DERIVADAS

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA E TAXAS RELACIONADAS

Na derivação implícita buscamos descobrir a derivada da $y\ ou\ f(x)$, porém desconhecemos sua função, ao invés disso temos uma função que apresenta operações utilizando essa $função\ desconhecida\ y$ e o x, como a função abaixo:

$$x \cdot y^2 + e^{xy} = 5$$

Vejam que dificilmente conseguiríamos deixar o y de forma isolada, para então descobrir sua função e realizar a derivada a partir dela, dado que se faz necessário aplicar a derivada na função como está, de uma forma implícita, para isso considerem $y = h(x)$ qualquer, nossa função ficaria da seguinte forma:

$$x \cdot h(x)^2 + e^{x \cdot h(x)} = 5$$

Visualizando dessa forma, se torna mais fácil relacionar com as regras das derivadas que vemos fazendo, ou seja, se tínhamos um produto de:

$$f(x) = f \cdot g \therefore f'(x) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Dessa vez umas funções são desconhecidas, logo quando derivamos a mesma, sua derivada vai ser $h(x) \therefore h'(x)$. Logo a partir disso vamos derivar a função de exemplo:

$$\frac{d}{dx}[x \cdot h(x)^2] + \frac{d}{dx}[e^{x \cdot h(x)}] = \frac{d}{dx}[5]$$

O Símbolo $\frac{d}{dx}$ é sempre usado quando for derivar uma função em relação a uma variável qualquer, nesse caso estamos derivando uma função qualquer em relação a variável x.

Derivando $\frac{d}{dx}[x \cdot h(x)^2]$:

$$[1 \cdot h(x)^2 + x \cdot 2h(x) \cdot h'(x)]$$

Vejam que nesse caso tínhamos $h(x)^2$, ou seja, uma função dentro da outra, normalmente esperamos que seja $f(x) = x^2$ porém temos $f\big(h(x)\big) = h(x)^2$, logo quando fazemos a derivada dessa função aplicamos a regra da cadeia.

Derivando $\frac{d}{dx}\left[e^{x\cdot h(x)}\right]$:

$$\left[e^{x\cdot h(x)}\cdot(1\cdot h(x)+x\cdot h'(x))\right]=\left[h(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}+x\cdot h'(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}\right]$$

Nesse caso a regra da cadeia fora usada novamente, dado que esperamos uma $f(x)=e^{x}$, porém temos uma $f(x)=e^{x\cdot h(x)}$. E quando derivamos o interior percebesse que temos um produto entre funções, logo aplicaríamos a regra do produto nessa parte.

Derivando $\frac{d}{dx}[5]$:

$$[0]$$

A derivada de uma constante é zero. Com isso no fim teríamos:

$$[1\cdot h(x)^2+x\cdot 2h(x)\cdot h'(x)]+\left[h(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}+x\cdot h'(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}\right]=[0]$$

Como buscamos saber a derivada de y que é nosso $h(x)$, logo queremos saber quem é $h'(x)$. Para isso é necessário isolar o mesmo das demais, primeiro passo iremos jogar todos que não estão acompanhados de $h'(x)$ para o outro lado da igualdade.

$$1\cdot h(x)^2+x\cdot 2h(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}+x\cdot h'(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}=0$$

$$x\cdot 2h(x)\cdot h'(x)+x\cdot h'(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}=-1\cdot h(x)^2-h(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}$$

O Segundo passo é colocar o $h'(x)$ em evidência:

$$x\cdot 2h(x)\cdot h'(x)+x\cdot h'(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}=-1\cdot h(x)^2-h(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}$$

$$h'(x)\cdot\left(x\cdot 2h(x)+x\cdot e^{x\cdot h(x)}\right)=-1\cdot h(x)^2-h(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}$$

Por fim, jogamos o produto para o outro lado dividindo:

$$h'(x)\cdot\left(x\cdot 2h(x)+x\cdot e^{x\cdot h(x)}\right)=-1\cdot h(x)^2-h(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}$$

$$h'(x)=\frac{-1\cdot h(x)^2-h(x)\cdot e^{x\cdot h(x)}}{\left(x\cdot 2h(x)+x\cdot e^{x\cdot h(x)}\right)}$$

Com isso obtemos a função de derivada de $y=h(x)\therefore y'=h'(x)$, tal ideia segue para todas as outras funções de derivada implícita.

Já as taxas relacionadas são basicamente uma derivação implícita, porém ao invés de derivar por uma variável que conhecemos, estamos derivando por uma variável desconhecida, normalmente essa variável é o tempo(t). Para a realização dessa vamos considerar como exemplo um exercício do Hoffman 9. ed capítulo 2.6:

43. TAXA DE DEMANDA Quando o preço de um certo produto é p reais a unidade, a demanda é de x centenas de unidades, onde

$$75x^2 + 17p^2 = 5.300$$

Qual é a taxa de variação da demanda com o tempo quando o preço é R$ 7,00 e está diminuindo à razão de 75 centavos por mês (ou seja, $\frac{dp}{dt} = -0{,}75$)?

Quero que notem que normalmente estamos considerando x como nossa variável, porém no caso acima é buscado saber a derivada de x em relação ao tempo (t). Ou seja, estamos considerando x como uma função de t, tal como o preço p é uma função de t, logo teríamos:

$$75x(t)^2 + 17p(t)^2 = 5300$$

A ideia a ser aplicada não muda da derivada implícita, logo:

$$\frac{d}{dt}[75x(t)^2 + 17p(t)^2] = \frac{d}{dt}[5300]$$

$$[75 \cdot 2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 17 \cdot 2 \cdot p(t) \cdot p'(t)] = 0$$

Como queremos saber $\frac{dx(t)}{dt} = x'(t)$, vamos seguir os mesmos passos, jogar para o outro lado da igualdade quem não está acompanhado dessa derivada, isolar a mesma se necessário, e jogar o produto que a está acompanhando para o outro lado dividindo, teríamos então:

$$75 \cdot 2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 17 \cdot 2 \cdot p(t) \cdot p'(t) = 0$$

$$75 \cdot 2 \cdot x(t) \cdot x'(t) = -17 \cdot 2 \cdot p(t) \cdot p'(t)$$

$$x'(t) = \frac{-17 \cdot 2 \cdot p(t) \cdot p'(t)}{75 \cdot 2 \cdot x(t)}$$

Obtemos então a função da taxa da demanda (x) com o tempo (t), porém a questão busca o valor da taxa, dado algumas informações dadas, como o valor do preço $p = 7$, e a taxa de variação do preço no tempo $p'(t) = \frac{dp}{dt} = -0{,}75\ centavos$.

$$x'(t) = \frac{-17 \cdot 2 \cdot (7) \cdot (-0{,}75)}{75 \cdot 2 \cdot x(t)} = \frac{178{,}5}{150 \cdot x(t)}$$

Observem que estamos quase conseguindo obter um valor, porém não sabemos quem é $x(t)$, em algumas questões essa informação também é dada nos textos, porém há casos como o dessa questão onde tal informação é obtida por meio de uma manipulação na primeira equação dada, ou seja:

$$75x^2 + 17p^2 = 5300$$

Nesse caso, para resolver nossos problemas, podemos isolar o *x* da seguinte forma:

$$75x^2 + 17p^2 = 5300$$

$$75x^2 = 5300 - 17p^2$$

$$x^2 = \frac{5300 - 17p^2}{75}$$

$$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{\frac{5300 - 17p^2}{75}}$$

$$x = \sqrt[2]{\frac{5300 - 17p^2}{75}}$$

Como sabemos o valor do preço ($p = 7$), basta substituir e iremos ter o valor de $x(t)$:

$$x = \sqrt[2]{\frac{5300 - 17(7)^2}{75}} \approx 8\, unidades$$

Para concluir colocamos esse valor na função da derivada, e obtemos então a taxa da demanda:

$$x'(t) = \frac{178{,}5}{150 \cdot x(t)} = \frac{178{,}5}{150 \cdot (8)} \approx 0{,}15\, unidades\ por\ mês$$

Aqui concluirmos derivadas implícitas e taxas relacionadas.