Prova 3

Curso de Ciências Atuariais
Disciplina Probabilidade 1- Professora Cristina
26/09/2022 - Terceiro exercício de probabilidade

1) Uma moeda honesta é lançada 3 vezes. Seja X o número de caras nos 2 primeiros lançamentos e seja Y o número de caras nos 2 últimos lançamentos.
a) (0,5 pontos) Liste todos os elementos do espaço amostral deste experimento, especificando os valores de X e Y.

$$S_{X_1} = \begin{cases} (c, c, \_) = 0 \\ (c, k, \_); (k, c, \_) = 1 \\ (k, k, \_) = 2 \end{cases}$$

$$S_{Y_1} = \begin{cases} (\_, c, c) = 0 \\ (\_, c, k); (\_, k, c) = 1 \\ (\_, k, k) = 2 \end{cases}$$

	X	Y	$\mathbb{P}()$
(c, c, c)	0	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
(c, c, k)	0	1	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
(c, k, c)	1	1	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
(k, c, c)	1	0	$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$
(c, k, k)	1	2	$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$
(k, c, k)	1	1	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
(k, k, c)	2	1	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
(k, k, k)	2	2	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) (1 ponto) Construa a função de distribuição de probabilidade conjunta de (X,Y).

Y	X			$\mathbb{P}(Y = y)$
	0	1	2	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

c) (1 ponto) Calcule E(X)

$$E(X) = 0 * \frac{2}{8} + 1 * \frac{4}{8} + 2 * \frac{2}{8} = 0 + \frac{4}{8} + \frac{4}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

2) A tabela a seguir fornece a função de probabilidade conjunta da v.a. (X, Y).

X	Y		
	1	2	3
0	0,10	0,20	0,20
1	0,04	0,08	0,08
2	0,06	0,12	0,12

a) (0,5 pontos) Verifique se X e Y são independentes

$$\text{E(X)} = 1 * 0,2 + 2 * 0,40 + 3 * 0,4 = 2{,}2$$

$$\text{E(Y)} = 0 * 0,5 + 1 * 0,20 + 2 * 0,3 = 0{,}8$$

$$\text{E(XY)} = 0 * 0,5 + 1 * 0,04 + 2 * 0,14 + 3 * 0,08 + 4 * 0,12 + 6 * 0,12 = 1{,}76$$

$$\text{E(XY)} = \text{E(X)} * \text{E(Y)}$$
$$1{,}76 = 2{,}2 * 0{,}8$$

X e Y são independentes

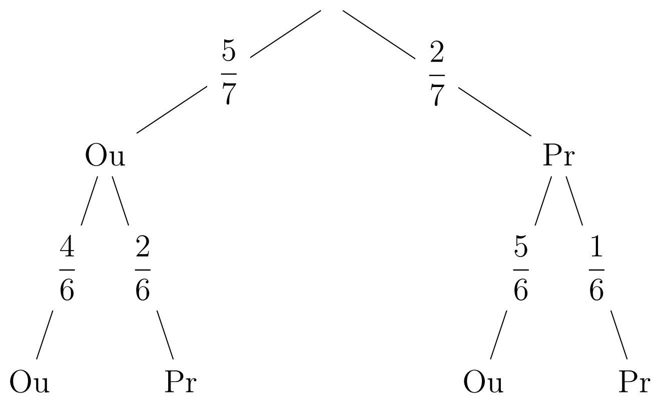
b) (1 ponto) Encontre a distribuição de X dado Y = 2

X	$\mathbb{P}(X = x \mid Y = 2)$
0	$\frac{0,20}{0,40} = 0,5$
1	$\frac{0,08}{0,40} = 0,2$
2	$\frac{0,12}{0,40} = 0,3$

c) (1 ponto) Encontre E(X|Y = 2)

$$\text{E}(X|Y = 2) = 0 * 0{,}5 + 1 * 0{,}2 + 2 * 0{,}3 = 0{,}8$$

3) Numa caixa encontram-se 5 moedas de ouro e 2 de prata. Serão retiradas 2 moedas com reposição. Considere as variáveis aleatórias:
X = Quantidade de moedas de ouro
Y = Quantidade de moedas de prata
a) (1 ponto) Construa a função de distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y).



$$S_X = \begin{cases} (Pr, Pr) = 0 \\ (Pr, Ou); (Ou, Pr) = 1 \\ (Ou, Ou) = 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \frac{2}{7} * \frac{1}{6} = \frac{2}{42}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) = \frac{5}{7} * \frac{2}{6} + \frac{2}{7} * \frac{5}{6} = \frac{20}{42}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 2) = \frac{5}{7} * \frac{4}{6} = \frac{20}{42}$$

$$S_Y = \begin{cases} (Ou, Ou) = 0 \\ (Ou, Pr); (Pr, Ou) = 1 \\ (Pr, Pr) = 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y} = 0) = \frac{5}{7} * \frac{4}{6} = \frac{20}{42}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y} = 1) = \frac{5}{7} * \frac{2}{6} + \frac{2}{7} * \frac{5}{6} = \frac{20}{42}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y} = 2) = \frac{2}{7} * \frac{1}{6} = \frac{2}{42}$$

Y	X			$\mathbb{P}(Y = y)$
	0	1	2	
0	0	0	$\frac{20}{42}$	$\frac{20}{42}$
1	0	$\frac{20}{42}$	0	$\frac{20}{42}$
2	$\frac{2}{42}$	0	0	$\frac{2}{42}$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{2}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{20}{42}$	1

b) (0,5 pontos) Verifique se X e Y são independentes.

$$\mathbb{P}(X = x) * \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = x \cap Y = y)$$

$$\mathbb{P}(X = 0) * \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0 \cap Y = 0)$$
$$\frac{20}{42} * \frac{2}{42} \neq 0$$

X e Y não são independentes

c) (1 ponto) Encontre a distribuição de probabilidade de Y dado X = 0.

Y	$\mathbb{P}(Y = y \mid X = 0)$
0	$\frac{0}{\frac{2}{42}} = 0$
1	$\frac{0}{\frac{22}{20}} = 0$
2	$\frac{\frac{2}{42}}{\frac{2}{42}} = 1$

4) Considere a seguinte distribuição de probabioidade conjunta (X, Y)

X	Y	
	0	-1
0	0,1	0,05
-1	0,3	0,15
2	0,2	0,2

a) (0,5 pontos) Encontre E(X|Y = -1).

X	$\mathbb{P}$(X = x | Y = -1)
0	$\frac{0,05}{0,22} = 0,2273$
-1	$\frac{0,15}{0,22} = 0,6818$
2	$\frac{0,02}{0,22} = 0,0900$

b) (1 ponto) Encontre a distribuição de probabilidade de W = X - 2Y.

X	Y	W
0	0	0
0	-1	2
-1	0	-1
-1	-1	1
2	0	2
2	-1	4

W	$\mathbb{P}$(W = w)
-1	0,3
0	0,1
1	0,15
2	0,25
4	0,2

c) (1 ponto) Encontre E(W).

E(W) = -1 * 0,3 + 0 * 0,1 + 1 * 0,15 + 2 * 0,25 + 4 * 0,2
E(W)= -0,3 + 0 +0,1 + 0,5 + 0,8 = 1,1

Desafio para bônus (1 ponto):

Foi feito o loteamento de uma área rural em terrenos retangulares. Para cada terreno, seu comprimento e sua largura, ambos em metros, podem ser iguais a 10m, 20m ou 30m. Para simplificar, vamos trabalhar em decâmetros (simbolicamente dam), lembrando que 1dam = 10m. Assim, tanto o comprimento X como a largura Y de um terreno sorteado ao acaso, podem ser iguais a 1, 2 ou 3. A tabela a seguir fornece (apenas parcialmente) a distribuição conjunta de X e de Y, variáveis aleatórias supostas independentes:

X	Y			$\mathbb{P}$(X)
	1	2	3	
1	0,35		0,14	
2				0,20
3	0,05			
$\mathbb{P}$(Y)		0,30		

Considere as v.a.'s V = 2X + 2Y, o perímetro do terreno e W = XY, a área do terreno.
Calcule:
a) O valor de cada probabilidade, conjunta ou marginal, omitido na tabela acima.

X	Y			$\mathbb{P}$(X)
	1	2	3	
1	0,35	a	0,14	b
2	c	d	e	0,20
3	0,05	f	g	h
$\mathbb{P}$(Y)	i	0,30	j	k

$$0{,}35 + c + 0{,}05 = i$$

$$0{,}35 + (0{,}20 * i) + 0{,}05 = i$$

$$0{,}40 = 0{,}8i$$

$$i = 0{,}5$$

$$0{,}20 * i = c$$

$$0{,}20 * 0{,}5 = c$$

$$c = 0{,}1$$

$$k = 1$$

$$i + 0{,}30 + j = k$$

$$0{,}5 + 0{,}30 + j = 1$$

$$j = 0{,}2$$

$$b * j = 0{,}14$$

$$0{,}2 * b = 0{,}14$$
$$b = 0{,}7$$

$$b + 0{,}2 + h = k$$
$$0{,}7 + 0{,}2 + h = 1$$
$$h = 0{,}1$$

$$0{,}35 + a + 0{,}14 = b$$
$$0{,}35 + a + 0{,}14 = 0{,}7$$
$$a = 0{,}21$$

$$d = 0{,}30 * 0{,}20$$
$$d = 0{,}06$$

$$f = 0{,}30 * h$$
$$f = 0{,}30 * 0{,}1$$
$$f = 0{,}03$$

$$e = 0{,}20 * j$$
$$e = 0{,}20 * 0{,}2$$
$$e = 0{,}04$$

$$g = h * j$$
$$g = 0{,}1 * 0{,}2$$
$$g = 0{,}02$$

X	Y			$\mathbb{P}$(X)
	1	2	3	
1	0,35	0,21	0,14	0,70
2	0,10	0,06	0,04	0,20
3	0,05	0,03	0,02	0,10
$\mathbb{P}$(Y)	0,5	0,30	0,2	1

b) A probabilidade condicional de que a área seja igual a 4dam^2, dado que o perímetro é igual a 8dam.

X	Y	V	W	$\mathbb{P}(X = x \cap Y = y)$
1	1	4	1	0,35
1	2	6	2	0,10
1	3	8	3	0,05
2	1	6	2	0,21
2	2	8	4	0,06
2	3	10	6	0,03
3	1	8	3	0,14
3	2	10	6	0,04
3	3	12	9	0,02

V	W						$\mathbb{P}$(V)
	1	2	3	4	6	9	
4	0,35	0	0	0	0	0	0,35
6	0	0,31	0	0	0	0	0,31
8	0	0	0,19	0,06	0	0	0,19
10	0	0	0	0	0,07	0	0,07
12	0	0	0	0	0	0,02	0,02
$\mathbb{P}$(W)	0,35	0,31	0,19	0,06	0,07	0,02	1

$$\mathbb{P}(\mathrm{W} = 4 \mid \mathrm{V} = 8) = \frac{\mathbb{P}(W = 4) * \mathbb{P}(V = 8)}{\mathbb{P}(V = 8)} = \mathbb{P}(W = 4) = 0,06$$

Formulário:

$\mathrm{E(X)} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i * \mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}_i)$

$\mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}_i \mid \mathrm{Y} = \mathrm{y}_j) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$

Se X e Y são independentes, então: $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i) * \mathbb{P}(X = x_j)$

$\mathrm{E}(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y} = \mathrm{y}_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i * \mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}_i \mid \mathrm{Y} = \mathrm{y}_j)$