RESUMO DE FUNDAMENTOS DE CÁLCULO I: INTEGRAIS

INTEGRAÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Da mesma forma que vemos fazendo, para integrar uma função trigonométrica básica como $sen(x)$ ou $\cos(x)$, buscamos alguma função conhecida que a derivada seja tal, e como vimos em derivação temos:

$$f(x) = sen(x) \therefore f'(x) = \cos(x) \therefore f''(x) = -sen(x) \therefore f'''(x) = -\cos(x)$$

$$g(x) = \cos(x) \therefore g'(x) = -sen(x) \therefore g''(x) = -\cos(x) \therefore g'''(x) = sen(x)$$

Logo, se queremos integrar $\int sen(x)dx$ basta lembrar as funções trigonométricas a serem derivadas formam um ciclo, por isso sabemos que $\int sen(x)dx = -\cos(x) + C$ e a $\int cos(x)dx = \text{sen}(x) + C$, sabendo derivar esses casos simples de $sen(x)$ e $\cos(x)$, agora caso fossemos tentar integrar a seguinte função:

$$\int sen^2(x)\,dx$$

Tínhamos conseguido integrar a função $f(x) = sen(x)$ a qual a primitiva era

$$F(x) = -\cos(x) + C$$

Vemos que não conseguiríamos integrar a função $f(x) = sen^2(x)$ pelo método de substituição:

$$u = sen(x) \therefore du = \cos(x)\,dx$$

$$\int u \cdot dx \;\; (não\ há\ como\ transformar\ dx\ em\ du, dado\ que\ falta \cos(x))$$

O método de integração por partes transformaria essa integral em algo gigante, dado pelo ***L.I.A.T.E.*** as funções trigonométricas são uma das que tem menos prioridade na hora de derivação.

Logo, tendo em conhecimento que aplicar qualquer um dos métodos de integração não ajudaria no formato atual da função, faz-se necessário manipular a mesma, vejamos algumas relações trigonométricas:

$$sen(a+b) = sen(a) \cdot \cos(b) + sen(b) \cdot \cos(a) \therefore sen(2x) = 2sen(x) \cdot \cos(x)$$

$$cos(a+b) = cos(a) \cdot \cos(b) - sen(a) \cdot \text{sen}(b) \therefore cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$$

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \leftrightarrow sen^2(x) = 1 - cos^2(x) \leftrightarrow cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$$

A partir dessas conseguimos obter alguns formatos interessante, a qual é possível diminuir o grau da função trigonométrica vejam, para o caso de $cos^2(x)$ e $sen^2(x)$, respectivamente:

$$cos(2x) = \boldsymbol{cos^2(x)} - sen^2(x) = \boldsymbol{cos^2(x)} - \left(1 - cos^2(x)\right) = 2\boldsymbol{cos^2(x)} - 1$$

$$\boldsymbol{cos^2(x)} = \frac{cos(2x) + 1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{cos(2x)}{2}$$

$$cos(2x) = cos^2(x) - \boldsymbol{sen^2(x)} = \left(1 - sen^2(x)\right) - \boldsymbol{sen^2(x)} = 1 - 2\boldsymbol{sen^2(x)}$$

$$\boldsymbol{sen^2(x)} = \frac{1 - cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{cos(2x)}{2}$$

Logo, usando uma das manipulações acima conseguiremos lidar com o caso visto:

$$sen^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{cos(2x)}{2}$$

$$\int sen^2(x)\,dx = \int \frac{1}{2} - \frac{cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{cos(2x)}{2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{2}dx - \int \frac{cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{sen(2x)}{2} + C$$

$$\boldsymbol{\int sen^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{sen(2x)}{4} + C}$$

E se fosse:

$$\int sen^4(x)\,dx$$

Vejam que podemos separar $sen^4(x) = (sen^2(x))^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{cos(2x)}{2}\right)^2$, e assim resolver a integral, e para $cos^4(x) = (cos^2(x))^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{cos(2x)}{2}\right)^2$. Agora vejamos o seguinte caso, onde a função trigonométrica está elevada a um grau *ímpar*:

$$\int sen^3(x)\,dx$$

No caso passado vimos como lidar com funções elevadas a ordem *pares*, porém nesse caso temos uma função de grau *ímpar*. A solução para isso é fazer outra manipulação, para facilitar vejamos a integral da seguinte forma:

$$\int sen(x) \cdot sen^2(x)\,dx$$

Sabemos que a derivada de cos (x) é $-sen(x)$, e também que $sen^2(x) = 1 - cos^2(x)$, fazendo essas substituições teremos:

$$u = cos(x) \therefore du = -\text{sen}(x)\, dx \leftrightarrow -du = sen(x)dx$$

$$\int sen(x) \cdot (1 - \cos^2(x))\, dx = \int -(1 - u^2)\, du = \int -1 + u^2\, du$$

Agora chegamos a uma função que sabemos como integrar de forma fácil:

$$\int -1 + u^2\, du = -u + \frac{u^3}{3} + C$$

$$\int \boldsymbol{sen^3(x)\, dx} = \mathbf{-cos}\ (\boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{cos^3(x)}}{\mathbf{3}} + \boldsymbol{C}$$

Para concluir vejamos agora um caso a qual temos o produto entre duas funções trigonométricas:

$$\int sen^2(x) \cdot cos^3(x)\, dx$$

A ideia para resolver esse problema é a mesma vista no caso anterior:

$$\int sen^2(x) \cdot cos^2(x) \cdot \cos\,(x)\, dx$$

$$u = sen(x) \therefore du = \cos(x) \qquad (elemento\ extra\ ao\ separar\ da\ função\ com\ grau\ ímpar)$$

$$cos^2(x) = 1 - sen^2(x) \quad (Deixando\ a\ função\ apenas\ em\ relação\ a\ seno)$$

$$\int sen^2(x) \cdot (1 - sen^2(x)) \cdot \cos\,(x)\, dx = \int u^2 \cdot (1 - u^2)\text{du} = \int u^2 - u^4\text{du}$$

E da mesma forma, chegamos em uma função de fácil aplicação:

$$\int u^2 - u^4\text{du} = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

$$\int \boldsymbol{sen^2(x) \cdot cos^3(x)\, dx} = \frac{\boldsymbol{sen^3(x)}}{\mathbf{3}} - \frac{\boldsymbol{sen^5(x)}}{\mathbf{5}} + \boldsymbol{C}$$

Logo, vimos que para o cálculo da integral trigonométrica, temos 2 casos, a qual dependendo do grau das funções, a forma de integrar pode mudar:

a) ***<u>Grau de ordem ímpar:</u>***

$$\int sen^m(x) \cdot cos^n(x)dx$$

Onde $m = 2k + 1$, tal que podemos dividir a função em:

$$\int sen^1(x) \cdot sen^{2k}(x) \cdot cos^n(x)dx$$

E então utilizamos a relação $sen^2(x) = 1 - cos^2(x)$, onde $sen^{2k}(x) = (sen^2(x))^k$:

$$\int sen^1(x) \cdot (1 - cos^2(x))^k \cdot cos^n(x)dx$$

E por fim aplicamos a substituição $u = \cos(x)$, e quando temos a função $\cos(x)$ com o grau de elevação *ímpar*:

$$\int sen^n(x) \cdot cos^m(x)dx$$

A ideia segue a mesma:

$$cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$$

$$\int cos^1(x) \cdot (1 - sen^2(x))^k \cdot sen^n(x)dx$$

E a substituição feita é $u = sen(x)$;

b) ***Grau de ordem par:***

Para resolver as integrais de funções trigonométricas, onde só tem função elevada a um grau de ordem *par*

$$\int sen^n(x) \cdot cos^n(x)dx\,; \quad (onde\ n = 2k)$$

Basta utilizar as seguintes relações:

$$\boldsymbol{sen^2(x)} = \frac{1}{2} - \frac{cos(2x)}{2} \therefore \boldsymbol{cos^2(x)} = \frac{1}{2} + \frac{cos(2x)}{2}$$

$$\boldsymbol{sen^{2k}(x)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{cos(2x)}{2}\right)^k \therefore \boldsymbol{cos^{2k}(x)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{cos(2x)}{2}\right)^k$$