

ET632 - Inferência Estatística. Prova I
Data de Entrega: 22/03/2021 até as 23:00hs (GMT-3 - Horário de Brasília)
Professor: Raydonal Ospina Martínez

Discente:

Regras: Leia com atenção as perguntas e tome um tempo adequado para refletir sobre elas. Todas as questões devem ser detalhadas. A prova deve ser claramente resolvida. Soluções "obscuras" serão penalizadas. Não será feito nenhum esforço para "adivinhar" o que o aluno quer escrever e dizer. Seja claro e organizado. Você deverá encaminhar sua prova resposta digitalizada em formato PDF. Não precisa resolver a prova em formato LaTeX simplesmente faça sua prova no papel e digitalize. Use uma máquina de scanner ou utilize aplicativos tais CamScanner para celular ou similares que transformam uma foto em pdf caso queira digitalizar a sua prova escrita desta.

Boa prova !!!!!

1. Seja X uma variável aleatória seguindo a distribuição de Bernoulli

$$f(x; \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x} \mathbb{I}_{\{0,1\}}(x), \text{ para } 0 < \theta < 1.$$

Baseado numa amostra de tamanho $n = 1$ da população de X definimos as estatísticas $T_1(X) = X$ e $T_2(X) = \frac{1}{2}$.

- (a) (1 ponto) Compare o Erro Quadrático Médio (EQM) de $T_1(X)$ e de $T_2(X)$. São $T_1(X)$ e $T_2(X)$ estatísticas não viesadas?
 - (b) (1 ponto) As estatísticas $T_1(X)$ e $T_2(X)$ são suficientes para θ ?
 - (c) (2 pontos) Encontre o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}^b = \hat{\theta}^b(X)$ de θ .
 - (d) (2 pontos) Encontre o estimador $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X)$ de θ pelo método de momentos.
2. (2 pontos) - Ponto Obrigatório. Seja X uma variável aleatória seguindo a distribuição de Poisson $f(x;$

$$\theta) = e^{-\theta} \theta^x$$

$$x!, \text{ para } x = 0, 1, \dots$$

Suponha que o $\log(\theta)$ pode assumir quatro valores entre $[2, 10]$, isto é θ assumir 4 valores de sua própria nesse intervalo, por exemplo, $\theta = 3.1, 4.3, 5, 8, 3.3$ (você deve escolher esses números, não podem ser os valores aqui apresentados). Baseado no princípio de máxima verossimilhança determine qual é o valor de θ que maximiza a probabilidade de ocorrência de uma amostra de tamanho 4 que assume os valores $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 4$ e $x_4 = 7$.

3. (2 pontos) Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma população com densidade

$$p_{\theta}(x) = \frac{2x}{\theta^2}, \text{ se } x \in (0, \theta), \theta > 0.$$

Existe estimador não viesado de variância uniformemente mínima para θ ? Justifique.