RESUMO DE FUNDAMENTOS DE CÁLCULO I: INTEGRAIS

***INTEGRAIS DE POLINÓMIOS*:**

$$\int a \cdot x^{n-1} + b \cdot x^{n-2} + \cdots + 1\, dx$$

A ideia é que sabemos a derivada de uma $f(x) = a \cdot x^n$ que é uma $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$, onde a é uma constante qualquer, comparando nossa função de derivada e a função que está dentro da integral $g'(x) = a \cdot x^{n-1}$, percebemos que são quase próximas uma da outra, faltando apenas multiplicar por $\boldsymbol{n}$ a derivada de dentro da integral certo? Podemos usar uma manipulação da matemática onde um valor dividido por ele mesmo é igual a 1, tal que:

$$g'(x) = a \cdot 1 \cdot x^{n-1} = a \cdot \frac{n}{n} \cdot x^{n-1} = \frac{a \cdot n \cdot x^{n-1}}{n} = \frac{f'(x)}{n}$$

A partir dai podemos perceber que a função que gerou a derivada dentro da integral, foi nossa função $f(x) = a \cdot x^n$ porém dividida pelo *n* que a está elevando, ou seja:

$$\int a \cdot x^{n-1}\, dx = \frac{ax^n}{n}$$

Com isso podemos integrar qualquer polinômio utilizando da seguinte regra:

$$\int a \cdot x^n\, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$$

Obs.: Tal forma de integrar só funciona com $n > -1$ e $n < -1$, você deve estar se perguntando por que não conseguiríamos integrar com o $n = -1$? Veremos mais a frente tal caso particular;

Logo, a integral do polinómio visto acima seria:

$$\int \boldsymbol{a \cdot x^{n-1} + b \cdot x^{n-2} + \cdots + 1\, dx} = \frac{ax^n}{n} + \frac{bx^{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{x^{0+1}}{0+1} + \boldsymbol{C}$$
$$= \boldsymbol{\frac{ax^n}{n} + \frac{bx^{n-1}}{n-1} + \cdots + x + C}$$

Agora o que aconteceria se tivéssemos a seguinte integral:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

Se fossemos utilizar da regra vista a cima, lidaríamos com a seguinte situação:

$$\int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{\boldsymbol{0}} = \frac{1}{\boldsymbol{0}}$$

A partir daí já é possível ver que alguma coisa está de errada, por isso para os casos onde temos uma variável elevada a -1, utilizaremos da mesma ideia inicial, procurar uma função que a derivada seja igual a função que queremos integrar. Nas derivadas vimos diversas funções, uma delas é a função logaritmo natural, onde vimos que sua derivada era:

$$f(x) = \ln(x) \therefore f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

Logo, essa derivada não é o que estamos buscando derivar? Sabendo a função que leva a mesma, podemos concluir que a integral de qualquer função ou variável elevada a -1, seja o logaritmo da mesma, tal que:

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + C$$

Ótimo, terminamos essa parte, vamos ver alguns exemplos:

<u>Exemplo.1</u>

$$\int 4x^2 + 5x^{-4}dx = \frac{4 \cdot x^{2+1}}{(2+1)} + \frac{5 \cdot x^{-4+1}}{(-4+1)} + C = \frac{4 \cdot x^3}{(3)} + \frac{5 \cdot x^{-3}}{(-3)} + C$$

$$\int 4x^2 + 5x^{-4}dx = \boldsymbol{\frac{4 \cdot x^3}{3} - \frac{5}{3 \cdot x^3} + C}$$

<u>Exemplo.2</u>

$$\int \frac{1}{2x-3}dx = \int (2x-3)^{-1}dx = \boldsymbol{\frac{\ln(2x-3)}{(2-0)} + C = \frac{\ln(2x-3)}{2} + C}$$

ps. Percebam que se fossemos derivar $\boldsymbol{\ln(2x-3)}$ seria utilizada uma regra da cadeia, ou seja, $\boldsymbol{f(x) = \ln(2x-3) \therefore f'(x) = \frac{1}{(2x-3)} \cdot (2-0)}$ porém na nossa integral temos apenas a derivada exterior, logo teríamos de dividir a função primitiva pela derivada interior$\boldsymbol{f(x) = \frac{\ln(2x-3)}{(2-0)} \therefore f'(x) = \frac{1}{(2-0)} \cdot \frac{1}{(2x-3)} \cdot (2-0) = \frac{1}{(2x-3)}}$.

Obs.: no caso da integral da exponencial, da mesma forma que a derivada é ela mesma, a integral segue a mesma ideia.

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$