# LISTA DE PROVAS (ÁREA II)
## Continuidade

## Enunciados

### 1º EE. - 2008.1

4. (1,5) Considere a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + \alpha & , \text{ se } x < 0; \\ e^x & , \text{ se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) (0,5) Determine o valor de $\alpha$ para o qual $f$ é contínua em $x = 0$, justificando a sua resposta.

(b) (0,5) Faça um esboço do gráfico da função com o valor de $\alpha$ encontrado no item $(a)$.

(c) (0,5) Responda se a função do item $(b)$ possui derivada ou não no ponto $x = 0$, dando um argumento geométrico à luz do gráfico esboçado no item $(b)$.

### 1º EE. - 2008.2

4. (*2.0 pt.*) Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x < 0; \\ 1 & \text{se } x = 0; \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(*1.0 pt.*) a) Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$. Esta função é contínua em $x = 0$ ? Justifique sua resposta.

### 1º EE. – 2009.1

4. (*1.5 pt.*) Determine o valor da constante $k$ tal que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}, & \text{para} \quad 0 \leq x < 1, \\ k, & \text{para} \quad x = 1 \end{cases}$$

seja contínua para $0 \leq x \leq 1$.

## 1º EE. – 2009.2

3. Considere a função $f$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & , \text{ se } x < 0; \\ ax + b & , \text{ se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a)(1,0) Determine o valor de $b$ para que $f$ seja contínua em $x = 0$, justificando a sua resposta.

(b)(1,0) Determine o valor de $a$ para que $f$ seja derivável em $x = 0$, justificando a sua resposta.

## 1º EE. – 2011.2

**4ª Questão** ***a)*** (1,0 ponto) Utilizando a definição, calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$ no ponto $x = 1$ (**Não** é permitido usar as regras de derivação).

***b)*** (1,5 pontos) Seja

$$h(x) = \begin{cases} x^4 + a + 1, & \text{se } x \leq 0; \\ b\,\text{sen}(x) - 2a\cos(x), & \text{se } 0 < x \leq \pi/2; \\ 2b - 3, & \text{se } x > \pi/2\,. \end{cases}$$

Determine os valores de $a$ e $b$ tais que $h$ é contínua.

## 1º EE. – 2015.1

**4.** (2,0 pt) Associe **V** para verdadeiro e **F** para falso nos seguintes itens:
(**Obs: Cada item errado anula um certo**)

Considere $g(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+1} + b\sqrt{x+4}, & \text{se } x \geq 0. \\ x + \dfrac{1}{1-x}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$ , onde $a, b$ são constantes reais.

( ) Para $a = 1$ e $b = -2$ a função $g(x)$ é contínua em $x = 0$.

( ) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a + 2b = 1$, $g(x)$ é contínua em $x = 0$.

( ) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $2a + b = 8$, $g(x)$ é diferenciável em $x = 0$.

( ) Somente quando $a = 3$ e $b = -2$ a função $g(x)$ é diferenciável em $x = 0$.

( ) Somente quando $a = 5$ e $b = -2$ a função $g(x)$ é diferenciável em $x = 0$.

## 1º EE. – 2017.1

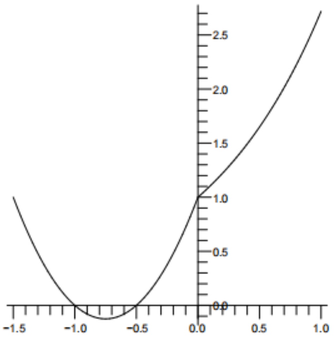
**2ª Questão [2 pontos]:** Para quais valores de $c$ a função $f$ abaixo é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} c^2x^2 + 2x & se \quad x < 2, \\ x^3 - cx & se \quad x \geq 2. \end{cases}$$

# Gabarito

## 1º EE. - 2008.1

4. a) Como $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x^2 + 3x + \alpha) = \alpha$, para que $f$ seja contínua em $x = 0$, devemos ter que $\alpha = 1$




## 1º EE. - 2008.2

**4ª Questão**

a) Calculando os limites laterais, obtemos

$$\lim_{x \to 0_-} f(x) = \lim_{x \to 0_-} (e^{-x}) = 1,$$

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} (2x + 1) = 1.$$

Portanto $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Como $f(0) = 1$, concluímos que $f$ é contínua em $x = 0$.

## 1º EE. – 2009.1

4. (*1.5 pt.*) Determine o valor da constante $k$ tal que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}\,, & \text{para} \quad 0 \leq x < 1\,, \\ k\,, & \text{para} \quad x = 1 \end{cases}$$

seja contínua para $0 \leq x \leq 1$.

Para que função seja contínua devemos ter

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = k\,.$$

Mas

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-1}{\sqrt{x} + 1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Portanto

$$k = -\frac{1}{2}\,.$$

## 1º EE. – 2009.2

3. a) $f$ é contínua em $x = 0$ quando $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Como $f(0) = b$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + x = 0$, concluímos que a continuidade em $x = 0$ é possível quando $b = 0$.

b) Como $f(0) = 0$, para que $f$ seja derivável em $x = 0$ deve existir $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. Como $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x} = a$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x} = 1$, temos que $f'(0)$ existe quando $a = 1$.

## 1º EE. – 2011.2

**4ª Questão** ***a)*** Temos $f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{6-2x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{6-2x}-2)(\sqrt{6-2x}+2)}{(x-1)(\sqrt{6-2x}+2)}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{6-2x-4}{(x-1)(\sqrt{6-2x}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{-2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{6-2x}+2)} = \frac{-2}{2+2} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$

***b)*** É suficiente garantir a continuidade da função $h$ nos pontos $x = 0$ e $x = \pi/2$. Ora, $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} x^4 + a + 1 = a + 1$, enquanto $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} b\,\text{sen}(x) - 2a\cos(x) = b\,\text{sen}(0) - 2a\cos(0) = -2a$. Portanto $h$ é contínua em $x = 0$ se e somente se $a + 1 = -2a$, isto é, $a = -1/3$. Analogamente $\lim_{x\to(\pi/2)^-} h(x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} b\,\text{sen}(x) - 2a\cos(x) = b\,\text{sen}(\pi/2) - 2a\cos(\pi/2) = b$ e $\lim_{x\to(\pi/2)^+} h(x) = \lim_{x\to(\pi/2)^+} 2b - 3 = 2b - 3$. Portanto $h$ é contínua em $x = \pi/2$ se e somente se $b = 2b - 3$, isto é, $b = 3$. Assim, os valores procurados são $\boldsymbol{a = -1/3, b = 3}$

## 1º EE. – 2015.1

**4.** (2,0 pt) Associe **V** para verdadeiro e **F** para falso nos seguintes itens:
**(Obs: Cada item errado anula um certo)**

Considere $g(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+1} + b\sqrt{x+4}, & \text{se } x \geq 0. \\ x + \dfrac{1}{1-x}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$, onde $a, b$ são constantes reais.

( **F** ) Para $a = 1$ e $b = -2$ a função $g(x)$ é contínua em $x = 0$.

( **V** ) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a + 2b = 1$, $g(x)$ é contínua em $x = 0$.

( **F** ) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $2a + b = 8$, $g(x)$ é diferenciável em $x = 0$.

( **F** ) Somente quando $a = 3$ e $b = -2$ a função $g(x)$ é diferenciável em $x = 0$.

( **V** ) Somente quando $a = 5$ e $b = -2$ a função $g(x)$ é diferenciável em $x = 0$.

**1º EE. – 2017.1**

**2ª Questão [2 pontos]:** Para quais valores de $c$ a função $f$ abaixo é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} c^2x^2 + 2x & se \quad x < 2, \\ x^3 - cx & se \quad x \geq 2. \end{cases}$$

*Solução:* Inicialmente, notemos que para $x > 2$ ou $x < 2$ a função $f$ é polinomial e portanto contínua. O único ponto onde $f$ possivelmente é descontínua é em $x = 2$. Para que $f$ seja contínua em $x = 2$, os limites laterais devem existir e, mais ainda, devem ser igual a $f(2)$. Assim temos:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} c^2x^2 + 2x = 4c^2 + 4$$

e

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^3 - cx = 8 - 2c$$

Assim, para que $f$ seja contínua em $x = 2$, devemos ter $4c^2+4 = 8-2c$, o que é equivalente a $4c^2 + 2c - 4 = 0$, o que constitui uma equação do segundo grau na variável $c$. Suas soluções são da forma

$$c = \frac{-2 \pm \sqrt{68}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Concluimos que se $c = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ ou $c = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ então $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe. Mais ainda

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2).$$

Portanto, para esses valores de $c$ a função $f$ é contínua.