Integrais Múltiplas - Coordenadas Cilíndricas

Diretório de Apoio Acadêmico

1 Vólume

Antés de entrar nas integrais, é bom relembrar um pouco sobre vólume: Observe que em todos

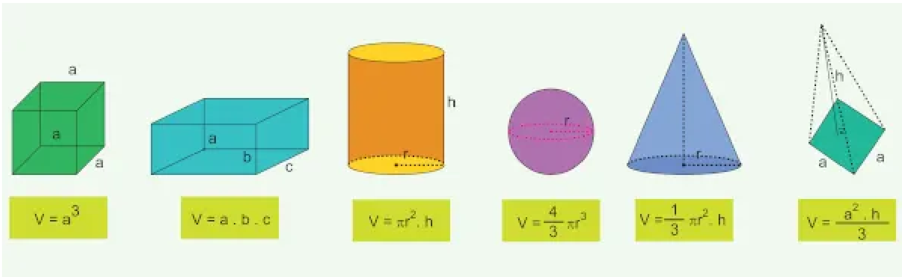


Figure 1: Vólume de figuras geometricas

os casos, há um elemento em comum, a *altura* **h** essa a qual sempre é multiplicada com a *Área* da base da figura. Vejamos cada caso:

$$Cubo = a * a * a$$

(veja que nesse caso, todas retas tem o mesmo tamanho a, onde podemos dizer que o cubo seria a área do quadrado vezes a altura a)

$$Cubo = Área(a) * a = Área(a) * \mathbf{h}$$

(onde esse a extra seria a altura)

$$Retângulo = a.b.c$$

(temos que $a.b$ seria a *Área* da base do retângulo e c a *altura*)

$$Retângulo = Área(a, b) * c = Área(a, b) * \mathbf{h}$$

$$Cilíndro = \pi * r^2 * h$$

(onde $\pi * r^2$ é a Área da circuferência)

$$Cilindro = Área(\pi, r) * \mathbf{h}$$

Vejam que em todos os casos temos uma função que cálcula a *Área* da base de uma figura, que depende de outra duas variáveis, e temos a altura h sendo outra variável. Em grande parte lidar com mais de 2 variáveis pode ser complexo e trabalhoso, porém podemos fazer algumas alterações para que seja possível trabalhar em cima de uma quantidade melhor de variáveis, como um exemplo:

$$f(x, y, z) = K$$

(Temos uma função de *3 variáveis*, iguais a uma constante, ou seja estamos lidando com uma função de 4^a dimensão, teriamos **3 derivadas parcias de** 1^a **ordem** e **9 derivadas parciais de** 2^a **ordem**)

$$se: \ z = g(x, y) \rightarrow f(x, y, g(x, y)) = K \rightarrow f(x, y) = K$$

(Ao considerar que z seja uma função que depende de x e y, poderiamos reduzir a ordem da função e facilitando o nosso trabalho)

O ato de tornar uma das variáveis em uma função que irá depender das outras, é comum quando estivemos lidando com os casos de *3 ou mais* variáveis. Pois conforme a quantidade de variáveis aumenta, a complexidade do caso também aumentará de forma potencial. Por exemplo, nesses casos de vólume tinhamos:

$$Cubo(a, h) = Área(a) * h, \ se \ h = f(a) \rightarrow Cubo(a, f(a)) = Cubo(a)$$

$$Retângulo(a, b, h) = Área(a, b) * h, \ se \ h = f(a, b) \rightarrow Retângulo(a, b, f(a, b)) = Retângulo(a, b)$$

$$Cilíndro(\pi, r, h) = Área(\pi, r) * h, \ se \ h = f(\pi, r) \rightarrow Cilíndro(\pi, r, f(\pi, r)) = Cilíndro(\pi, r)$$

Enquanto estivemos lidando com *Integrais Triplas*, em grande parte dos casos, buscaremos tornar *uma das variáveis* uma função das outras variáveis, caso o intervalo da mesma não seja oferecido.

2 Lidando com circuferências em integrais

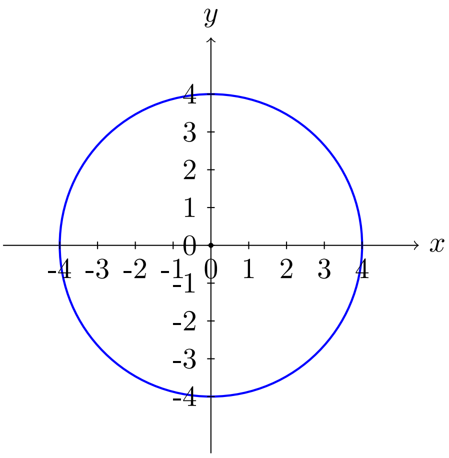
Quando abordamos sobre o cilíndro, percebam que por ser uma figura de 3^a dimensão, o mesmo é dependente de *3 variáveis*:

$$f(x, y, z), \ funcão \ que \ irá \ representar \ o \ cilíndro;$$

Observem que estamos abordando a base do cilindro em termos de x *e* y, porém a base do mesmo segue uma circuferência, que normalmente é dada por:

$$x^2 + y^2 = K^2$$

(Onde **K** é o raio da circuferência) Ou seja, caso seja oferecido que o *Raio* de um cilindro seja **4**, logo $K^2 = 4^2 = 16$ como o mesmo se comportaria em um gráfico?



Observe como se comporta ambas variáveis na existência de uma circuferência, se $x = 4$, y deve ser obrigatoriamente **0**, caso $y = 4$ o x deve ser **0**, percebam que essas variáveis dependem da outra para assumir um valor. Logo se dissemos que o intervalo de x seja $0 \leq x \leq 4$, o intervalo de y deve depender do valor de x:

$$x^2 + y^2 = 16 \rightarrow y^2 = 16 - x^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

$$-\sqrt{16-x^2} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}$$

Se fossemos calcular a Área de uma função qualquer dada essa circuferência em uma integral, teriamos:

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\ dydx$$

Observe que mesmo sendo uma integral possível de realizar, a mesma é trabalhosa para se lidar, pois um dos intervalos irá resultar em uma cadeia de funções complexa. Logo, para facilitar integrar tais casos utilizaremos da mudança de variáveis, porém não há necessidade de se preocupar, pois a transformação a ser utilizada nesses casos já é bem conhecida, quando estivemos lidando com integrais cilíndricas e esferícas, sempre iremos utilizar das transformações de coordenadas polares:

$$x = R * cos(\theta)$$

$$y = R * sen(\theta)$$

Caso queria saber mais sobre tal transformação, recomendo retornar aos resumos de trigonometria e técnicas de cálcular limites. Vejam que nessas transformações temos duas variáveis, o *ângulo* θ(theta) e o *Raio* **R**, a qual normalmente é dado nas questões, como no caso do exemplo ao abordar que o raio da circuferência é *4*. Tal que:

$$x(R,\theta) = 4 * cos(\theta)$$

$$y(R,\theta) = 4 * sen(\theta)$$

Observem que o intervalo dessas duas novas variáveis, é bem intuitivo. O raio sempre será *maior ou igual* a **0**, e seu limite é o valor dado, no nosso caso **4**:

$$0 \leq R \leq 4$$

Já o intervalo de $\theta(theta)$, depende se x e y podem assumir valor *postivo* ou *negativo*, estaremos utilizando os **quadrantes** e do círculo trigonométrico para determinar o intervalo de θ.

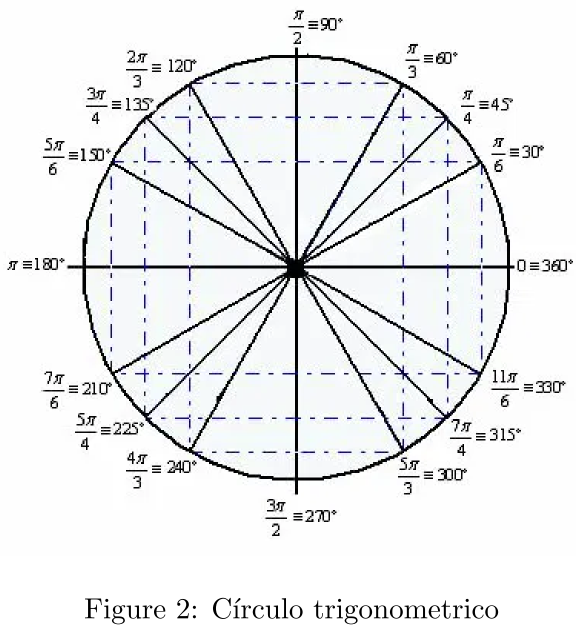


Figure 2: Círculo trigonometrico

No caso onde não é abordado se y ou x é limitado a valores negativos ou positivos consideramos todo o círculo, ou seja:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(x,y assumem valores positivos e negativos)

$$0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

(se assumir *3 quartos da circuferência*)

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

(y assume apenas valores positivos $y \geq 0$)

$$0 \leq \theta \leq -\pi$$

(y assume apenas valores negativos $y \leq 0$)

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(x assume apenas valores positivos)

Sabendo que não é dado nenhuma restrição ao valor de x *e* y, sabemos que o θ terá como intervalo todo o círculo, logo nossa integral ficaria:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^4 f(R,\theta)\ dydx$$

Vejam que ainda resta **dydx** em nossa integral, para resolver isso aplicamos o **JACOBIANO**:

$$x(R,\theta) = Rcos(\theta) \to x_R = cos(\theta);\ \ x_\theta = -Rsen(\theta)$$

$$y(R,\theta) = Rsen(\theta) \to y_R = sen(\theta);\ \ y_\theta = Rcos(\theta)$$

$$\begin{array}{c|cc} & R & \theta \\ \hline x & cos(\theta) & -Rsen(\theta) \\ y & sen(\theta) & Rcos(\theta) \end{array}$$

$$J = (-R * sen(\theta) * sen(\theta)) - (R * cos(\theta) * cos(\theta)) = -R * sen^2(\theta) - R * cos^2(\theta)$$

$$J = -R * (sen^2(\theta) + cos^2(\theta)) = -R$$

Ao descobrir o **JACOBIANO**, basta colocar em nossa integral:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^4 f(R,\theta)\ \ |-R|\ \ dRd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^4 f(R,\theta)\ R\ dRd\theta$$

Lembrem-se desse jacobiano, pois iremos utilizar muito do mesmo nas integrais de coordenadas cilindricas.

3 Integrais em coordenadas cilíndricas

No tópico anterior, vimos como lidar com figuras com circuferências como base, e o cilíndro se encaixa nesse caso, como visto anteriormente poderiamos calcular o vólume de uma função delimitada por um cilindro, como:

$$\int\int\int_V f(x,y,z)\ dzdxdy$$

Onde (x, y) representam a base do plano, e z sua altura. Observamos também que para lidar com a base do plano realizamos uma mudança de variável, utilizando das coordenadas polares:

$$x = r * cos(\theta)$$

$$y = r * sen(\theta)$$

$$\int\int\int_V f(r,\theta,z) * r\ dzdrd\theta$$

(lembrando que o r acompanhando $dzdrd\theta$ é o *módulo* do Jacobiano da transformação)
E como lidaremos com o z? Vamos realizar alguns problemas para analisar como prosseguimos com tal:

3.1 Problema 1

22. Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ como da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Figure 3: Questão 22 - Cálculo, vol. 2, capítulo 15.8, James Stewart.

Observem primeiro que a questão não nos oferece uma função para integrar, e sim funções que representam figuras:

$$x^2 + y^2 = 1$$

(É uma circuferência, que representa a base de um cilindro, a qual possui um *raio* de tamanho 1.)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

(É uma esfera, com um *raio* com 2 de largura, lembrando que : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, logo $(2)^2 = 4$)

Para prosseguir vamos tentar descobrir os intervalos das variáveis que possuiamos:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$se\ y = 0,\ x^2 = 1 \rightarrow x = 1$$

(consideramos x como a variável independente)

$$0 \leq x \leq 1$$

Como x é independente, y será dependente do mesmo:

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 - x^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

$$-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

Já em relação a z, temos apenas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \to z^2 = 4 - x^2 - y^2 \to z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Vejam que no final z se tornou uma função de (x, y), que seria uma das formas de lidar com uma terceira variável, em *integrais triplas*. Sabendo o intervalo nossa integral ficaria:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 \ dzdydx$$

(Utilizamos 1 como a função a ser integrada, quando a questão não nos oferece uma para tal) Observe o quão complexo é uma integral quando estamos lidando com figuras cilindricas e esfericas, por meio de seus intervalos. Para resolver esse problema, aplicamos a mudança de variáveis para coordenadas polares:

$$x = r * cos(\theta)$$

$$y = r * sen(\theta)$$

$$R = \left\{(x, y)|0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\} \to R = \{(r, \theta)|0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

(r é dado pela função representando a base da circuferência $x^2 + y^2 = (1)^2$, e θ por não ter nenhuma restrição aos valores de (x, y) consideramos todo o círculo de $360^o = 2\pi$)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 \ * (r \ dzdrd\theta)$$

(sempre lembrar do r do Jacobiano da transformação)

Vejam que a integral melhorou, porém não modificamos nada em z, mas vejam que o mesmo estava dependente de (x, y), a qual mudamos pelas coordenadas polares, logo onde tinha:

$$z(x, y) = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$z(r, \theta) = \pm\sqrt{4 - (r * cos(\theta))^2 - (r * sen(\theta))^2} = \pm\sqrt{4 - r^2 * (sen^2(\theta) + cos^2(\theta))}$$

$$z(r, \theta) = \pm\sqrt{4 - r^2 * 1} = \pm\sqrt{4 - r^2}$$

Sabendo do intervalo de z, dado as novas variáveis temos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 1 \ * (r \ dzdrd\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 [z]_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} * r \ drd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r * \left[\sqrt{4 - r^2} - (-\sqrt{4 - r^2})\right] \ drd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\sqrt{4 - r^2} \ drd\theta$$

Observe que nossa integral agora apresenta um produto entre funções de r, logo é necessário aplicar, ou *SUBSTITUIÇÃO*, ou *INTEGRAÇÃO POR PARTES*. Vamos utilizar da **substituição**:

$$se \ u = 4 - r^2 \to du = -2rdr \to -du = 2rdr$$

$$\int_0^1 2r * \sqrt{4 - r^2} \ dr = \int_0^1 -\sqrt{u} \ du = -\frac{2}{3} * \sqrt[3]{u^2}$$

(Revertendo a transformação)

$$\int_0^1 2r * \sqrt{4-r^2} = \left[-\frac{2}{3} * \sqrt{(4-r^2)^3}\right]_0^1 = \left[-\frac{2}{3} * \sqrt{(4-1)^3}\right] - \left[-\frac{2}{3} * \sqrt{(4-0)^3}\right]$$

$$\int_0^1 2r * \sqrt{4-r^2} = -\frac{2 * 3 * \sqrt{3}}{3} + \frac{2 * 4 * \sqrt{4}}{3} = \frac{8}{3}\sqrt{4} - 2\sqrt{3}$$

Resolvido a integral em relação a r, retornamos para nossa integral principal:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\sqrt{4-r^2}\ drd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3}\sqrt{4} - 2\sqrt{3}\ d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{8}{3}\sqrt{4} - 2\sqrt{3}\ d\theta = \left[\theta * \left(\frac{8}{3}\sqrt{4} - 2\sqrt{3}\right)\right]_0^{2\pi} = 2\pi * \left(\frac{8}{3}\sqrt{4} - 2\sqrt{3}\right)$$

(Como não é oferecido uma aproximação para π, logo podemos deixar tal valor como solução)

3.2 Problema 2

19. Calcule $\iiint_E (x + y + z)\, dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

Figure 4: Questão 22 - Cálculo, vol. 2, capítulo 15.8, James Stewart.

Nesse segundo problema a questão já nos oferece uma função a ser integrada, diferentemente da outra. Vamos observar primeiro as informações em relação ao intervalo, dados na questão:

E é o sólido do **primeiro** *octante*;

Para compreender essa informação, vamos lembrar que quando tinhamos um plano cartesiano de (x, y) tinhamos **4 quadrantes**, porém agora temos um plano de 3 dimensões (x, y, z) que terá **8 octantes**, ou seja, conforme coloquemos mais variáveis, o número de partes aumenta de forma potencial. Veja abaixo essa diferença entre um plano de 2^a dimensão e um plano de 3^a dimensão:

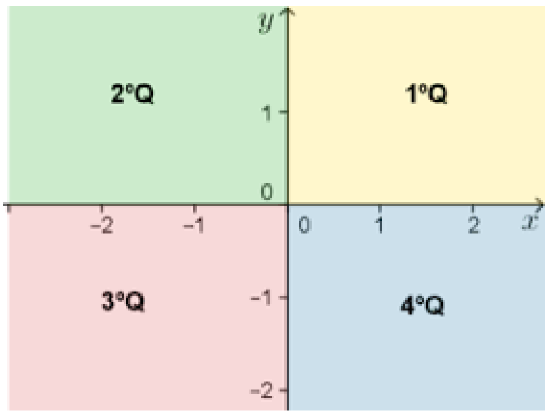


Figure 5: Plano de 2 dimensões

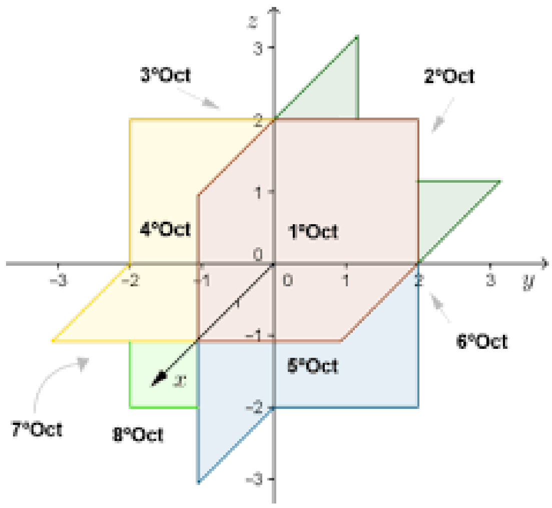


Figure 6: Plano de 3 dimensões

Como a informação diz que o sólido está no *primeiro octante*, temos que todas variáveis são positivas e maiores que 0:

$$x, y, z \geq 0$$

(Caso fosse *quinto octante*, teriamos $x, y \geq 0$ e $z \leq 0$, percebam as diferenças em relação aos octantes, ocorrem da mesma forma que os quadrantes)
Continuando, a próxima informação dada fora:

$$\textit{está abaixo do paraboloide } z = 4 - x^2 - y^2$$

Tal informação limita a altura do sólido que estamos calculando, sabemos que $z \geq 0$, logo se fossemos observar o intervalo do mesmo teriamos:

$$0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$$

Bem, após analisar tais informações nos resta aplicar a mudança de variáveis, para coordenadas polares, na integral:

$$x = r * cos(\theta)$$

$$y = r * sen(\theta)$$

$$\int\int\int_0^{4-x^2-y^2} (x + y + z)\ dV = \int\int\int_0^{4-r^2} (rcos(\theta) + rsen(\theta) + z) * r\ dzdrd\theta$$

Observe que sabemos o intervalo de z, porém a questão não falou nada sobre o **raio** da circuferência. Para resolver isso aplicamos uma simples manipulação:

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

$$se\ z = 0,\ 0 = 4 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4 = (2)^2$$

$$como\ x^2 + y^2 = r^2,\ temos\ que\ \ 0 \leq r \leq 2$$

Após essa manipulação descobrimos o intervalo do *raio* (**r**), agora resta saber o intervalo do *ângulo* (θ), para isso observamos o intervalo de (x, y):

$$se\ x, y \geq 0,\ logo\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$se\ x, y \leq 0,\ logo\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$

(observamos essas relação do ângulo com os valores de x, y ainda nesse mesmo resumo, retorne caso necessite)

Como sabemos que $x, y \geq 0$, logo temos que nosso *ângulo* irá até $90^0 = \frac{\pi}{2}$. E com isso podemos arrumar nossa integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} (rcos(\theta)+rsen(\theta)+z)*r\ dzdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r^2cos(\theta)+r^2sen(\theta)+rz\ dzdrd\theta$$

A partir desse momento, só resta integrar a função, vamos por partes:

$$\int_0^{4-r^2} r^2cos(\theta) + r^2sen(\theta) + rz\ dz = \left[z * r^2 * (cos(\theta) + sen(\theta)) + r\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-r^2} =$$

$$= r^2 * (4-r^2) * (cos(\theta) + sen(\theta)) + r\frac{(4-r^2)^2}{2} = (4r^2 - r^4) * (cos(\theta) + sen(\theta)) + r\frac{r^4 - 8r^2 + 16}{2} =$$

$$= \frac{2 * (cos(\theta) + sen(\theta)) * (4r^2 - r^4) + r^5 - 8r^3 + 16r}{2}$$

Após integrar em relação a z, nossa integral ficou:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r^2cos(\theta) + r^2sen(\theta) + rz\ dzdrd\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{2 * (cos(\theta) + sen(\theta)) * (4r^2 - r^4) + r^5 - 8r^3 + 16r}{2}\ drd\theta$$

Vamos integrar em relação a r agora:

$$\int_0^2 \frac{2 * (cos(\theta) + sen(\theta)) * (4r^2 - r^4) + r^5 - 8r^3 + 16r}{2}\ dr$$

(para facilitar podemos separar a integral em somas de integrais)

$$\int_0^2 \frac{2 * (cos(\theta) + sen(\theta)) * (4r^2 - r^4)}{2}\ dr + \int_0^2 \frac{r^5}{2}\ dr + \int_0^2 \frac{-8r^3}{2}\ dr + \int_0^2 \frac{16r}{2}\ dr$$

(retirando as constantes para fora da integral)

$$\frac{2 * (cos(\theta) + sen(\theta))}{2} \int_0^2 4r^2 - r^4\ dr + \frac{1}{2}\int_0^2 r^5\ dr - \frac{8}{2}\int_0^2 r^3\ dr + \frac{16}{2}\int_0^2 r\ dr =$$

(resolvendo as mesmas)

$$= \left[(cos(\theta) + sen(\theta))\left(\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{r^6}{6}\right) - 4\left(\frac{r^4}{4}\right) + 8\left(\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^2 =$$

$$= (cos(\theta) + sen(\theta))\left(\frac{4(2)^3}{3} - \frac{(2)^5}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{(2)^6}{6}\right) - 4\left(\frac{(2)^4}{4}\right) + 8\left(\frac{(2)^2}{2}\right) =$$

$$= (cos(\theta) + sen(\theta))\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{64}{6}\right) - 4\left(\frac{16}{4}\right) + 8\left(\frac{4}{2}\right) =$$

$$= (cos(\theta) + sen(\theta))\left(\frac{64}{15}\right) + \left(\frac{64}{12}\right) - (16) + (16) = (cos(\theta) + sen(\theta))\left(\frac{64}{15}\right) + \left(\frac{64}{12}\right)$$

Após esse processo trabalhoso, nos resta apenas, integrar uma última vez em relação a θ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \frac{2*(cos(\theta)+sen(\theta))*(4r^2-r^4)+r^5-8r^3+16r}{2}\,drd\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(\theta) + sen(\theta))\left(\frac{64}{15}\right) + \left(\frac{64}{12}\right)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)\left(\frac{64}{15}\right) + sen(\theta)\left(\frac{64}{15}\right) + \left(\frac{64}{12}\right)\,d\theta$$

(Separando a mesma em uma soma de integrais, e colocando as constantes para fora)

$$\left(\frac{64}{15}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)d\theta + \left(\frac{64}{15}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(\theta)d\theta + \left(\frac{64}{12}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d\theta$$

(resolvendo cada integral)

$$\left[\left(\frac{64}{15}\right)sen(\theta) + \left(\frac{64}{15}\right)(-cos(\theta)) + \left(\frac{64}{12}\right)\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[\left(\frac{64}{15}\right)sen(\frac{\pi}{2}) - \left(\frac{64}{15}\right)(cos(\frac{\pi}{2})) + \left(\frac{64}{12}\right)\frac{\pi}{2}\right] - \left[\left(\frac{64}{15}\right)sen(0) - \left(\frac{64}{15}\right)(cos(0)) + \left(\frac{64}{12}\right)0\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{64}{15}\right)1 - 0 + \frac{64\pi}{24}\right] - \left[0 - \left(\frac{64}{15}\right)1 + 0\right] = \frac{64\pi}{24} + \frac{64}{15} + \frac{64}{15} = \frac{64\pi}{24} + \frac{128}{15}$$

Com isso concluímos a questão. Vejam, que não fora díficil em lidar com z no contexto de coordenadas cilíndricas, em questão de dúvida leia tudo novamente. O próximo resumo abordará **Integrais em coordenadas esferícas**.