RESUMO DE FUNDAMENTOS DE CÁLCULO I: INTEGRAIS

Extra.1: $\underline{(INTEGRAL\ DA\ FUNÇÃO\ LOGARITMO\ NATURAL)}$

$$\int \ln(x)\,dx$$

De tudo que fora visto até aqui, qual seria a função que gera um logaritmo ao se derivar? Em si não sabemos bem, só sabemos de sua derivada. Então para descobrir a integral do logaritmo, vai ser necessário utilizar um dos métodos que vimos até aqui, para ser mais direto, utilizamos do método de integração por partes, onde se arrumamos um pouco a integral teremos:

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,dx$$

Pois tudo multiplicado por 1, é ele mesmo, a partir disso podemos fazer o seguinte, como sabemos derivar logaritmo, escolhemos o mesmo para derivar, e integraremos o algoritmo $1\,dx$.

$u = \ln(x) \therefore du = \frac{1}{x}dx$

$dv = 1 \therefore v = \int 1\,dx = x$

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,dx = \ln(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = xln(x) - \int 1\,dx = \boldsymbol{xln(x) - x + C}$$

Logo chegamos que a integral de um logaritmo é dado por:

$$\int \ln(x)\,dx = \boldsymbol{xln(x) - x + C}$$

Provando que realmente dará a função logaritmo, utilizando das regras que vimos em derivação temos:

$$\boldsymbol{f(x) = xln(x) - x + C \therefore f'(x) = \left[1ln(x) + x\frac{1}{x}\right] - 1 + 0 = ln(x) + 1 - 1 + 0 = ln(x)}$$

Extra.2: (*DERIVADAS E INTEGRAIS DAS FUNÇÕES INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS*)

Para lembrar das derivadas das funções inversas trigonométricas, basta lembrar das substituições trigonométricas:

$$quando\ tinhamos: \sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow sen(\theta) = \frac{x}{a} \therefore \theta = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) \therefore \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\left[\boldsymbol{arcsen}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\right)\right] = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2 - x^2}}}$$

$$quando\ tinhamos: \sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow sec(\theta) = \frac{x}{a} \therefore \theta = arcsec\left(\frac{x}{a}\right) \therefore \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\left[\boldsymbol{arcsec}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\right)\right] = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x} \cdot \sqrt{\boldsymbol{x^2 - a^2}}}$$

$$quando\ tinhamos: \sqrt{x^2 + a^2} \rightarrow tg(\theta) = \frac{x}{a} \therefore \theta = arctg\left(\frac{x}{a}\right) \therefore \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\left[\boldsymbol{arctg}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\right)\right] = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a^2 + x^2}}$$

Como sempre consideramos como uma função apenas de x, ou seja:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}[\boldsymbol{arcsen}(\boldsymbol{x})] = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - x^2}}}$$

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}[\boldsymbol{arcsec}(\boldsymbol{x})] = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{x^2 - 1}}}$$

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}[\boldsymbol{arctg}(\boldsymbol{x})] = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1 + x^2}}$$

Basicamente, consideramos $a = 1 \therefore \frac{x}{1} = x$. Essas derivadas são importantes, pois tal como a função logaritmo, as funções trigonométricas inversas não conhecemos as funções que ao serem derivadas resultam nelas, com isso basta lembrar a ordem $L.I.A.T.E.$, a qual o I são essas funções trigonométricas, e da mesma forma que encontramos a integral da função logaritmo, encontraremos a integral das funções inversas.

Integral do arco-seno

$$\int arcsen(x)\, dx$$

$$u = arcsen(x) \therefore du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$dv = 1dx \therefore v = x$$

$$1. \int arcsen(x)\, dx = arcsen(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Nessa etapa trabalharemos com a segunda integral $\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, onde aplicaremos a integração por substituição:

$$2. \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\boldsymbol{w = 1 - x^2} \therefore dw = -2x\, dx \leftrightarrow -\frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{x\, dx}$$

$$2. \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int -\frac{1}{\sqrt{w}} \cdot \frac{dw}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \sqrt{w} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Descoberto a segunda integral, retornamos à primeira e aplicamos:

$$1. \int arcsen(x)\, dx = arcsen(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen(x) \cdot x - \left(-\sqrt{1-x^2} + C\right)$$

Logo a integral de nossa função $arcsen(x)$ é:

$$\int arcsen(x)\, dx = arcsen(x) \cdot x + \sqrt{1-x^2} - C$$

Integral do arco-tangente

$$\int arctg(x)\, dx$$

$$u = arctg(x) \therefore du = \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$dv = 1dx \therefore v = x$$

$$1. \int arctg(x)\, dx = arctg(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx$$

Nessa etapa trabalharemos com a segunda integral $\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^{2+1}}} dx$, onde aplicaremos a integração por substituição:

$$2. \int x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\boldsymbol{w = x^2} + 1 \therefore dw = 2x\, dx \leftrightarrow \frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{x\, dx}$$

$$2. \int x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{2} = \frac{1}{2} ln|w| + C = \frac{1}{2} ln|x^2+1| + C$$

Descoberto a segunda integral, retornamos à primeira e aplicamos:

$$1. \int arctg(x)\, dx = arctg(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = arcsen(x) \cdot x - \left(\frac{1}{2} ln|x^2+1| + C\right)$$

Logo a integral de nossa função $arctg(x)$ é:

$$\int arctg(x)\, dx = arctg(x) \cdot x - \frac{1}{2} ln|x^2+1| + C$$

Integral do arco-secante

$$\int arcsec(x)\, dx$$

$$u = arcsec(x) \therefore du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$dv = 1dx \therefore v = x$$

$$1. \int arcsec(x)\, dx = arcsec(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

Nessa etapa trabalharemos com a segunda integral $\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$, onde aplicaremos a integração por substituição:

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$x = 1 \cdot sec\theta \therefore dx = -\sec(\theta) \cdot tg(\theta)\, d\theta$$

E como vimos na parte da substituição trigonométrica, temos que as integrais a qual a substituição é a secante, tem como resultado:

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = -ln\left|\sec\left[\mathrm{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)\right] + tg\left[\mathrm{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)\right]\right| + C}$$

Logo a solução, da integral acima seria:

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^2 - 1}} dx = -\boldsymbol{ln}|\mathbf{sec}[\mathbf{arcsec}\ (\boldsymbol{x})] + \boldsymbol{tg}[\mathbf{arcsec}\ (\boldsymbol{x})]| + \boldsymbol{C}$$

Descoberto a segunda integral, retornamos à primeira e aplicamos:

$$1. \int arcsec(x)\, dx = arcsec(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$
$$= arcsen(x) \cdot x - (-ln|\mathrm{sec}[\mathrm{arcsec}\ (x)] + tg[\mathrm{arcsec}\ (x)]| + C)$$

Logo a integral de nossa função $arcsen(x)$ é:

$$\int \boldsymbol{arcsen}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{arcsen}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{ln}|\mathbf{sec}[\mathbf{arcsec}(\boldsymbol{x})] + \boldsymbol{tg}[\mathbf{arcsec}(\boldsymbol{x})]| + \boldsymbol{C}$$