RESUMO DE FUNDAMENTOS DE CÁLCULO I: INTEGRAIS

INTEGRAIS DEFINIDAS

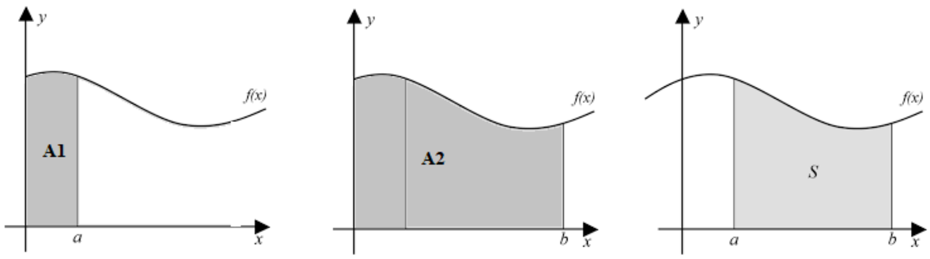
Sabemos que a integral é a área embaixo de uma curva entre dois pontos definidos, na integral definida estamos definindo esses dois pontos, diferente da integral indefinida que apenas fazíamos a integração da função, e não calculávamos o valor da área.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Observem que colocamos o intervalo nas pontas da integral, onde *a* é o ponto inicial e *b* o ponto final $(a; b)$. Com isso quando integramos a função, teremos:

$$[F(x) + C]|_{a}^{b} = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

Como de conhecimento a primitiva da função integrada é a área abaixo da curva da função a ser integrada, temos que se queremos a área entre dois pontos, tal:

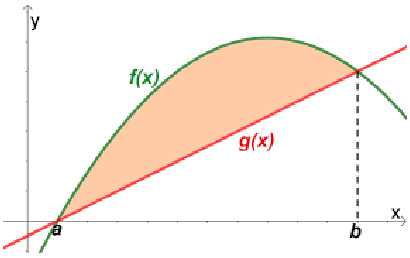


Sabendo que a integral é a área em baixo da curva teríamos, que a área A2, área embaixo da curva até o ponto *b*, contém a área A1, área embaixo da curva até o ponto *a*, para ter a área intermediária entre esses dois intervalos $\boldsymbol{S}$ basta apenas subtrair da maior área (A2) a menor área (A1), como fizemos:

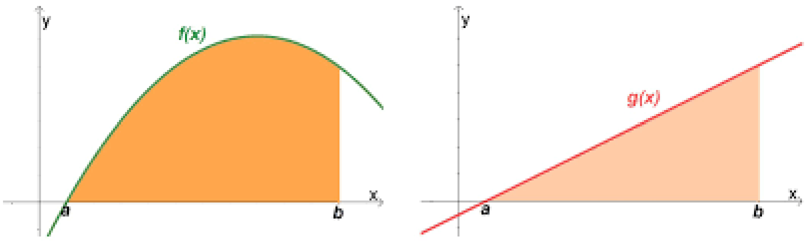
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = [F(x) + C]|_{a}^{b} = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

Vejam que a constante nesse caso se cancela, pois a mesma não se altera independentemente do valor de *x*, logo nos casos de integrais definidas não é necessário colocar a constante no final. Lembre-se que estamos calculando áreas, logo o valor sempre será maior ou igual a zero, ou seja, se o valor da integral definida deu negativo, então fora cometido algum erro em seus cálculos.

Outros casos que podemos utilizar a integral definida:



Se quiséssemos calcular a área entre essas duas funções, aplicaríamos a mesma ideia, veja que a área criada embaixo da função *g(x)* está contida na área embaixo da curva da função *f(x)*



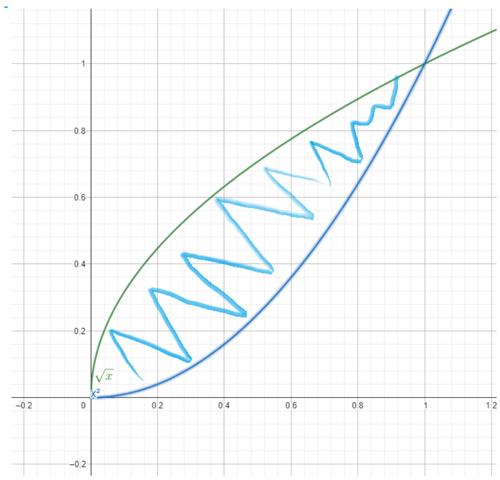
Logo, a área entre essas duas funções seria:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} - \int_a^b \boldsymbol{g(x)dx} = [\boldsymbol{F(x)+C}]|_a^b - [\boldsymbol{G(x)+C}]|_a^b$$

$$= [\boldsymbol{F(b)+C}] - [\boldsymbol{F(a)+C}] + [\boldsymbol{G(b)+C}] - [\boldsymbol{G(a)+C}] = \boldsymbol{F(b)-G(b)}$$

$$ps. Como\ não\ há\ área\ embaixo\ da\ curva\ antes\ do\ ponto\ a, logo\ \boldsymbol{F(a)=G(a)=0}$$

Como exemplo, vamos calcular a área entre as seguintes funções, $f(x) = \sqrt{x}\ e\ g(x) = x^2$ no intervalo $[0; 1]$:



Para isso identificamos a função que tem a maior área embaixo da curva entre as duas, vejam que a área criada pela curva da função $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ contém a área da embaixo da curva da função $g(x) = x^2$, logo teríamos:

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}/\mathbf{2}}\, \boldsymbol{dx} - \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{dx} = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]\Bigg|_0^1 - \left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]\Bigg|_0^1 = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{(1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right) = \left(\frac{(1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{(1)^3}{3}\right) = \frac{2\sqrt{1^3}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{3} - \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

Ou seja, a área entre essas duas funções nesse intervalo é de $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$.