Transformações Lineares, Autovalores e Autovetores

Diretório de Apoio Acadêmico

1 Transformações Lineares

Vimos anteriormente na introdução de vetores, que podiamos escrever um vetor como uma função de uma reta:

$$v = (2,1) \therefore y = \frac{1}{2}x$$

E que muitos problemas, ou equações podemos escrever como uma operação entre vetores:

$$2x + y = k \therefore \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [k] \therefore A * X = B$$

Onde temos um vetor de constantes **A**, o vetor de coordenadas **X** e o vetor resultante **B**.
As transformações lineares possuem um papel importante na solução e visualização de problemas vetoriais, pois com o mesmo podemos fazer *alterações* em relação a dimensão de um *Espaço Vetorial*, tome o exemplo abaixo como exemplo:

1.0.1 Exemplo 1

Dado um Espaço Vetorial:

$$V = \mathbf{R}^3 \therefore v = (x, y, z)$$

Podemos transformar esse espaço de *dim* $V = 3$ (espaço vetorial de terceira dimensão), em um espaço *dim* $Q = 1$ (espaço vetorial de uma dimensão) ao fazer a seguinte transformação:

$$Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

$$(x, y, z) \to (a, b, c)^T * (x, y, z)$$

Note que não modificamos o vetor de coordenadas original, e sim aplicamos o mesmo em uma função, transformando-o:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to [a, b, c] * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = ax + by + cz$$

Logo, teriamos um vetor de uma única dimensão.

1.0.2 Exemplo 2

Podemos realizar uma transformações a qual não ocorre a mudança de dimensões, ou seja:

$$V = \mathbf{R}^3$$
$$Q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

Normalmente são funções que no final irá retornar um vetor de mesmas dimensões, como o produto por uma escalar qualquer:

$$v = (x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow k * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix}$$

Para uma definição mais técnica de *Transformação Linear*, consideramos dois espaços vetoriais V e W, onde uma ***Transformação Linear*** é a aplicação de $\boldsymbol{V}$ em $\boldsymbol{W}$:

$$F : V \rightarrow W$$

E que satisfaça as seguintes condições:

$$\mathbf{I}.\ \textit{Para qualquer vetor } \mathbf{u} \textit{ e } \mathbf{v} \textit{ em } V:$$

$$F(u + v) = F(u) + F(v)$$

(A transformação da soma, e a soma das transformações)

$$\mathbf{II}.\ \textit{Quaisquer que sejam } k \in \mathbf{R} \textit{ e } v \in V;$$

$$F(ku) = kF(u)$$

(A transformação de um vetor escalonado, é a escalonação da transformação)

1.0.3 Exemplo 3

Considere dois *Espaços Vetoriais*:

$$V = \mathbf{R}^3 \text{ e } W = \mathbf{R}^2$$

A qual o espaço V é submetido a uma transformação linear:

$$F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

A transformação dada:

$$(x, y, z) \rightarrow (x + z, y - z)$$

Tal, que se $(x, y, z) = (4, 2, 2)$ teriamos $F(4, 2, 2) = (2, 0)$. Agora devemos verificar se a tal transformação $\mathbf{F}$ é uma transformação linear, dados as condições:

$$\textit{dados } v = (x, y, z) \textit{ e } w = (i, j, k)$$

$I.F(v + w) = F(v) + F(w)$

$$F((x + i, y + j, z + k)) = F(x, y, z) + F(i, j, k)$$

$$(x + i + z + k, y + j - z - k) = (x + z, y - z) + (i + k, j - k)$$
$$(x + i + z + k, y + j - z - k) = (x + z + i + k, y - z + j - k)$$

Note que mesmo fora de ordem os vetores apresentam-se iguais, logo a primeira condição é satisfeita.

$$dado\ c \in \mathbf{R}$$

$$II.F(cv) = cF(v)$$

$$F(cx, cy, cz) = cF(x, y, z)$$

$$(cx + cz, cy - cz) = c(x + z, y - z)$$

$$(cx + cz, cy - cz) = (c(x + z), c(y - z))$$

$$(cx + cz, cy - cz) = (cx + cz, cy - cz)$$

A segunda condição também é satisfeita, logo **F** é uma transformação linear de **V** para **W**.

2 Autovalores e Autovetores

Um caso interessante das transformações, é quando ao realizar a transformação em um vetor $v \in V$, obteremos ele mesmo:

$$T(v) = v$$

Quando esse caso ocorre, temos um *vetor fixo*. Outro caso é quando obtemos um vetor múltiplo de si mesmo, ou seja, segue a mesma reta em um plano, como por exemplo:

$$v_1 = (1, 2),\ v_2 = (2, 4),\ v_3 = (3, 6), ...$$

Observem que cada vetor após o v_1 poderia ser obtido por meio de uma multiplicação por escalar:

$$v_1 = (1, 2),\ v_2 = 2 * v_1,\ v_3 = 3 * v_1\ ...$$

A qual no final poderiamos generalizar como:

$$v = \lambda v_1$$

Quando encontramos um vetor a qual a transformação linear retorna um múltiplo de si mesmo, teremos que tal *vetor* (v_1) é um ***autovetor*** e a *constante multiplicativa* (λ) será nosso ***autovalor***.

$$T(v) = \lambda v$$

Formalizando, seja $T : V \to V$ uma transformação/operação linear. Se existem vetores $v \in V,\ v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbf{R}$, tal que $T(v) = \lambda v$, λ é um *autovalor* e v é um *autovetor*.

2.1 Autovalores e Autovetores em uma matriz

Observamos anteriormente, que teremos um *autovetor* e um *autovalor* quando se é realizado uma **Transformação Linear** em um vetor $v \in V$, e obtemos um múltiplo desse mesmo vetor. Nas matrizes teremos um mesmo comportamento parecido.
Dado uma matriz quadrada qualquer $A = M(n, n) \in \mathbf{V}$, iremos realizar uma transformação linear associada a essa matriz em relação a base canônica:

$$T_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

tal que:

$$T_A(v) = A * v$$

Logo, se existe um $\lambda \in \mathbf{R}$ *de* A e um autovetor $v \in \mathbf{R}^n$, o produto entre esses autovalores e autovetores serão soluções para a transformação:

$$T_A(v) = A * v = \lambda v$$

Para facilitar encontrar os *autovalores* de uma matriz, utilizaremos da seguinte relação, como exemplo considere:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Observe que:

$$2 * B = (2 * I) * B$$

$$2 * B = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$$

$$(2 * I) * B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + 0c & 2b + 0d \\ 0a + 2c & 0b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$$

Logo, iremos realizar a seguinte mudança em nossa equação anterior:

$$A * v = \lambda v \therefore A * v = (\lambda * I) * v$$

(Deixando ambos termos em um mesmo lado da igualdade)

$$A * v - (\lambda * I)v = 0$$

(Observe que o vetor ***v*** *é um elemento em comum em ambos termos, logo colocamos o mesmo em evidência)*

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Note que v não pode ser o vetor nulo $v \neq \mathbf{0}$, e como nosso objetivo é obter os **autovalores** utilizaremos do **determinante**, sabendo que se o mesmo for diferente de 0 hávera apenas uma única solução, que seria a *nula*. Logo, buscaremos o **determinante** quando o mesmo é igual a zero:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

2.1.1 Exemplo

Dado uma matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule os autovalores da matriz **A**.

Como visto anteriormente podemos obter os autovalores ao resolver o seguinte determinante:

$$det(A - \lambda I)$$

Considerando que nossa matriz de interesse é uma 3x3, a matriz Identidade ***I****, também será uma 3x3.*

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \lambda * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Realizando o determinante da matriz obtida acima, teriamos:

$$det(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}) = [(-1-\lambda)*(7-\lambda)*(-2-\lambda)]+[1*(-1)*0]+[0*0*0]-$$

$$-[0*(7-\lambda)*0]-[1*0*(-2-\lambda)]-[(-1-\lambda)*(-1)*0]=$$
$$=[(-1-\lambda)*(7-\lambda)*(-2-\lambda)]+0+0-0-0-0=$$
$$=(-1-\lambda)*(7-\lambda)*(-2-\lambda)=0$$

Observe que obtemos um problema de terceiro grau, logo quando resolvemos o mesmo, obteremos os autovalores.
Nesse caso para resolver utilizaremos da manipulaçãp:

$$(-1-\lambda)*(7-\lambda)*(-2-\lambda)=0$$

*(Note que temos um produto de três termos, onde cada um está realizando uma operação com o **lambda**, basta apenas um dos termos ser 0, que a equação será verdadeira, veja:)*

$$\lambda = -1$$

$$(-1-(-1))*(7-(-1))*(-2-(-1)) = (0)*(8)*(-1) = 0$$
$$\lambda = 7$$
$$(-1-(7))*(7-(7))*(-2-(7)) = (-8)*(0)*(-9) = 0$$
$$\lambda = -2$$
$$(-1-(-2))*(7-(-2))*(-2-(-2)) = (1)*(9)*(0) = 0$$

(Logo, nossos autovalores são respectivamente: 7,-1,-2)

$$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -1\ e\ \lambda_3 = -2$$

Sabendo dos autovalores que representam a transformação linear da matriz A em relação a uma base canônica, poderiamos obter os autovetores dessa mesma matriz. Para isso fazemos a seguinte igualdade:

$$(A-\lambda I)*v = 0$$

Ou seja, $\boldsymbol{v}$:

$$(A-\lambda I)v = 0 \therefore \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Para : \lambda_1 = 7$$

$$(A-7I)v = v \therefore \begin{bmatrix} -1-7 & 1 & 0 \\ 0 & 7-7 & -1 \\ 0 & 0 & -2-7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Obteremos o seguinte sistema de equações)

$$\begin{aligned} -8x + y = 0 \therefore y = 8x \\ -z = 0 \\ -9z = 0 \end{aligned}$$

$$v_1 =_x (1, 8, 0)$$

(Note que é um vetor (x, 8x, 0), pois nesse caso iremos dizer que x pode assumir qualquer valor, e podemos obter y ao multiplicar tal valor 8 vezes, e que z nesse caso é zero independentemente dos valores de x)

$$Para : \lambda_2 = -1$$

$$(A + I)v = v \therefore \begin{bmatrix} -1+1 & 1 & 0 \\ 0 & 7+1 & -1 \\ 0 & 0 & -2+1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Obteremos o seguinte sistema de equações)

$$\begin{aligned} y = 0 \\ 8x - z = 0 \therefore x = 0 \\ -z = 0 \end{aligned}$$

(Observe que todos estão iguais a zero, logo o mesmo passa a ser um vetor livre, e podemos escolher qualquer vetor para representar como:)

$$v_2 =_x (1, 0, 0)$$

$$Para : \lambda_3 = -2$$

$$(A + 2I)v = v \therefore \begin{bmatrix} -1+2 & 1 & 0 \\ 0 & 7+2 & -1 \\ 0 & 0 & -2+2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Obteremos o seguinte sistema de equações)

$$\begin{aligned} x + y = 0 \therefore x = -y \\ 9y - z = 0 \therefore z = 9y \\ 0 = 0 \end{aligned}$$

$$v_3 =_y (-1, 1, 9)$$

*(Dessa vez criamos um vetor em relação a **y**, note que quando fazemos um vetor, a posição da coordenada é sempre **1 positivo**)*

2.2 Diagonalização

Uma característica importante dos autovalores e autovetores, é que cada autovalor traz consigo, *pelomenos* um autovetor, e autovetores de diferentes autovalores são Linearmentes Independentes entre si. Logo, dado **n** *autovalores* poderiamos ter uma base de **n** *autovetores*, onde nossa *matriz de constantes* (**A**) seria uma matriz **diagonal** de autovalores, e teremos uma base **v** formada pelos autovetores:

$$A * v = [T]_\beta^\beta \mathbf{v},\ onde\ [T]_\beta^\beta\ é\ a\ matriz\ diagonal\ de\ autovalores;$$

*(Podemos considerar a matriz diagonal como **D** se preferível.)*

2.2.1 Exemplo

Utilizemos do caso anterior, onde:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ (x, y, z)\ representam\ vetores\ quaisquer.$$

$$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -1\ e\ \lambda_3 = -2$$

$$v_1 = (1, 8, 0),\ v_2 = (1, 0, 0)\ e\ v_3 = (-1, 1, 9)$$

Logo, nossa matriz diagonal seria:

$$[T]_\beta^\beta = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

De base:

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3] = [(1, 8, 0), (1, 0, 0), (-1, 1, 9)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Tal que podemos descrever a matriz anterior como:

$$A = \mathbf{v} D \mathbf{v}^T$$

2.3 Polinômio Minimal

Há casos onde uma matriz não será diagonalizável, em casos mais simples onde temos uma matriz de baixa dimensão, podemos saber facilmente ao mostrar que não é possível criar uma base de autovetores, como fizemos anteriormente, resumindo, se temos uma *Matriz* de dimensão **n**, é necessário ter **n autovetores LI**. Porém quando lidamos com uma matriz de grandes dimensões, realizar tais cálculos podem ser massivos tal que é necessário ir por outro meio, para descobrir se uma matriz A é diagonalizável.

Então, considere um *polinômio* qualquer:

$$p(x) = a_n * x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 * x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Quando temos um polinômio que o resultado é **0**, falamos que o polinômio anula a variável de interesse:

$$p(x) = 0$$

Podemos considerar x como uma matriz **A**:

$$p(A) = a_n * A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_2 * A^2 + a_1A^1 + a_0A^0$$

$$note : A^0 = I$$

Logo, quando encontramos um polinômio que consegue anular nossa matriz **A**:

$$p(A) = a_n * A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_2 * A^2 + a_1A^1 + a_0I = 0$$

Podem existir diversos polinômios a quais conseguem anular nossa matriz, porém o polinômio de menor grau possível que consiga zerar nossa matriz será chamado de ***polinômio minimal***:

$$m(A) = 0$$

(Se existe um polinômio que consiga anular nossa matriz, dentro do mesmo polinômio pode existir um polinômio de menor grau que consiga anular também a matriz)

$$m(x) = x^k + a_{k-1} * x^{k-1} + ... + a_1x + a_0$$

Então ao invés de calcular os autovetores de uma matriz, nosso problema será encontrar o polinômio minimal de **A**, tal que:

$$m(x) = (x - \lambda_1) * (x - \lambda_2) * (x - \lambda_3) * ... * (x - \lambda_n) = 0$$

Onde os λ são distintos entre si.

2.3.1 Exemplo 1

Dado:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(Para calcular o polinômio minimal, primeiro obtemos o polinômio característico que é dado pelo determinante da diferença)

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$$

$$p(\lambda) = det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}) = 0$$

$$p(\lambda) = (1 - \lambda) * (2 - \lambda) * (3 - \lambda) = 0$$

$$m(\lambda) = (1 - \lambda) * (2 - \lambda) * (3 - \lambda)$$

(Por temos um polinômio formado por diferentes autovalores , teremos que nosso polinômio característico também é nosso polinômio minimal)

$$m(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

2.3.2 Exemplo 2

Dado:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(Para calcular o polinômio minimal, primeiro obtemos o polinômio característico que é dado pelo determinante da diferença)

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$$

$$p(\lambda) = det(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}) = 0$$

$$p(\lambda) = (2-\lambda) * (2-\lambda) * (2-\lambda) = (2-\lambda)^3 = 0$$

(Note que os temos 3 autovalores iguais, logo temos uma polinômio de terceiro grau, mas por serem iguais o polinômio mínimo pode ser de grau inferior, então devemos verificar)

$$\lambda = 2$$

$$m_1(\lambda) = (\lambda - 2)$$
$$m_2(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$
$$m(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

$$Para\ m_1:$$

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Para\ m_2:$$

$$(A - 2I)^2 = \left(\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix}\right)^2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que o polinômio característico é um polinômio de terceiro grau,

$$p(\lambda) = (2-\lambda)^3 = 0$$

porém podemos anular a matriz com um polinômio de grau inferior.

$$m(\lambda) = (2-\lambda)^2 = 0$$

Logo, nem todos os casos o *polinômio minimo* é o *polinônio característico.*

Com isso concluímos com esse tópico, e prosseguiremos para ***Produto Interno***.