

CONTINUIDADE

→ Um dos fatores importantes a serem utilizados futuramente é o conceito de continuidade, como já diz em seu nome, buscamos saber se a função é contínua ou não, ou seja, se a função não apresenta nenhuma interrupção ou buraco em um determinado intervalo, ou ponto, de x . Para isso verificaremos os possíveis pontos onde possa ocorrer tal quebra de continuação, e para fazer essa verificação iremos considerar 3 pressupostos:

1. *A função deve existir no ponto a ;*

Ou seja, a função deve assumir um valor quando $x = a$, um caso onde a função não é contínua, são as funções racionais como $f(x) = 1/x$, onde considerando o intervalo $x: [-\infty, +\infty]$, a função não tem um valor quando $x = 0$, logo a mesma não seria contínua;

$$f(a) = K$$

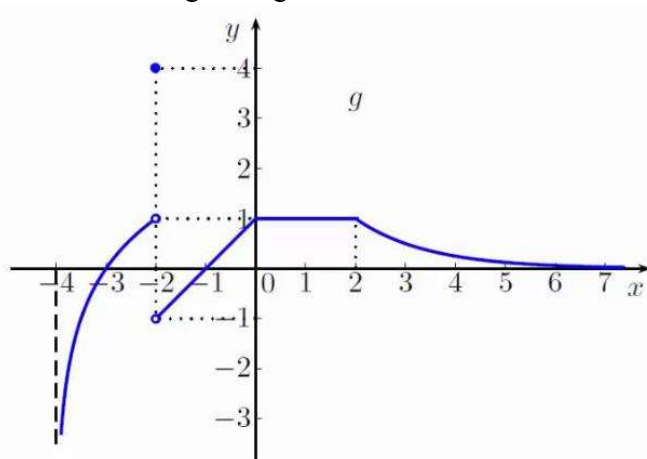
2. *O Limite da função no ponto a existe,* ou seja, quando a função se aproxima do ponto, independente da direção, vão para um único valor L . Logo, o limite da função quando aproximarmos por valores menores que a deve ser o mesmo quando aproximarmos com valores maiores que a ;

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

3. Por fim, para ter certeza que a função é contínua vai ser necessário verificar se o valor que a função assume no ponto a é o mesmo valor aproximado pelos limites, ou seja:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Observem o seguinte gráfico:



É possível notar, que a função y ou $f(x)$, como preferir, existe no ponto -2 assumindo o valor de 4 (a bola azul preenchida), porém vejam que quando a mesma vai se aproximando desse mesmo ponto, pelas laterais, ambas assumem valores diferentes uma da outra, enquanto o $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1$ o outro limite é $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1$, ou seja não existe limite nesse ponto, dado que os limites vão para diferentes valores.

Vamos imaginar agora que ambos limites vão para 1 , ou seja, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$, a função seria continua nesse caso?

Dado os pressupostos a qual primeiro a função deve existir no ponto, ela existe e possui o valor 4 , segundo o limite deve existir, ou seja, o valor da função pelos limites laterais tende para o mesmo valor, considerando o caso proposto, o mesmo existe e possuirá o valor de 1 , porém pelo terceiro pressuposto teríamos que o valor da função no ponto tenha de ser igual ao valor do limite. Logo, a função continuaria não sendo contínua dado o terceiro pressuposto ($4 \neq 1$).

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

➔ Nessa parte irei resolver alguns problemas retirados dos livros de Cálculo volume 1, 7 ed. de James Stewart e Cálculo um Curso moderno e suas aplicações, 9 ed. por Hoffman.

James Stewart – Capítulo 2.3 (Limites): Vamos buscar se os limites das funções existem.

5. $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

Para calcular esse limite podemos utilizar das propriedades:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2} &= \frac{\lim_{t \rightarrow -2} t^4 - \lim_{t \rightarrow -2} 2}{\lim_{t \rightarrow -2} 2t^2 - \lim_{t \rightarrow -2} 3t + \lim_{t \rightarrow -2} 2} = \frac{\left(\lim_{t \rightarrow -2} t\right)^4 - 2}{2\left(\lim_{t \rightarrow -2} t\right)^2 - 3\left(\lim_{t \rightarrow -2} t\right) + 2} \\ &= \frac{(16) - 2}{2(4) - 3(-2) + 2} = \frac{14}{8 + 6 + 2} = \frac{14}{16} = \frac{7.2}{8.2} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$

O que fizemos, fora por meio das propriedades separar as funções, e através disso trabalhar separadamente com cada uma, observado acima, e após chegar em números, foi possível fatorar o valor obtido, logo o limite da função existe e é $\frac{7}{8}$.

15. $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

Vamos ver se existe o limite da função acima, vamos começar utilizando do mesmo método acima, como já conhecem como funciona partirei para o valor que será encontrado, mas é necessário que façam apenas para a prática:

$$\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3} = \frac{0}{0}$$

Dado que fora abordado sobre limites, é de conhecimento que o valor observado é indeterminado, ou seja, não sabemos que valor seria $\frac{0}{0}$, logo se faz necessário algum método ou manipulação para resolver com esse problema, primeiro vou fazer uma pequena revisão, e lembrar algumas coisas, para então aplicar uma forma de resolver tais problemas quando a função tem uma aparência parecida com a que é vista acima.

Alguns devem se lembrar do termo *Completar quadrados*, alguns não, porém irei rever a ideia aqui. Quando buscamos completar um quadrado isso está ligado com a função quadrática:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1) \cdot (x + 1) = (x + 1)^2$$

Ou seja, buscamos pegar uma função e deixar ela em um formato mais simples, porém podemos encontrar essa mesma função da seguinte forma:

$$x^2 + 2x$$

Aqui não conseguiríamos chegar na mesma forma acima, para isso precisaríamos do $+ 1$, porém podemos fazer uma pequena manipulação para que isso ocorra, para isso vamos ver a função de uma forma diferente:

$$x^2 + 2x + 0$$

Podemos dizer que qualquer coisa está sendo somada 0, ou subtraída, e sabemos que algumas coisas somadas e subtraídos dão zero, isso ocorre quando fazemos a subtração entre números iguais: (1-1); (2-2); (3-3); e assim vai, logo podemos dizer que $0 = (1 - 1)$, logo teríamos:

$$x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1$$

Isso que foi feito é o que seria *Completar quadrados*. Pequenas manipulações como essa são úteis para resolver problemas, tais que também poderíamos ver uma situação onde teríamos $x^2 + 3x + 1$, nesse caso podemos ver:

$$3x = 2x + x$$

Tal que:

$$x^2 + (2x + x) + 1 = (x + 1)^2 + x$$

Para o nosso problema isso será o suficiente, veja como será utilizado.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3} &= \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{2t^2 + 6t + t + 3} = \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{2(t^2 + 3t) + (t + 3)} \\ \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{2(t^2 + 3t) + (t + 3)} &= \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{2t(t + 3) + (t + 3)} = \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{(t + 3) \cdot (2t + 1)} \\ \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{(t + 3) \cdot (2t + 1)} &= \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t - 3)}{(2t + 1)} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Logo, o limite existe e ele é seis quintos.

James Stewart – Capítulo 2.6 (Limites no infinito): Vamos buscar se os limites das funções existem

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$$

Ao aplicar aquilo que já foi visto, perceberá que o valor obtido novamente é uma indeterminação, agora sendo $\frac{\infty}{\infty}$, para esses casos aplicaremos uma outra manipulação que pode ser utilizada quando temos que a variável tende a infinito. Para isso vamos utilizar de algo parecido com a manipulação feita acima, porém agora com multiplicações ou divisões, a qual sabemos que todo número multiplicado por 1 é o próprio número, e sabemos que um número é 1 quando fazemos uma divisão onde o numerador é igual ao denominador, como a seguir:

$$\frac{(x+2)}{(x-2)} \cdot 1 = \frac{(x+2)}{(x-2)} \cdot \frac{(x-2)}{(x-2)} = \frac{x^2-4}{(x-2)^2}$$

Pode parecer complicado, porém dependendo da situação tal técnica ajuda muito a resolver alguns problemas a serem vistos, como nosso problema atual, iremos fazer a seguinte manipulação, a qual dividiremos todos pela variável de maior ordem no denominador, que é x^3 . Vejam como será utilizado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2} \cdot \frac{1/x^3}{1/x^3}$$

Como dito acima iremos dividir tanto em cima quanto em baixo pela variável de maior ordem, e para manter o valor atual do limite, teríamos que tal tinha que oferecer o valor 1.

$$\frac{1/x^3}{1/x^3} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^3}{1} = 1$$

Utilizamos da ideia de que a divisão de frações, é o produto da primeira fração com o inverso da segunda. Com isso podemos avançar, vamos abrir nosso limite com a adição que fizemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2} \cdot \frac{1/x^3}{1/x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3}}{\frac{x^3 - x + 2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{2}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \infty \end{aligned}$$

Logo temos que quando a função vai pro infinito, o limite da mesma tende ao infinito também.

Hoffman – Capítulo 1.6 (Continuidade): Vejamos se as funções dadas são contínuas no ponto.

19. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ em $x = 1$

Para verificar se uma função é contínua no ponto, era necessário ver se a mesma cumpre com os 3 pressupostos ditos, a qual primeiro a função deve existir no ponto, a segunda que os limites laterais vão para o mesmo valor, ou seja o limite deve existir, e por fim, que o Limite seja igual ao valor da função no ponto.

1º A função existe no ponto? (Ela deve assumir algum valor para existir)

$$f(1) = \frac{(1) + 1}{(1) - 1} = \frac{1}{0}$$

Logo, é observado que a **função não tem um valor no ponto** em específico, só por isso já podemos afirmar que a mesma **não é contínua**.

24. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{para } x < 0 \\ x - 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$ em $x = 0$

Nessa segunda questão, vemos que a função assume formas diferentes após certo ponto, ponto esse que será de nosso interesse verificar se continua contínuo, ou não.

Verifiquemos os pressupostos: (Lembrem pegamos o formato daquele que tem os seguintes símbolos $x \geq 0$, $x = 0$ ou $x \leq 0$)

1º função existe no ponto: $f(0) = (0 - 1) = -1$, como a função tem valor no ponto, verificamos que o 1º pressuposto segue correto, partiremos para o 2º.

2º Limite existe: (Para o limite existir iremos verificar pelas laterais qual valor a função tende ao se aproximar de 0, lembre-se que quando assume valores menores que 0 a função tem uma forma, e quando assume maiores a forma é outra)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 \\ 1 &\neq -1 \end{aligned}$$

Os **limites são diferentes**, logo o mesmo não existe, por consequência nossa função **não é contínua**.

James Stewart – Capítulo 2.5 (Continuidade): Vamos buscar se as funções serão contínuas.

46. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Essa será um pouco mais complicada, pois aquilo que buscamos é saber o valor para duas incógnitas a qual fará que nossa função seja contínua em todo momento. Ainda continuaremos utilizando de nossos pressupostos, porém iremos aplicar os mesmos para cada ponto de mudança. Primeiro cuidaremos do ponto $x=2$ e após iremos para o ponto $x=3$.

$x=2$

1º $f(2) = a(2)^2 - b(2) + 3 = 4a - 2b + 3$, mesmo não dando um valor exato, manteremos tal informação com a gente.

2º

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} ax^2 - bx + 3 \end{aligned}$$

Aqui sabemos o valor que dará, porém o outro é uma indeterminação $\frac{0}{0}$, com isso iremos resolver rapidamente a mesma para então continuar.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} ax^2 - bx + 3 \\ 4 &= 4a - 2b + 3 \\ \mathbf{4a - 2b} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Temos nossa primeira equação, mas o que ela significa para nós? Ela significa que o limite da função existirá se os valores de a e b forem tais que o resultado da equação seja 1 , vamos manter ela, e partir para o próximo ponto.

$$x=3$$

1º $f(3) = 2(3) - a + b = 6 - a + b$, seguimos a mesma ideia do ponto passado, manteremos tal em mente.

2º

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 - bx + 3 &= \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - a + b \\ a(3)^2 - b(3) + 3 &= 2(3) - a + b \\ 9a - 3b + 3 &= 6 - a + b\end{aligned}$$

$$10a - 4b = 3$$

Após fazer ambos limites laterais, encontramos duas equações, a quais apresentam os termos a e b em ambos os lados, logo apenas rejeitamos nossa equação, colocando as incógnitas em um lado e as constantes no outro. E assim obtemos nossa segunda equação, que será suficiente para resolver o problema da questão.

Veja que temos 2 equações que dependem de a e b , logo podemos fazer um sistema de equação simples e descobrir tais valores.

$$\begin{cases} 4a - 2b = 1 \\ 10a - 4b = 3 \end{cases}$$

Há diversas formas de resolver um sistema de equação, as mais simples são a da soma e a do isolamento. Vamos ir pela soma, para isso temos que fazer uma das incógnitas sumirem, vejam que a equação de baixo tem o dobro do valor de b vista na equação acima, logo para sumir com o b em nossa vida, podemos multiplicar a primeira equação por -2, para cancelar o b , veja como ficaria:

$$\begin{cases} (-2) \cdot (4a - 2b) = (-2) \cdot 1 \\ 10a - 4b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a + 4b = -2 \\ 10a - 4b = 3 \end{cases}$$

Somando as equações, teríamos:

$$\begin{aligned}(10a - 8a) + (4b - 4b) &= 3 - 2 \\ 2a &= 1 \therefore a = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Logo, obtemos ao isolar o a que o mesmo é igual a um meio, e para descobrir b basta substituir o valor de a que encontramos em uma das duas equações, vamos ir pela primeira:

$$4a - 2b = 1$$

$$4\left(\frac{1}{2}\right) - 2b = 1$$

$$2 - 2b = 1 \therefore 2b = 1 \therefore b = \frac{1}{2}$$

Logo, temos que b também é um meio. Sabendo de ambos valores, resta apenas verificar uma única condição, o 3º pressuposto, onde o valor do Limite deve ser igual ao valor da função no ponto, vamos retornar aos pontos.

$$x=2$$

Tínhamos que o Limite da mesma era: $4 = 4a - 2b + 3$

$$\text{Logo, temos: } 4 = 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3$$

$$4 = 2 - 1 + 3 \therefore \mathbf{4 = 4} \text{ (Limite existe)}$$

$$\text{E o valor da função era: } f(2) = 4a - 2b + 3 = 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \mathbf{4}$$

3º *O valor da função no ponto é igual ao Limite da função no ponto.*

Pelo observado vemos que a função é contínua no ponto $x=2$, vejamos agora no ponto $x=3$.

$$x=3$$

Tínhamos que o Limite no ponto era: $9a - 3b + 3 = 6 - a + b$

$$9\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 6 - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$4,5 - 1,5 + 3 = 6 \therefore \mathbf{6 = 6} \text{ (Limite existe)}$$

$$\text{E a função no ponto } x=3: f(3) = 6 - a + b = 6 - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{6}$$

Logo, a função nesse ponto também é contínua, logo podemos afirmar que os valores de a e b que tornam a função contínua em todo ponto é:

$$\mathbf{a = b = \frac{1}{2}}$$

Esse resumo acaba por aqui, lembre-se que lágrimas caíram no preparo, tratem com amor, qualquer dúvida, falem com o seu monitor.