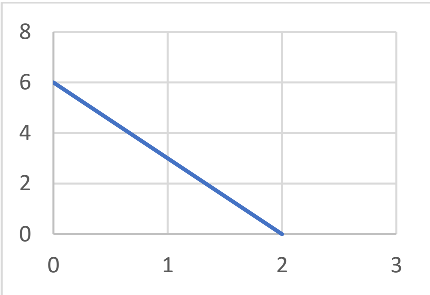
Resumo de Fundamentos de Cálculo I: Integrais

Conceito:

O estudo de integrais se dar pela necessidade de calcular áreas embaixo da curva de um gráfico, curioso não?



Se fosse pedido para calcular a área em baixo da reta, ou curva, do gráfico acima no intervalo de $x: [0, 2]$ seria perceptível que a figura formada é um triângulo retângulo, ou seja, um triângulo qualquer, e sabemos como cálculo a área de tal figura geométrica:

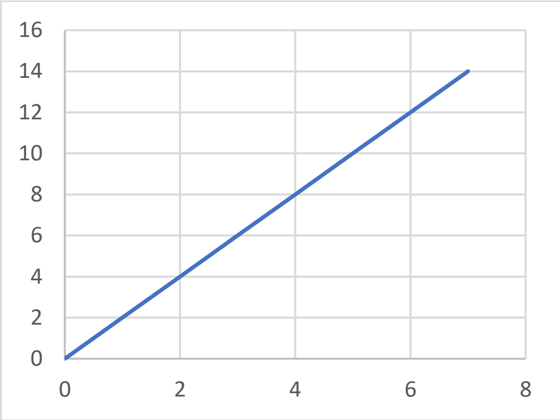
$$A_{Triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$$

Basicamente, teríamos que a área abaixo da reta sendo 6. Porém qual a importância disso? Vejam que em derivadas buscamos saber a taxa de variação de uma função qualquer conhecida, porém imagine o cenário onde temos a taxa de variação, porém não temos a função original, que será conhecida como função Primitiva, logo de que forma iriamos inverter o valor da derivada no ponto, para o valor da função?

Vamos ver o seguinte caso de derivada:

$$f'(x) = 2x$$

Sabemos a função que originou a mesma, porém vejamos o gráfico criado pela mesma,



O gráfico é parecido com a figura vista acima de um triângulo, vejamos qual o valor da área abaixo da reta no intervalo x: [0; 2]:

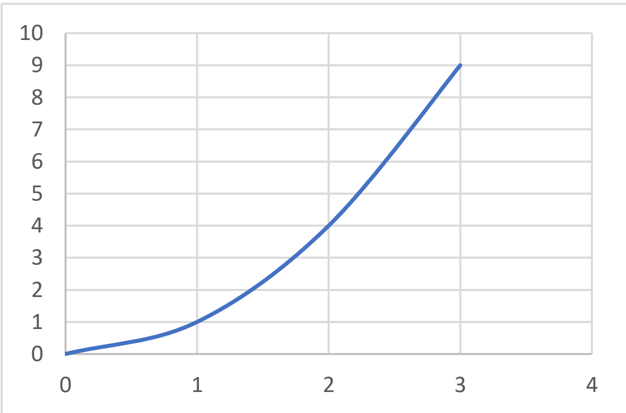
$$A_{Triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$

E se fosse no intervalo x: [0; 3]?

$$A_{Triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

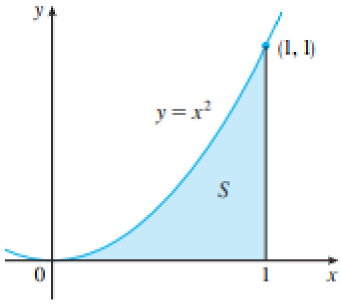
Agora vejamos o gráfico da função que pode ter gerado tal derivada:

$$f(x) = x^2 \therefore f'(x) = 2x$$

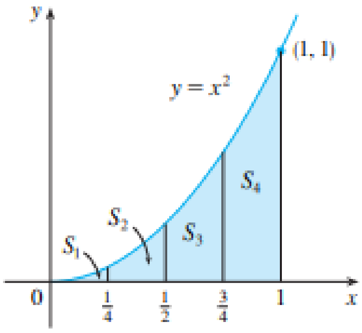


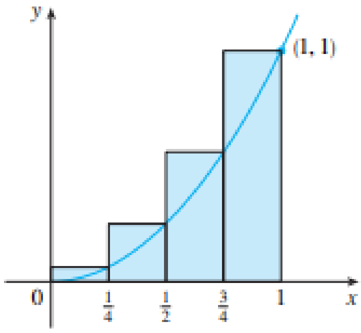
Observem que as áreas obtidas pelo gráfico da derivada dado o intervalo resultou no valor da função no ponto.

Porém nem toda função a qual será integrada tem o mesmo comportamento, ou seja, possui uma figura geométrica a qual temos o conhecimento e conseguiremos calcular a área de forma simples, como por exemplo, ao invés de queremos integrar a função $2x$ queremos integrar a função x^2 a qual é a curva vista acima, a figura já não tem um formato triangular, ou seja, não conseguiríamos obter o valor da área de uma forma tradicional;

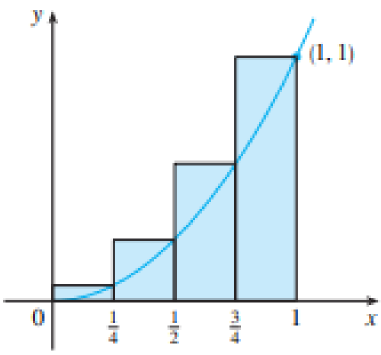


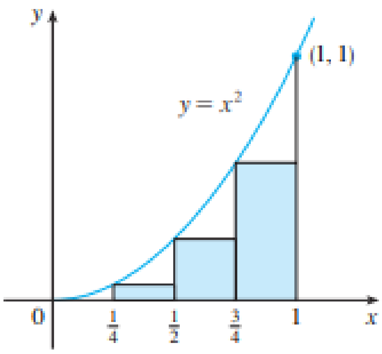
Logo precisamos buscar um método a qual nos permita calcular tal área, para isso utilizaremos de algo parecido ao que foi feito em derivadas pela definição, onde criávamos inúmeras retas tangentes entre dois pontos a qual a distância entre os mesmos era quase nula. Só que com as integrais usaremos os retângulos, veja a seguir como seria utilizado:



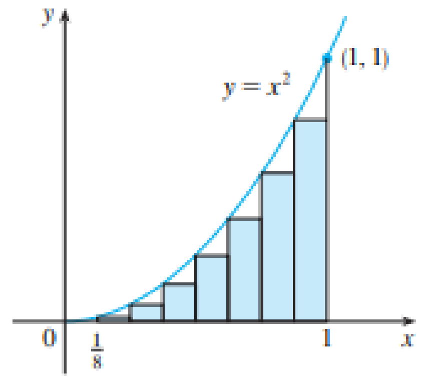


Vejam que se dividimos a curva em pequenos partes, podemos colocar um retângulo a qual dentro do mesmo se encontra a área que buscamos, porém em contrapartida acaba acrescentando um valor a mais dado a parte do retângulo que ultrapassa a linha da curva, como visto nas figuras acima. E se víssemos os retângulos baseando-se nas extremidades, direita e esquerda respectivamente?

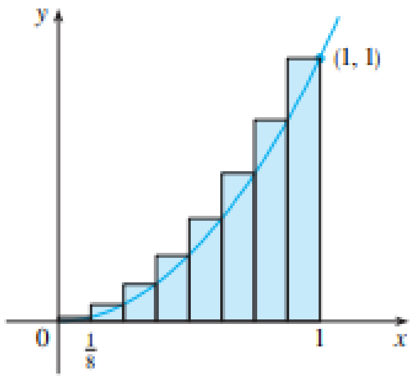




Vejam que as extremidades se complementam entre si, e se aumentássemos a quantidade de retângulos, ou seja, dividimos a área dessa curva em mais partes?

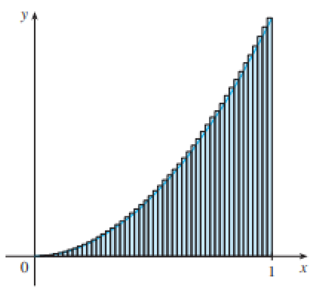


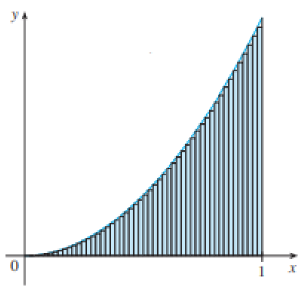
(a) Usando as extremidades esquerdas



(b) Usando as extremidades direitas

Percebam que mesmo tendo partes que ultrapassam a curva, os retângulos em si estão conseguindo se adequar a figura, e se parecem se convergir ao valor que é esperado, e se continuássemos a utilizar de mais retângulos? Ao ponto que o tamanho da base do mesmo seja tão próximo a zero? Tal que teríamos um limite do somatório das bases, onde:





$$n: \{quantidade\ de\ retângulos\}$$

$$\Delta x: \{variação\ no\ valor\ de\ x\ ou\ base\ do\ retângulo\} = \frac{x_{final} - x_{inicial}}{n}$$

$$f(x_i): \{valor\ da\ função\ no\ ponto\ x\ ou\ altura\ do\ retângulo\ i\}$$

$$A_{figura} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i) \quad (conhecida\ como\ Soma\ de\ Riemann)$$

Percebam que quantos mais retângulos, a Δx ficará mais próxima de zero, por exemplo, queremos a área dessa curva no intervalo x: $[0; 1]$ utilizando mil retângulos ($n = 1000$):

$$\Delta x = \frac{1-0}{1000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

$$A_{figura} = \lim_{n \to 1000} \sum_{i=1}^{1000} 0{,}001 \cdot f(x_i)$$

Porém fazer um cálculo desses ondes ocorre o somatório de dezenas, centenas ou milhares de elementos não é prático, com isso utilizaremos da ideia vista no começo, a qual tentamos encontrar uma função a qual ao se derivar obtemos a função a qual queremos calcular a área, ou seja, a integral da função.

$$F(x) = \int f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i)$$

Onde $F(x)$ é $a\ função\ Primitiva$, e $f(x)$ é $a\ derivada\ dessa\ função$, ou seja:

$$F'(x) = f(x) \therefore F(x) = \int F'(x)dx$$

Por exemplo, lembremos a função mais básica que vimos na derivação e no exemplo:

$$f(x) = x^2 \therefore f'(x) = 2x$$

Nesse caso quando fazemos a integral da derivada, conhecemos a primitiva

$$f(x) = \int 2x\ dx = x^2 + C$$

A partir disso uma pergunta deve ter surgido, o do por que ter um C somado junto com o x^2, a razão por trás disso é simples vejam, que a derivada de $x^2 + C$ independentemente do valor de C, será $2x$, ou seja, temos uma família de funções que resultam nesse valor baseado apenas na constante:

$$f_1(x) = x^2 + 1 \therefore f'(x) = 2x + 0 = 2x$$

$$f_2(x) = x^2 + 10 \therefore f'(x) = 2x + 0 = 2x$$

$$f_3(x) = x^2 + 50 \therefore f'(x) = 2x + 0 = 2x$$

$$\vdots$$

Obs.: Toda vez que ocorre uma integração ***indefinida***, é necessário colocar uma constante, pois quando derivamos uma Constante isolada, ela sempre da 0 como visto acima, logo quando integramos uma derivada é criada uma família de funções dado a existência dessa constante que pode ser qualquer valor entre $-\infty\ e + \infty$;