DERIVADAS: REGRAS DE DERIVAÇÃO

8. DERIVADA DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS:

Agora que já sabemos a ideia das derivadas e afins, entraremos nas derivadas das funções trigonométricas, damos boas vindas novamente para velhos conhecidos:

$$sen(x)$$
$$\cos(x)$$
$$tg(x)$$

Com uma adição de mais três:

$$\sec(x)$$
$$cossec(x)$$
$$cotg(x)$$

Claro, quando falamos de trigonometria também devemos lembrar das relações mais importantes e comuns a serem utilizadas durante todo nosso trajeto:

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$
$$sen(a+b) = sen(a) \cdot \cos(b) + sen(b) \cdot \cos\,(a)$$
$$cos(a+b) = cos(a) \cdot \cos(b) - sen(b) \cdot \text{sen}\,(a)$$

Oras, de tantas funções, só fora abordada relações de seno e cosseno. Para nossa felicidade de espirito, se estamos abordando funções trigonométricas buscaremos sempre trabalhar com seno e cosseno. Tal que todas as outras funções podem serem escritas como uma função de seno ou cosseno, ou até mesmo ambas. Vejam:

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos\,(x)}$$
$$\sec(x) = \frac{1}{\cos\,(x)}$$
$$cossec(x) = \frac{1}{sen(x)}$$
$$cotg(x) = \frac{1}{tg(x)} = \frac{\cos\,(x)}{sen(x)}$$

Lembrem-se dessas relações, iremos utilizar mais para frente. Vamos focar no momento nas derivadas do $sen(x)$ e $\cos\,(x)$, para isso vamos utilizar da definição básica de derivadas como vemos fazendo.

$$\frac{d}{dx}[sen(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{sen(x+h)} - sen(x)}{h}$$

Vejam que temos $\boldsymbol{sen(x+h)}$, logo podemos utilizar da relação que vimos em cima de $\boldsymbol{sen(a+b)}$.

$$\frac{d}{dx}[sen(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{[sen(x) \cdot \cos(h) + sen(h) \cdot \cos(x)] - sen(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}[sen(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x) \cdot (\cos(h) - 1) + sen(h) \cdot cos(x)}{h}$$

Utilizando das propriedades dos limites podemos separar esse limite em dois:

$$\frac{d}{dx}[sen(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x) \cdot (\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{sen(h) \cdot cos(x)}{h}$$

Vejam que o limite é de h, logo estamos considerando x uma constante, logo todos que tem apenas x podem serem jogados para fora do limite:

$$\frac{d}{dx}[sen(x)] = sen(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} + cos(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{sen(h)}{h}$$

Por meio de algumas provas temos que $\boldsymbol{\lim_{h \to 0} \frac{(\cos(h)-1)}{h} = 0}$ e que $\boldsymbol{\lim_{h \to 0} \frac{sen(h)}{h} = 1}$, logo:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[sen(x)]} = sen(x) \cdot 0 + cos(x) \cdot 1 = \boldsymbol{\cos(x)}$$

Temos que a derivada do $sen(x)$ é o $\cos(x)$, agora qual seria a derivada do $\cos(x)$?

$$\frac{d}{dx}[cos(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{cos(x + h)} - cos(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}[cos(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{[cos(x) \cdot cos(h) - sen(x) \cdot sen(h)] - cos(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}[cos(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x) \cdot (\cos(h) - 1) - sen(x) \cdot sen(h)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}[cos(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x) \cdot (\cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{sen(x) \cdot sen(h)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}[cos(x)] = cos(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} - sen(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{sen(h)}{h}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[cos(x)]} = cos(x) \cdot 0 - sen(x) \cdot 1 = \boldsymbol{-sen(x)}$$

Vimos que a derivada do seno é o cosseno, já a derivada do cosseno é menos seno. E a derivadas dos outros? Qual seria a derivada da tangente? Qual seria a derivada da secante, cossecante e cotangente?

Lembrem-se daquilo que falei, quando estamos lidando com funções trigonométricas podemos sempre buscar trabalhar apenas com $sen(x)$ e $cos(x)$, a qual fora mostrada a relação entre essas funções com $sen(x)$ e $cos(x)$.

$$\boldsymbol{tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}}$$

$$\boldsymbol{\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}}$$

$$\boldsymbol{cossec(x) = \frac{1}{sen(x)}}$$

$$\boldsymbol{cotg(x) = \frac{1}{tg(x)} = \frac{\cos(x)}{sen(x)}}$$

Vejam que no final estamos sempre lidando com uma função entre $sen(x)$ e $cos(x)$, e como sabemos a derivadas de ambos, podemos ir direto aplicar as regras que já conhecemos, como a regra do quociente:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[tg(x)]} = \frac{d}{dx}\left[\frac{sen(x)}{cos(x)}\right] = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - sen(x)\cdot(-sen(x))}{cos^2(x)}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left[\frac{sen(x)}{cos(x)}\right]} = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{1}{\cos(x)} = \boldsymbol{sec^2(x)}$$

Vemos que a ***derivada da tangente é a secante ao quadrado***.

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[sec(x)]} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cos(x)}\right] = \frac{0\cdot\cos(x) - 1\cdot(-sen(x))}{cos^2(x)} = \frac{sen(x)}{cos^2(x)}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{cos(x)}\right]} = \frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{sen(x)}{\cos(x)} = \boldsymbol{\sec(x)\cdot tg(x)}$$

Vemos que a ***derivada da secante é o produto da secante com a tangente***.

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[cossec(x)]} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{sen(x)}\right] = \frac{0\cdot\mathrm{sen}(x) - 1\cdot(cos(x))}{sen^2(x)} = \frac{-cos(x)}{sen^2(x)}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{sen(x)}\right]} = -\frac{1}{\mathrm{sen}(x)}\cdot\frac{cos(x)}{\mathrm{sen}(x)} = \boldsymbol{-cossec(x)\cdot cotg(x)}$$

Já a derivada da cossecante é o produto da própria com a cotangente com o sinal de menos na frente.

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}}[\boldsymbol{cotg(x)}] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(x)}{sen(x)}\right] = \frac{(-\mathrm{sen}(\mathrm{x}))\cdot \mathrm{sen}(x) - \cos(x)\cdot\cos(x)}{sen^2(x)}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}}\left[\boldsymbol{\frac{cos(x)}{sen(x)}}\right] = \frac{-sen^2(x) - cos^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{-(sen^2(x) + cos^2(x))}{sen^2(x)} = \frac{-1}{sen^2(x)} = \boldsymbol{-cossec^2(x)}$$

Por fim vemos que a **derivada da cotangente é a cossecante ao quadrado com o sinal de menos**.

Exemplo:

$$\boldsymbol{f(x) = tg(x^2)\cdot\sqrt{sen(2\pi x)}}$$

$$\boldsymbol{f'(x)} = [sec^2(x^2)\cdot 2x]\cdot\sqrt{sen(2\pi x)} + tg(x^2)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{sen(2\pi x)}}\cdot 2\pi\right]$$