UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Terceiro Exercício – PROVA TIPO **B** – (ET657) PROBABILIDADE 2 PARA ATUÁRIA – 2020.2

Turma: 2P Professor: Roberto Ferreira Manghi Data: 16/08/2021

OBS1: Esta prova tem o total de 12,0 pontos. Você pode resolver quantas questões quiser. A nota será o mínimo entre a soma dos pontos obtidos e o valor 10,0.

OBS2: As respostas devem estar acompanhadas dos cálculos, respostas sem cálculos serão anuladas.

1º) (3,0 pontos) Seja (X, Y) um vetor aleatório com X e Y variáveis i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas), com $X \sim Exp(\beta)$ e $Y \sim Exp(\beta)$. Para constantes positivas a, b, c, d, defina $U = aX + bY$ e $V = cX + dY$.

a) (1,5 ponto) Obtenha a função de densidade conjunta do vetor (U, V);

b) (1,5 ponto) Fixando $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ e $d = 1$ no item (a), calcule a densidade marginal de U.

2º) (3,0 pontos) Suponha que o funcionamento de uma peça eletrônica é determinada pelo funcionamento de três componenentes A, B e C. Suponha que os tempos de funcionamento dos componentes, em anos, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, tais que $X_A \sim Exp(\beta)$, $X_B \sim Exp(\beta)$ e $X_C \sim Exp(\beta)$, com $\beta = 1/10$.

a) (1,5 ponto) Se a peça falha apenas quando o último dos três componentes falha, qual a probabilidade da peça falhar antes de 5 anos?

b) (1,5 ponto) Se a peça falha quando algum dos três componentes falha, qual a probabilidade da peça falhar depois de 5 anos?

3º) (3,0 pontos) Seja (X, Y) um vetor aleatório com densidade conjunta

$$f(x, y) = 2I_{(0,y)}(x)I_{(0,1)}(y).$$

a) (1,5 ponto) Obtenha as funções de densidade das variáveis aleatórias $X|Y = y$ para um valor fixado y e $Y|X = x$ para um valor fixado x;

b) (1,5 ponto) Calcule $Cov(X, Y)$.

4º) (3,0 pontos) Uma indústria de empacotamento de grãos embala pacotes que devem conter $500g$ de um determinado grão. Os pacotes são separados em lotes, mas estes lotes não recebem um número exato de pacotes. Suponha que o peso de um determinado pacote é uma variável aleatória com distribuição exponencial com parâmetro $\beta = 1/500$. O número de pacotes que entra em um lote é uma variável aleatória com distribuição de Poisson, com parâmetro $\lambda = 6$. Um lote deve pesar no mínimo $3500g$ para ser aceito pelo comprador. Determine:

a) (1,5 ponto) O peso médio total e o desvio padrão do peso total dos lotes de grãos empacotados;

b) (1,5 ponto) Com base no peso médio total dos lotes obtido no item (a), você diria que em média os lotes estão sendo aceitos pelo comprador? Justifique.

Boa Prova!