ET660 - Séries Temporais para Atuária - 2020/02

Profa. Francyelle L. Medina

Atividades: Semanas 06 a 08

Shumway and Stoffer(2016)

Capítulo 3 - (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9)

Proposto:

1 - Considere o processo $x_t = \phi x_{t-1} + w_t$, com $|\phi| > 1$ e $w_t \sim N(0, \sigma_w^2)$. Mostre que a função de autocovariância do processo pode ser escrita como:

$$\gamma(h) = \sigma_w^2 \phi^{-2} \frac{\phi^{-h}}{1 - \phi^{-2}}.$$

2 - Seja $y_t = \phi^{-1} y_{t-1} + v_t$, com $v_t \sim N(0, \sigma_w^2 \phi^{-2})$ e $|\phi| > 1$. Obtenha a função de autocovariância do processo e compare com o exercício **1**.

3 - Considere o modelo ARMA(1,1) dado por

$$x_t = \phi x_{t-1} + \theta w_{t-1} + w_t, \text{ em que } w_t \sim RB(0, \sigma_w^2),$$

com $E(x_t) = 0$. Mostre que:

(a) $\gamma_x(0) = \frac{\sigma_w^2}{1-\phi^2}\left[\theta^2 + 2\phi\theta + 1\right]$;

(b) $\gamma_x(1) = \frac{\sigma_w^2}{1-\phi^2}\left[\theta^2\phi + \phi^2\theta + \phi + \theta\right]$;

(c) $\rho_x(1) = \frac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{\theta^2+2\phi\theta+1}$;

Morettin e Toloi(2004)

4 - Verifique se cada um dos itens é estacionário e invertível.

(a) $\tilde{Z}_t - 0,6\tilde{Z}_{t-1} = a_t$;

(b) $\tilde{Z}_t = a_t + 0,8a_{t-1}$;

(c) $\tilde{Z}_t = 0,3\tilde{Z}_{t-1} - 0,6\tilde{Z}_{t-2} + a_t$;

(d) $\tilde{Z}_t - 0,4\tilde{Z}_{t-1} = a_t - 0,3a_{t-1} + 0,8a_{t-2}$;

(e) $\tilde{Z}_t = 1,5\tilde{Z}_{t-1} - 0,75\tilde{Z}_{t-2} + a_t + 0,4$;

(f) $\tilde{Z}_t = 0,3a_{t-1} + 0,6a_{t-2} + a_t$.

5 - Obtenha os três primeiros pesos ψ_j e π_j para cada um dos modelos do exercício **1**.

6 - Prove que um modelo ARMA(1,1) dado por

$$x_t = \phi x_{t-1} + \theta w_{t-1} + w_t, \text{ em que } w_t \sim RB(0, \sigma_w^2),$$

pode ser escrito na forma $x_t = \psi(B) w_t$, em que os pesos $\psi_j = (\phi - \theta)\phi^{j-1}$, $j \geq 1$ e pode ser escrito na forma $\pi(B) x_t = w_t$, em que os pesos $\pi_j = (\phi - \theta)\theta^{j-1}$, $j \geq 1$.

7 - Para cada um dos modelos AR(2), gere 200 observações e compare a função de autocorrelação (f.a.c.) amostral com a f.a.c. teórica:

(a) $\phi_1 = -0.5$, $\phi_2 = 0.3$;

(b) $\phi_1 = 0.5$, $\phi_2 = 0.3$;

(c) $\phi_1 = -1$, $\phi_2 = -0.6$;

(d) $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = -0.6$.

8 - Utilizando uma rotina de computador para gerar números aleatórios, gere 200 valores de cada um dos modelos do problema **4** e esboce o gráfico da série.

9 - Considere o modelo $Z\,(t) + kZ_{t-4} = a_t$.

(a) Encontre uma representação de Z_t na forma $Z_t = \psi(B)a_t$ e comente sob qual condição Z_t é estacionário.

(b) Obtenha a f.a.c. de Z_t.

10 - Suponha que o processo estacionário $\{Z_t\}$ possui as seguintes variâncias e autocorrelações:

$$\gamma_0 = 12; \quad \rho_1 = 0,8; \quad \rho_2 = 0,46;$$

$$\rho_3 = 0,152; \quad \text{e} \quad \rho_4 = -0,0476.$$

Resolva as equações de Yule-Walker para cada uma das possíveis ordens do modelo AR(1,2 e 3) e encontre os valores dos ϕ_i correspondentes. Determine também o valor de $\sigma^2 = Var(a_t)$ em cada caso. Qual é a ordem correta do processo AR?