LISTA DE PROVAS (ÁREA II)
Implícita e Taxas Relacionadas

Enunciados

1º EE. - 2008.1

1. Considere a curva com equação $x^2 + xy + y^2 = 3$.

   (a) (1,0) Use diferenciação implícita para determinar $y' = dy/dx$.

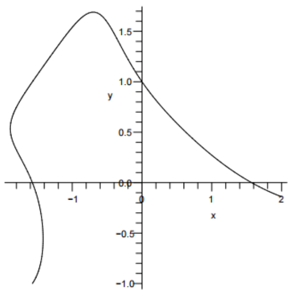
   (b) (1,0) Determine os pontos da curva nos quais a reta tangente é horizontal.

2º EE. - 2008.1

2. (1,5) Um holofote no chão ilumina uma parede a uma distância de 10 m. Um homem de 2 m de altura caminha do holofote em direção à parede a uma velocidade constante igual a 3 m/s. Qual a velocidade de decrescimento de sua sombra sobre a parede quando o homem está a 8 m da parede?

1º EE. - 2009.2

1. (1,5) Determine a reta tangente no ponto $(0, 1)$ da curva definida implicitamente pela equação $\operatorname{sen}(xy) + y = \cos x$.



1º EE. – 2011.2

3ª Questão (2,0 pontos) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da curva com equação $x^2 - 3x^3y^2 + y^2 - 2x = -9$ no ponto $(1, -2)$.

1º EE. – 2012.2

3 - (2,0 pontos) Considere a curva plana dada pela equação

$$x^3 + xy^2 - 2y^3cos(x) + y\ tg(x^3) + 2y^2 = 0.$$

Determine equações da reta tangente e da reta normal a esta curva no ponto $(0, 1)$.

1º EE. – 2015.2

2. Determine a equação da reta tangente à curva

$$\mathcal{C} := \sec(xy) + xe^{y^2} = \ln\left(x^2 + y^4 + 1\right) + y + 1$$

no ponto $(0, 0) \in \mathcal{C}$.

1º EE. – 2016.1

1. Considere a curva plana C definida por

$$x^3y^2 + x^2 - 5y + x\,\text{sen}\,y = 1.$$

(a) $(1,0$ ponto$)$ Encontre $y' = \dfrac{dy}{dx}$ usando derivação implícita.

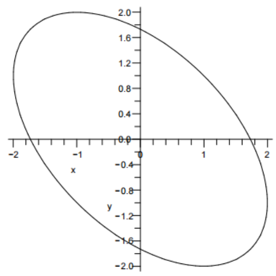
(b) $(1,0$ ponto$)$ Obtenha uma equação para a reta tangente à curva C no ponto $(1, 0)$.

Gabarito

1º EE. - 2008.1

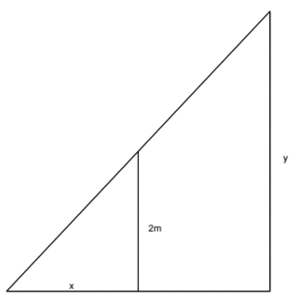
1. (a) $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$.

   (b) Nos pontos (x, y) da curva nos quais a reta tangente é horizontal temos que a derivada é zero. Assim, devemos ter $y = -2x$. Substituindo $y = -2x$ na equação da curva temos que $x^2 = 1$, ou seja, $x = 1$ ou $x = -1$. Portanto, os pontos são: $(1, -2)$ e $(-1, 2)$.



2º EE. - 2008.1

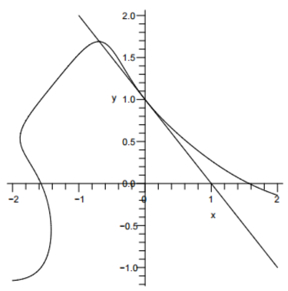
2. Seja x distância do holofote ao homem e y o comprimento da sua sombra. Então, $\frac{dx}{dt} = 3$. Por semelhança de triângulos temos que $\frac{y}{2} = \frac{10}{x}$, ou seja, $y = \frac{20}{x}$. Derivando em relação ao tempo t temos $\frac{dy}{dt} = -\frac{20}{x^2}\frac{dx}{dt}$. Quando o homem está a 8 metros da parede temos que $x = 2$. Portanto, $\frac{dy}{dt} = -\frac{20}{2^2}3 = -15$.



1º EE. - 2009.2

1. Derivando implicitamente temos $\cos(xy)(xy' + y) + y' = -\text{sen } x$. Avaliando no ponto $(0, 1)$ temos que $y' = -1$. Portanto, a reta tangente no ponto $(0, 1)$ é $y = -x + 1$.

   Na seguinte figura temos a curva com a reta tangente no ponto $(0, 1)$.



1º EE. – 2011.2

3ª Questão Derivando implicitamente temos $2x - 3[x^3y^2]' + [y^2]' - 2 = 0$, isto é, $2x - 3[3x^2y^2 + x^3(y^2)'] + [y^2]' - 2 = 0$. Substituindo $[y^2]' = 2yy'$ (regra da cadeia) e $x = 1, y = -2$ nesta igualdade obtemos $2 - 36 + 12y' - 4y' - 2 = 0$, e assim a inclinação da reta tangente é igual a $y' = 36/8 = 9/2$, logo a equação da reta tangente procurada é $y - (-2) = \frac{9}{2}(x - 1)$, isto é, $\boldsymbol{y = \frac{9}{2}x - \frac{13}{2}}$

1º EE. – 2012.2

3 - $\boxed{\textbf{Solução:}}$ (2,0 pontos) Derivando implicitamente a equação

$$x^3 + xy^2 - 2y^3cos(x) + y\ tg(x^3) + 2y^2 = 0,$$

pensando em $y = y(x)$ como uma função de x, obtemos a equação:

$$3x^2+y^2+2xyy'(x)-6y^2y'(x)cos(x)+2y^3sen(x)+y'(x)\ tg(x^3)+3x^2y\ sec^2(x^3)+4yy'(x) = 0,$$

que no ponto $(0, 1)$ produz:

$$1^2 - 6y'(0)cos(0) + 4y'(0) = 0 \ \Rightarrow\ 2y'(0) = 1 \ \Rightarrow\ y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Assim, uma equação para a reta tangente à curva no ponto $(0, 1)$ é dada por:

$$\frac{y-1}{x-0} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \boxed{\text{2y-x=2}},$$

e uma equação para a reta normal à curva neste mesmo ponto é dada por:

$$\frac{y-1}{x-0} = -\frac{2}{1} \ \Rightarrow\ \boxed{\text{y+2x=1}}.$$

1º EE. – 2015.2

2. Determine a equação da reta tangente à curva

$$\mathcal{C} := \sec(xy) + xe^{y^2} = \ln\left(x^2 + y^4 + 1\right) + y + 1$$

no ponto $(0, 0) \in \mathcal{C}$.

Precisamos primeiro calcular a inclinação da reta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(0, 0)$. Para isto, derivamos a função e obtemos,

$$(\sec(xy)\tan(xy))\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + \left(e^{y^2} + xe^{y^2}2y\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{x^2 + y^4 + 1}\left(2x + 4y^3\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dy}{dx}$$

Então, no ponto $(0, 0)$ temos

$$1 = \frac{dy}{dx}$$

e desta forma a equação da reta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(0, 0)$ está dada por

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 0 &= 1(x - 0) \\ y &= x. \end{aligned}$$

1º EE. – 2016.1

1. Considere a curva plana C definida por

$$x^3y^2 + x^2 - 5y + x \operatorname{sen} y = 1.$$

(a) (1,0 ponto) Encontre $y' = \dfrac{dy}{dx}$ usando derivação implícita.

Solução. Derivando implícitamente a equação da curva C, obtemos

$$3x^2y^2 + 2x^3yy' + 2x - 5y' + \operatorname{sen} y + xy' \cos y = 0.$$

Ou seja,

$$y'(5 - 2x^3y - x\cos y) = 3x^2y^2 + 2x + \operatorname{sen} y \implies y' = \frac{3x^2y^2 + 2x + \operatorname{sen} y}{5 - 2x^3y - x\cos y}.$$

(b) (1,0 ponto) Obtenha uma equação para a reta tangente à curva C no ponto $(1,0)$.

Solução. Pelo item anterior, temos que $\dfrac{dy}{dx}(1,0) = \dfrac{2}{5-1} = \dfrac{1}{2}$. Logo, uma equação da reta tangente à curva C no ponto $(1,0)$ é

$$y = \frac{1}{2}(x-1).$$