



Universidade Federal de Pernambuco
Curso: Ciências Atuariais
Disciplina: Matemática Actuarial 1A
Professor: Filipe Costa de Souza

Lista 3 - Gabarito

Questão 1: Uma pessoa deseja fazer a aquisição de uma renda que deverá ser paga no início de cada semestre no valor de \$10.000,00. Essa renda deverá ser paga enquanto a pessoa viver. Atualmente ela está com 40 anos. A tábua utilizada pela empresa de previdência é a AT-2000 a juros de 6% a.a. Quanto deverá pagar de prêmio único puro para ter esse direito?

$$PUP = 20.000. \ddot{a}_{40}^{(2)} = 20.000. \left(\frac{N_{40}}{D_{40}} - \frac{1}{4} \right) \approx 307.071,99$$

Questão 2: Utilizando a tábua de comutação AT-2000 com juros de 6% a.a. Deseja-se saber quanto de prêmio um cidadão de 40 anos que tem como meta de renda mensal 1.000,00 deve pagar sob as seguintes condições:

- a. Renda imediata, no fim de cada mês e vitalícia.

$$PUP = 12.000. a_{40}^{(12)} = 12.000. \left(\frac{N_{41}}{D_{40}} + \frac{11}{24} \right) \approx 180.743,19$$

- b. Daqui a 20 anos, no início de cada mês e até morrer.

$$PUP = 12.000. {}_{20|}\ddot{a}_{40}^{(12)} = 12.000. \left(\frac{N_{60}}{D_{40}} - \frac{11}{24} \cdot \frac{D_{60}}{D_{40}} \right) \approx 42.144,35$$

- c. Imediata, no final de cada mês de durante 30 anos.

$$PUP = 12.000. a_{40:\overline{30}|}^{(12)} = 12.000. \left(\frac{N_{41} - N_{71}}{D_{40}} + \frac{11}{24} \cdot \frac{D_{40} - D_{70}}{D_{40}} \right) \approx 164.232,77$$

- d. Daqui a 20 anos, no início de cada mês e durante 30 anos.

$$PUP = 12.000. {}_{20|}\ddot{a}_{40:\overline{30}|}^{(12)} = 12.000. \left(\frac{N_{60} - N_{90}}{D_{40}} - \frac{11}{24} \cdot \frac{D_{60} - D_{90}}{D_{40}} \right) \approx 41.401,22$$

Questão 3: Utilizando a tábua de comutação AT-2000 com juros de 6% a.a. Deseja-se saber quanto de prêmio um cidadão de 50 anos que tem como meta de renda anual de \$1.000,00 crescendo esse mesmo valor a cada ano deve pagar sob as seguintes condições:

- a. Renda imediata, antecipada e vitalícia.

$$PUP = 1000. (I\ddot{a})_{50} = 1000. \frac{S_{50}}{D_{50}} \approx 172.555,66$$

- b. Imediata, postecipada e durante 30 anos.

$$PUP = 1000. (Ia)_{50:\overline{30}|} = 1000. \frac{S_{51} - S_{81} - 30 \cdot N_{81}}{D_{50}} \approx 134.163,95$$

c. Diferida em 20 anos, antecipado e vitalícia.

$$PUP = 1000. (I_{20|\ddot{a}})_{50} = 1000. \frac{S_{70}}{D_{50}} \approx 21.462,50$$

d. Renda diferida em 10 anos, temporária por 10 anos e antecipada.

$$PUP = 1000. (I_{10|\ddot{a}})_{50:\overline{10}|} = 1000. \frac{S_{60} - S_{70} - 10. N_{70}}{D_{50}} \approx 19.755,96$$

Questão 4: Suponha um indivíduo de 60 anos. Calcule o prêmio necessário para que ele obtenha uma renda aleatória, crescente em progressão aritmética (renda anual de \$2.000,00 crescendo esse mesmo valor a cada ano) durante 10 anos e permanecendo constante para o resto da vida. Tal renda será paga trimestralmente no início de cada trimestre, de forma imediata e vitalícia. Para o cálculo use a tábua AT-2000 com juros de 6% a.a.

$$PUP = 2000. (I_{\overline{10}|\ddot{a}})_{60} = 2000. \left(\frac{S_{60} - S_{70}}{D_{60}} - \frac{3}{8} \cdot \frac{N_{60} - N_{70}}{D_{60}} \right) \approx 168.634,98$$

Questão 5: Mostre detalhadamente que o prêmio pago para se ter direito a uma **renda anual, decrescente em progressão aritmética, imediata, temporária por n anos e antecipada**, $(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$, pode ser escrito como:

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{nN_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}}{D_x}.$$

$$\begin{aligned} l_x \cdot (D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= n \cdot l_x \cdot v^0 + (n-1) \cdot l_{x+1} \cdot v^1 + \dots + 1 \cdot l_{x+n-1} \cdot v^{n-1} \\ \therefore (D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \frac{n \cdot l_x \cdot v^0 + (n-1) \cdot l_{x+1} \cdot v^1 + \dots + 1 \cdot l_{x+n-1} \cdot v^{n-1}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} \\ (D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \frac{n \cdot D_x + (n-1) \cdot D_{x+1} + \dots + D_{x+n-1}}{D_x} \\ (D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \frac{(N_x - N_{x+n}) + (N_x - N_{x+n-1}) + \dots + (N - N_{x+1})}{D_x} \\ (D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \frac{n \cdot N_x - (S_{x+1} - S_{x+n+1})}{D_x} \\ (D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \frac{n \cdot N_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}}{D_x}. \end{aligned}$$

Questão 6: Uma pessoa com 50 anos deseja receber imediatamente e no início de cada ano uma renda imediata e vitalícia da seguinte forma: 1º ano = \$60.000; 2º ano = 70.000,00; 3º ano = \$80.000 seguindo vitaliciamente a progressão dada. Calcular o valor do prêmio único puro da referida operação, utilizando a tábua AT-2000 a 6% a.a.

$$PUP = 50.000. \ddot{a}_{50} + 10.000. (I\ddot{a})_{50} = 50.000. \frac{N_{50}}{D_{50}} + 10.000. \frac{S_{50}}{D_{50}} \approx 2.441.869,01$$