Integrais Múltiplas - Coordenadas Esféricas

Diretório de Apoio Acadêmico

1 Ângulo ϕ e as Coordenadas Esféricas

Podemos ver as integrais em coordenadas esféricas como uma continuação direta, das integrais em coordenadas cilíndricos, onde seguimos a mesma lógica de trabalhar com as coordenadas polares.

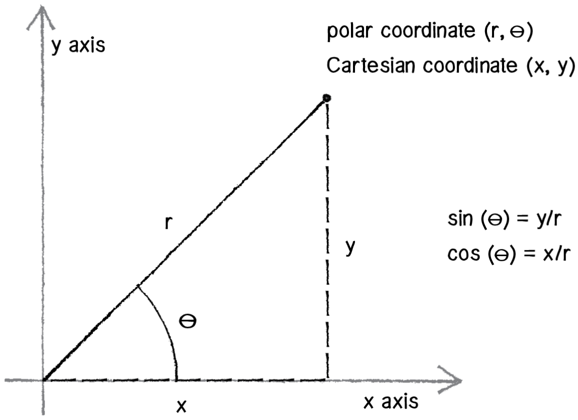


Figure 1: Coordendas polares

$$x = rcos(\theta)$$

$$y = rsen(\theta)$$

A quais representavam a *circuferência* em relação ao plano da base da figura.

$$\int\int\int_E f(x,y,z)dzdydx = \int\int\int_E f(r,\theta,z)dzdrd\theta$$

A imagem abaixo representa o cilindro:

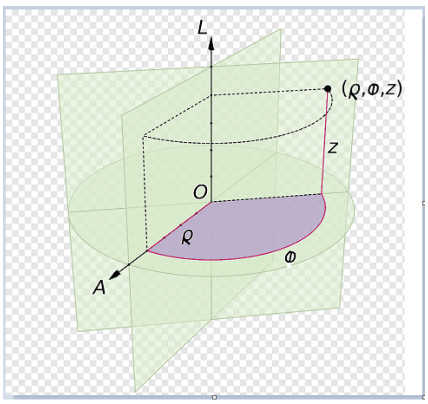


Figure 2: Gráfico do cilindro em um plano cartesiano com coordendas polares

Ao saímos das figuras cilíndricas, para figuras esféricas estaremos acrescentando uma nova váriavel, que irá representar um novo ângulo esse chamado ϕ(**phi**), vamos observar primeiro o gráfico de uma esfera, e notar as diferenças do gráfico anterior do cílindro com o mesmo:

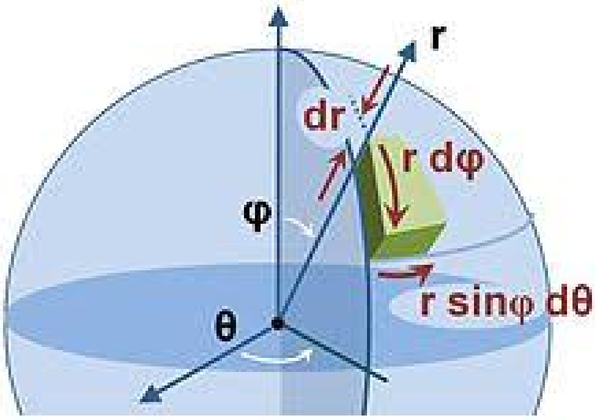


Figure 3: gráfico de uma esfera em coordenadas polares

A maior diferença que é possível notar, é que agora não temos uma circuferência apenas na *base*, a figura irá apresentar uma circuferência também em relação a sua **altura** z, tal que:

$$x^2 + y^2 = r^2 \ (quando\ tinhamos\ uma\ única\ circuferência)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \ (quando\ temos\ duas\ circuferências)$$

Observe que agora o z tem participação direta com a circuferência da figura, e utilizamos ρ**(rhô)** para representar o *raio* das esferas. E se fossemos criar uma integral que representasse tal esfera:

$$se\ x^2 + y^2 + z^2 = K^2$$

$$0 \leq x \leq K$$
$$-\sqrt{K^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{K^2 - x^2 - y^2}$$
$$-\sqrt{K^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{K^2 - x^2}$$

(Note o comportamento dos intervalos, a forma em que z segue um comportamento similar com y)

$$\int_0^K \int_{-\sqrt{K^2-x^2}}^{\sqrt{K^2-x^2}} \int_{-\sqrt{K^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{K^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dzdydx$$

Vejam que a integral agora está realmente complicada de lidar, mesmo se fizessemos a mudança para coordendas polares como conhecemos, a integral ainda seria complexa e trabalhosa. Logo, é necessário fazer uma outra mudança, agora em relação a z, lembrem que quando fizemos a mudança de (x, y) para (r, θ), não temos mais os eixos de x e y, logo quando a mudança for feita, será em relação a r, veja abaixo:

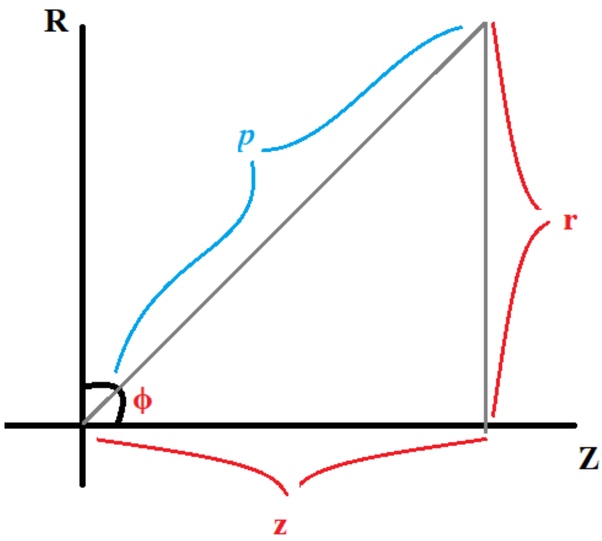


Figure 4: Plano cartesiano (z,r)

Note que diferente da primeira figura do resumo, temos (z, r) no lugar de (x, y), e o ângulo é outro $\theta \neq \phi$, aplicamos a mesma lógica:

$$sen(\phi) = \frac{r}{\rho} \to r = \rho * sen(\phi)$$

$$cos(\phi) = \frac{z}{\rho} \to z = \rho * cos(\phi)$$

Observe que saímos de $r \to \rho$, como (x, y) estão ligados com r, será necessário modificar a transformação dos mesmos, vejam como ocorre:

$$x = r * cos(\theta) = (\rho * sen(\phi)) * cos(\theta)$$

$$y = r * sen(\theta) = (\rho * sen(\phi)) * sen(\theta)$$

$$z = \rho * cos(\phi)$$

Após aplicar tal transformação é necessário descobrir o **JACOBIANO** do mesmo, quando tinhamos um *cilíndro* o *jacobiano* do mesmo erá $-r$, agora quanto temos uma esfera o *jacobiano* será diferente, veja como chegamos em tal:

	ρ	ϕ	θ
x	$sen(\phi)cos(\theta)$	$\rho cos(\phi)cos(\theta)$	$-\rho sen(\phi)sen(\theta)$
y	$sen(\phi)sen(\theta)$	$\rho cos(\phi)sen(\theta)$	$\rho sen(\phi)cos(\theta)$
z	$cos(\phi)$	$-\rho sen(\phi)$	0

(o Jacobiano será o determiante da matriz das derivadas parciais das transformações)

$$J = [sen(\phi)cos(\theta) * \rho cos(\phi)sen(\theta) * 0] + [\rho cos(\phi)cos(\theta) * \rho sen(\phi)cos(\theta) * cos(\phi)] + [-\rho sen(\phi)sen(\theta) * sen(\phi)sen(\theta) * -\rho sen(\phi)] \text{ - } [-\rho sen(\phi)sen(\theta) * \rho cos(\phi)sen(\theta) * cos(\phi)] \text{ - } [\rho cos(\phi)cos(\theta) * sen(\phi)sen(\theta) * 0] \text{ - } [sen(\phi)cos(\theta) * \rho sen(\phi)cos(\theta) * -\rho sen(\phi)] \quad (1)$$

(lidando com cada um, e retirando aqueles que dão 0 teriamos)

$$J = [\rho^2 cos^2(\phi)cos^2(\theta) * sen(\phi)] + [\rho^2 sen^2(\phi)sen^2(\theta) * sen(\phi)] + [\rho^2 sen(\phi)sen^2(\theta) * cos^2(\phi)] + [\rho^2 sen^2(\phi)cos^2(\theta) * sen(\phi)] \quad (2)$$

(iremos então colocar em evidência algunas casos em particular)

$$J = \rho^2 * \left\{sen(\phi) * sen^2(\phi) * \left[sen^2(\theta) + cos^2(\theta)\right] + sen(\phi) * cos^2(\phi) * \left[sen^2(\theta) + cos^2(\theta)\right]\right\}$$

(utilizando da relação $sen^2(.) + cos^2(.) = 1$)

$$J = \rho^2 * \left\{sen(\phi) * sen^2(\phi) * 1 + sen(\phi) * cos^2(\phi) * 1\right.$$

(colocando $sen(\phi)$ em evidência)

$$J = \rho^2 * \left\{sen(\phi) * [sen^2(\phi) + cos^2(\phi)]\right\}$$

$$J = \rho^2 * sen(\phi)$$

Descoberto o *Jacobiano*, teriamos que a transformação da integral que segue:

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2$$

$$\int_0^k \int_{-\sqrt{k^2-x^2}}^{\sqrt{k^2-x^2}} \int_{-\sqrt{k^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{k^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dzdydx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{k} f(\rho, \phi, \theta)\ \mathbf{p}^2 * \mathbf{sen(\phi)}\ d\rho d\phi d\theta$$

Percebam que enquanto θ possui um intervalo que abrange todo o círculo trigonométrico $360^o = 2\pi$, ϕ é um caso diferente a qual o mesmo possui um ângulo máximo de $180^o = \pi$. A razão é simples, ϕ engloba apenas a **altura** da esfera, ou seja, só é necessário ir de um extremo para o outro $0 \rightarrow \pi$, já θ é a **rotação** sendo então necessário realizar a volta completa $0 \rightarrow 2\pi$.
Para ajudar a entender os ângulos, vamos separar os *octantes* que tinhamos visto anteriormente com os cilindros, dado o ângulo:

$$1^o\ octante : x, y, z \geq 0 \rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$2^o\ octante : x \leq 0\ e\ y, z \geq 0 \rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

$$3^o\ octante : x, y \leq 0\ e\ z \geq 0 \rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$4^o\ octante : y \leq 0\ e\ x, z \geq 0 \rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$$

(Onserve que nesses *quatros octantes* fizemos uma rotação completa, considerando $z \geq 0$)

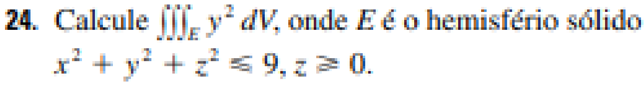
$$5^o\ octante : x, y \geq 0\ e\ z \leq 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$6^o\ octante : y \geq 0\ e\ x, z \leq 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi,\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

(notem que no 5^o e 6^o octantes, estamos basicamente repetindo os *quatros octantes* inicias, com apenas uma única diferença z é ≤ 0)

Visto o comportamento dos octantes, podemos realizar alguns problemas, oferecidos no livro *Cálculo, vól. 2* de *James Stewart*, em sua 7^a edição:

1.1 Problema 1



24. Calcule $\iiint_E y^2\, dV$, onde E é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

Figure 5: Questão 24 do Capitulo 15.9

Comecemos primeiro a descobrir o intervalo das variáveis da função, dado que:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

Podemos assumir:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \to \rho^2 = 9 \therefore 0 \leq \rho \leq 3$$

Descobrimos o intervalo de ρ, resta saber o intervalo de θ e ϕ, para isso vamos utilizar de:

$$z \geq 0$$

Pode não parecer muito, porém tal informação já oferece muito, pois ao saber que z assume apenas valores positivos, estamos assumindo que a esfera cobre todos os *quatros primeiros octantes*, pois a única restrição é sobre z, enquanto x e y assumem tanto valores positivos quanto negativos:

$$z \geq 0 \to 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Com isso sabemos todos os intervalos necessários, agora vamos arrumar a integral:

$$\int\int\int_E y^2 dV$$

Vejam que a *função* a ser integrada é y^2, e como planejamos mudar para coordenas esfericas, vimos que as transformações a serem feitas são:

$$x = \rho * sen(\phi) * cos(\theta)$$

$$y = \rho * sen(\phi) * sen(\theta)$$

$$z = \rho * cos(\phi)$$

(Sabemos que o Jacobiano da mesma)

$$J = \rho^2 * sen(\phi)$$

Aplicando a transformação em nossa integral teriamos:

$$\int\int\int_E (\rho * sen(\phi) * sen(\theta))^2 * \rho^2 sen(\phi)\ d\rho d\phi d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 \rho^4 * sen^3(\phi) * sen^2(\theta)\ d\rho d\phi d\theta$$

(Resolvendo a integral em relação a ρ, colocando as constantes multiplicativas para fora da mesma)

$$sen^3(\phi) * sen^2(\theta)\int_0^3 \rho^4\ d\rho = sen^3(\phi) * sen^2(\theta) * \left[\frac{3^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = 48,6 * sen^3(\phi) * sen^2(\theta)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 \rho^4 * sen^3(\phi) * sen^2(\theta)\ d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 48,6 * sen^3(\phi) * sen^2(\theta)\ d\phi d\theta$$

(Resolvendo a integral em releção a ϕ, colocando as constantes multiplicativas para fora da mesma)

$$48,6 * sen^2(\theta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3(\phi)\ d\phi$$

$$48,6 * sen^2(\theta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^1(\phi) sen^2(\phi)\ d\phi$$

$$48,6 * sen^2(\theta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^1(\phi)(1 - cos^2(\phi))\ d\phi$$

$$u = cos(\phi) \therefore du = -sen(\phi) d\phi \rightarrow -du = sen(\phi) d\phi$$

$$48,6 * sen^2(\theta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(1 - u^2)\ du$$

$$48,6 * sen^2(\theta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} -1 + u^2\ du$$

$$48,6 * sen^2(\theta) * \left[-u + \frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$48,6 * sen^2(\theta) * \left[-cos(\phi) + \frac{cos(\phi)^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 48,6 * sen^2(\theta) * \left[1 - \frac{1}{3}\right] = 32,4 * sen^2(\theta)$$

(Logo nossa integral ficaria)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 48,6 * sen^3(\phi) * sen^2(\theta)\ d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} 32,4 * sen^2(\theta) d\theta$$

(Por fim realizando a última integral)

$$32,4 \int_0^{2\pi} sen^2(\theta) d\theta$$

(para resolver a integral vai ser necessário utilizar a seguinte identidade trigonométrica)

$$se\ cos(a + a) = cos(2a) = cos(a) * cos(a) - sen(a) * sen(a)$$

$$cos(2a) = cos^2(a) - sen^2(a) = (1 - sen^2(a)) - sen^2(a)$$

$$cos(2a) = 1 - 2sen^2(a)$$

$$sen^2(a) = \frac{1 - cos(2a)}{2}$$

$$32,4 \int_0^{2\pi} \frac{1 - cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$16,2 \int_0^{2\pi} 1 - cos(2\theta) d\theta$$

$$16,2 \left[\theta - \frac{sen(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} = 16,2\,[2\pi - 0] = 32,4\pi$$

Temos então que a solução é $32,4\pi$.

1.2 Problema 2

26. Calcule $\iiint_E xyz\, dV$, onde E fica entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.

Figure 6: Questão 26 do Capítulo 15.9

Seguimos com a mesma lógica, descobrimos primeiro os intervalos das variáveis a quais iremos trabalhar, para então fazer a integral:

$$\rho = 2 \ e \ \rho = 4$$

A questão nos oferece que $\boldsymbol{E}$ está entre duas esferas, com raios de 2 e 4, respectivamente, tal que poderiamos dizer que o *raio* desse sólido $\boldsymbol{E}$ seria:

$$2 \leq \rho \leq 4$$

O problema oferece que, o mesmo sólido está acima de um cone:

$$\phi = \frac{\pi}{3}$$

Lembrando que quanto mais próximo de *0*, mais acima se encontra a figura, logo teriamos:

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$$

Em relação a θ, não é oferecido nenhuma informação, logo utilizaremos a rotação total de 360^o:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Tendo em conhecimento todos os intervalos, podemos focar na integral:

$$\int\int\int_E xyz \ dV$$

(aplicando a transformação)

$$\int\int\int_E (\rho sen(\phi)cos(\theta)) * (\rho sen(\phi)sen(\theta)) * (\rho cos(\phi)) * \mathbf{psen(\phi)} \ d\rho d\phi d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_2^4 \rho^4 sen^3(\phi)cos(\phi)cos(\theta)sen(\theta) \ d\rho d\phi d\theta$$

(Resolvendo a integral em relação a ρ)

$$sen^3(\phi)cos(\phi)cos(\theta)sen(\theta)\int_2^4 \rho^4 \ d\rho$$

$$sen^3(\phi)cos(\phi)cos(\theta)sen(\theta)\left[\frac{4^5}{5} - \frac{2^5}{5}\right] = 198,4 * sen^3(\phi)cos(\phi)cos(\theta)sen(\theta)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_2^4 \rho^4 sen^3(\phi)cos(\phi)cos(\theta)sen(\theta) \ d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 198,4 * sen^3(\phi)cos(\phi)cos(\theta)sen(\theta) \ d\phi d\theta$$

(Resolvendo a integral em relação a ϕ)

$$198,4 * cos(\theta)sen(\theta) * \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^3(\phi)cos(\phi) \ d\phi$$

(iremos utilizar de substituição)

$$u = sen(\phi) \therefore du = cos(\phi)d\phi$$

$$198,4 * cos(\theta)sen(\theta) * \int_0^{\frac{\pi}{3}} u^3(\phi)\ du$$

$$198,4 * cos(\theta)sen(\theta) * \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$198,4 * cos(\theta)sen(\theta) * \left[\frac{sen^4(\phi)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$198,4 * cos(\theta)sen(\theta) * \left[\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^4}{4}\right] = 198,4 * cos(\theta)sen(\theta) * \left[\frac{(\frac{9}{16})}{4}\right] = 27,9 * cos(\theta)sen(\theta)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 198,4 * sen^3(\phi)cos(\phi)cos(\theta)sen(\theta)\ d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} 27,9 * cos(\theta)sen(\theta)\ d\theta$$

(Resolvendo a última integral)

$$27,9\int_0^{2\pi} cos(\theta)sen(\theta)\ d\theta$$

(também utilizaremos de substituição para resolver)

$$u = sen(\theta) \therefore du = cos(\theta)d\theta$$

$$27,9\int_0^{2\pi} u\ du$$

$$27,9\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 27,9\left[\frac{sen^2(\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} = 27,9\left[0-0\right] = 0$$

Temos então que o vólume desse sólido é *0*.