi/6}^0 \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta$

$\displaystyle = 8\int_{-\pi/6}^0 (1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

$\begin{pmatrix} s = \cos\theta \\ ds = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta \end{pmatrix}$

$\displaystyle 8\int_{\sqrt{3}/2}^1 (1-s^2)(-ds)$

$\displaystyle = 8\left[-s + \frac{s^3}{3}\right]\Big|_{\sqrt{3}/2}^1 = 8\left[-1 + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{24}\right] = 8\left[-\frac{2}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\right]$

$= \boxed{-\frac{16}{3} + 3\sqrt{3}}$

ou: para calcular $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{t^3}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$ fasa $u = 4 - t^2 \therefore t^2 = 4 - u$

$du = -2t\,dt$

$-1 \to t \to 0$

$3 \to u \to 4$

$\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{t^3}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = \int_{-1}^0 \frac{t^2 \cdot t\,dt}{\sqrt{4-t^2}} = \int_3^4 \frac{(4-u)}{\sqrt{u}}\frac{du}{-2} = \int_3^4 \left(-2u^{-1/2} + \frac{1}{2}u^{1/2}\right)du$

$\displaystyle = \left(-4u^{1/2} + \frac{1}{3}u^{3/2}\right)\Big|_3^4 = -8 + \frac{8}{3} + 4\sqrt{3} - \frac{1}{3}3\sqrt{3}$

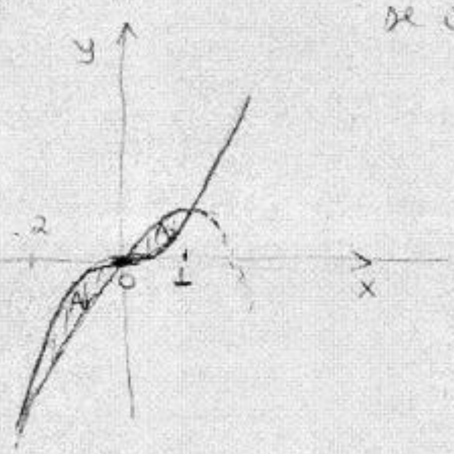
$= \boxed{-\frac{16}{3} + 3\sqrt{3}}$

3EE-2019.2

$x^3 = 2x - x^2 \iff x = 0$ ou $x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 0, 1, -2$

(3)

Os gráficos $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$ se interceptam para $x = -2$, $x = 0$ e $x = 1$

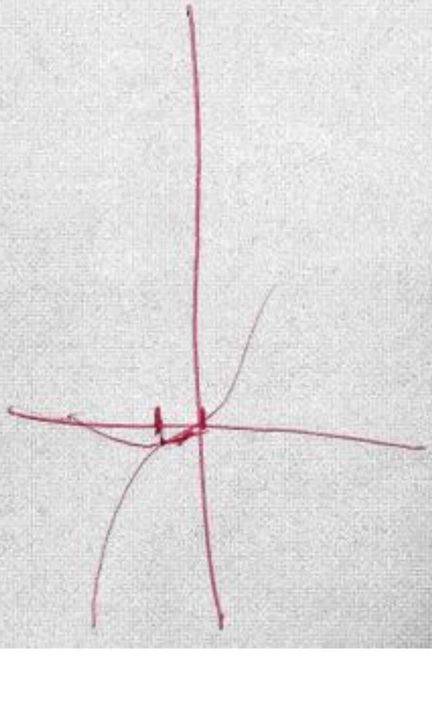


As áreas das regiões hachuradas à esquerda são:

$$A_1 = \int_{-2}^{0} [x^3 - (2x - x^2)]\,dx \quad e \quad A_2 = \int_{0}^{1} [(2x - x^2) - x^3]\,dx$$

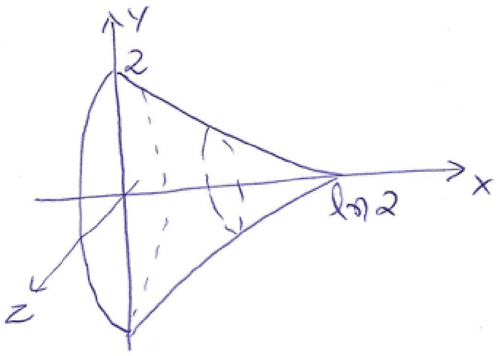
Assim, $A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]\Big|_{-2}^{0} = -4 + 4 + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$

e $A_2 = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 4 - 3}{12} = \boxed{\frac{5}{12}}$



3EE-2019.2

4.



$$V = \int_0^{\ln 2} \pi (2e^{-x} - 1)^2 dx$$

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} 4e^{-2x} - 4e^{-x} + 1 \, dx$$

$$V = \pi \left(-2e^{-2x} + 4e^{-x} + x \right) \Big|_0^{\ln 2}$$

$$\Rightarrow V = \pi \left[\left(-\frac{1}{2} + 2 + \ln 2 \right) - (-2 + 4 + 0) \right]$$

$$\boxed{V = \frac{(2\ln 2 - 1)\pi}{2}}$$