LISTA DE PROVAS (ÁREA II)

Gráfico

Enunciados

1º EE. - 2008.1

4. Seja $f(x) = xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) (0,75) Determine a(s) reta(s) assíntota(s), investigando os limites necessários.

(b) (0,75) Determine os pontos críticos e os intervalos de crescimento e decrescimento.

(c) (0,75) Estude a concavidade do gráfico de f e determine os pontos de inflexão.

(d) (1,25) Esboce o gráfico, destacando os pontos críticos e de inflexão.

(e) (0,5) Qual é a imagem da função f?

1º EE. - 2008.2

4. (*2.0 pt.*) Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x < 0; \\ 1 & \text{se } x = 0; \\ 2x+1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(*1.0 pt.*) **a)** Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$. Esta função é contínua em $x = 0$? Justifique sua resposta.

(*1.0 pt.*) **b)** Esboce o gráfico da função em torno do ponto $x = 0$ e determine se a função $f(x)$ é diferenciável em $x = 0$. Justifique sua resposta.

2º EE. - 2008.2

3ªQuestão: (2,25 pontos) Faça um esboço do gráfico de $y = x(x^2 - 4)$ analisando crescimento, decrescimento, máximos e mínimos relativos, concavidade e assíntotas.

1º EE. - 2009.2

4. Considere $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$.

(a) (1,0) Determine as assíntotas horizontais e verticais.

(b) (1,0) Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento.

(c) (1,0) Analise a concavidade e determine os pontos de inflexão.

(d) (1,0) Faça um esboço do grafico de f.

1º EE. - 2011.2

4ª Questão Seja $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{(x+3)^2}$.

***a*)** (1,0 pontos) Encontre as assíntotas horizontais e verticais, caso existam, da função f.

***b*)** (1,0 pontos) Determine os intervalos onde a função f é crescente ou decrescente. Encontre também os pontos de máximo e mínimo locais e absolutos da função, assim como os respectivos valores da função nesses pontos.

***c*)** (1,0 pontos) Determine os intervalos onde a função f é côncava para cima ou para baixo, assim como os seus pontos de inflexão.

***d*)** (0,5 pontos) Use as informações dos itens ***a*)** – ***c*)** para esboçar o gráfico de f.

2º EE. - 2011.2

2ª Questão (2,5 pontos) Esboce o gráfico da função $y = x + \sqrt{1-x}$, com $0 \leq x \leq 1$, determinando os pontos críticos, crescimento e decrescimento, máximos e mínimos (absolutos e relativos) e concavidade, quando for o caso.

2º EE. - 2012.2

5. Considere a função $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1} + \dfrac{|x|}{x-1}$, com $x \neq \pm 1$, onde $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0\,, \\ -x, & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$

a) (0,6 ponto) Determine os pontos críticos e os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$, bem como seus pontos de máximo e mínimo locais e globais (caso existam).

b) (0,7 ponto) Determine os intervalos onde o gráfico de $f(x)$ tem concavidade voltada para cima ou para baixo, bem como seus pontos de inflexão (caso existam).

c) (0,7 ponto) Determine retas assíntotas verticais ou horizontais ao gráfico de $f(x)$.

d) (1,0 ponto) Esboce o gráfico de $f(x)$, utilizando as informações dos itens anteriores.

1º EE. – 2016.1

4. Considere a função $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(a) $(0,9$ ponto) Determine as assíntotas (caso existam).

(b) $(0,8$ ponto) Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento, bem como os pontos críticos. Determine os pontos de máximo e mínimo locais.

(c) $(0,8$ ponto) Analise a concavidade e encontre os pontos de inflexão.

(d) $(1,0$ ponto) Esboce o gráfico da função, destacando os pontos críticos e de inflexão.

2º EE. – 2016.1

3. Considere a função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, para $x > 0$.

(a) $(0,6$ ponto) Determine as assíntotas (caso existam).

(b) $(0,6$ ponto) Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento, bem como os pontos críticos. Determine os pontos de máximo e mínimo locais.

(c) $(0,6$ ponto) Analise a concavidade e encontre os pontos de inflexão.

(d) $(0,7$ ponto) Esboce o gráfico da função, destacando os pontos críticos e de inflexão.

1º EE. – 2016.2

4. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x^2}{2}$, definida para $x \neq 0$.

(a) $(0,5)$ Determine suas assíntotas (caso existam).

(b) $(0,5)$ Analise o crescimento e o decrescimento de $f(x)$.

(c) $(0,5)$ Analise a concavidade de $f(x)$.

(d) $(1,0)$ Esboce o gráfico da função, destacando as assíntotas, os pontos críticos e os pontos de inflexão (caso existam).

1º EE. – 2017.1

2ª Questão [4 pontos]: Para a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = xe^{-5x}$$

a. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento.

b. Faça o estudo da concavidade.

c. Determine as assíntotas horizontais.

d. Esboce o gráfico.

Gabarito

1º EE. - 2008.1

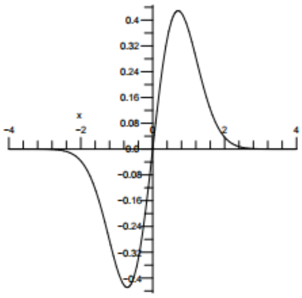
4. Seja $f(x) = xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Pela regra de L'Hôpital temos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$. Portanto, a reta $y = 0$ é assíntota horizontal.

   (b) Derivando f temos $f'(x) = e^{-x^2}(-2x^2+1)$. Os ponto críticos são $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Além disso, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. Portanto, f cresce em $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e decresce em $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.

   (c) $f''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2-3)$. Portanto, os pontos de inflexão são $x = 0$ e $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. Como $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{-\sqrt{6}}{2}, 0) \cup (\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$ e $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{-\sqrt{6}}{2}) \cup (0, \frac{\sqrt{6}}{2})$ temos que f é côncava para baixo em $(-\infty, \frac{-\sqrt{6}}{2}) \cup (0, \frac{\sqrt{6}}{2})$ e côncava para cima em $(\frac{-\sqrt{6}}{2}, 0) \cup (\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$.

   (d) Gráfico de f:



   (e) A imagem de f é o intervalo $[f(-\frac{\sqrt{2}}{2}), f(\frac{\sqrt{2}}{2})] = [-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2}]$.

1º EE. - 2008.2

4ª Questão

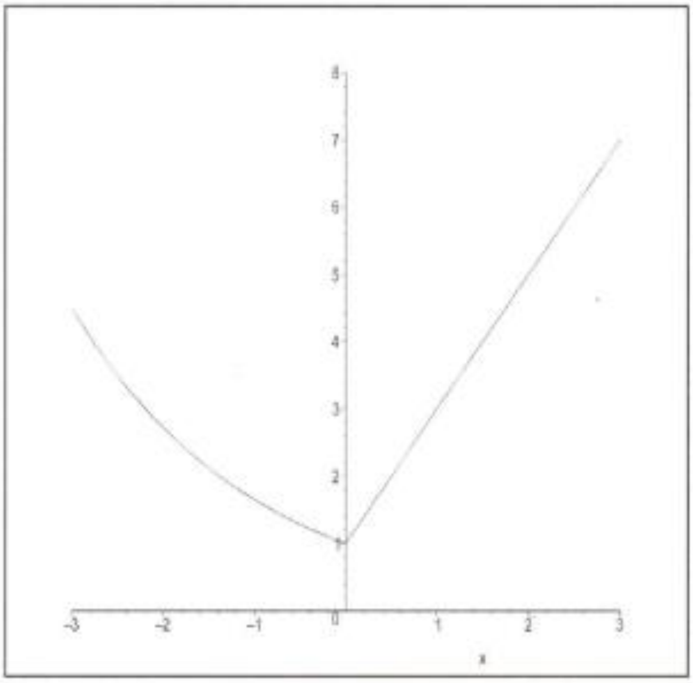
a) Calculando os limites laterais, obtemos

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} (e^{-x}) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (2x+1) = 1.$$

Portanto $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Como $f(0) = 1$, concluímos que f é contínua em $x = 0$.

b) Observando o gráfico abaixo, notamos um "bico" no ponto $(0, 1)$, o que sugere que f não é diferenciável em $x = 0$. (Como opção, o aluno poderia ter calculado as derivadas laterais à esquerda e à direita de $f(x)$ em $x = 0$, encontrando os valores -1 e 2 respectivamente, concluindo então que a função não tem derivada em $x = 0$).

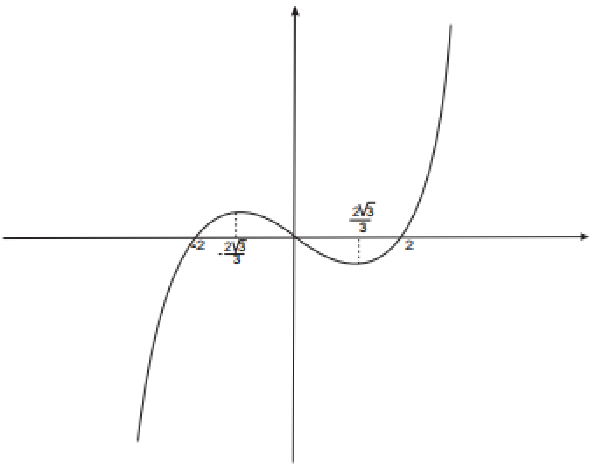


2º EE. - 2008.2

3ªQuestão: (2,25 pontos) Faça um esboço do gráfico de $y = x(x^2 - 4)$ analisando crescimento, decrescimento, máximos e mínimos relativos, concavidade e assíntotas. *Como* $y' = 3x^2 - 4$ *segue que:* $y' > 0$ *em* $(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$, *logo a função é crescente neste intervalo;*

$y' < 0$ *em* $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, *logo a função é decrescente neste intervalo;*

$y' > 0$ *em* $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, *logo a função é crescente neste intervalo. Portanto,* $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *é ponto de máximo relativo, e* $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ *é ponto de mínimo relativo.*
Como $y'' = 6x$ *seque que:*
$y'' < 0$ *em* $(-\infty, 0)$, *logo a função tem a concavidade voltada para baixo neste intervalo;*
$y'' > 0$ *em* $(0, +\infty)$, *logo a função tem a concavidade voltada para cima neste intervalo.*
Segue também que $x = 0$ *é um ponto de inflexão.*
Por tratar-se de um polinômio de grau 3, não possui assíntota de tipo algum. Finalmente, observe que $f(x) = x(x^2 - 4)$ *define uma função impar, portanto seu gráfico é simétrico em relação à origem. As informações acima obtidas permitem concluir que o gráfico da função em estudo tem o aspecto da figura a seguir.*



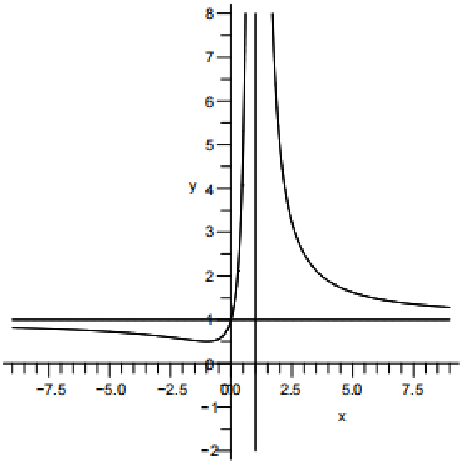
1º EE. - 2009.2

4. a) Claramente $x = 1$ e $y = 1$ são assíntotas.

   b) Calculando a derivada de f temos que $f'(x) = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$. Logo, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$ e $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Portanto, $x = -1$ é ponto crítico, f é crescente em $(-1, 1)$ e decrescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

   c) Fazendo cálculos temos que $f''(x) = 4\frac{x+2}{(x-1)^4}$. Logo, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2$ e $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$. Portanto, $x = -2$ é ponto de inflexão, f é côncava para cima em $(-2, +\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, -2)$.

d) O gráfico de f não corta o eixo x e corta o eixo y no ponto $(0, 1)$. Calculando os valores de f para o ponto crítico e inflexão temos: $f(-1) = 1/2$ e $f(-2) = 5/9$. O gráfico de f é



1º EE. - 2011.2

4ª Questão ***a)*** A função f não está definida apenas no ponto -3, logo a única candidata a assíntota vertical é a reta $x = -3$. Como $(x+3)^2 \to 0^+$ quando $x \to -3$, então teremos $\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{-3(-3-3)}{0^+} = \infty$ (limite bilateral), e assim **$x = -3$ é a única assíntota vertical de f**.

Para determinar as possíveis assíntotas horizontais calculamos $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Teremos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(x-3)}{(x+3)^2} = \frac{\infty(\infty-3)}{(\infty+3)^2} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathbf{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{2(x+3)} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathbf{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = \mathbf{1};$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x(x-3)}{(x+3)^2} = \frac{-\infty(-\infty-3)}{(-\infty+3)^2} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathbf{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{2(x+3)} = \frac{-\infty}{-\infty} \overset{\mathbf{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2} = \mathbf{1}.$$

Portanto **$y = 1$ é a única assíntota horizontal de f**.

b) Temos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2-3x)'(x+3)^2-(x^2-3x)((x+3)^2)'}{(x+3)^4} \\
&= \frac{(2x-3)(x^2+6x+9)-(x^2-3x)(2x+6)}{(x+3)^4} \\
&= \frac{\cancel{2x^3}+12x^2+18x-3x^2\cancel{-18x}-27\cancel{-2x^3}\cancel{-6x^2}\cancel{+6x^2}\cancel{+18x}}{(x+3)^4} \\
&= \frac{9(x^2+2x-3)}{(x+3)^4} = \boldsymbol{\frac{9(x+3)(x-1)}{(x+3)^4} = \frac{9(x-1)}{(x+3)^3}}, \quad \textbf{para } \boldsymbol{x \neq 3}.
\end{aligned}
$$

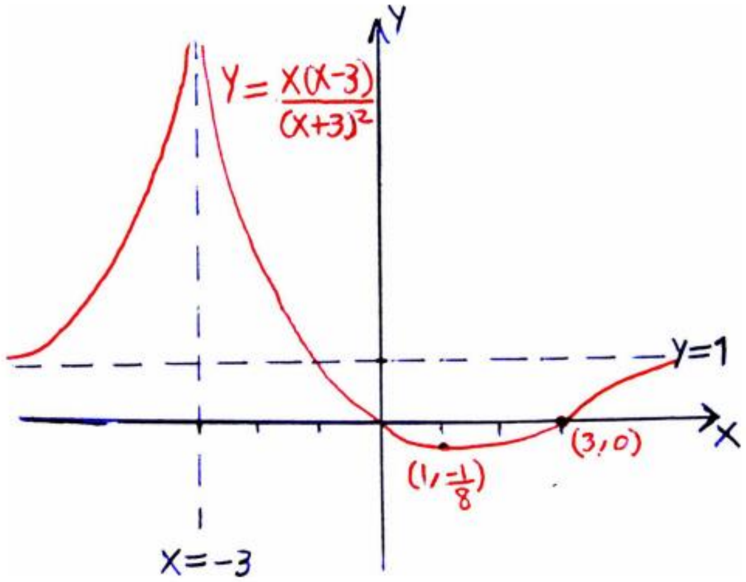
Fazendo o estudo do sinal concluimos que f é crescente em $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$ (que é quando $f'(x)>0$), e f é decrescente em $(-3,1)$ ($f'(x)<0$). Isto implica que $\boldsymbol{x=1}$ **é ponto de mínimo local, e** $\boldsymbol{f(1)=\frac{1(1-3)}{(1+3)^2}=-\frac{1}{8}}$. Já vimos que $f(x)\to 1$ quando $x\to\infty$ ou $x\to-\infty$, logo na verdade $\boldsymbol{x=1}$ **é o único ponto de mínimo absoluto de** $\boldsymbol{f}$. Também, $\boldsymbol{f}$ **não possui pontos de máximo local ou absoluto**.

c) Temos

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(9(x-1))'(x+3)^3-9(x-1)((x+3)^3)'}{(x+3)^6} \\
&= \frac{9(x+3)^3-9(x-1)\cdot 3(x+3)^2}{(x+3)^6} \\
&= \frac{9(x+3)^2((x+3)-3(x-1))}{(x+3)^6} \\
&= \boldsymbol{\frac{9(-2x+6)}{(x+3)^4}},
\end{aligned}
$$

logo f é côncava para acima quando $-2x+6>0$, isto é, no intervalo $(-\infty,3)$, f é côncava para baixo em $(3,\infty)$, e portanto $\boldsymbol{x=3}$ **é o único ponto de inflexão de** $\boldsymbol{f}$, **e** $\boldsymbol{f(3)=\frac{3(3-3)}{(3+3)^2}=0}$

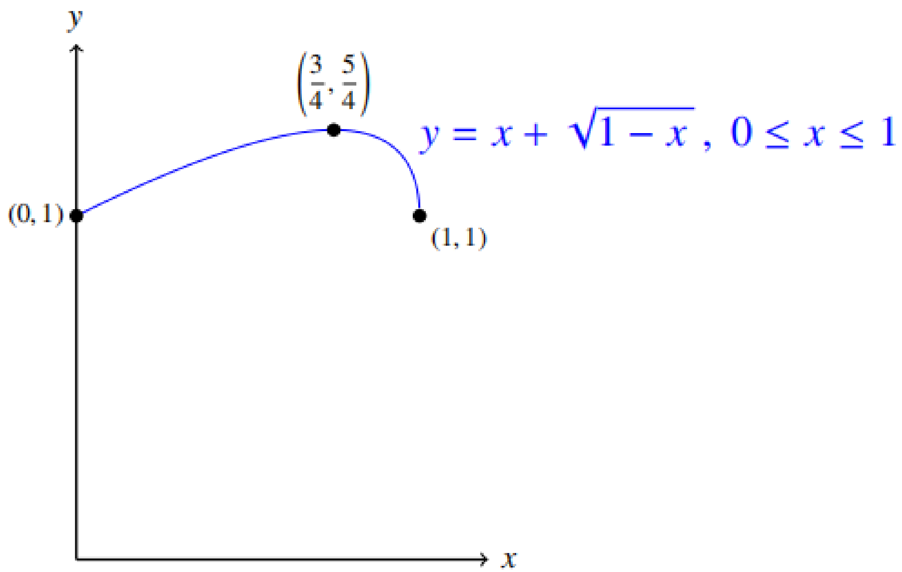
d)



2º EE. - 2011.2

2ª Questão (2,5 pontos) Temos $y' = 1 + [(1-x)^{1/2}]' = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{\mathbf{2\sqrt{1-x}-1}}{\mathbf{2\sqrt{1-x}}}$. Notemos que y' não existe para $x = 1$, e como $2\sqrt{1-x} > 0$ se $0 \le x < 1$, então o sinal de y' é o sinal de $2\sqrt{1-x} - 1$. Portanto y é crescente quando $2\sqrt{1-x} - 1 > 0$; resolvendo obtemos $1 - x > 1/4$, isto é, $\mathbf{0 \le x < 3/4}$. Similarmente y é decrescente quando $\mathbf{3/4 < x < 1}$, e assim $x = 3/4$ será ponto crítico de máximo relativo, e neste ponto teremos $y(3/4) = (3/4) + \sqrt{1-(3/4)} = 5/4$. Como $y(0) = 0 + \sqrt{1-0} = 1$ e $y(1) = 1 + \sqrt{1-1} = 1$, concluimos que **$x = 3/4$ é ponto de máximo absoluto, e $x = 0$ e $x = 1$ são os pontos de mínimo absoluto**.

Por outro lado $y'' = \left(1 - \dfrac{1}{2}(1-x)^{-1/2}\right)' = \dfrac{1}{4}(1-x)^{-3/2}(-1)$. Portanto $y'' < 0$ para todo $x \in [0,1)$, logo **y é côncava para baixo no intervalo [0,1), e não possui pontos de inflexão**.



2º EE. - 2012.2

5. $\boxed{\textbf{Solução:}}$ *Considere a função* $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1} + \dfrac{|x|}{x-1}$, *com* $x \neq \pm 1$.

a) *Determine os pontos críticos e os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$, bem como seus pontos de máximo e mínimo locais e globais (caso existam).*

Como $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0, \end{cases}$ temos que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2-1}, & \text{se } x \geq 0, \\ \dfrac{-2x^2}{x^2-1}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Assim, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}, & \text{se } x \geq 0, \\ \dfrac{4x}{(x^2-1)^2}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$ visto que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ e que $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$.

Assim, $x = 0$ é o único ponto crítico de $f(x)$.

Note ainda que $f'(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, $x \neq 0$.
Logo, $x = 0$ não é ponto de máximo ou de mínimo local de $f(x)$ e seu gráfico é sempre decrescente. Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, temos que $f(x)$ não tem ponto de máximo ou de mínimo absolutos.

b) *Determine os intervalos onde o gráfico de $f(x)$ tem concavidade voltada para cima ou para baixo, bem como seus pontos de inflexão (caso existam).*

Derivando mais uma vez $f(x)$, obtemos $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}, & \text{se } x > 0, \\ \dfrac{-4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$

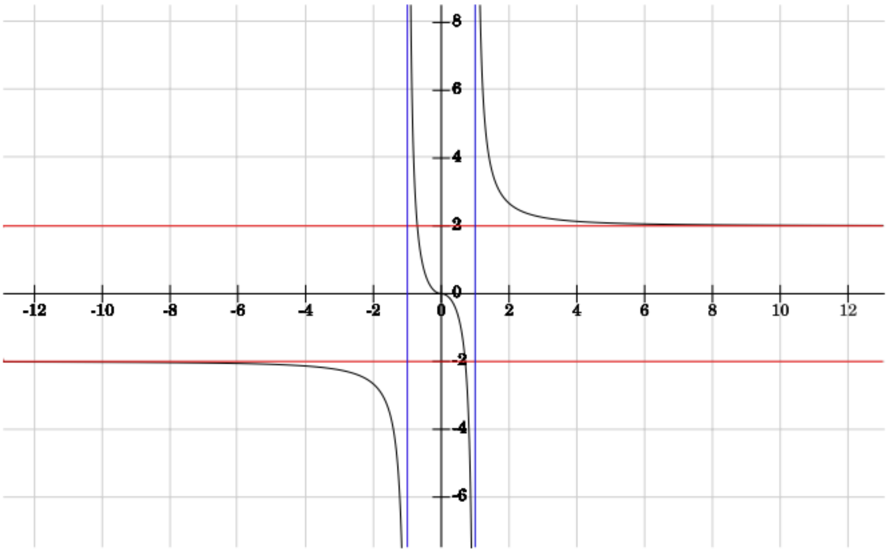
Assim, $(-\infty, -1)$ e $(0, 1)$ são os intervalos onde $f(x)$ tem concavidade voltada para baixo e $(-1, 0)$ e $(1, +\infty)$ são os intervalos onde $f(x)$ tem concavidade voltada para cima. Mais ainda, $x = 0$ é ponto de inflexão.

c) *Determine retas assíntotas verticais ou horizontais ao gráfico de $f(x)$.*

Como $\lim\limits_{x\to \pm 1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to \pm 1^-} f(x) = -\infty$. temos $x = \pm 1$ são retas assíntotas verticais do gráfico de $f(x)$.

Mais ainda, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2$ e, portanto, $y = \pm 2$ são as únicas retas assíntotas horizontais ao gráfico de $f(x)$.

d) *Esboce o gráfico de $f(x)$, utilizando as informações dos itens anteriores.*



1º EE. – 2016.1

4. Considere a função $f(x) = x^2e^{-x}$.

(a) (0,9 ponto) Determine as assíntotas (caso existam).

Solução. O domínio de f é o conjunto dos números reais, i.e., $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Logo, não há assíntotas verticais. Uma vez que x^2 e e^{-x} tendem a infinito quando $x \to -\infty$, segue que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = +\infty$. Por outro lado, como $x^2 \to +\infty$ e $e^{-x} \to 0$ quando $x \to +\infty$, temos um produto indeterminado do tipo $0 \times \infty$ quando $x \to +\infty$. Fazendo uso da regra de l'Hôspital, obtemos o seguinte:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0.$$

Logo, a reta $y = 0$ (ou seja, o eixo x) é uma assíntota horizontal.

(b) (0,8 ponto) Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento, bem como os pontos críticos. Determine os pontos de máximo e mínimo locais.

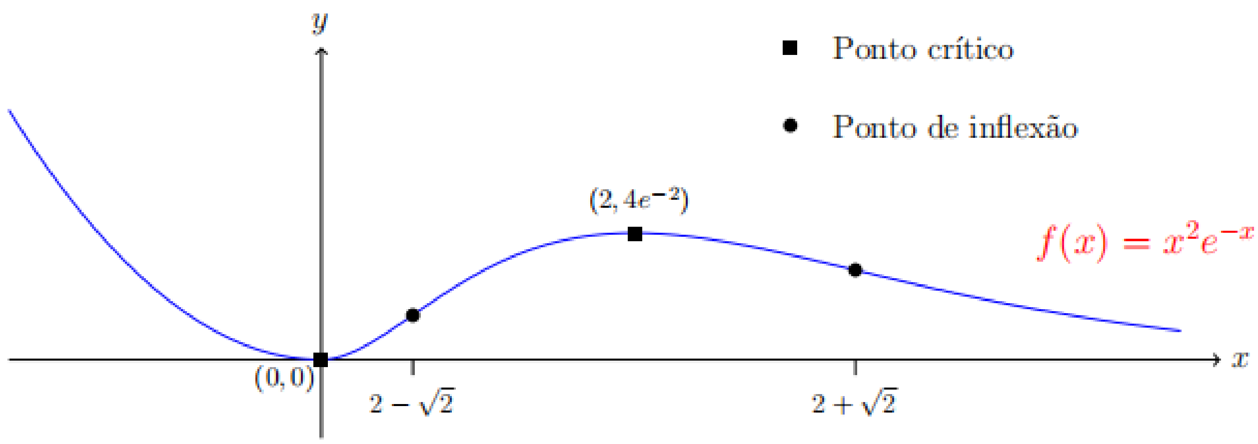
Solução. Pela regra do produto, temos que $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$. Os pontos críticos de f são $x_0 = 0$ e $x_1 = 2$. Uma vez que $e^{-x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $f'(x) > 0$ quando $2x - x^2 > 0$ e $f'(x) < 0$ quando $2x - x^2 < 0$. Ou seja, f é crescente em $(0, 2)$ e decrescente em $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Pelo teste da primeira derivada, $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo local (e absoluto) e $x_1 = 2$ é máximo local.

(c) (0,8 ponto) Analise a concavidade e encontre os pontos de inflexão.

Solução. Note que $f''(x) = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Assim, $f''(x) > 0$ quando $x^2 - 4x + 2 > 0$ e $f''(x) < 0$ quando $x^2 - 4x + 2 < 0$. Isto é, f é côncava para cima em $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$ e côncava para baixo em $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$. As abscissas dos pontos de inflexão são $x_2 = 2 - \sqrt{2}$ e $x_3 = 2 + \sqrt{2}$.

(d) (1,0 ponto) Esboce o gráfico da função, destacando os pontos críticos e de inflexão.

Solução. Usando os resultados obtidos nos itens acima, podemos, enfim, esboçar o gráfico de f (veja a figura abaixo).



2º EE. – 2016.1

3. Considere a função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, para $x > 0$.

(a) $(0,6$ ponto) Determine as assíntotas (caso existam).

Solução. Uma vez que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\ln x = -\infty$, concluímos que a reta $x = 0$ (ou seja, o eixo y) é uma assíntota vertical. Por outro lado, usando a regra de l'Hôspital, é fácil ver que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Portanto, a reta $y = 0$ (ou seja, o eixo x) é uma assíntota horizontal.

(b) $(0,6$ ponto) Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento, bem como os pontos críticos. Determine os pontos de máximo e mínimo locais.

Solução. Pela regra do quociente, temos que

$$f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

O único ponto crítico de f é $x_0 = e^{1/2}$. Temos que $f'(x) > 0$ quando $1-2\ln x > 0$ e $f'(x) < 0$ quando $1-2\ln x < 0$. Ou seja, f é crescente em $(0, e^{1/2})$ e decrescente em $(e^{1/2}, +\infty)$. Pelo teste da primeira derivada, $x_0 = e^{1/2}$ é um ponto de máximo local (e absoluto).

(c) $(0,6$ ponto) Analise a concavidade e encontre os pontos de inflexão.

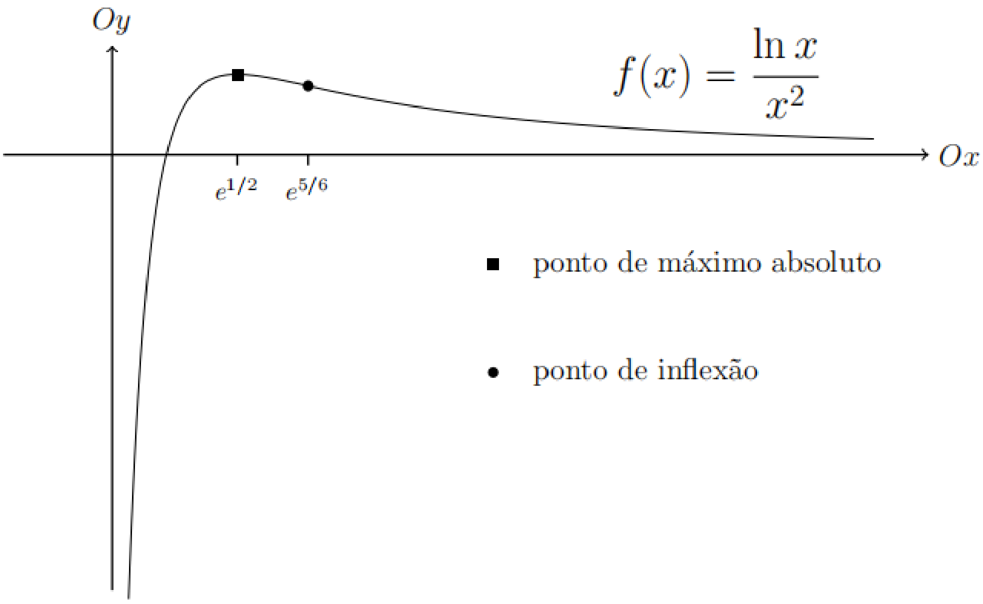
Solução. Novamente pela regra do quociente, temos que

$$f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}.$$

Assim, $f''(x) > 0$ quando $6\ln x - 5 > 0$ e $f''(x) < 0$ quando $6\ln x - 5 < 0$. Isto é, f é côncava para cima em $(e^{5/6}, +\infty)$ e côncava para baixo em $(0, e^{5/6})$. A abscissa do ponto de inflexão é $x_1 = e^{5/6}$.

(d) $(0,7$ ponto) Esboce o gráfico da função, destacando os pontos críticos e de inflexão.

Solução. Usando os resultados obtidos nos itens anteriores, podemos, enfim, esboçar o gráfico de f (veja a figura na próxima folha).



4. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x^2}{2}$, definida para $x \neq 0$.

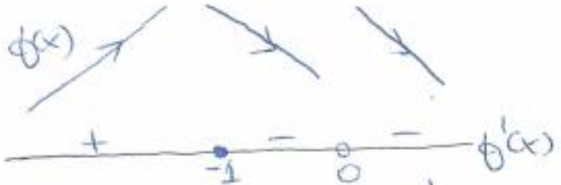
(a) $(0,5)$ Determine suas assíntotas (caso existam).

$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow$ $x=0$ é reta assíntota vertical ao gráfico de $f(x)$

$\lim\limits_{x\to \mp\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ O gráfico não tem reta assíntota horizontal

(b) $(0,5)$ Analise o crescimento e o decrescimento de $f(x)$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - x = -\dfrac{x^3+1}{x^2}$ Assim, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ único pt crítico.



Logo, pelo Teste da Derivada Primeira, $x=-1$ é ponto de máx. local.

Intervalo de Crescimento: $(-\infty,-1)$
Intervalos de Decrescimento: $(-1,0)$ e $(0,+\infty)$

(c) $(0,5)$ Analise a concavidade de $f(x)$.

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3} - 1 = \dfrac{2-x^3}{x^3}$ Assim, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$.

Intervalo c/concavidade para cima: $(0,\sqrt[3]{2})$
Intervalos c/concavidade p/baixo: $(-\infty,0)$ e $(\sqrt[3]{2},+\infty)$

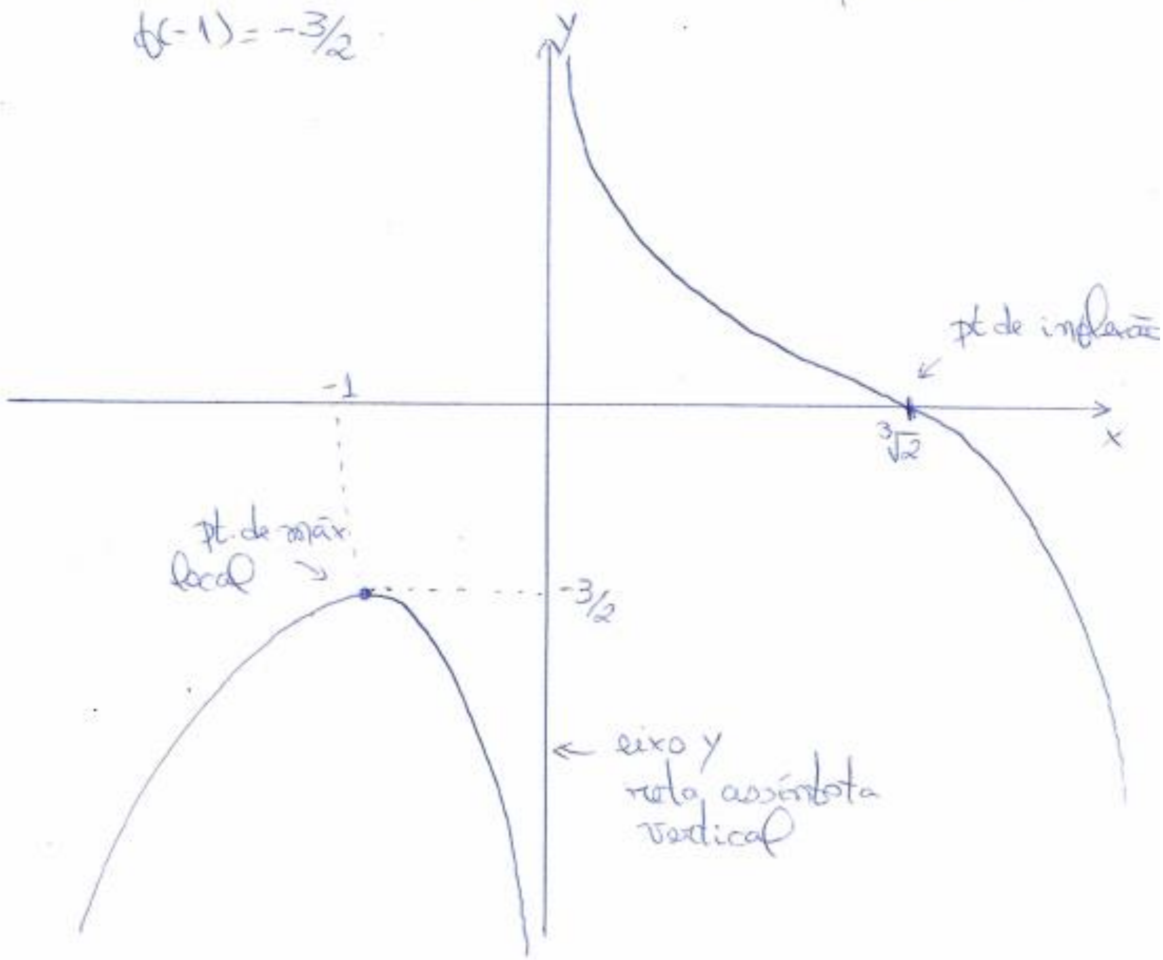
$\Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$ é ponto de inflexão

(d) $(1,0)$ Esboce o gráfico da função, destacando as assíntotas, os pontos críticos e os pontos de inflexão (caso existam).

$f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{x^2}{2} \Rightarrow x^3=2 \Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$

(ponto de inflexão)

$f(-1)=-3/2$



1º EE. – 2017.1

Solução:

a. Como a função h é derivável em todo $\mathbb{R}$ temos que os intervalos de crescimento ou decrescimento são aqueles onde a derivada é positiva ou negativa respectivamente. Pela regra do produto e pela regra da cadeia temos:

$$h'(x) = x'e^{-5x} + x(e^{-5x})' = e^{-5x} - 5xe^{-5x} = e^{-5x}(1-5x).$$

Com isso, temos que

$$h'(x) > 0 \iff x < \frac{1}{5}$$

e

$$h'(x) < 0 \iff x > \frac{1}{5}.$$

Portanto h é crescente para $x < \frac{1}{5}$ e decrescente para $x > \frac{1}{5}$.

b. Para fazer o estudo da concavidade devemos estudar o sinal da segunda derivada. A função será côncava para cima onde a segunda derivada for positiva e côncava para baixo onde a segunda derivada for negativa. Novamente pela regra do produto e regra da cadeia temos:

$$h''(x) = (e^{-5x})'(1-5x) + e^{-5x}(1-5x)' = -5e^{-5x}(1-5x) - 5e^{-5x} = 5e^{-5x}(5x-2).$$

Com isso, temos que

$$h''(x) > 0 \iff x > \frac{2}{5}$$

e

$$h''(x) < 0 \iff x < \frac{2}{5}.$$

Portanto a concavidade de h é voltada para cima se $x > \frac{2}{5}$ e voltada para baixo se $x < \frac{2}{5}$.

c. Para determinar eventuais assíntotas horizontais devemos calcular

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-5x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} xe^{-5x}.$$

Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{5x}} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5e^{5x}} = 0$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-5x} = -\lim_{x\to+\infty} xe^{5x} = -\infty.$$

Portanto $y = 0$ é assíntota horizontal da função h.

d.