Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Diretorio de Apoio Ácadêmico

November 15, 2024

1 Conceito - Planos Tangentes

Em Fundamentos de Cálculo I, fora visto o conceito de uma reta tangente no ponto, que representava a taxa de variação da variável em um ponto especifico da função. Porém agora em múltiplas variáveis, não estamos lidando com simples retas, e sim uma estrutura, ou como podemos chamar, superfícies. Vejam abaixo a diferença entre uma função quadrática de uma função dependente de apenas x, e uma função quadrática dependente de x e y:

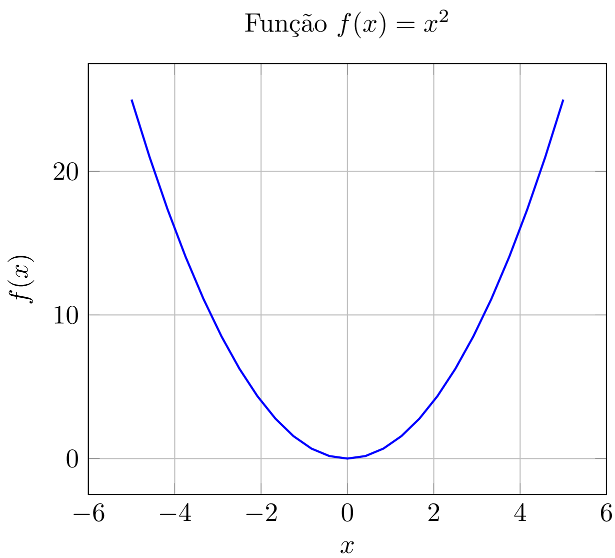

Figure 1: Gráfico da função $f(x) = x^2$

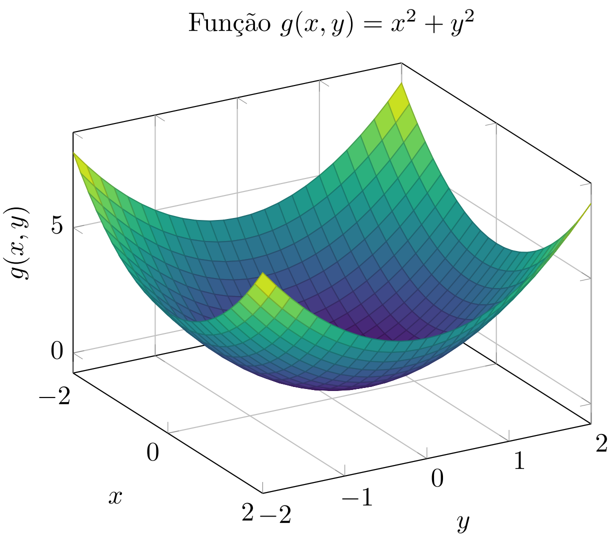

Figure 2: Gráfico da função $g(x, y) = x^2 + y^2$

E o plano tangente nada mais seria, que a junção de duas retas tangentes em uma superfície, para demonstrar essa diferença, observem a imagem abaixo:

Função $f(x) = x^2$ com reta tangente

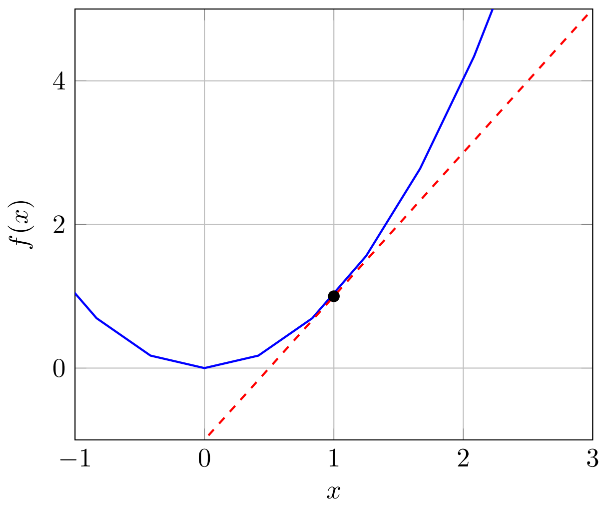

Figure 3: Gráfico da função $f(x) = x^2$ com reta tangente em $x = 1$

Função $g(x, y) = x^2 + y^2$ com plano tangente

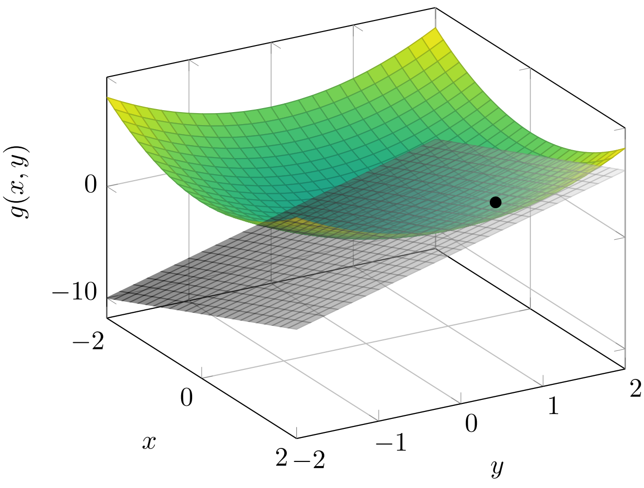

Figure 4: Gráfico da função $g(x, y) = x^2 + y^2$ com plano tangente em $(1, 1)$

Percebam, que ambas funções se encontram em pontos parecidos, tal como comportamentos, por exemplo em $f(x) = x^2$ no ponto $x = 1$, a reta está crescente, tal como em $g(x, y) = x^2 + y^2$ no ponto $x = 1, y = 1$, aquilo que oferece esse visual abaixo da superfície cinza, é a junção das duas retas tangentes em relação a x e a y. Stewart oferece uma figura a qual representa bem como funciona o plano tangente:

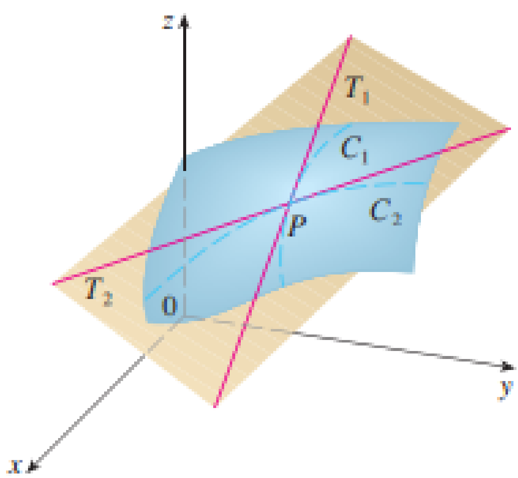

FIGURA 1
O plano tangente contém as retas tangentes T_1 e T_2.

Figure 5: Figura 1 do capítulo 14.4 do livro Cálculo Vólume 2, 7 ed. por James Stewart

E a fórmula que representaria tal figura seria:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0)$$

Podemos também visualizar $f(x,y)$ e $f(x_0,y_0)$ como z e z_0, respectivamente, obtendo:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) * (y - y_0)$$

Podemos compreender tal, como a partir de um ponto (x_0, y_0, z_0) qualquer, pegando as taxas de variação a partir desse ponto ($f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$) é possível obter a variação na função z nesse mesmo plano a partir de uma variação $(x-x_0)$ e $(y-y_0)$, lembrando que estamos saindo de um ponto z_0, logo subtraimos desse valor.

2 Conceito - Aproximações Lineares

Em análise marginal, visto anteriormente quando tratavamos de funções de uma única variável, podiamos fazer aproximações marginais de uma função ao abordar que a variação para uma unidade adicional seria aproximadamente igual a taxa de variação no ponto:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) * (x - x_0)$$

A qual oferecia uma valor próximo do exato ao pegar pontos de x próximos a x_0, e o erro dessa aproximação aumentaria conforme a distância do ponto x para o ponto x_0. Vamos utilizar de exemplo a função $f(x) = x^2$ nos seguintes pontos $x = 3, 5, 10$, considerando $x_0 = 2$.

$$f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 \approx f'(x) = 2 * x * (x - x_0)$$

$$f(3) = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \approx f'(3) = 2 * 3 * (3 - 2) = 6$$
$$f(5) = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21 \approx f'(5) = 2 * 5 * (5 - 2) = 30$$
$$f(10) = 10^2 - 2^2 = 96 \approx f'(10) = 2 * 10 * (10 - 2) = 160$$

Observe que conforme aumenta a distância entre os pontos, maior é a diferença entre o valor exato e a aproximação. O mesmo acontecerá no plano tangente:

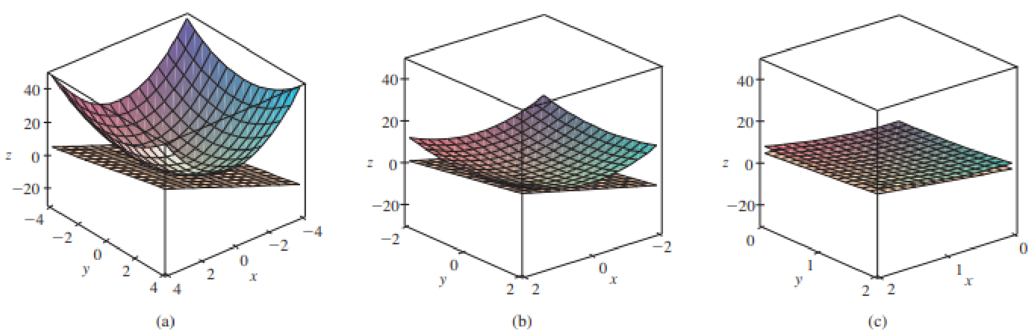

FIGURA 2 O paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir com o plano tangente quando damos *zoom* em torno de (1, 1, 3).

Conforme a distância do ponto aumenta, maior será a diferença do plano para a superfície da função, como visto na primeira imagem da figura 2, porém quanto menor for a diferença entre os pontos mais próximo é a superfície ao plano, podendo assim ser feito aproximações em torno desse ponto. Para fechar o pensamento, utilizaremos como exemplo a função $f(x,y) = x^2 + y^2$, a qual sabemos que $f_x(x,y) = 2 * x$ e $f_y(x,y) = 2 * y$, logo a fórmula do plano seria:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) * (y - y_0) = (2 * x_0) * (x - x_0) + (2 * y_0) * (y - y_0)$$

A partir da fórmula calculemos as seguintes aproximações dado o ponto inicial $(x_0 = 2, y_0 = 2, z_0 = 8)$:

A) $(2.1, 2.3)$;
B) $(1.8, 1.6)$;
C) $(4.5, 5.2)$;

Como visto anteriormente, sabendo que nossa função é $f(x, y) = x^2+y^2$, nossa função de aproximação será:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = z - z_0 = 2x_0 * (x - x_0) + 2y_0 * (y - y_0)$$

Como queremos a aproximação de z, iremos passar z_0 para o outro lado somando:

$$z \approx 2x_0 * (x - x_0) + 2y_0 * (y - y_0) + z_0$$

Substituindo as informações que já conhecemos em relação a x_0, y_0 e z_0:

$$z \approx 2 * 2 * (x - 2) + 2 * 2 * (y - 2) + 8 = 4 * (x - 2) + 4 * (y - 2) + 8$$

Agora podemos fazer substituições em x e y, utilizando os pontos dados:
A) $(2.1, 2.3)$;

$$z \approx 4 * (2.1 - 2) + 4 * (2.3 - 2) + 8 = 9,6$$

Se fossemos pela forma *exata*, que seria usar a própria função, teriamos:

$$f(2.1, 2.3) = (2.1)^2 + (2.3)^2 = 9,7$$

Percebam que o valor é bem próximo, vamos observar os próximos pontos agora.
B) $(1.8, 1.6)$;

$$z \approx 4 * (1.8 - 2) + 4 * (1.6 - 2) + 8 = 5,6$$
$$f(1.8, 1.6) = (1.8)^2 + (1.6)^2 = 5,8$$

C) $(4.5, 5.2)$;

$$z \approx 4 * (4.5 - 2) + 4 * (5.2 - 2) + 8 = 30,8$$
$$f(4.5, 5.2) = (4.5)^2 + (5.2)^2 = 47,29$$

Vejam como os pontos *A)* e *B)* possuem uma boa aproximação do valor exato, com erro na casa dos décimais, já no ponto *C)* a diferença da aproximação ao valor exato é notável. Para corregir isso, podemos fazer uma nova aproximação partindo de outro ponto inicial ($x_0 = 4.7, y_0 = 5, z_0 = 47.09$):
C) $(4.5, 5.2)$;

$$z \approx 2x_0*(x-x_0)+2y_0*(y-y_0)+z_0 = 2*4.7*(x-4.7)+2*5*(y-5)+47,09 = 9,4*(x-4.7)+10*(y-5)+47.09$$
$$z \approx 9,4 * (4.5 - 4.7) + 10 * (5.2 - 5) + 47.09 = 47,21$$
$$f(4.5, 5.2) = (4.5)^2 + (5.2)^2 = 47,29$$

Após a mudança do ponto inicial a qual iriamos realizar a aproximação, conseguimos obter uma ótima aproximação ao valor da função no ponto *C)*. Um ponto que pode parecer confuso é a diferença entre Linearização e a Aproximação Linear, basta perceber que enquanto a aproximação é uma aproximação, ou seja utilizaremos do $\approx$ nos resultados, na linearização estaremos passando uma linha, uma função linear na figura tal que utilizaremos do $=$. e ao ínves de utilizar o z como representante da função, na Linearização utilizaremos $L(x, y)$, abaixo é mostrado a diferença:

Linearização: $L(x, y) = f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0) + f(x_0, y_0)$
Aproximação Linear: $z \approx f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0) + z_0$

Com isso concluimos com essa parte, tenha mais um pouco de determinação, e nos vemos novamente no próximo assunto.