Combinações e Independência Lineares, e a Base de um Espaço Vetorial

Diretório de Apoio Acadêmico

1 Base de um espaço vetorial

Tendo em conhecimento que por meio de alguns vetores de um *Espaço Vetorial* podemos criar uma combinação finita de vetores por meio de combinações lineares. Quando por meio dessas conseguimos criar um conjunto **V** formado por combinações lineares independentes de vetores, teremos em si uma base. Por definição:

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\} \ \textit{é LI};$$
$$(v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbf{V};$$

Um termo importante sobre bases é a **base canônica**, a qual é representada pela matriz $\mathbf{I}_{n,p}$ (identidade). Tal que a base canônica para um espaço vetorial das seguintes dimensões seriam:

$$V = \mathbf{R}^2 : [(1,0),(0,1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \mathbf{R}^3 : [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E assim segue para cada dimensão. Para compreender melhor o conceito de base, façamos alguns exemplos:

1.0.1 Exemplo 1

Verifique se $[(0,2,1),(1,0,0),(3,2,0)]$ é uma base de $\mathbf{R}^3$:

$$I.\ Verificamos\ se\ cada\ vetor\ são\ LI;$$
$$a_1 * (0,2,1) + a_2 * (1,0,0) + a_3 * (3,2,0) = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} a_2 + 3 * a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 2a_3 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$a_2 = -3a_3 = 0$$
$$a_1 = -a_3 = 0$$
$$a_1 = 0$$

É observável que os vetores são linearmente independentes entre si, logo indo para o próximo passo.

II. Devemos verificar se é possível obter qualquer outro vetor;

$$\mathbf{V}(x, y, z) = a_1(0, 2, 1) + a_2(1, 0, 0) + a_3(3, 2, 0)$$

$$a_2 + 3 * a_3 = x$$
$$2a_1 + 2a_3 = y$$
$$a_1 = z$$

$$a_2 = x - 3 * \frac{y - 2z}{2}$$
$$a_3 = \frac{y - 2z}{2}$$
$$a_1 = z$$

$$a_2 = \frac{2x - 3y - 6z}{2}$$
$$a_3 = \frac{y - 2z}{2}$$
$$a_1 = z$$

$$\mathbf{V}(x, y, z) = z * (0, 2, 1) + \frac{2x - 3y - 6z}{2}(1, 0, 0) + \frac{y - 2z}{2}(3, 2, 0)$$

Logo, também é possível obter qualquer vetor (x, y, z) por meio dessa base. Logo, podemos dizer que sim $[(0, 2, 1), (1, 0, 0), (3, 2, 0)]$ é uma base de $\mathbf{R}^3$.

1.0.2 Exemplo 2

Verifique se $[(2, 4), (3, 1)]$ é uma base para o vetor $(12, 10)$.

$$\mathbf{V}(12, 10) = a_1(2, 4) + a_2(3, 1)$$

$$2a_1 + 3a_2 = 12$$
$$4a_1 + a_2 = 10$$

Multiplicando a primeira equação por *2*:

$$4a_1 + 6a_2 = 24$$
$$4a_1 + a_2 = 10$$

E subtraindo as equações:

$$(4a_1 - 4a_1) + (6a_2 - a_2) = (24 - 10)$$
$$5a_2 = 14 \therefore a_2 = \frac{14}{5}$$

Descoberto a_2, escolhemos uma das equações e substituimos:

$$4a_1 + a_2 = 10 \therefore 4a_1 + \frac{14}{5} = 10 \therefore a_1 = \frac{36}{4}$$

Logo, teríamos que sim $[(2,4),(3,1)]$ é uma base para o vetor $(12,10)$.

$$\mathbf{V}(12,10) = \frac{36}{4} * (2,4) + \frac{14}{5} * (3,1)$$

Se aprofundando mais no conceito da *base* de um **Espaço Vetorial**. Podemos denominar a base como β e as constantes das combinações como um vetor em relação a base **v**:

$$Se\ \mathbf{v} = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + v_n$$
$$Para\ uma\ base\ \beta = [v_1, v_2, v_3, ..., v_n]$$
$$Temos\ que\ [\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Um exemplo para a fixação, considere a base abaixo para um coordenada $(8,5)$:

$$\beta = [(4,2),(3,0)]$$

$$(8,5) = a_1(4,2) + a_2(3,0)$$
$$4a_1 + 3a_2 = 8 \therefore a_2 = \frac{8 - 4a_1}{3} \therefore a_2 = \frac{8 - 4 * (2,5)}{3} = -\frac{2}{3}$$
$$2a_1 = 5 \therefore a_1 = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$[(8,5)]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

1.1 Mudança de base

Vimos anteriormente como obter o *vetor das constantes de combinação* dada uma base e um vetor de coornedadas, e pelo mesmo conseguimos realizar uma **mudança entre bases**, ou seja, mudar nossos pontos referenciais.
Considere a base anterior $\beta' = [(4,2),(3,0)]$ e quisessemos ir para uma base canônica $\beta = [(1,0),(0,1)]$. Para realizar essa mudança iremos precisar encontrar uma *matriz* de vetores das constantes combinatórias, de uma base para outra, observe abaixo como se é feito:

$$(1,0) = a_{11}(4,2) + a_{12}(3,0)$$
$$(0,1) = a_{21}(4,2) + a_{22}(3,0)$$

Observe que nossos vetores de coordenadas de interesse são as formadas pela *base canônica*, e que para cada é nesse um vetor de constantes diferentes. Essas constantes formam a matriz de mudança de base:

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

E denotaremos a formula de mudança de base como:

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} * [\mathbf{w}]_{\beta'}$$
$$[(1,0),(0,1)]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} * [(4,2),(3,0)]_{\beta'}$$

Para concluir, vamos descobrir a *matriz de mudança de base*:

I. $(1,0) = a_{11}(4,2) + a_{12}(3,0)$

$$4a_{11} + 3a_{12} = 1 \therefore a_{12} = \frac{1-4a_{11}}{3} = \frac{1}{3}$$

$$2a_{11} = 0 \therefore a_{11} = 0$$

II. $(0,1) = a_{21}(4,2) + a_{22}(3,0)$

$$4a_{21} + 3a_{22} = 0 \therefore a_{22} = -\frac{4a_{21}}{3} \therefore a_{22} = -\frac{2}{3}$$

$$2a_{21} = 1 \therefore a_{21} = \frac{1}{2} = 0,5$$

III. $[I]_{\beta}^{\beta'}$

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Uma das características dessa *matriz de mudança de base* é que são inversíveis, e que o resultado inverter a ordem da mudança, ou seja:

$$[I]_{\beta}^{\beta'}(\beta' \rightarrow \beta)$$
$$([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta} = (\beta \rightarrow \beta')$$

Como exemplo, consideremos as bases anteriores, e sua matriz de mudança de base:

$$\beta' = [(4,2),(3,0)]$$
$$\beta = [(1,0),(0,1)]$$
$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Primeiro, façamos a $([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1}$:

$$[I]_{\beta}^{\beta'} * ([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{3}c = 1 \therefore c = 3$$
$$\frac{1}{3}d = 0 \therefore d = 0$$
$$\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}c = 0 \therefore a = 4$$
$$\frac{1}{2}b - \frac{2}{3}d = 1 \therefore b = 2$$
$$([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Segundamente, façamos agora pelo processo de mudança de base:

$$I.(4,2) = a'_{11}(1,0) + a'_{12}(0,1)$$
$$a'_{11} = 4$$
$$a'_{12} = 2$$

$$II.(3,0) = a'_{21}(1,0) + a'_{22}(0,1)$$
$$a'_{21} = 3$$
$$a'_{22} = 0$$

$$III.[I]^{\beta}_{\beta'}$$

$$[I]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que os resultados são os mesmos, logo a relação se demonstra verdadeira. E com isso terminamos com o tópico atual, e é recomendado a realização de exercícios disponibilizados no livro de Boldrini, Algebra Linear no capítulo 4.8, página 129.