Lista 12

Curso de Ciências Atuariais
Disciplina Probabilidade 1- Professora Cristina
26/09/2022 - Exercícios distribuição bidimensional

1) Um aluno faz um teste de múltipla escolha com 4 questões do tipo Verdadeiro-Falso. Suponha que o aluno esteja "chutando" todas as questões, uma vez que ele não estudou a matéria da prova. Defina as seguintes variáveis aleatórias:
X_1 = número de acertos entre as duas primeiras questões da prova
Y_1 = número de acertos entre as duas últimas questões da prova
X_2 = número de acertos entre as três primeiras questões da prova
Y_2 = número de acertos entre as três últimas questões da prova
a) Construa uma tabela com o espaço amostral associado a este experimento, listando todas as possibilidades de acerto e os valores de X_1, Y_1, X_2, Y_2 e suas probabilidades.

	X_1	X_1	X_2	X_2
(E, E, E, E)	0	0	0	0
(E, E, E, C)	0	1	0	1
(E, E, C, E)	0	1	1	1
(E, C, E, E)	1	0	1	1
(C, E, E, E)	1	0	1	0
(E, E, C, C)	0	2	1	2
(E, C, E, C)	1	1	1	1
(C, E, E, C)	1	1	1	1
(C, E, C, E)	1	1	2	1
(C, C, E, E)	2	0	2	1
(E, C, C, E)	1	1	2	2
(E, C, C, C)	1	2	2	3
(C, E, C, C)	1	2	2	2
(C, C, E, C)	2	1	2	2
(C, C, C, E)	2	1	3	2
(C, C, C, C)	2	2	3	3

$$S_{X_1} = \begin{cases} (E, E, \_, \_) = 0 \\ (E, C, \_, \_); (C, E, \_, \_) = 1 \\ (C, C, \_, \_) = 2 \end{cases}$$

$$S_{Y_1} = \begin{cases} (\_, \_, E, E) = 0 \\ (\_, \_, E, C); (\_, \_, C, E) = 1 \\ (\_, \_, C, C) = 2 \end{cases}$$

$$S_{X_2} = \begin{cases} (E, E, E, \_) = 0 \\ (E, E, C, \_); (E, C, E, \_); (C, E, E, \_) = 1 \\ (E, C, C, \_); (C, E, C, \_); (C, C, E, \_) = 2 \\ (C, C, C, \_) = 3 \end{cases}$$

$$S_{Y_2} = \begin{cases} (\_, E, E, E) = 0 \\ (\_, E, E, C); (\_, E, C, E); (\_, C, E, E) = 1 \\ (\_, E, C, C); (\_, C, E, C); (\_, C, C, E) = 2 \\ (\_, C, C, C) = 3 \end{cases}$$

Variável	Probabilidade
X_1	$\mathbb{P}(X_1{=}0) = \binom{2}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
	$\mathbb{P}(X_1{=}1) = \binom{2}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2}{4}$
	$\mathbb{P}(X_1{=}2) = \binom{2}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$
Y_1	$\mathbb{P}(Y_1{=}0) = \binom{2}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
	$\mathbb{P}(Y_1{=}1) = \binom{2}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2}{4}$
	$\mathbb{P}(Y_1{=}2) = \binom{2}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$

Variável	Probabilidade
X_2	$\mathbb{P}(X_2{=}0) = \binom{3}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
	$\mathbb{P}(X_2{=}1) = \binom{3}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$
	$\mathbb{P}(X_2{=}2) = \binom{3}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$
	$\mathbb{P}(X_2{=}3) = \binom{3}{3} * \left(\frac{1}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$
Y_2	$\mathbb{P}(Y_2{=}0) = \binom{3}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
	$\mathbb{P}(Y_2{=}1) = \binom{3}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$
	$\mathbb{P}(Y_2{=}2) = \binom{3}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$
	$\mathbb{P}(Y_2{=}3) = \binom{3}{3} * \left(\frac{1}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

b) Construa a função de distribuição conjunta de (X_1, Y_1) com as respectivas marginais.

X_1	Y_1			$\mathbb{P}(X_1 = x)$
	0	1	2	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}(Y_1 = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

c) Construa a função de distribuição conjunta de (X_2, Y_2) com as respectivas marginais.

X_2	Y_2				$\mathbb{P}(X_2 = x)$
	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
$\mathbb{P}(Y_2 = y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

d) Verifique se X1 e Y1 são independentes

$$\mathrm{E}(X_1) = 0 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{2}{4} + 2 * \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\mathrm{E}(Y_1) = 0 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{2}{4} + 2 * \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$S_{X_1Y_1} = \begin{cases} (0,2); (0,1); (0,0); (1,0); (2,0) = 0 \\ (1,1) = 1 \\ (2,1); (1,2) = 2 \\ (2,2) = 4 \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X_1Y_1) = 0 * \left(2 * \frac{1}{16} + 3 * \frac{1}{16}\right) + 1 * \frac{4}{16} + 2 * 2 * \frac{2}{16} + 4 * \frac{1}{16}$$
$$\mathrm{E}(X_1Y_1) = 0 + \frac{4}{16} + \frac{8}{16} + \frac{4}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

$$\mathrm{E}(X_1Y_1) = \mathrm{E}(X_1) * \mathrm{E}(Y_1)$$
$$1 = 1 * 1$$

X_1 e Y_1 são independentes

e) Verifique se X2 e Y2 são independentes.

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_2 = \mathrm{x}) * \mathbb{P}(\mathrm{Y}_2 = \mathrm{y}) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_2 = \mathrm{x} \cap \mathrm{Y}_2 = \mathrm{y})$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_2 = 3) * \mathbb{P}(\mathrm{Y}_2 = 3) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_2 = 3 \cap \mathrm{Y}_2 = 3)$$
$$\frac{1}{8} * \frac{1}{8} \neq 0$$

X_2 e Y_2 não são independentes

2) Uma moeda honesta é lançada 4 vezes. Seja X o número de caras nos 2 primeiros lançamentos e seja Y o número de caras nos 3 últimos lançamentos.
a) Liste todos os elementos do espaço amostral deste experimento, especificando os valores de X e Y.

	X	Y
(c, c, c, c)	0	0
(c, c, c, k)	0	0
(c, c, k, c)	0	1
(c, k, c, c)	1	1
(k, c, c, c)	1	1
(c, c, k, k)	0	1
(c, k, c, k)	1	1
(k, c, c, k)	1	1
(c, k, k, c)	1	2
(k, k, c, c)	2	2
(k, c, k, c)	1	2
(c, k, k, k)	1	2
(k, c, k, k)	1	2
(k, k, c, k)	2	2
(k, k, k, c)	2	3
(k, k, k, k)	2	3

$$S_X = \begin{cases} (c, c, \_, \_) = 0 \\ (k, c, \_, \_); (c, k, \_, \_) = 1 \\ (k, k, \_, \_) = 2 \end{cases}$$

$$S_Y = \begin{cases} (c, c, c, \_) = 0 \\ (k, c, c, \_); (c, k, c, \_)(c, c, k, \_) = 1 \\ (k, k, c, \_); (k, c, k, \_); (c, k, k, \_) = 2 \\ (k, k, k, \_) = 3 \end{cases}$$

b) Construa a função de distribuição conjunta de X e Y.

X	Y				$\mathbb{P}$(X=x)
	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{4}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}$(Y=y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

c) Encontre a distribuição condicional de X dado Y=3

X	$\mathbb{P}$(X=x | Y=3)
0	$\frac{0}{\frac{1}{8}} = 0$
1	$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$
2	$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

d) Calcule E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)

$$\mathrm{E(X)} = 0 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{2}{4} + 2 * \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\mathrm{E(X^2)} = 0^2 * \frac{1}{4} + 1^2 * \frac{2}{4} + 2^2 * \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$$

$$\mathrm{E(Y)} = 0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 2 * \frac{3}{8} + 3 * \frac{1}{8} = \frac{12}{8}$$

$$\mathrm{E(Y^2)} = 0^2 * \frac{1}{8} + 1^2 * \frac{3}{8} + 2^2 * \frac{3}{8} + 3^2 * \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$\mathrm{V(X)} = \mathrm{E(X^2)} \text{ - } \mathrm{E^2(X)} = \frac{6}{4} - 1^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{V(Y)} = \mathrm{E(Y^2)} \text{ - } \mathrm{E^2(Y)} = 3 - \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

e) Verifique se X e Y são independentes

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}) * \mathbb{P}(\mathrm{Y} = \mathrm{y}) = \mathbb{P}(\mathrm{X_2} = \mathrm{x} \cap \mathrm{Y_2} = \mathrm{x})$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) * \mathbb{P}(\mathrm{Y} = 3) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0 \cap \mathrm{Y} = 3)$$
$$\frac{1}{8} * \frac{1}{4} \neq 0 \text{ X e Y não são independentes}$$

3) Em uma clínica médica foram coletados dados em 150 pacientes, referentes ao último ano. Observou-se a ocorrência de infecções urinárias (U) e o número de parceiros sexuais (N). Os valores em % encontram-se a seguir:

U	Número de Parceiros			Total
	0	1	2+	
Sim	10	20	45	75
Não	10	10	5	25
Total	20	30	50	100

a) Encontre todas as distribuições condicionais.

U	$\mathbb{P}$(U=u | N=0)
Sim	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{20}{100}} = \dfrac{1}{2}$
Não	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{20}{100}} = \dfrac{1}{2}$

U	$\mathbb{P}$(U=u | N=1)
Sim	$\dfrac{\frac{20}{100}}{\frac{30}{100}} = \dfrac{2}{3}$
Não	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{30}{100}} = \dfrac{1}{3}$

U	$\mathbb{P}$(U=u | N=2+)
Sim	$\dfrac{\frac{45}{100}}{\frac{50}{100}} = \dfrac{9}{10}$
Não	$\dfrac{\frac{5}{100}}{\frac{50}{100}} = \dfrac{1}{10}$

N	$\mathbb{P}$(N=n | U=Sim)
0	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{75}{100}} = \dfrac{10}{75}$
1	$\dfrac{\frac{20}{100}}{\frac{75}{100}} = \dfrac{20}{75}$
2+	$\dfrac{\frac{45}{100}}{\frac{75}{100}} = \dfrac{45}{75}$

N	$\mathbb{P}$(N=n | U=Não)
0	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \dfrac{2}{5}$
1	$\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \dfrac{2}{5}$
2+	$\dfrac{\frac{5}{100}}{\frac{25}{100}} = \dfrac{1}{5}$

b) Verifique se U e N são independentes

$$\mathbb{P}(\mathrm{U} = \mathrm{u}) * \mathbb{P}(\mathrm{N} = \mathrm{n}) = \mathbb{P}(\mathrm{U} = \mathrm{u} \cap \mathrm{N} = \mathrm{n})$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{U} = \mathrm{Sim}) * \mathbb{P}(\mathrm{N} = 0) = \mathbb{P}(\mathrm{U} = \mathrm{Sim} \cap \mathrm{N} = 0)$$
$$\frac{20}{100} * \frac{75}{100} \neq \frac{10}{100}$$

U e N não são independentes