DERIVADAS: REGRAS DE DERIVAÇÃO

6. DERIVADA DA EXPONENCIAL DE VALORES NATURAIS E EULER:

A ideia por trás dessa derivada é um pouco mais complicado do que do que já vimos até agora, pois envolver fazer algumas manipulações, por isso não se preocupem em se lembrar a forma a qual chegam na derivada, em si apenas na regra geral da mesma. Com isso considere a seguinte função:

$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}$$

Pela definição teríamos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

Uma das regras básicas da matemática, é que o produto de exponenciais de mesma base, é a soma dos expoentes, tal que $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$$

Como a^x não depende de h, a mesma seria uma constante no limite, e pela regra que vimos de limites, podemos tirar a constante de dentro da mesma. Com isso nos restaria $\frac{(a^h-1)}{h}$, a qual estamos aproximando de *0*, ou seja, pela ideia de limites, estaríamos verificando a existência da função nesse ponto em específico, tal que poderíamos dizer que a derivada de a^x existirá em todo momento, se ela existir no ponto *0*.

$$a^x \lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)}{h} = a^x f'(0)$$

Logo a derivada da função seria uma proporção da própria função, a qual pegaríamos essa parte e aproximaríamos de *0* para identificar o valor que a mesma tende. É complicado, porém só conseguiremos encontrar a derivada para essa função mais a frente, para isso irei apresentar o número de ***Euler***, que é um número peculiar, vejam novamente a fórmula que encontramos, $a^x f'(0)$, como não sabemos a derivada, seria mais simples para a gente se $f'(0)$ fosse equivalente a um número fácil de lidar como o valor *1*, mas para isso temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)}{h} = 1$$

Ou seja, precisamos encontrar um valor de base *a* que faça isso ocorra, aí que entra nosso número de *Euler* (*e*), a qual por meio do uso dele como base tal caso acontece. ($e \approx 2{,}71$)

E se com a base nesse número nossa $f'(0) = 1$, teríamos então que a derivada dessa função com base *Euler* seria:

$$f(x) = e^x \therefore f'(x) = e^x f'(0) = e^x \cdot 1 = e^x$$

Agora por que saber disso é importante? Vejam que existem algumas propriedades em relação a *exponenciais* e a função *logaritmo*, a qual a função logaritmo que possui a mesma base que a exponencial, é o mesmo que o valor *1*, ou seja, são funções inversas uma à outra. Vamos relembrar algumas propriedades da função logaritmo antes de avançar.

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO LOGARITMO

$1. \log_b b = b^{log_b} = 1;$

$2. log(a \cdot b) = log\, a + log\, b;$

$3. log\left(\frac{a}{b}\right) = log\, a - log\, b;$

$4. log\, a^b = b \cdot log\, a;$

$extra_1: log_a\, a^b = b \cdot log_a\, a = b \cdot 1 = b;$
$a^{log_a b} = b;\ a^{log_a b^c} = b^c$

$extra_2 = \log_e k = \ln k$, uma função logaritmo de base *Euler* é considera uma função logaritmo natural *(ln);*

Visto essas propriedades, para encontrar aquilo que buscamos que é a derivada da exponencial, utilizaremos tanto da derivada da exponencial de *Euler*, quanto a 1ª e 4ª propriedade da função logaritmo, veja como é utilizado:

$$e^{\ln a} = a \therefore a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a} = e^{\ln a^x}$$

Logo, se fossemos derivar $e^{\ln a^x}$, aplicaríamos a regra da cadeia a qual teríamos que:

$$f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a} = e^g \therefore \boldsymbol{f'(x)} = e^g \cdot g' = e^{\ln a^x} \cdot \ln a = \boldsymbol{a^x \cdot \ln a}$$

Com isso chegamos na derivada da exponencial, e percebam que se a base for *e*:

$$\boldsymbol{f(x)} = e^x \therefore \boldsymbol{f'(x)} = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot \log_e e = e^x \cdot 1 = e^x$$