

Lista 8

Curso de Ciências atuariais
Disciplina Probabilidade 1 - Professora Cristina 19/08/2022 - Exercícios
distribuição binomial

1)

a) Qual a probabilidade de obter 3 números maiores que 4, em 4 lançamentos de um dado?

Y = Obter um número maior que 4 em lançamento de um dado

$$\mathbb{P}(Y > 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$X \sim \text{Bin}\left(4, \frac{2}{6}\right)$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{4}{3} * \left(\frac{2}{6}\right)^3 * \left(\frac{2}{6}\right)^1 = \frac{4!}{3!(4-3)!} * \frac{4}{36} * \frac{4}{6} = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$$

b) Qual a probabilidade de obter 8 caras em 10 lançamento de uma moeda não viciada?

Y = Obter cara (k) no lançamento de uma moeda

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{2}$$

$$X \sim \text{Bin}\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}(X = 8) = \binom{10}{8} * \left(\frac{1}{2}\right)^8 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10!}{8!(10-8)!} * \frac{1}{256} * \frac{1}{4} = \frac{45}{1.024}$$

c) Suponha que a probabilidade de um casal ter um filho com cabelos loiros seja $\frac{1}{4}$. Se houverem 6 crianças na família, qual é a probabilidade de que metade delas tenha cabelos loiros? $Y = \text{Criança nascer com cabelo loiro}$

$$\mathbb{P}(Y = s) = \frac{1}{4}$$

$$X \sim \text{Bin}\left(6, \frac{1}{4}\right)$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{6}{3} * \left(\frac{1}{4}\right)^3 * \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} * \frac{1}{64} * \frac{27}{64} = \frac{540}{4.096} = \frac{135}{1.096}$$

d) Se a probabilidade de atingir um alvo num único disparo é 0,3, qual é a probabilidade de que em 4 disparos o alvo seja atingido no mínimo 3 vezes? $Y = \text{Attingir o alvo com um disparo}$

$$\mathbb{P}(Y = s) = 0,3$$

$$X \sim \text{Bin}(4, 0.3)$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{4}{3} * (0,3)^3 * (0,7)^1 = \frac{4!}{3!(4-3)!} * 0,027 * 0,7 = 0,0189$$

2)

a) Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos aleatoriamente de uma carga muito grande de tubos que se sabe que contém 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 dos tubos extraídos sejam defeituosos?

$Y = \text{Selecionar tubo defeituoso}$

$$\mathbb{P}(Y = s) = 20\%$$

$$X \sim \text{Bin}(4, 0.2)$$

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - [\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 0)]$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{10}{2} * (0,2)^2 * (0,8)^8 = \frac{10!}{2!(10-2)!} * 0,04 * 0,16777 = 0,3020$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{10}{1} * (0,2)^1 * (0,8)^9 = \frac{10!}{1!(10-1)!} * 0,2 * 0,13422 = 0,2684$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{10}{0} * (0,2)^0 * (0,8)^{10} = \frac{10!}{0!(10-0)!} * 1 * 0,10737 = 0,10737$$

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - [0,3020 + 0,2684 + 0,1074] = 1 - 0,5168 = 0,4832$$

b) Um engenheiro de inspeção extrai uma amostra de 15 itens aleatoriamente de um processo de fabricação sabido produzir 85% de itens aceitáveis. Qual a probabilidade de que 10 dos itens extraídos sejam aceitáveis?

$Y = \text{Selecionar item defeituoso}$

$$\mathbb{P}(Y = s) = 85\%$$

$$X \sim \text{Bin}(15, 0.85)$$

$$\mathbb{P}(X = 10) = \binom{15}{10} * (0,85)^{10} * (0,15)^5$$

$$\mathbb{P}(X = 10) = \frac{15!}{10!(15-10)!} * 0,19687 * 0,00007 = 0,00001$$

3) A probabilidade de ocorrência de turbulência em um determinado percurso a ser feito por uma aeronave é de 0,4 em um circuito diário. Seja X o número de voos com turbulência em um total de 7 desses voos (ou seja, uma semana de trabalho). Qual a probabilidade

de que:

a) Não haja turbulência em nenhum dos 7 voos?

$Y =$ Haver turbulência no voo

$$\mathbb{P}(Y = s) = 0,4$$

$X \sim \text{Bin}(7, 0.4)$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{7}{0} * (0,4)^0 * (0,6)^7 = \frac{7!}{0!(7-0)!} * 1 * 0,02799 = 0,02799$$

b) Haja turbulência em pelo menos 3 deles?

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - [\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 0)]$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{7}{2} * (0,2)^2 * (0,8)^5 = \frac{7!}{2!(7-2)!} * 0,04 * 0,32768 = 0,2752$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{7}{1} * (0,2)^1 * (0,8)^6 = \frac{7!}{1!(7-1)!} * 0,2 * 0,26214 = 0,367$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{7}{0} * (0,2)^0 * (0,8)^7 = \frac{7!}{0!(7-0)!} * 1 * 0,20971 = 0,2097$$

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - [0,2752 + 0,367 + 0,2097] = 1 - 0,8519 = 0,1481$$

4) O Professor Paulo ministra, de segunda a sexta feira, aulas para uma turma com 30 homens e 20 mulheres. Suponha que todos os 50 alunos estão presentes durante as cinco aulas. Durante uma dada semana, ele decide sortear um aluno por dia para ser examinado. Se X é a variável aleatória que representa o número de dias em que um homem foi selecionado, qual a função de probabilidade, a média e a variância de X ? Considere que o mesmo aluno pode ser selecionado mais de uma vez.

$Y =$ Selecionar um homem

$$\mathbb{P}(Y = s) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

$$X \sim \text{Bin}\left(5, \frac{3}{5}\right)$$

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} * (p)^x * (1 - p)^{n-x}$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0} * \left(\frac{3}{5}\right)^0 * \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{5!}{0!(5-0)!} * 1 * \frac{32}{3.125} = 0,01024$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{5}{1} * \left(\frac{3}{5}\right)^1 * \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{5!}{1!(5-1)!} * \frac{3}{5} * \frac{16}{625} = \frac{240}{3.125} = 0,0768$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2} * \left(\frac{3}{5}\right)^2 * \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{5!}{2!(5-2)!} * \frac{9}{25} * \frac{8}{125} = \frac{720}{3.125} = 0,2304$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3} * \left(\frac{3}{5}\right)^3 * \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!} * \frac{27}{125} * \frac{4}{25} = \frac{1.080}{3.125} = 0,3456$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \binom{5}{4} * \left(\frac{3}{5}\right)^4 * \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{5!}{4!(5-4)!} * \frac{81}{625} * \frac{2}{5} = \frac{810}{3.125} = 0,2592$$

$$\mathbb{P}(X = 5) = \binom{5}{5} * \left(\frac{3}{5}\right)^5 * \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{5!}{5!(5-5)!} * \frac{243}{3.125} * 1 = \frac{243}{3.125} = 0,0778$$

$$E(X) = np$$

$$E(X) = 5 * \frac{3}{5} = 3$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$E(X) = 5 * \frac{3}{5} * \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

5) Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como passa ou falha. Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja de 0,8 e que as pastilhas sejam independentes. Qual é a probabilidade de que todas as três pastilhas passem no teste?

Y = Pastilha passar no teste

$$\mathbb{P}(Y = s) = 0,8$$

$$X \sim \text{Bin}(3, 0.8)$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{3} * (0,8)^3 * (0,2)^0 = \frac{3!}{3!(3-3)!} * 0,512 * 1 = 0,512$$

6) Numa fábrica, 10% dos copos de vidro se quebram ao serem colocados em caixas que comportam 5 copos. Escolhendo ao acaso uma caixa, determine a probabilidade de:

a) Haver 3 copos quebrados

$Y =$ Copo quebrar na caixa

$$\mathbb{P}(Y = s) = 10\% = 0,1$$

$$X \sim \text{Bin}(5, 0.1)$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3} * (0,1)^3 * (0,9)^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!} * 0,001 * 0,81 = 0,0081$$

b) Haver algum copo quebrado

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$$

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \left[\binom{5}{0} * (0,1)^0 * (0,9)^5 \right] = 1 - \left[\frac{5!}{0!(5-0)!} * 1 * 0,59049 \right] = 1 - 0,5905$$

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 0,4095$$