APLICAÇÃO DE DERIVADAS: ***GRÁFICOS***

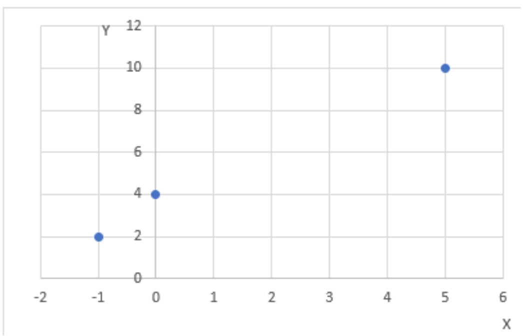
Uma aplicação interessante das derivadas é para a criação de gráficos, no início para criar gráficos normalmente fazíamos ligações de pontos dada as coordenadas, por exemplo dizíamos que:

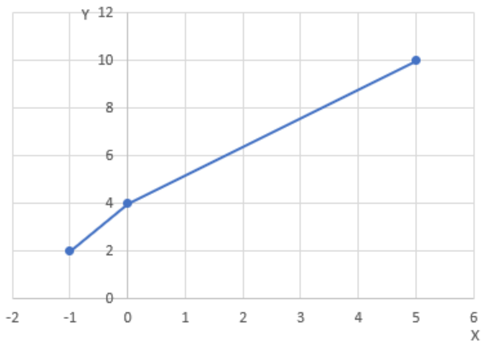
$$f(5) = 10$$

$$f(-1) = 2$$

$$f(0) = 4$$

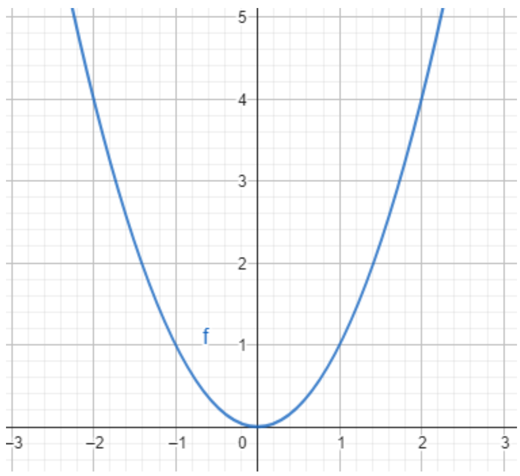
E a partir desses colocaríamos os pontos no nosso gráfico cartesiano, para logo depois ligar os mesmo em uma linha:





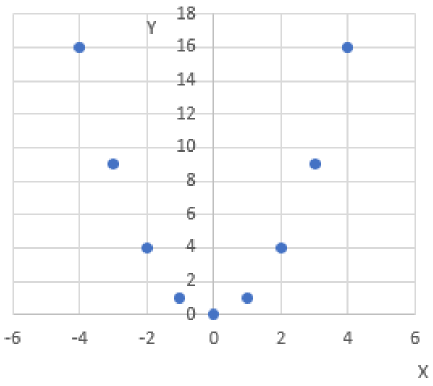
Conseguiamos fazer pequenos gráficos seguindo tal ideia, porém havia casos onde a reta não parecia ser o suficiente como quando tinhamos uma função:

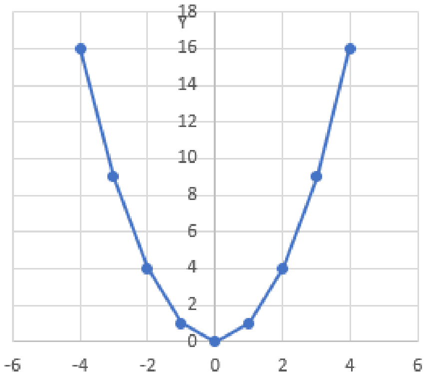
$$f(x) = x^2$$



DESISTÊNCIA NÃO É ACEITÁVEL, É REPUGNANTE, PREFIRO QUE TENTEM E FALHEM, QUANTAS VEZES FOREM NECESSÁRIAS. ~ ANÓNIMO

Percebam que se fossemos fazer um gráfico de linha conectando ponto a ponto dessa função teríamos:



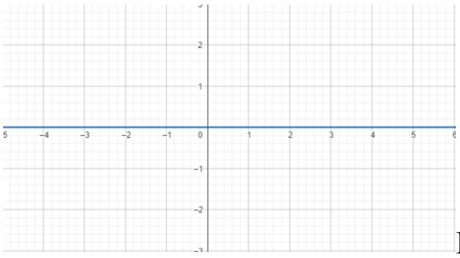


Vejam que a suavidade da curva é perdida, porém vimos na parte de derivadas que conseguiríamos obter tal suavidade por meio de diversas retas tangentes quando nossa a diferença entre 2 pontos é quase nula, por meio das derivadas de 1ª ordem. Porém existem algumas funções um tanto quanto complicadas, pois até as próprias derivadas tem o seu próprio comportamento tal como uma curva, para isso deveríamos aplicar uma segunda derivada para pegar conseguir capturar o formato quase perfeitamente.

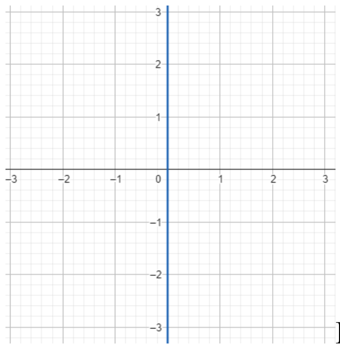
Sabendo a importância das derivadas para a criação dos gráficos deveríamos por tal em prática, em si para criar um gráfico e tal como uma receita, a qual tem seus passos, da mesma forma iremos seguir:

1. ***Domínio da função***: Nesse passo buscamos saber se existe um ou mais pontos em específico que a função não exista, pois caso ocorra teremos em conhecimento que a função agirá de forma estranha quando se aproxima desse(s) ponto(s), a qual verificaremos mais à frente.

2. ***Interceptos***: Os interceptos nada mais são que os pontos em que a reta toca nos eixos, isso facilitará no momento de desenhar o gráfico.



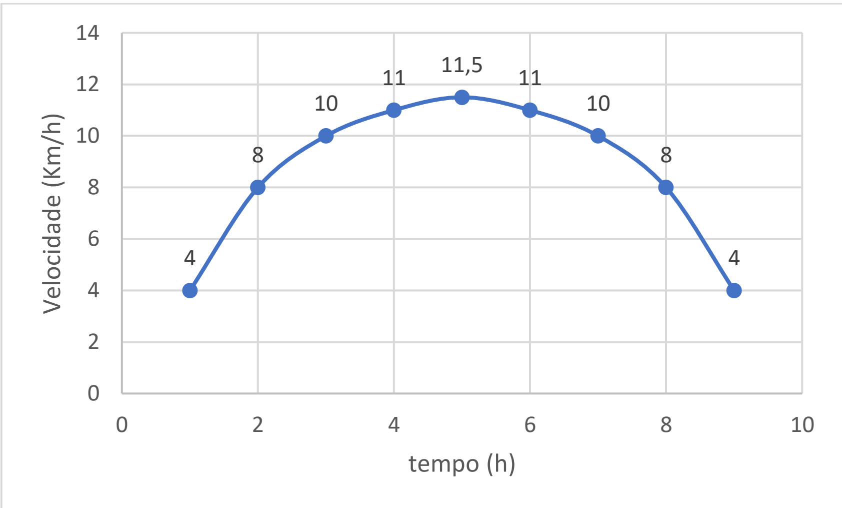
Eixo X, onde Y=0;



Eixo Y, onde X=0;

3. ***Assíntotas***: As Assíntotas são divididas em 2, **Assíntotas Verticais** quando x tende aos pontos que abordamos no passo 1, ou seja, o ponto onde a função não existe e a mesma tende a valores infinitos; **Assíntotas Horizontais** ocorre quando o valor da nossa função converge a algum valor inteiro quando nosso x vai para $+\infty$ ou $-\infty$, faz sentido pois se a nossa variável vai para infinito esperamos que a função também vá;

4. ***Ponto Crítico***: Vejam a ideia do ponto crítico é basicamente, existe um ponto a qual a função chegará no seu maior ou menor valor em determinado intervalo, vejam o seguinte exemplo;



Velocidade	4	8	10	11	11,5	11	10	8
aceleração	4	2	1	0,5	0	-1	-2	-4
tempo	1	2	3	4	5	6	7	8

Observem que a velocidade chega no máximo nesse intervalo de 1 até 8 horas, ao bater exatamente 5 horas, e o que definiu tal foi quando a aceleração do veículo chegou a zero, e o que é a aceleração? A taxa a qual a função (Velocidade) varia com a variável (tempo), ou seja, quando a ***derivada*** da velocidade ***é igual a zero***. Lembrando que dependendo da função, pode existir vários pontos críticos, pois existem diversos pontos em x que fazem a derivada igualar a zero, e que esse ponto onde a derivada é 0, pode ser um ponto de máximo ou mínimo, aquilo que dirá em qual categoria entra esse ponto vai ser o próximo passo.

5. ***Momentos de Crescimento e Decrescimento***: No exemplo acima vemos que antes de atingir o valor máximo, a aceleração do carro estava positiva, consequentemente a velocidade está aumentando, e quando chegou no ponto crítico, derivada igual a 0, passou a ser negativa, consequentemente a velocidade passou a diminuir, ou seja, a função antes do ponto crítico estava *Crescendo* e após começou a *Decrescer*, se a derivada se comporta dessa forma consideramos esse *ponto de máximo*. Porém se a função estivesse *Decrescendo* antes do ponto crítico, e após o mesmo começasse a *Crescer* diríamos que o ponto crítico é um *ponto mínimo*. Fazemos para cada ponto crítico, por haver vários teríamos por exemplo diversos pontos de máximo, porém um deles é maior que todos os outros, esse chamaríamos de *ponto máximo absoluto*, e o restante de *ponto máximo local*, a mesma lógica é aplicado ao *ponto mínimo*;

6. ***Ponto de Inflexão***: o Ponto de inflexão definirá a *curva da taxa de variação*, vejam que a aceleração está sempre diminuindo, porém a casos onde a mesma, em um intervalo está crescendo, e outro está diminuindo, tal como a própria função de velocidade. Da mesma forma o ponto de inflexão dirá o ponto em que a própria derivada muda de crescimento para decrescimento, seguindo a mesma ideia a qual a derivada dessa derivada seja igual a 0, ou seja, a *derivada de 2ª ordem seja 0*;

7. ***Concavidade***: Descoberto o ponto de inflexão, se o mesmo existir, podemos descobrir o tipo de curva que a função possui antes e após o ponto, ***se o valor da segunda derivada antes do ponto for positivo teremos uma concavidade para baixo como um ∪ e se o valor for negativo a concavidade será para cima ∩*** , vejam que a concavidade para baixo cria um ponto mínimo, enquanto a concavidade para cima um ponto máximo, que dependendo do caso poderemos chamar de ponto máximo local ou mínimo local, nas resolução exploraremos mais a fundo;

8. ***Desenhar o Gráfico***: Temos tudo que é necessário para desenhar o gráfico, temos pontos que nos ajudarão a nós guiar no desenho (Intercepto, Domínio, Ponto Crítico e Ponto de Inflexão), e os momentos que a função está crescendo e diminuindo junto com as concavidades que cada um possui.

CRIANDO GRÁFICOS

1. ***Primeiro vamos criar o gráfico de uma função popular:***

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$$

Estamos sempre vendo esse tipo de função, por que não explorar a mesma não? Vamos começar indo passo a passo:

1- **Domínio**: $D = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

Sabemos que em uma função quociente o denominador não pode ser igual a 0, por isso que dizemos que o domínio da função é que *x* pertence aos números Reais, exceto que o mesmo não assume o valor 0;

2- Intercepto:

X	**Y**
0	Não está definida
Não existe	**0**

Veja que quando $x = 0$ a função não existe, logo sabemos que a reta não tocará no eixo *Y*, e quando $y = 0$ não tem ponto *x* que faça isso ocorrer, pois em uma função quociente a única forma de a função da 0, e se o numerador for 0, porém $1 \neq 0$, logo a reta também não tocará no eixo *X*.

3- **Assíntotas**:

Assíntotas Verticais -> Verificaremos o que acontece com a função quando $x \to 0$;

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \; e \; \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Com isso sabemos que temos uma Assíntota Vertical no ponto $x = 0$ e que a função vai para $-\infty$ e $+\infty$, quando a função se aproxima de zero.

Assíntotas Horizontais -> Verificaremos se a função converge com valores elevados de *x;*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \; e \; \lim_{x \to +\infty} 0$$

O que acontece é que, como tínhamos dito anteriormente a reta não tocará no Eixo *X*, ela irá apenas ficar bem próxima ao ponto de dizer que a função tende a zero ao infinito, ou seja, converge a zero.

4- **Ponto Crítico**: $f'(x) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{x} \therefore f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Observe que não existe ponto x que faça o numerador ser igual a 0, por isso consideramos que não há um ponto crítico na função.

5- **Momentos de Crescimento e Decrescimento**:

Como não temos um ponto crítico, veremos como a taxa se comporta antes e depois do ponto em que a função não existe ($x = 0$);

$$f'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} = -1 \; a\ função\ está\ decrescendo \ \downarrow$$
$$f'(1) = -\frac{1}{(1)^2} = -1 \; a\ função\ está\ decrescendo \ \downarrow$$

Temos que a função está decrescendo antes e após o ponto $x = 0$.

6- **Ponto de inflexão**: $f''(x) = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \therefore f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Da mesma forma não há ponto de inflexão dado o mesmo motivo visto no ponto crítico;

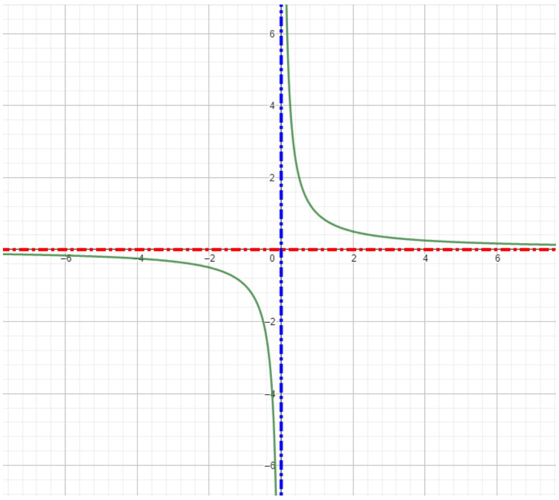
7- **Concavidade**:

Seguindo a mesma lógica feita no passo de verificar os momentos de crescimentos e decrescimentos, veremos a concavidade antes e depois do ponto ($x = 0$);

$$f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 \; a\ concavidade\ é\ para\ baixo \ \cap$$
$$f''(1) = \frac{2}{(1)^3} = 2 \; a\ concavidade\ é\ para\ cima \ \cup$$

Vemos que mesmo sem o ponto de inflexão, temos uma mudança de concavidade.

8- **Desenhamos o gráfico**:



A linha azul é a Assíntota vertical, vejam o que ocorre com a função quando a mesma se aproxima de zero pelos lados, pelo lado 0^- ela vai para $-\infty$ e pelo lado 0^+ ela vai para $+\infty$. A linha Vermelha é a Assíntota Horizontal, percebam que a função vai se aproximando do eixo X ($y = 0$) quando o x vai aumentando ou diminuindo o seu valor, porém não toca no mesmo. Vejam também a concavidade antes de 0 a concavidade se encontra para cima, e após o 0 ela está para baixo. E com isso terminamos de criar o gráfico da função.

2. ***Agora vamos criar o gráfico da seguinte função:***

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2}}$$

1- **Domínio:** $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$;

2- **Interceptos:**

X	Y
0	Não está definida
$-0,5 \pm \sqrt{5}/2$	**0**

Para descobrir o valor de x que faz que $y = 0$, basta aplicar Bhaskara no numerador do quociente.

3- **Assíntotas:**

Vertical - > $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+x-1}{x^2} = \frac{-}{+} = -\infty$ *e* $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+x-1}{x^2} = \frac{-}{+} = -\infty$

Horizontal -> $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x-1}{x^2} = 1$ *e* $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-1}{x^2} = 1$

É esperado que tenham em conhecimento como resolver limites, dado que esse foi um dos primeiros assuntos, na dúvida retornem ao resumo de Limites e Continuidade.

4- **Ponto Crítico**: $f'(x) = 0$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x)} = 0 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \boldsymbol{\frac{-x+2}{x^3}}$$

$$\frac{-x+2}{x^3} = 0 \therefore \boldsymbol{x = 2}$$

5- Momentos de Crescimento e Decrescimento:

Lembrando que temos o ponto crítico $x = 2$ e o ponto onde a função não está definida $x = 0$, logo verificaremos o valor da derivada nos seguintes intervalos $(-\infty, 0); (0, 2); (2, +\infty)$.

Para o intervalo $(-\infty, \mathbf{0})$ escolhi pegar o ponto $x = -1$

$$f'(-1) = \frac{-(-1)+2}{(-1)^3} = -3, \qquad função\ está\ \downarrow nesse\ intervalo;$$

Para o intervalo $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$ escolhi pegar o ponto $x = 1$

$$f'(1) = \frac{-(1)+2}{(1)^3} = 1, \qquad função\ está\ \uparrow nesse\ intervalo;$$

Para o intervalo $(\mathbf{2}, +\infty)$ escolhi pegar o ponto $x = 5$

$$f'(1) = \frac{-(5)+2}{(5)^3} = \frac{-3}{125}, \qquad função\ está\ \downarrow nesse\ intervalo;$$

6- **Ponto de inflexão**: $f''(x) = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$\frac{2x-6}{x^4} = 0 \therefore \boldsymbol{x = 3}$$

7- Concavidade:

Da mesma forma que o passo 5, temos o ponto de inflexão $x = 3$ e o ponto onde a função não está definida $x = 0$, com isso verificaremos a concavidade nos seguintes intervalos $(-\infty, 0)$; $(0, 3)$; $(3, +\infty)$

Para o intervalo $(-\infty, \mathbf{0})$ escolhi pegar o ponto $x = -1$

$$f''(-1) = \frac{2 \cdot (-1) - 6}{(-1)^4} = -8, \qquad a\ concavidade\ nesse\ intervalo\ \text{é}\ \cap;$$

Para o intervalo $(\mathbf{0}, \mathbf{3})$ escolhi pegar o ponto $x = 1$

$$f''(1) = \frac{2 \cdot (1) - 6}{(1)^4} = -6, \qquad a\ concavidade\ nesse\ intervalo\ \text{é} \cap;$$

Para o intervalo $(\mathbf{3}, +\infty)$ escolhi pegar o ponto $x = 5$

$$f''(5) = \frac{2 \cdot (5) - 6}{(5)^4} = \frac{4}{625}, \qquad a\ concavidade\ nesse\ intervalo\ \text{é}\ \cup;$$

8- **Desenhe o Gráfico**:
Já temos tudo que é necessário para desenhar o gráfico, o gráfico é a Rose e você é Jack, desenhe-o como uma de suas francesas.

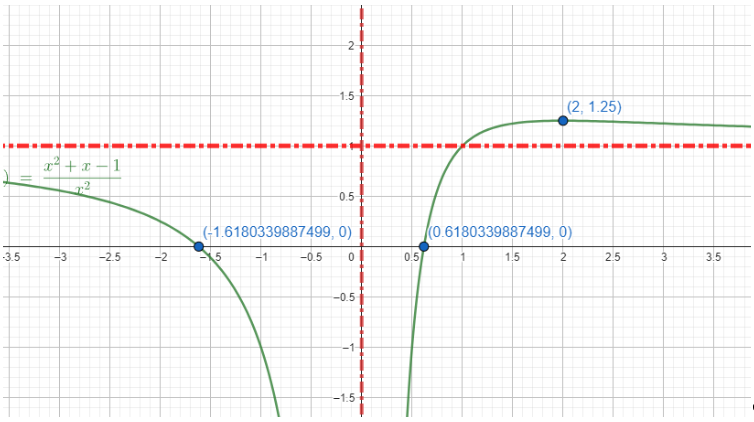


Gráfico destacando os pontos de intercepto e ponto crítico.

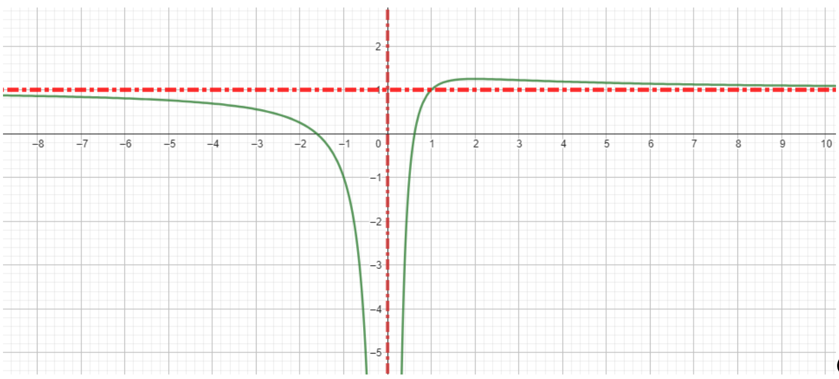


Gráfico.

DESISTÊNCIA NÃO É ACEITÁVEL, É REPUGNANTE, PREFIRO QUE TENTEM E FALHEM, QUANTAS VEZES FOREM NECESSÁRIAS. ~ ANÓNIMO