Combinações e Independência Lineares

Diretório de Apoio Acadêmico

1 Combinação Linear

A combinação linear é uma das características mais importantes de um *Espaço Vetorial*, pois é através da mesma que conseguimos obter novos vetores por meio de **vetores existentes**. Por exemplo, considerando um espaço vetorial $\mathbf{V}$, com $v_1, v_2, v_3, ..., v_n \in \mathbf{V}$ e $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$, a qual:

$$\mathbf{v} = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n, \ \textit{É a combinaсão linear dos } v_i;$$

Se fixado os vetores v_i, ou seja, atribuimos valores específicos para cada vetor, como:

$$v_1 = (2, 4, ..., 4);$$
$$v_2 = (3, 1, ..., 2);$$
$$\vdots$$
$$v_n = (1, 1, ..., 1);$$

Poderiamos criar um conjunto $\mathbf{W}$, que representaria um *Subespaço Vetorial* de $\mathbf{V}$, formado pelas combinações lineares de todos os vetores de $\mathbf{V}$.

$$\mathbf{W} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$$

Onde:

$$\mathbf{v}_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$
$$\mathbf{v}_2 = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{v}_n = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

Considerando nosso exemplo de vetores fixados, teriamos:

$$\mathbf{v}_1 = a_1 * 2 + a_2 * 3 + ... + a_n * 1$$
$$\mathbf{v}_2 = a_1 * 4 + a_2 * 1 + ... + a_n * 1$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{v}_n = a_1 * 4 + a_2 * 2 + ... + a_n * 1$$

Outra forma de visualizar tal seria:

$$\mathbf{W} = a_1 * (2, 4, ..., 4) + a_2 * (3, 1, ..., 2) + ... + a_n * (1, 1, ..., 1)$$

Para fixar, considere os seguintes exemplos:

1.0.1 Exemplo 1

Dado $v_1 = (2,0,1)$, $v_2 = (0,1,2)$ e $v_3 = (4,1,2)$, onde $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{V}$. Tendo essas informações, qual seria a combinação Linear para um conjunto $\mathbf{W}(x,y,z)$, com $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}$?

$$(x,y,z) = a_1 * v_1 + a_2 * v_2 + a_3 * v_3$$
$$(x,y,z) = a_1 * (2,0,1) + a_2 * (0,1,2) + a_3 * (4,1,2)$$

Percebam que quando abrimos a soma, teriamos um sistema de equações:

$$\begin{aligned} a_1 * 2 + a_2 * 0 + a_3 * 4 &= x \\ a_1 * 0 + a_2 * 1 + a_3 * 1 &= y \\ a_1 * 1 + a_2 * 2 + a_3 * 2 &= z \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, teriamos:

$$(I)$$
$$\begin{aligned} a_1 + 4 * \frac{z - a_1 - 2a_2}{2} &= x \\ a_2 + \frac{z - a_1 - 2a_2}{2} &= y \\ a_3 = \frac{z - a_1 - 2a_2}{2} \end{aligned}$$

$$(II)$$
$$\begin{aligned} a_1 - 4 * \frac{a_1}{2} + 4 * \frac{z - 2a_2}{2} &= x \\ a_2 - \frac{2a_2}{2} + \frac{z - a_1}{2} &= y \\ a_3 = \frac{z - a_1 - 2a_2}{2} \end{aligned}$$

$$(III)$$
$$\begin{aligned} -a_1 + 2z - 4a_2 &= x \\ \frac{z - a_1}{2} &= y \\ a_3 = \frac{z - a_1 - 2a_2}{2} \end{aligned}$$

$$(IV)$$
$$\begin{aligned} -(z - 2y) + 2z - 4a_2 &= x \\ a_1 &= z - 2y \\ a_3 = \frac{z - (z - 2y) - 2a_2}{2} \end{aligned}$$

$$(V)$$
$$a_2 = \frac{z+2y-x}{4}$$
$$a_1 = z - 2y$$
$$a_3 = \frac{2y-2a_2}{2} = y - \frac{z+2y-x}{4}$$

$$(VI)$$
$$a_2 = \frac{z+2y-x}{4}$$
$$a_1 = z - 2y$$
$$a_3 = \frac{2y-z+x}{4}$$

Logo, poderiamos obter qualquer vetor do subespaço **W**, por meio:

$$\mathbf{W}(x,y,z) = (z-2y) * \langle 2,0,1\rangle + \left(\frac{z+2y-x}{4}\right)\langle 0,1,2\rangle + \left(\frac{2y-z+x}{4}\right)\langle 4,1,2\rangle$$

1.0.2 Exemplo 2

Utilizando do subespaço anterior **W**, descubra os valores das combinações lineares, quando:
a) $(x,y,z) = (2,0,1)$
b) $(x,y,z) = (1,1,1)$
c) $(x,y,z) = (0,0,1)$
d) $(x,y,z) = (2,2,0)$

Para o primeiro caso, a)$(x,y,z) = (2,0,1)$ teriamos:

$$\mathbf{W}(2,0,1) = (1-2*0) * \langle 2,0,1\rangle + \left(\frac{1+2*0-2}{4}\right)\langle 0,1,2\rangle + \left(\frac{2*0-1+2}{4}\right)\langle 4,1,2\rangle$$
$$\mathbf{W}(2,0,1) = (1) * \langle 2,0,1\rangle + \left(\frac{-1}{4}\right)\langle 0,1,2\rangle + \left(\frac{1}{4}\right)\langle 4,1,2\rangle$$
$$\mathbf{W}(2,0,1) = \langle 2,0,1\rangle + \langle 0,\frac{-1}{4},\frac{-1}{2}\rangle + \langle 1,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\rangle = \langle 3,0,1\rangle$$

Para o segundo caso, b)$(x,y,z) = (1,1,1)$ teriamos:

$$\mathbf{W}(1,1,1) = (1-2*1) * \langle 2,0,1\rangle + \left(\frac{1+2*1-1}{4}\right)\langle 0,1,2\rangle + \left(\frac{2*1-1+1}{4}\right)\langle 4,1,2\rangle$$
$$\mathbf{W}(1,1,1) = (-1) * \langle 2,0,1\rangle + \left(\frac{1}{2}\right)\langle 0,1,2\rangle + \left(\frac{1}{2}\right)\langle 4,1,2\rangle$$
$$\mathbf{W}(1,1,1) = \langle -2,0,-1\rangle + \langle 0,\frac{1}{2},1\rangle + \langle 2,\frac{1}{2},1\rangle = \langle 0,1,1\rangle$$

Faça o mesmo para os dois últimos casos.

2 Indepêndencia e Dependência Linear

Um ponto importante a se notar quando se é feita a combinação linear, é se existe uma indepêndencia entre os vetores, ou seja, não haja um vetor que seja uma combinação linear de outro. Utilizaremos da seguinte equação para verificação:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = \mathbf{0}$$

o equação acima implica que se os vetores são independentes a única forma de resultar em **0** cada equação, é se $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, caso um desses demonstre ser diferente de **0** pelomenos um dos vetores é combinação linear de outro. Para visualizar considere, os seguintes vetores:

$$v_1 = (1, 0, 0, 0);\ v_2 = (0, 1, 0, 0);\ v_3 = (0, 0, 1, 0);\ v_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Abrindo o sistema de equações teriamos:

$$\begin{aligned}
a_1 * 1 + a_2 * 0 + a_3 * 0 + a_4 * 0 = 0\\
a_1 * 0 + a_2 * 1 + a_3 * 0 + a_4 * 0 = 0\\
a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3 * 1 + a_4 * 0 = 0\\
a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3 * 0 + a_4 * 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0\\
a_2 &= 0\\
a_3 &= 0\\
a_4 &= 0
\end{aligned}$$

Observe que no fim temos que a única forma de obter um *vetor nulo* pela combinação linear, é se as constantes forem iguais a 0. Vamos alterar um dos vetores, para ver oque acontecerá:

$$v_1 = (1, 0, 0, 1);\ v_2 = (0, 1, 0, 0);\ v_3 = (0, 0, 1, 0);\ v_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Abrindo o sistema de equações teriamos:

$$\begin{aligned}
a_1 * 1 + a_2 * 0 + a_3 * 0 + a_4 * 1 = 0\\
a_1 * 0 + a_2 * 1 + a_3 * 0 + a_4 * 0 = 0\\
a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3 * 1 + a_4 * 0 = 0\\
a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3 * 0 + a_4 * 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -a_4\\
a_2 &= 0\\
a_3 &= 0\\
a_4 &= 0
\end{aligned}$$

Observe que o valor da constante a_1 depende da constante a_4, porém como sabemos que $a_4 = 0 \therefore a_1 = 0$, logo ainda estamos lidando com vetores lineamentes independentes. Vejamos agora quando:

$$v_1 = (1, 0, 0, 2);\ v_2 = (0, 1, 0, 0);\ v_3 = (0, 0, 1, 0);\ v_4 = (2, 0, 0, 4)$$

Abrindo o sistema de equações teriamos:

$$\begin{aligned}
a_1 * 1 + a_2 * 0 + a_3 * 0 + a_4 * 2 = 0 \\
a_1 * 0 + a_2 * 1 + a_3 * 0 + a_4 * 0 = 0 \\
a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3 * 1 + a_4 * 0 = 0 \\
a_1 * 2 + a_2 * 0 + a_3 * 0 + a_4 * 4 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 + 2a_4 &= 0 \\
a_2 &= 0 \\
a_3 &= 0 \\
2a_1 + 4a_4 &= 0
\end{aligned}$$

Note que se $a_1 = -2a_4$ teriamos que a última equação $2a_1 + 4a_4 = 0$ seja indefinida, pois $2 * 2a_4 - 4a_4 = 0 \therefore 0 = 0$. Quando ocorrem casos parecidos, teriamos que o vetor **4** é linearmente dependente do vetor **1**, podemos notar tal, ao perceber que o $v_4 = 2 * v_1$, há casos onde existe a presença de outros vetores como $v_k = 2v_i + v_j$, entre diversos casos, e com isso concluímos com esse tópico.