DERIVADAS: REGRAS DE DERIVAÇÃO

7. DERIVADA DO LOGARITMO:

Na última derivada, utilizamos de logaritmos, e de propriedades do mesmo, porém não fora mostrado como seria a derivação do mesmo, por exemplo e se quiséssemos derivar:

$$f(x) = \ln x$$

Já conhecem o processo, ele não vai ser tão diferente agora:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} =$$

Aplicando uma das propriedades vistas na página anterior, temos que a subtração dos logaritmos, é a divisão entre os valores dentro:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

Com isso iremos fazer uma mudança de variável, vamos dizer que existe um t, tal que $t = \frac{h}{x}$ e pela lógica teríamos $h = tx$, com isso nossa função seria:

$$f'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{tx} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$$

Agora resta apenas descobrir o $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$, se fossemos buscar o limite dessa função poderíamos verificar os limites laterais, e observar que a mesma tende a **1**, logo:

$$f'(x) = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$$

Com isso chegamos na derivada do logaritmo, para terminar coloquemos em prática com um exemplo:

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + xe^{2x}}\right)$$

Nesse exemplo temos de tudo e um pouco, no que isso mudará em nossa forma de derivar? Em nada, seguimos a ideia de trabalhar cada função separadamente, e depois junta-las, levando as seguintes considerações:

$$g = \sqrt{x^2 + xe^{2x}} \therefore g = \sqrt{h}$$

$$h = x^2 + xe^{2x}$$

$$f(g) = \ln g \therefore f'(g) = \frac{1}{g} \cdot g'$$

$$g = \sqrt{h} \therefore g' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot h'$$

$$h = x^2 + xe^{2x} \therefore h' = 2x + \ [1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2]$$

Observem que *h* é uma soma, ou seja, podemos trabalhar separadamente a derivada entre os elementos, tal que com x^2 usamos a regra da cadeia, e com xe^{2x} fora necessário usar a regra do produto e da cadeia. Feito tudo isso, basta retorna à função original e ir acrescentando veja:

$$f(g) = \ln g \therefore$$

$$f'(g) = \frac{1}{g} \cdot g' \rightarrow$$

$$f'(h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot h' \rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + xe^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + xe^{2x}}} \cdot (2x + \ [1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2])$$

Arrumando essa aberração que fora feita, teríamos:

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + xe^{2x}}}\right)^2 \cdot (2x + \ e^{2x} + 2xe^{2x}) = \boldsymbol{\frac{1}{2} \cdot \frac{2x + \ e^{2x} + 2xe^{2x}}{(x^2 + xe^{2x})}}$$

Pronto com isso vocês já pegaram grande parte das derivadas, e viram que em grande parte das vezes não estamos apenas derivando uma única função, e sim pode ser várias juntos, levando a essa necessidade de uso das diversas regras que vimos, pois imaginem derivar essa última função pela definição? Já perceberam que derivar pela definição nos casos simples é cansativo, agora derivar uma função dessas pela definição seria o cúmulo do bom senso, logo entendam a lógica das regras.