**Lista de Exercícios**

$\boxed{1}$ Considere dois processos de Bernoulli independentes $A_n$ e $B_n$ com taxas $1/5$ e $1/4$ respectivamente. Seja $C_n$ o processo de Bernoulli definido por $C_i = A_i\,(1 - B_i)$ para todo $i$. Determine a taxa do processo $C_n$ .

---

$\boxed{2}$ Para um processo de sucessos acumulados de Bernoulli $S_n$ com taxa $\nu = 0{,}9$ obtenha uma expressão numérica das seguintes probabilidades

$$P\,(\,S_4 = 1\ ;\ S_7 = 3\ ;\ S_9 = 3\,)$$

$$P\,(\,S_{11} = 1\ ;\ S_{17} = 3\ ;\ S_{24} = 6\ ;\ S_{32} = 10\,)$$

---

$\boxed{3}$ Para um processo de sucessos acumulados de Bernoulli $S_n$ com taxa $\nu = {}^1\!/_5$ obtenha uma expressão de numérica de $P\,(\,S_4 = 2\ ;\ S_7 \neq 3\,)$

---

$\boxed{4}$ Em um processo de sucessos acumulados de Bernoulli $S_n$ com taxa $\nu = {}^1\!/_3$ obtenha uma expressão de numérica de $P(\,S_5 \neq 2\ ;\ S_8 = 3\,)$

---

$\boxed{5}$ Seja $S_n$ um processo de sucessos acumulados de Bernoulli com taxa $\nu$. Determine a expressão numérica da probabilidade condicional $P\,(\,S_1 = 1\,|\,S_4 = 1\,)$ .

---

$\boxed{6}$ Para um processo de sucessos acumulados de Bernoulli $S_n$ com taxa $\nu = 0{,}1$ calcule $E\,[S_4 S_7]$.

---

$\boxed{7}$ Para um processo de sucessos acumulados de Bernoulli $S_n$ com taxa $\nu = 0{,}5$ calcule $E\,[S_{11} S_{16}]$

8 Dada a matriz de transição de uma cadeia e as potências de ordem 2 e 3 abaixo, escreva as expressões numéricas das seguintes probabilidades

$$\begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}48 & 0{,}0 & 0{,}5 & 0{,}02 \\ 0{,}1 & 0{,}48 & 0{,}05 & 0{,}37 \\ 0{,}37 & 0{,}02 & 0{,}45 & 0{,}16 \\ 0{,}05 & 0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}45 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}06 & 0{,}496 & 0{,}01 & 0{,}434 \\ 0{,}382 & 0{,}06 & 0{,}425 & 0{,}133 \\ 0{,}133 & 0{,}434 & 0{,}09 & 0{,}343 \\ 0{,}425 & 0{,}01 & 0{,}475 & 0{,}09 \end{bmatrix}$$

$$P(\ X_2 = 0\ ;\ X_5 = 1\ ;\ X_6 = 0\ ;\ X_9 = 2 \mid X_0 = 3\ )$$

$$P(\ X_3 = 2\ ;\ X_5 = 1\ ;\ X_7 = 0\ ;\ X_8 = 3 \mid X_0 = 1\ )$$

$$P(\ X_{73} = 0\ ;\ X_{75} = 3\ ;\ X_{78} = 1\ ;\ X_{79} = 0 \mid X_{70} = 2\ )$$

$\boxed{9}$ Para uma cadeia espaço de estados $E = \{0{,}1{,}2{,}3\}$ e com matriz de transição dada abaixo, obtenha uma expressão da probabilidade de primeiro retorno especificada a seguir (podendo deixar produtos matriciais indicados)

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$P\,(\,X_1 \neq 2\,, X_2 \neq 2\,, X_3 \neq 2\,, X_4 = 2 \,|\, X_0 = 2)$$

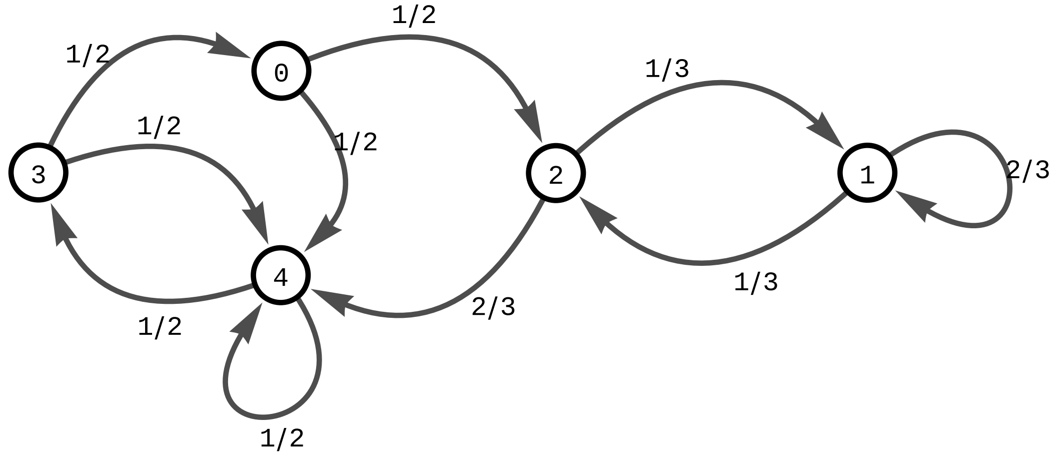
$$P\,(\,X_1 \neq 1\,, X_2 \neq 1\,, X_3 \neq 1\,, X_4 \neq 1\,, X_5 = 1 \,|\, X_0 = 1)$$

---

$\boxed{10}$ Para uma cadeia com o diagrama abaixo, obtenha expressões representando cálculos das seguintes probabilidades (podendo deixar produtos matriciais indicados)

$$P\,(\,X_1 \neq 1\,, X_2 \neq 1\,, X_3 \neq 1\,, X_4 = 1 \,|\, X_0 = 1)$$

$$P\,(\,X_9 = 2 \,|\, X_2 = 3)$$



11 Considere uma cadeia com matriz de transição dada ao lado.
Identifique classes de estados e seus devidos atributos: recorrentes, transitórias, periódicas, aperiódicas.
Considere espaço de estados $E = \{0{,}1,\ldots,8\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

---

12 A cadeia com matriz dada a seguir possui infinitas distribuições estacionárias. Obtenha duas delas.

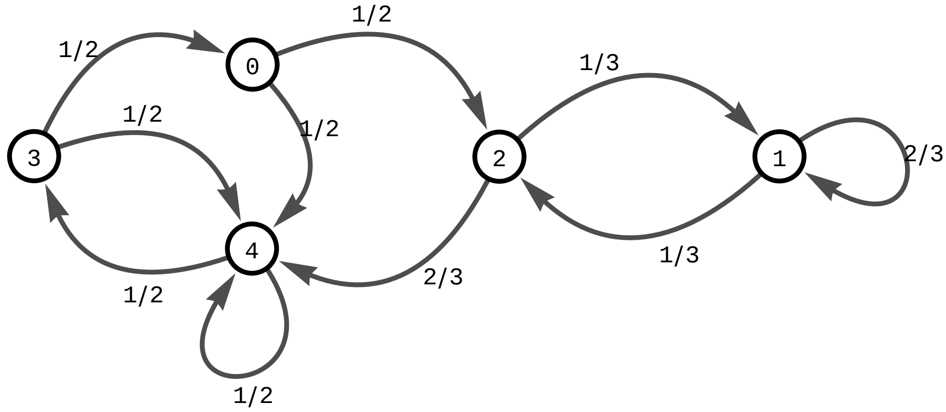
$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

13 Considere uma cadeia de Markov com três estados $E = \{0{,}1{,}2{,}3\}$ e com matriz de transição dada abaixo. Determine o tempo médio de recorrência do estado “3”.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{14}$ Na cadeia com diagrama abaixo, os tempos médios de recorrência dos estados "0" ; "1" ; "2" ; "3" são 7,5 ; 10 ; 10 ; 3,75 respectivamente. Descubra o tempo médio de recorrência do estado "4".




---

$\boxed{15}$ Determine a matriz que representa o limite abaixo

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/8 & 4/8 & 3/8 \\ 0 & 1/8 & 7/8 \end{bmatrix}^n$$

---

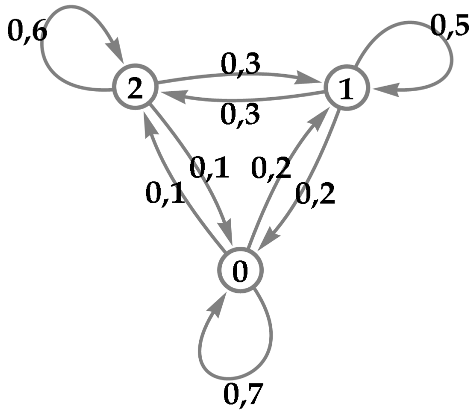
$\boxed{16}$ Em uma certa região anualmente 20% da população rural migra para a zona urbana e 5% da população urbana migra para a zona rural. Se estas taxas são constantes ao longo dos anos, determine a longo prazo as proporções da população em cada setor.

---

$\boxed{17}$ Obtenha a matriz que representa o limite abaixo.

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}^n$$

Seja um modelo climático de transição diária entre três estados: ensolarado (0), nublado (1), chuvoso (2). Considere que transições são descritas pelo diagrama abaixo.




---

$\boxed{18}$ Obtenha uma expressão numérica (podendo deixar produtos matriciais indicados) para a probabilidade de que, dado que uma semana começa com o domingo ensolarado, termine com o sábado ensolarado.

---

$\boxed{19}$ Obtenha uma expressão numérica (podendo deixar produtos matriciais indicados) para a probabilidade de que, dado que uma semana começa com o domingo chuvoso, quarta-feira esteja ensolarado, e sábado volte a ficar chuvoso.

---

$\boxed{20}$ Obtenha uma expressão numérica (podendo deixar produtos matriciais indicados) para a probabilidade de que, dado que uma semana começa com o domingo ensolarado, quinta-feira esteja chuvoso, e sábado volte a ficar ensolarado.

---

$\boxed{21}$ Se a previsão para segunda-feira de uma semana é "30% sol, 30% nublado, e 40% chuva", escreva uma expressão (com produtos matriciais) que quando processada fornece o "vetor" de previsão para o sábado da semana em questão.

$\boxed{22}$ Dado um dia chuvoso, determine o tempo médio até o próximo dia chuvoso (equivalente ao período médio entre dias chuvosos).

---

$\boxed{23}$ Obtenha uma expressão numérica (podendo deixar produtos matriciais indicados) para a probabilidade de que, dado que no $7^o$ dia do mês está chuvoso, só volte a ficar chuvoso novamente no $22^o$ dia do mês (e não antes disso).

---

$\boxed{24}$ Seja $B_0, B_1, B_2, \ldots$ um processo de Bernoulli de taxa $\nu = {}^2\!/_3$ . Considere o processo $J_0, J_1, J_2, \ldots$ definido por

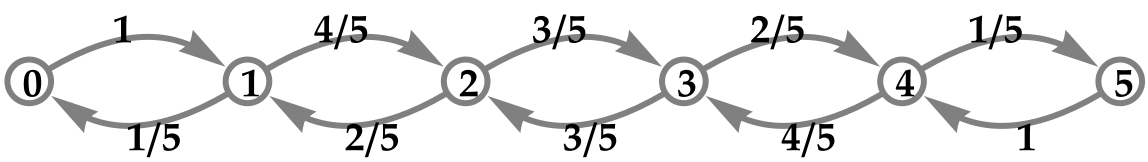
$$J_0 \;=\; 0$$

$$J_{i+1} \;=\; (J_i + B_i)\, mod\, 2 \;, \qquad i \;=\; 0\,;\, 1\,;\, 2\,;\ldots$$

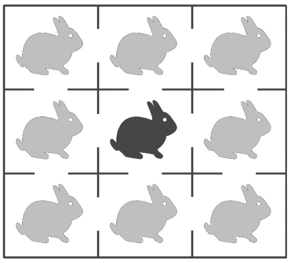
onde " $mod\, 2$ " representa a operação "módulo 2" (resto da divisão por dois) do número inteiro que o precede. Ou alternativamente pode-se definir $J_{i+1} \;=\; Xor(\, J_i \,, B_i\,)$ em notação de álgebra booleana. Construído desta forma, o processo $J_0, J_1, J_2, \ldots$ é um processo markoviano homogêneo. Deduza sua matriz de transição.

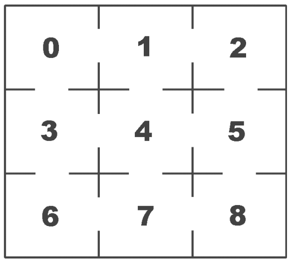
---

$\boxed{25}$ A cadeia de Ehrenfest de "ordem 5" é definida pelo diagrama abaixo. Comprove que um vetor de probabilidades construído a partir da distribuição $Binomial(5; {}^1\!/_2)$ é o vetor estacionário para esta cadeia.



Enunciado para questões seguintes : Um problema clássico em modelos markovianos é a evolução probabilística de um coelho num labirinto com certas configurações de portas. Considere que a cada passo o coelho sempre muda de compartimento usando portas disponíveis no momento, e com igual probabilidade entre elas. Para definição de estados considere a numeração nos compartimentos esquematizada abaixo.






$\boxed{26}$ Sabendo que, quando o coelho sai do estado "0" ele demora em média 12 passos para retornar a "0", e que quando o coelho sai do estado "1" ele demora em média 8 passos para retornar a "1", ao partir do compartimento central determine o tempo médio que o coelho demora para retornar a este compartimento.

---

$\boxed{27}$ Para o coelho no labirinto, escreva um produto matricial representando a seguinte probabilidade: dado que o ponto de partida do coelho é o compartimento central, a probabilidade de que retorne a este compartimento em 5 transições.

---

$\boxed{28}$ Para o coelho no labirinto, escreva um produto matricial representando a seguinte probabilidade: dado que o ponto de partida do coelho é o compartimento central, a probabilidade de que retorne a este compartimento em exatamente 6 transições (e não antes do que isso).

Enunciado para as questões seguintes: considere um modelo estocástico sobre a sequência de caracteres de um texto como uma sequência de três possíveis estados: espaço (0), vogal (1), consoante (2). Considere matriz de transição dada abaixo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{29}$ Escreva expressão numérica de probabilidade de primeiro retorno associada a "uma palavra com cinco letras".

---

$\boxed{30}$ Calcule o comprimento médio das palavras neste modelo.

---

$\boxed{31}$ Defina o conceito de palavra "regular" como sendo uma sequência de sílabas "consoante-vogal" . Obtenha uma expressão numérica representando a probabilidade de "uma palavra regular de três sílabas".

---

$\boxed{32}$ Suponha que queira-se um modelo estocástico sobre a sequência de caracteres de um texto como uma sequência de dois possíveis estados: espaço (0), letra (1). Deduza como reduzir o modelo dos exercícios anteriores para obter esse novo modelo mais sintético, obtendo a matriz de transição.