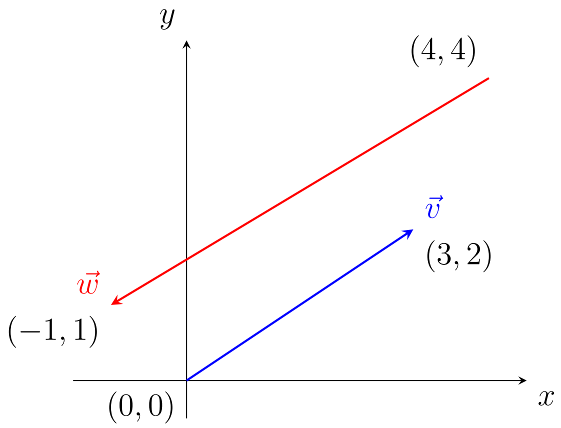
Vetores no Plano e no Espaço

Diretório de Apoio Acadêmico

1 Vetores

Para abordar a questão do espaço vetorial, primeiros iremos recordar o que seria um vetor. Poderiamos dizer que o mesmo seria uma reta, com uma origem e um fim, comprimento e direção, como por exemplo:



Observe que temos 2 vetores, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$, onde possuem comprimentos diferentes, e direções diferentes. E como fariamos para representar tais vetores? Basta ver que ambos são retas, e como tal, podemos representar uma reta pela equação:

$$\Delta y = m * \Delta x \therefore m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y = m * x + b$$

Onde m seria o ângulo da reta, define se a mesma é crescente ou decrescente, b o intercepeto de reta, ou seja, em que ponto de y a reta atravessa seu *eixo*. Logo, teriamos:

$$Para\ o\ vetor\ \vec{v}:$$

$$(3-0) = m * (2-0) \therefore 3 = 2m \therefore m = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2} * x + b$$

(considerando um dos pontos, encontrariamos b)

$$0 = \frac{3}{5} * (0) + b \therefore b = 0$$

$$y = \frac{3}{5} * x$$

E traduzimos essa reta como vetor da seguinte forma:

$$\vec{v} = \langle x, y \rangle$$

$$\vec{v} =_x \langle 1, m \rangle =_y \langle \frac{1}{m}, 1 \rangle$$

(podemos ver o vetor de duas formas, dependendo da *variável* que é considerada *independente*, e o ângulo m representa o efeito na variável *dependente*)

$$\vec{v} =_x \langle 1, \frac{3}{2} \rangle =_y \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle$$

(Qualquer uma dessas é uma opção de como descrever tal vetor, normalmente utilizamos o primeiro, mas não há problema em utilizar o segundo)

$$\vec{v} = \langle 1, \frac{3}{2} \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

(Os mesmos podem se escritos como matrizes)

$$Para\ o\ vetor\ \vec{w}:$$

$$(1-4) = m * (-1-4) \therefore -3 = -5m \therefore m = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{3}{5} * x + b$$

(considerando um dos pontos, encontrariamos b)

$$1 = \frac{3}{5} * (-1) + b \therefore b = \frac{8}{5}$$

$$y = \frac{3}{5} * x + \frac{8}{5}$$

E traduzimos essa reta como vetor da seguinte forma

$$\vec{w} = \langle x, y \rangle$$

$$\vec{w} =_x \langle 1, m \rangle$$

$$\vec{w} =_x \langle 1, \frac{3}{5} \rangle$$

(Porém relembramos que o *vetor* $\vec{w}$ possue direção oposta ao vetor $\vec{v}$, quando tal ocorre, basta trocar o sinal do vetor)

$$\vec{w} = \langle -1, -\frac{3}{5} \rangle = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

2 Vetores no Plano

É possível observar no caso anterior, que quando o vetor tem como *ponto inicial* na *origem*, em um plano cartesiano, os valores que irão *definir* o vetor seria apenas o *ponto final* do mesmo,

$$\vec{v} = \langle 2, 3 \rangle = \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$$

porém nos casos onde esse ponto inicial não é a origem, temos que o vetor seria definido por ambos pontos.

$$\vec{w} = \langle (-1-4), (1-4) \rangle = \langle 1, \frac{(1-4)}{(-1-4)} \rangle = \langle 1, \frac{3}{5} \rangle$$

Para facilitar o compreendimento, utilizaremos apenas vetores com *ponto inicial* na *origem*, esses que são conhecidos como **vetores no plano**.

2.1 Operações com vetores

E da mesma forma que podiamos fazer operações com matrizes, podemos fazer *operações* com *vetores*, tais como *soma*, *subtração* e *multiplicação*:

$$Considerando\ os\ seguintes\ vetores:$$

$$\vec{v} = \langle a, b \rangle\ e\ \vec{w} = \langle c, d \rangle$$

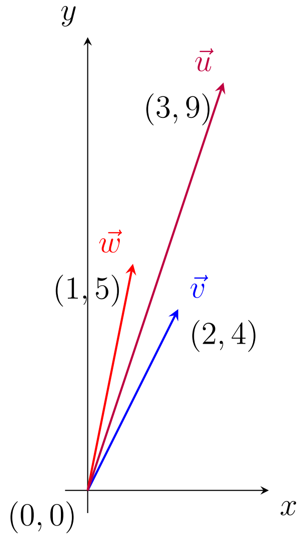
$$I.\ Soma\ de\ vetores: \vec{v} + \vec{w} = \langle (a+c), (b+d) \rangle = \vec{u}$$

Na soma de vetores, somamos os elementos dos vetores, e obtemos um novo vetor como resultado:

$$Considerando: \ \vec{v} = \langle 2, 4 \rangle\ e\ \vec{w} = \langle 1, 5 \rangle$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \langle (2+1), (4+5) \rangle = \langle 3, 9 \rangle = \vec{u}$$

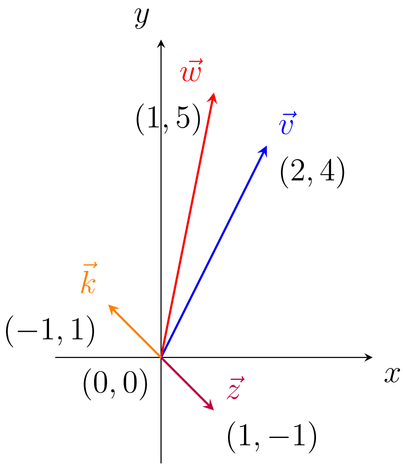
Vejamos o gráfico:



Observem que o resultado da soma é um novo vetor, que se encontrará entre os vetores somados.

$$II.\ Subtração\ de\ vetores : \vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \langle (a-c), (b-d) \rangle = \vec{z}$$

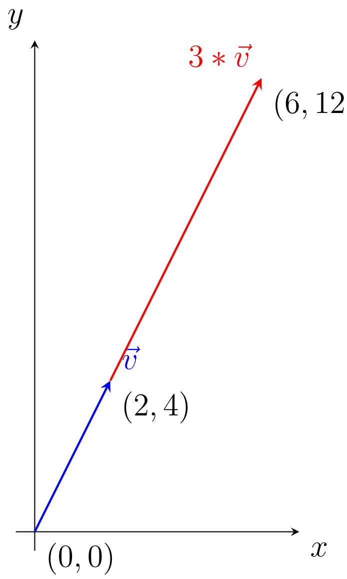
$$\vec{v} + (-\vec{w}) = \langle (2-1), (4-5) \rangle = \langle 1, -1 \rangle = \vec{z}$$
$$\vec{w} + (-\vec{z}) = \langle (1-2), (5-4) \rangle = \langle -1, 1 \rangle = \vec{k}$$



Na subtração de vetores a ordem da operação resultará em uma espelhagem do outro, ou seja, $\vec{z} = -\vec{k}$ e vice-versa.

$$III.Multiplicação\ por\ um\ número : k * \vec{v} = k * \langle a, b \rangle = \langle ka, kb \rangle$$

$$Considerando : k = 3$$
$$3 * \vec{v} = \langle 3 * 2, 3 * 4 \rangle = \langle 6, 16 \rangle$$



Já quando multiplicamos um vetor por um escalar, estaremos apenas modificando o comprimento do mesmo.

2.2 Vetores no espaço

Enquanto os vetores no plano, consideravam vetores de *2 dimensões*, os vetores no espaço possuem *3 dimensões*:

$$Vetores\ no\ plano : \vec{v} = \langle x, y \rangle$$

$$Vetores\ no\ espaço : \vec{w} = \langle x, y, z \rangle$$

É possível notar certa similaridades entre as operações com vetores, e operações com *matrizes* do tipo *linha*, na soma e subtração fazemos elemento por elemento, e na multiplicação por uma constante fazemos o produto de todos os elementos por tal constante, e o mais importante só conseguimos *fazer operações* com matrizes, e *vetores*, de *mesma dimensão.*

As mesmas operações vistas com vetores de *duas dimensões*, podem ser realizadas com vetores de *três, ou mais, dimensões*, e dada a similiaridade com as matrizes-linhas os mesmos compartilham de algumas **propriedades**:

$$Considerando :\ \vec{v} = \langle a, b \rangle;\ \vec{w} = \langle c, d \rangle\ e\ \vec{u} = \langle e, f \rangle$$

$$I.\ \textbf{Comutatividade} : \vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$Prova :\ \langle a, b \rangle + \langle e, f \rangle = \langle (a+e), (b+f) \rangle = \langle (e+a), (f+b) \rangle = \langle e, f \rangle + \langle a, b \rangle = \vec{u} + \vec{v}$$

$$II.\ \textbf{Associatividade} : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$Prova :\ \langle (e{+}a), (f{+}b) \rangle {+} \langle c, d \rangle = \langle (e{+}a{+}c), (f{+}b{+}d) \rangle = \langle e, f \rangle {+} \langle (a{+}c), (b{+}d) \rangle = \vec{u} {+} (\vec{v} {+} \vec{w})$$

$$III.\ \textbf{Elemento neutro} : Existe\ \mathbf{0} \in V(espaço)\ tal\ que\ \vec{u} + \mathbf{0} = \vec{u}$$

$$Prova : \mathbf{0}\ é\ um\ vetor\ nulo, logo\ \langle e, f \rangle + \langle 0, 0 \rangle = \langle u, f \rangle = \vec{u}$$

$$Prova$$

$$IV.\ \textbf{Elemento Oposto} : Existe\ -\vec{v} \in V,\ tal\ que\ \vec{v} + (-\vec{v}) = \mathbf{0}$$

$$Prova : \langle a, b \rangle + \langle -a, -b \rangle = \langle 0, 0 \rangle = \mathbf{0}$$

$$V.\ \textbf{Distributividade} : Existe\ k \in K(conjunto\ de\ números\ qualquer),\ e\ \vec{v} \in V,\ logo\ k{*}\vec{v} \in V.$$

$$Tal\ pode\ ser\ distribuído\ em\ uma\ soma\ de\ vetores :$$

$$k * (\vec{v} + \vec{w}) = k\vec{v} + k\vec{w}$$

$$Prova : k * \langle (a+c), (b+d) \rangle = \langle (ka+kc), (kb+kd) \rangle = \langle ka, kb \rangle + \langle kc, kd \rangle = k\vec{v} + k\vec{w}$$

$VI.$ **Distributividade da soma de escalares** : $k, m \in K\ e\ \vec{v} \in V,\ logo\ (k+m)*\vec{v} = k\vec{v}+m\vec{v}$

$Prova:\ \langle (k+m)*a, (k+m)*b \rangle = \langle ka+ma, kb+mb \rangle = \langle ka, kb \rangle + \langle ma, mb \rangle = k\vec{v}+m\vec{v}$

$VII.$ **Associatividade do produto de escalares** : $k, m \in K\ e\ \vec{v} \in V,\ (km)\vec{v} = k(m\vec{v})$

$Prova: (km)\vec{v} = \langle (km)*a, (km)*b \rangle = \langle k*(ma), k*(mb) \rangle = k\langle ma, mb \rangle = k(m\vec{v})$

$VIII.$ **Escalar Neutro** : $1 \in K\ e\ \vec{v} \in V,\ tal\ que\ 1*\vec{v} = \vec{v}$

Observação : independentemente do vetor, ao multiplicar pelo elemento neutro o resultado será o próprio vetor.

Vetores que obedecem essas *8* propriedades, fazem parte de um conjunto chamado de ***ESPAÇO VETORIAL***, ou a qual possuem tais propriedades como seus **AXIOMAS**.