

Valores máximo/mínimo de uma função e os Multiplicadores de Lagrange

Diretório de Apoio Acadêmico

1 Valores Máximos e Mínimos

Tal como visto quando tínhamos uma única variável,

$$f(x)$$

podíamos chegar no ponto ao qual a função chegaria em seu maior valor ou menor valor, dado o intervalo. Onde buscávamos pelo ponto crítico da função,

$$f'(x = k) = 0$$

e esse ponto definiria tal valor,

$$f(k)$$

(a função nesse ponto k seria o máximo, ou o mínimo, valor que a função assume)

porém sozinho o mesmo não diz se esse valor seria o máximo, ou o mínimo, em si, sendo necessário o uso de um segundo teste ao qual definiria se tal ponto seria o de *máximo*, ou o de *mínimo*, esse segundo teste poderia ser feito de duas formas, uma considerando a 1ª derivada

$$f'(k) = 0, \text{ nossa função no ponto crítico}$$

$$f'(n) < 0, n < k ; e f'(m) > 0, m > k; \text{ temos um ponto de MÍNIMO}$$

$$f'(n) > 0, n < k ; e f'(m) < 0, m > k; \text{ temos um ponto de MÁXIMO}$$

e a outra consideraria a 2ª derivada.

$$f''(k) > 0, \text{ Seria um ponto MÍNIMO}$$

$$f''(k) < 0, \text{ Seria um ponto MÁXIMO}$$

Esses testes que fazíamos quando possuíamos apenas uma única variável, buscaremos aplicar agora quando temos mais variáveis a se trabalhar.

Para melhor explicação, vamos considerar uma função a qual utilizaremos de base para as explicações:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy$$

Primeiramente, deveríamos descobrir em que ponto a função estaria em seu máximo ou mínimo valor. Para tal, devemos descobrir o ponto crítico da mesma, veja bem, quando tínhamos uma variável, bastava a derivada em relação à mesma ser igual a zero $f'(x) = 0$, porém agora temos 2 variáveis, considerando a mesma ideia, para obter o ponto crítico ambas as derivadas parciais devem ser iguais a 0 no ponto crítico.

$$f_x(x, y) = 0 \text{ e } f_y(x, y) = 0$$

$$f_x(x, y) = 2x + 2y \rightarrow 2x + 2y = 0 \rightarrow x = -y$$

$$f_y(x, y) = 2x \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Para que ambas as derivadas sejam 0, seria necessário que $y = 0$, dado que na derivada parcial em relação a x , temos $x = -y$. Logo o ponto crítico da função seria $(x = 0, y = 0)$ ou $(0, 0)$:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy \rightarrow f(0, 0) = 0^2 + 2 * 0 * 0 = 0$$

Veja que no resultado do ponto crítico, a função assume o valor de 0, basta definirmos se esse valor seria o maior, ou o menor, valor que a função pode assumir. Para isso vamos utilizar o teste da segunda derivada, porém nesse caso será um pouco mais complicado, pois quando derivamos uma segunda vez uma função de múltiplas variáveis, derivamos em relação a todas as variáveis novamente, ou seja:

$$f_x(x, y) \rightarrow f_{xx}(x, y) \text{ e } f_{xy}(x, y)$$

$$f_y(x, y) \rightarrow f_{yy}(x, y) \text{ e } f_{yx}(x, y)$$

Diferentemente de quando tínhamos uma única variável, e verificávamos se o valor da mesma no ponto crítico era menor ou igual a 0, quando temos muitas variáveis o processo se diferencia, para facilitar utilizaremos o **HESSIANO**, a qual transcrever as segundas derivadas parciais de uma função de múltiplas variáveis, em uma matrix:

$$A = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Tal que quando fossemos analisar se o ponto é um ponto de máximo ou mínimo, olharíamos pelo **DETERMINANTE** da matrix, tal seria o **HESSIANO**:

$$H = \det(A) = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy} * f_{yx}$$

(Dada a relação que tínhamos visto anteriormente nas derivadas parciais, temos que $f_{xy} = f_{yx}$)

$$H = \det(A) = f_{xx} * f_{yy} - [f_{xy}]^2$$

Saberemos que a função conterà um ponto de *MÁXIMO* ou *MÍNIMO*, se tal determinante for maior que 0

$$H > 0, \text{ existe ponto máximo ou mínimo}$$

$$H < 0, \text{ não há ponto máximo ou mínimo (PONTO SELA)}$$

E quem definirá se o ponto vai ser de máximo, ou mínimo, será o valor da segunda derivada em relação a x

$$H > 0 \text{ e } f_{xx} > 0, \text{ PONTO MÍNIMO}$$

(é possível lembrar do caso de uma única variável, onde $f''(x) > 0$ definiria que aquele ponto é de mínimo)

$$H > 0 \text{ e } f_{xx} < 0, \text{ PONTO MÁXIMO}$$

(da mesma forma $f''(x) < 0$ seria um ponto de máximo)

Sabendo disso, podemos aplicar tais informações em nossa função:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy$$

$$f_x(x, y) = 2x + 2y$$

$$f_y(x, y) = 2x$$

Teríamos que as segundas derivadas parciais seriam:

$$f_{xx}(x, y) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = 2$$

$$f_{yy}(x, y) = 0$$

$$f_{yx}(x, y) = 2$$

Utilizando o Hessiano:

$$H = f_{xx} * f_{yy} - [f_{xy}]^2 = 2 * 0 - 2^2 = 0 - 4 = -4$$

$$H < 0, \text{ PONTO DE SELA}$$

Dado que o determinante da função é menor que 0, é esperado que a função assuma o formato de uma sela, como é mostrada abaixo:

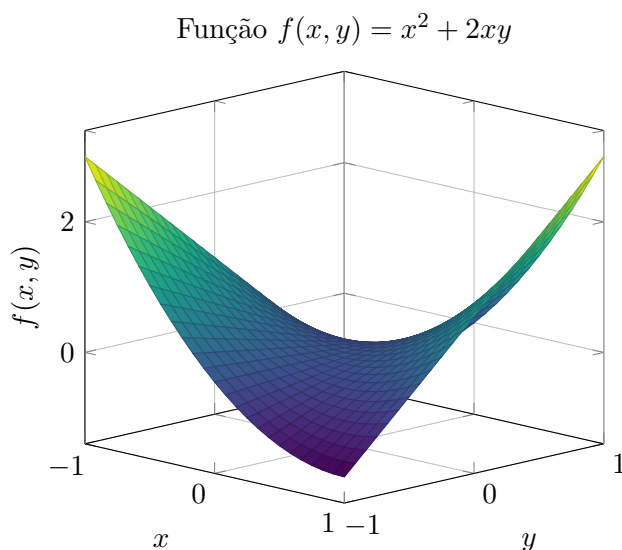


Figure 1: Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + 2xy$

Observem que uma parte do gráfico está subindo, e uma outra parte está descendo, criando essa imagem com aparência de uma sela, a qual leva o nome do ponto em questão. Com isso terminamos valores máximos e mínimos de uma função de múltipla variável.

2 Multiplicadores de Lagrange

Os Multiplicadores de Lagrange entra na questão de Otimização, que é vista nos primeiros fundamentos de cálculo, a qual sabemos que para otimizar uma função deveríamos ir atrás de seu ponto crítico, que é dado quando a derivada total é igual a zero:

No caso de uma variável:

$$f(x) \rightarrow f'(x) = 0$$

No caso de duas ou mais variáveis:

$$f(x, y, z, \dots) \rightarrow f_x = 0, f_y = 0, f_z = 0, \dots$$

O ponto a qual faz todas as derivadas de 1ª ordem igual a 0, seria o ponto ótimo da função. Em **LAGRANGE** seguimos a mesma ideia, porém agora estaremos trabalhando com *RESTRIÇÕES*, ou seja, estaremos otimizando uma função dada que a mesma está sendo *restringida* por uma, ou mais, *funções* diferentes.

Consideramos uma função $f(x, y)$ qualquer, esta sendo restringida por uma outra função $g(x, y)$ dada, ao restringir a função f pela g , estaremos criando uma nova função, chamada de **FUNÇÃO DE LAGRANGE**

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda * g(x, y)$$

onde temos a diferença da função de interesse, com suas restrições, e a constante λ nada mais é que o **MULTIPLICADOR DE LAGRANGE**. E através dessa nova função, que aplicamos a otimização:

$$\nabla L(x, y) = 0$$

$$\nabla f(x, y) - \lambda * \nabla g(x, y) = 0$$

(lembrando que o gradiente nada mais é que o vetor das derivadas parciais da função, logo estamos dizendo que a diferença para todas as derivadas parciais deverão ser iguais a zero)

$$\nabla f(x, y) = \lambda * \nabla g(x, y)$$

(apenas passamos a parte negativa para o outro lado, assim igualando as duas funções)

Uma forma diferente de ver tal, é por meio de matrizes:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \lambda \times \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$$

E através dessa forma, poderíamos criar um pequeno sistema de equações, onde no fim os valores estariam restringidos ao intervalo da função $g(x, y)$:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda * g_x \\ f_y(x, y) = \lambda * g_y \\ g(x, y) = K \end{cases}$$

E se tivéssemos uma *segunda restrição* $h(x, y)$, como ficaria nossa função Lagrangiana?

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda_1 * g(x, y) - \lambda_2 * h(x, y)$$

(ajustamos para encaixar uma nova restrição ao caso, considerando um novo multiplicador de lagrange)

$$\nabla L(x, y) = 0$$

$$\nabla f(x, y) = \lambda_1 \nabla g(x, y) + \lambda_2 \nabla h(x, y)$$

(passamos as restrições para o outro lado, igualando novamente as derivadas)

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda_1 * g_x + \lambda_2 * h_x \\ f_y(x, y) = \lambda_1 * g_y + \lambda_2 * h_y \\ g(x, y) = K \\ h(x, y) = K \end{cases}$$

(criamos um sistema de equação que representa essa igualdade, dado que os valores encontrados para x e y , obedecem as restrições)

Para concluir com a explicação, apliquemos o aprendido em um exemplo:

$$\mathbf{9.} \quad f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

Figure 2: questão 9 do livro de James Stewart, Vol. 2, Capítulo 14.8

$$f(x, y, z) = xyz \rightarrow f_x = yz; \quad f_y = xz; \quad f_z = xy$$

$$g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 \rightarrow g_x = 2x; \quad g_y = 4y; \quad g_z = 6z$$

(ao ter em conhecimento das derivadas parciais, transformamos o caso em um sistema de equações)

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda * g_x \\ f_y(x, y, z) = \lambda * g_y \\ f_z(x, y, z) = \lambda * g_z \\ g(x, y, z) = 6 \end{cases}$$

(substituindo as funções, teríamos:)

$$\begin{cases} yz = \lambda * 2x \\ xz = \lambda * 4y \\ xy = \lambda * 6z \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \end{cases}$$

Observem que em nenhuma equação, temos um valor concreto, logo faz-se necessário manipular o sistema, para descobrir tanto x , y , z e λ . Começemos com a primeira equação:

$$yz = 2x\lambda$$

(há diversas forma de resolver um sistema, vai de cada pessoa, aqui vamos utilizar uma manipulação simples, deixar um dos lado da igualdade igual em todas as equações, nessa 1ª equação, multiplicaremos ambos lados por x)

$$yz * x = \lambda * 2x * x \rightarrow xyz = 2x^2\lambda$$

Partindo para a segunda equação:

$$xz = 4y\lambda$$

(nessa 2ª equação, multiplicamos ambos lados por y)

$$xz * y = 4y\lambda * y \rightarrow xyz = 4y^2\lambda$$

(percebiam que tanto nessa 2ª, quanta na 1ª equação, temos um dos lados da igualdade iguais xyz , logo nosso intuito será fazer o mesmo ocorrer na 3ª equação)

Indo para a terceira equação, teríamos:

$$xy = 6z\lambda$$

(multiplicamos ambos os lados por z)

$$xy * z = 6z\lambda * z \rightarrow xyz = 6z^2\lambda$$

Observe que:

$$xyz = 2x^2 = 4y^2 = 6z^2$$

(todas as três equações possuem o mesmo valor)

$$2x^2 = 4y^2 \rightarrow x^2 = 2y^2 \rightarrow x = y * \sqrt{2}$$

(dado que são o mesmo valor, poderíamos dizer que x é equivalente á $y * \sqrt{2}$)

$$4y^2 = 6z^2 \rightarrow z^2 = \frac{2}{3} * y^2 \rightarrow z = y * \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(e podemos que z é equivalente a tal valor)

Ao fazer que as outras variáveis ficassem dependentes de uma única mesma variável, podemos aplicar tal relação, em nossa função de restrição:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

(substituindo x^2 e z^2 ,e pelos resultados que encontramos anteriormente)

$$(2y^2) + 2y^2 + 3 * (\frac{2}{3} * y^2) = 6$$

$$2y^2 + 2y^2 + 2y^2 = 6$$

$$6y^2 = 6$$

(como nosso objetiv no momento é descobrir o valor de y , basta isolar o mesmo, ao jogar o 6 ao outro lado como fração)

$$y^2 = \frac{6}{6} = 1 \rightarrow y = \sqrt{1} = \pm 1$$

(veja que y pode assumir dois valores -1 e 1 , podemos aplicar tais valores para descobrir os valores tanto para x quanto para z)

$$x = y * \sqrt{2} = \pm 1 * \sqrt{2} = \pm \sqrt{2}$$

(logo temos que x , pode assumir os valores $-\sqrt{2}$ e $+\sqrt{2}$)

$$z = y * \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(e z , pode assumir os valores $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $+\sqrt{\frac{2}{3}}$)

Logo, podemos assumir que há dois pontos críticos dada a restrição, nos pontos $(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{\frac{2}{3}})$

e $(+\sqrt{2}, +1, +\sqrt{\frac{2}{3}})$, que irão representar o ponto máximo e mínimo dessa função dada a restrição, para descobrir quem é qual, basta aplicar na função inicial:

$$f(x, y, z) = x * y * z$$

$$(x, y, z) = (-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{\frac{2}{3}}) \rightarrow f(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{\frac{2}{3}}) = (-\sqrt{2}) * (-1) * (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(x, y, z) = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{\frac{2}{3}}) \rightarrow f(\sqrt{2}, 1, \sqrt{\frac{2}{3}}) = (\sqrt{2}) * (1) * (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Por fim obtemos que o máximo que a função pode chegar é $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e o mínimo é $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. Chegado ao fim do exemplo, terminamos aqui o assunto sobre multiplicadores de Lagrange, o próximo assunto estaremos iniciando o estudo sobre as integrais quando estamos lidando com uma função de múltiplas variáveis.