DERIVADAS: REGRAS DE DERIVAÇÃO

5. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO DENTRO DA OUTRA (CADEIA DE FUNÇÕES):

Quando estamos lidando com uma função dentro de outra, como por exemplo

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

Normalmente encontraríamos uma $f(x) = \sqrt{x}$, e assim aplicaríamos a regra da queda. Porém não é o nosso caso no momento é como se tivesse uma função polinomial dentro da nossa função potência, como prosseguiríamos nesse caso?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2+(x+h)+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x^2+2xh+h^2+x+h+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}-\sqrt{x^2+x+1}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}-\sqrt{x^2+x+1}\right)}{h} \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)} =$$

Observem que após fazer apenas algumas manipulações apareceu o termo $\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}$, a qual equivale a 1 , a adição desse termo é necessário para se alcançar o resultado que é buscado, com isso basta usar a propriedade de produto de uma soma e diferença:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Tal que,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}-\sqrt{x^2+x+1}\right)}{h} \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{h\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)} =$$

Por temos uma raiz quadrada elevada ao quadrado, podemos então corta-la e ficar com:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{h\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+x+1+h(2x+h+1)-(x^2+x+1)}{h\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+1)}{h\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+h+1)}{\left(\sqrt{x^2+x+1+h(2x+h+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=$$

$$\frac{(2x+0+1)}{\left(\sqrt{x^2+x+1+0(2x+0+1)}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\frac{2x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}}\cdot\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$$

Com isso chegamos na derivada dessa cadeia de funções $\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, arrumando um pouco a mesma temos que

$$\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}}\cdot\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$$

Quero que percebam a seguinte ideia, considere $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{1}=\boldsymbol{g}$, tal que sua derivada $\boldsymbol{g}'=\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$, após isso vejam a nossa função $f(x)$ como uma $f(g)$, sairíamos de

$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}\to f(g)=\sqrt{g}$$

Pois fizemos essa substituição de valores, se fossemos derivar essa $f(g)$, aplicaríamos a regra da queda, tal que teríamos:

$$f(g)=\sqrt{g}=g^{1/2}\therefore f'(g)=\frac{1}{2}\cdot g^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}$$

Agora retornamos de g para x, teríamos:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}}$$

Observem que a única coisa que falta para chegar na nossa derivada, é o produto com a derivada de g, ao ponto que podemos dizer que a derivada da nossa *f(x)*, pode ser escrita como:

$$f'(x)=f'(g)\cdot g'=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}}\cdot\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$$

Vejam que alcançamos o mesmo resultado por um caminho mais simples. Logo podemos generalizar esse formato e criar a **Regra da Cadeia** que é dada por:

$$f'(x)=f'(g)\cdot g'$$

Da mesma forma quando encontrar com uma função do tipo:

$$h(x)^2$$

Podemos derivar seguindo a mesma ideia da cadeia:

$$\frac{d}{dx}[h(x)^2] = 2 \cdot h(x)^{2-1} \cdot h'(x)$$

De forma mais geral:

$$\frac{d}{dx}[h(x)^n] = n \cdot h(x)^{n-1} \cdot h'(x)$$

$(Isso\ aqui\ será\ utilizado\ constantemente\ em\ derivação\ implícita\ e\ oculta)$

Vamos fazer um exemplo e colocar a mesma em prática:

$$f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{2x+1}$$

Nesse exemplo temos um produto de funções, onde uma dessas é uma cadeia $\sqrt{2x+1}$, isso não mudará em nada a forma a qual fizemos até aqui, aplicaremos tudo que aprendemos até o momento, para facilitar podemos trabalhar primeiramente de forma separada as funções e sua derivada, e depois aplicar as regras. Vamos começar considerando que

$$f = 3x^2 \therefore f' = 3 \cdot 2 \cdot x^1 = 6x$$

$$g = \sqrt{2x+1} = \sqrt{h} \therefore g' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot h' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \cdot 2\ (Regra\ da\ Cadeia)$$

$$h = 2x+1 \therefore h' = 2 + 0 = 2$$

Já sabendo quem é quem, podemos aplicar a regra do produto:

$$f'(x) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{2x+1} \therefore$$

$$\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}) = 6x \cdot \sqrt{2x+1} + 3x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \boldsymbol{6x \cdot \sqrt{2x+1} + \frac{3x^2}{\sqrt{2x+1}}}$$

Com isso vocês podem concluir nesse último ponto, caso queiram arrumar um pouco mais, não terá problema, mas nesse ponto a função já pode ser aceita. Com isso vocês aprenderam que a ideia para chegar na Regra da Cadeia.

4.