Derivadas Direcionais e Gradiente

Diretório de Apoio Acadêmico

1 Valores Máximos e Mínimos

Tal como visto quando tínhamos uma única variável,

$$f(x)$$

podíamos chegar no ponto ao qual a função chegaria em seu maior valor ou menor valor, dado o intervalo. Onde buscávamos pelo ponto crítico da função,

$$f'(x = k) = 0$$

e esse ponto definiria tal valor,

$$f(k)$$

(a função nesse ponto k seria o máximo, ou o mínimo, valor que a função assume)

porém sozinho o mesmo não diz se esse valor seria o máximo, ou o mínimo, em si, sendo necessário o uso de um segundo teste ao qual definiria se tal ponto seria o de *mâximo*, ou o de *mínimo*, esse segundo teste poderia ser feito de duas formas, uma considerando a 1^a derivada

$$f'(k) = 0,\ nossa\ função\ no\ ponto\ crítico$$

$$f'(n) < 0,\ n < k\ ;\ e\ f'(m) > 0,\ m > k;\ temos\ um\ ponto\ de\ MÍNIMO$$

$$f'(n) > 0,\ n < k\ ;\ e\ f'(m) < 0,\ m > k;\ temos\ um\ ponto\ de\ MÁXIMO$$

e a outra consideraria a 2^a derivada.

$$f''(k) > 0,\ Seria\ um\ ponto\ MÍNIMO$$

$$f''(k) < 0,\ Seria\ um\ ponto\ MÁXIMO$$

Esses testes que faziamos quando possuiamos apenas uma única variável, buscaremos aplicar agora quando temos mais variáveis a se trabalhar.
Para melhor explicação, vamos considerar uma função a qual utilizaremos de base para as explicações:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy$$

Primeiramente, deveríamos descobrir em que ponto a função estaria em seu máximo ou mínimo valor. Para tal, devemos descobrir o ponto crítico da mesma, veja bem, quando tínhamos uma variável, bastava a derivada em relação à mesma ser igual a zero $f'(x) = 0$, porém agora temos 2 variáveis, considerando a mesma ideia, para obter o ponto crítico ambas as derivadas parciais devem ser iguais a 0 no ponto crítico.

$$f_x(x, y) = 0\ e\ f_y(x, y) = 0$$

$$f_x(x, y) = 2x + 2y \to 2x + 2y = 0 \to x = -y$$

$$f_y(x, y) = 2x \to 2x = 0 \to x = 0$$

Para que ambas as derivadas sejam 0, seria necessário que $y = 0$, dado que na derivada parcial em relação a x, temos $x = -y$. Logo o ponto crítico da função seria $(x = 0, y = 0)$ *ou* $(0, 0)$:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy \to f(0, 0) = 0^2 + 2 * 0 * 0 = 0$$

Veja que no resultado do ponto crítico, a função assume o valor de 0, basta definirmos se esse valor seria o maior, ou o menor, valor que a função pode assumir. Para isso vamos utilizar o teste da segunda derivada, porém nesse caso será um pouco mais complicado, pois quando derivamos uma segunda vez uma função de múltiplas variáveis, derivamos em relação a todas as variáveis novamente, ou seja:

$$f_x(x, y) \to f_{xx}(x, y) \ e \ f_{xy}(x, y)$$

$$f_y(x, y) \to f_{yy}(x, y) \ e \ f_{yx}(x, y)$$

Diferentemente de quando tinhamos uma única váriavel, e verificavamos se o valor da mesma no ponto crítico era menor ou igual a 0, quando temos muitas varíaveis o processo se diferencia, para facilitar utilizaremos o **HESSIANO**, a qual transcrever as segundas derivadas parciais de uma função de múltiplas variáveis, em uma matrix:

$$A = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Tal que quando fossemos analisar se o ponto é um ponto de máximo ou mínimo, olhariamos pelo ***DETERMINANTE*** da matrix, tal seria o **HESSIANO**:

$$H = det(A) = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy} * f_{yx}$$

(Dada a relação que tinhamos visto anteriormente nas derivadas parciais, temos que $f_{xy} = f_{yx}$)

$$H = det(A) = f_{xx} * f_{yy} - [f_{xy}]^2$$

Saberemos que a função conterá um ponto de *MÁXIMO* ou *MÍNIMO*, se tal determinante for maior que 0

$$H > 0, \ existe \ ponto \ máximo \ ou \ mínimo$$

$$H < 0, \ não \ há \ ponto \ máximo \ ou \ mínimo \ (PONTO \ SELA)$$

E quem definirá se o ponto vai ser de máximo, ou mínimo, será o valor da segunda derivada em relação a x

$$H > 0 \ e \ f_{xx} > 0, \ PONTO \ MÍNIMO$$

(é possível lembrar do caso de uma única variável, onde $f''(x) > 0$ definiria que aquele ponto é de mínimo)

$$H > 0 \ e \ f_{xx} < 0, \ PONTO \ MÁXIMO$$

(da mesma forma $f''(x) < 0$ seria um ponto de máximo)
Sabendo disso, podemos aplicar tais informações em nossa função:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy$$

$$f_x(x, y) = 2x + 2y$$

$$f_y(x, y) = 2x$$

Teriamos que as segundas derivadas parciais seriam:

$$f_{xx}(x, y) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = 2$$

$$f_{yy}(x, y) = 0$$

$$f_{yx}(x, y) = 2$$

Utilizando o Hessiano:

$$H = f_{xx} * f_{yy} - [f_{xy}]^2 = 2 * 0 - 2^2 = 0 - 4 = -4$$

$$H < 0, \ PONTO \ DE \ SELA$$

Dado que o determinante da função é menor que 0, é esperado que a função assuma o formato de uma sela, como é mostrada abaixo:

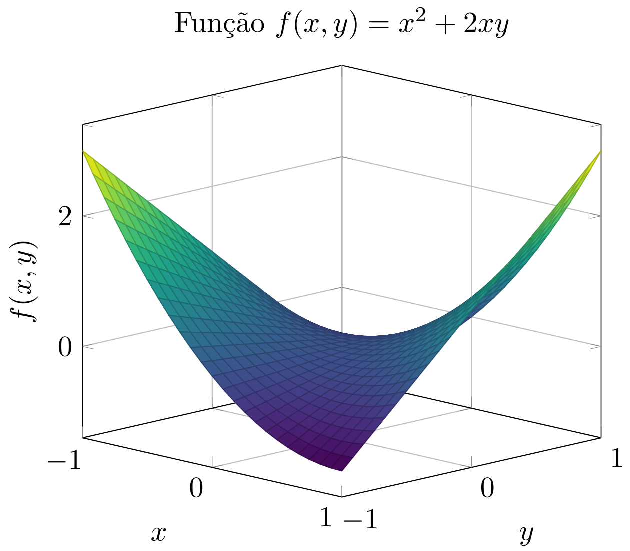

Figure 1: Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + 2xy$

Observem que uma parte do gráfico está subindo, e uma outra parte está descendo, criando essa imagem com aparência de uma sela, a qual leva o nome do ponto em questão. Com isso terminamos valores máximos e mínimos de uma função de múltipla variável.

2 Multiplicadores de Lagrange

Os Multiplicadores de Lagrange entra na questão de Otimização, que é vista nos primeiros fundamentos de cálculo, a qual sabiamos que para otimizar uma função deveriamos ir atrás de seu ponto crítico, que é dado quando a derivada total é igual a zero:
No caso de uma variável:

$$f(x) \to f'(x) = 0$$

No caso de duas ou mais variáveis:

$$f(x, y, z, ...) \to f_x = 0,\ f_y = 0,\ f_z = 0, ...$$

O ponto a qual faz todas as derivadas de 1^a ordem igual a 0, seria o ponto ótimo da função. Em **LAGRANGE** seguimos a mesma ideia, porém agora estaremos trabalhando com *RESTRIÇÕES*, ou seja, estaremos otimizando uma *função* dada que a mesma está sendo *restringida* por uma, ou mais, *funções* diferentes.
Consideramos uma função $f(x, y)$ qualquer, esta sendo restringida por uma outra função $g(x, y)$ dada, ao restringir a função f pela g, estaremos criando uma nova função, chamada de **FUNÇÃO DE LAGRANGE**

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda * g(x, y)$$

onde temos a diferença da função de interesse, com suas restrições, e a constante λ nada mais é que o **MULTIPLICADOR DE LAGRANGE**. E através dessa nova função, que aplicamos a otimização:

$$\nabla L(x, y) = 0$$

$$\nabla f(x, y) - \lambda * \nabla g(x, y) = 0$$

(lembrando que o gradiente nada mais é que o vetor das derivadas parciais da função, logo estamos dizendo que a diferença para todas as derivadas parciais deverão ser iguais a zero)

$$\nabla f(x, y) = \lambda * \nabla g(x, y)$$

(apenas passamos a parte negativa para o outro lado, assim igualando as duas funções)
Uma forma diferente de ver tal, é por meio de matrizes:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \lambda \times \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$$

E através dessa forma, poderiamos criar um pequeno sistema de equações, onde no fim os valores estariam restringidos ao intervalo da função $g(x, y)$:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda * g_x \\ f_y(x, y) = \lambda * g_y \\ g(x, y) = K \end{cases}$$

E se tivessemos uma *segunda restrição* $h(x, y)$, como ficaria nossa função Lagrangiana?

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda_1 * g(x, y) - \lambda_2 * h(x, y)$$

(ajustamos para encaixar uma nova restrição ao caso, considerando um novo multiplicador de lagrange)

$$\nabla L(x, y) = 0$$

$$\nabla f(x,y) = \lambda_1 \nabla g(x,y) + \lambda_2 \nabla h(x,y)$$

(passamos as restrições para o outro lado, igualando novamente as derivadas)

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda_1 * g_x + \lambda_2 * h_x \\ f_y(x,y) = \lambda_1 * g_y + \lambda_2 * h_y \\ g(x,y) = K \\ h(x,y) = K \end{cases}$$

(criamos um sistema de equação que representa essa igualdade, dado que os valores encontrados para x e y, obedeçam as restrições)

Para concluir com a explicação, apliquemos o aprendido em um exemplo:

9. $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

Figure 2: questão 9 do livro de James Stewart, Vol. 2, Capítulo 14.8

$$f(x,y) = xyz \to f_x = yz; \ f_y = xz; \ f_z = xy$$
$$g(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 \to g_x = 2x; \ g_y = 4y; \ g_z = 6z$$

(ao ter em conhecimento das derivadas parciais, transformamos o caso em um sistema de equações)

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = \lambda * g_x \\ f_y(x,y,z) = \lambda * g_y \\ f_z(x,y,z) = \lambda * g_z \\ g(x,y,z) = 6 \end{cases}$$

(substituindo as funções, teriamos:)

$$\begin{cases} yz = \lambda * 2x \\ xz = \lambda * 4y \\ xy = \lambda * 6z \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \end{cases}$$

Observem que em nenhuma equação, temos um valor concreto, logo faz-se necessário manipular o sistema, para descobrir tanto x, y, z e λ. Comecemos com a primeira equação:

$$yz = 2x\lambda$$

(há diversas forma de resolver um sistema, vai de cada pessoa, aqui vamos utilizar uma manipulação simples, deixar um dos lado da igualdade igual em todas as equações, nessa 1^a equação, multiplicaremos ambos lados por x)

$$yz * x = \lambda * 2x * x \to xyz = 2x^2\lambda$$

Partindo para a segunda equação:

$$xz = 4y\lambda$$

(nessa 2^a equação, multiplicamos ambos lados por y)

$$xz * y = 4y\lambda * y \to xyz = 4y^2\lambda$$

(percebam que tanto nessa 2^a, quanta na 1^a equação, temos um dos lados da igualdade iguais xyz, logo nosso intuíto será fazer o mesmo ocorrer na 3^a equação)
Indo para a terceira equação, teríamos:

$$xy = 6z\lambda$$

(multiplicamos ambos os lados por z)

$$xy * z = 6z\lambda * z \to xyz = 6z^2\lambda$$

Observe que:

$$xyz = 2x^2 = 4y^2 = 6z^2$$

(todas as três equações possuem o mesmo valor)

$$2x^2 = 4y^2 \to x^2 = 2y^2 \to x = y * \sqrt{2}$$

(dado que são o mesmo valor, poderiamos dizer que x é equivalente á $y * \sqrt{2}$)

$$4y^2 = 6z^2 \to z^2 = \frac{2}{3} * y^2 \to z = y * \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(e podemos que z é equivalente a tal valor)

Ao fazer que as outras variáveis ficassem dependentes de uma única mesma variável, podemos aplicar tal relação, em nossa função de restrição:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

(substituindo x^2 e z^2,e pelos resultados que encontramos anteriormente)

$$(2y^2) + 2y^2 + 3 * (\frac{2}{3} * y^2) = 6$$

$$2y^2 + 2y^2 + 2y^2 = 6$$

$$6y^2 = 6$$

(como nosso objetiv no momento é descobrir o valor de y, basta isolar o mesmo, ao jogar o *6* ao outro lado como fração)

$$y^2 = \frac{6}{6} = 1 \to y = \sqrt{1} = \pm 1$$

(veja que y pode assumir dois valores -1 e 1, podemos aplicar tais valores para descobrir os valores tanto para x quanto para z)

$$x = y * \sqrt{2} = \pm 1 * \sqrt{2} = \pm\sqrt{2}$$

(logo temos que x, pode assumir os valores $-\sqrt{2}$ e $+\sqrt{2}$)

$$z = y * \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

(e z, pode assumir os valores $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $+\sqrt{\frac{2}{3}}$)
Logo, podemos assumir que há dois pontos críticos dada a restrição, nos pontos $(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{\frac{2}{3}})$

e $(+\sqrt{2}, +1, +\sqrt{\frac{2}{3}})$, que irão representar o ponto máximo e mínimo dessa função dada a restrição, para descobrir quem é qual, basta aplicar na função inicial:

$$f(x, y, z) = x * y * z$$

$$(x, y, z) = (-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{\frac{2}{3}}) \rightarrow f(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{\frac{2}{3}}) = (-\sqrt{2}) * (-1) * -(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(x, y, z) = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{\frac{2}{3}}) \rightarrow f(\sqrt{2}, 1, \sqrt{\frac{2}{3}}) = (\sqrt{2}) * (1) * (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Por fim obtemos que o máximo que a função pode chegar é $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e o mínimo é $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. Chegado ao fim do exemplo, terminamos aqui o assunto sobre multiplicadores de Lagrange, o próximo assunto estaremos iniciando o estudo sobre as integrais quando estamos lidando com uma função de múltiplas variáveis.