

Prova 3

Curso de Ciências Atuariais
Disciplina Probabilidade 1- Professora Cristina
26/09/2022 - Terceiro exercício de probabilidade

1) Uma moeda honesta é lançada 3 vezes. Seja X o número de caras nos 2 primeiros lançamentos e seja Y o número de caras nos 2 últimos lançamentos.

a) (0,5 pontos) Liste todos os elementos do espaço amostral deste experimento, especificando os valores de X e Y.

$$S_{X_1} = \begin{cases} (c, c, _) = 0 \\ (c, k, _); (k, c, _) = 1 \\ (k, k, _) = 2 \end{cases}$$

$$S_{Y_1} = \begin{cases} (_, c, c) = 0 \\ (_, c, k); (_, k, c) = 1 \\ (_, k, k) = 2 \end{cases}$$

	X	Y	$\mathbb{P}()$
(c, c, c)	0	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
(c, c, k)	0	1	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
(c, k, c)	1	1	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
(k, c, c)	1	0	$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$
(c, k, k)	1	2	$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$
(k, c, k)	1	1	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
(k, k, c)	2	1	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
(k, k, k)	2	2	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) (1 ponto) Construa a função de distribuição de probabilidade conjunta de (X,Y).

Y	X			$\mathbb{P}(Y = y)$
	0	1	2	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{2}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

c) (1 ponto) Calcule $E(X)$

$$E(X) = 0 * \frac{2}{8} + 1 * \frac{4}{8} + 2 * \frac{2}{8} = 0 + \frac{4}{8} + \frac{4}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

2) A tabela a seguir fornece a função de probabilidade conjunta da v.a. (X, Y).

X	Y		
	1	2	3
0	0,10	0,20	0,20
1	0,04	0,08	0,08
2	0,06	0,12	0,12

a) (0,5 pontos) Verifique se X e Y são independentes

$$E(X) = 1 * 0,2 + 2 * 0,40 + 3 * 0,4 = 2,2$$

$$E(Y) = 0 * 0,5 + 1 * 0,20 + 2 * 0,3 = 0,8$$

$$E(XY) = 0 * 0,5 + 1 * 0,04 + 2 * 0,14 + 3 * 0,08 + 4 * 0,12 + 6 * 0,12 = 1,76$$

$$E(XY) = E(X) * E(Y)$$

$$1,76 = 2,2 * 0,8$$

X e Y são independentes

b) (1 ponto) Encontre a distribuição de X dado Y = 2

X	$\mathbb{P}(X = x Y = 2)$
0	$\frac{0,20}{0,40} = 0,5$
1	$\frac{0,08}{0,40} = 0,2$
2	$\frac{0,12}{0,40} = 0,3$

c) (1 ponto) Encontre $E(X|Y = 2)$

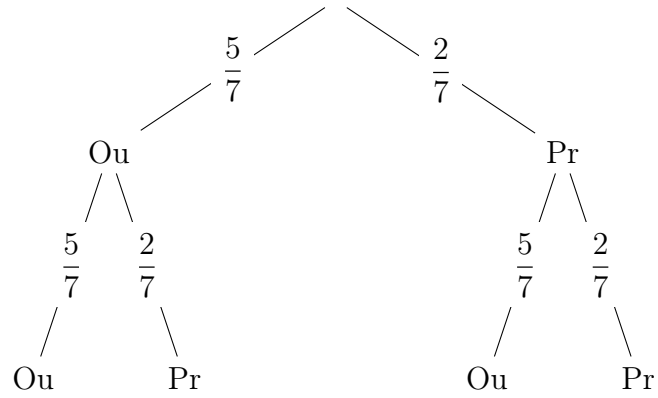
$$E(X|Y = 2) = 0 * 0,5 + 1 * 0,2 + 2 * 0,3 = 0,8$$

3) Numa caixa encontram-se 5 moedas de ouro e 2 de prata. Serão retiradas 2 moedas com reposição. Considere as variáveis aleatórias:

X = Quantidade de moedas de ouro

Y = Quantidade de moedas de prata

a) (1 ponto) Construa a função de distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y).



$$S_X = \begin{cases} (Pr, Pr) = 0 \\ (Pr, Ou); (Ou, Pr) = 1 \\ (Ou, Ou) = 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{7} * \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{5}{7} * \frac{2}{7} + \frac{2}{7} * \frac{5}{7} = \frac{20}{49}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{5}{7} * \frac{5}{7} = \frac{25}{49}$$

$$S_Y = \begin{cases} (Ou, Ou) = 0 \\ (Ou, Pr); (Pr, Ou) = 1 \\ (Pr, Pr) = 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{5}{7} * \frac{5}{7} = \frac{25}{49}$$

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{5}{7} * \frac{2}{7} + \frac{2}{7} * \frac{5}{7} = \frac{20}{49}$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{2}{7} * \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$$

Y	X			$\mathbb{P}(Y = y)$
	0	1	2	
0	0	0	$\frac{25}{49}$	$\frac{25}{49}$
1	0	$\frac{20}{49}$	0	$\frac{20}{49}$
2	$\frac{4}{49}$	0	0	$\frac{4}{49}$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{4}{49}$	$\frac{20}{49}$	$\frac{25}{49}$	1

b) (0,5 pontos) Verifique se X e Y são independentes.

$$\mathbb{P}(X = x) * \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = x \cap Y = y)$$

$$\mathbb{P}(X = 0) * \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0 \cap Y = 0)$$

$$\frac{25}{49} * \frac{4}{49} \neq 0$$

X e Y não são independentes

c) (1 ponto) Encontre a distribuição de probabilidade de Y dado X = 0.

Y	$\mathbb{P}(Y = y X = 0)$
0	$\frac{0}{\frac{4}{49}} = 0$
1	$\frac{0}{\frac{4}{49}} = 0$
2	$\frac{\frac{4}{49}}{\frac{4}{49}} = 1$

4) Considere a seguinte distribuição de probabilidade conjunta (X, Y)

X	Y	
	0	-1
0	0,1	0,05
-1	0,3	0,15
2	0,2	0,2

a) (0,5 pontos) Encontre $E(X|Y = -1)$.

X	$\mathbb{P}(X = x Y = -1)$
0	$\frac{0,05}{0,22} = 0,2273$
-1	$\frac{0,15}{0,22} = 0,6818$
2	$\frac{0,02}{0,22} = 0,0909$

b) (1 ponto) Encontre a distribuição de probabilidade de $W = X - 2Y$.

X	Y	W	W	$\mathbb{P}(W = w)$
0	0	0	-1	0,3
0	-1	2	0	0,1
-1	0	-1	1	0,15
-1	-1	1	2	0,25
2	0	2	4	0,2
2	-1	4		

c) (1 ponto) Encontre $E(W)$.

$$E(W) = -1 * 0,3 + 0 * 0,1 + 1 * 0,15 + 2 * 0,25 + 4 * 0,2$$

$$E(W) = -0,3 + 0 + 0,15 + 0,5 + 0,8 = 1,1$$

Desafio para bônus (1 ponto):

Foi feito o loteamento de uma área rural em terrenos retangulares. Para cada terreno, seu comprimento e sua largura, ambos em metros, podem ser iguais a 10m, 20m ou 30m. Para simplificar, vamos trabalhar em decâmetros (simbolicamente dam), lembrando que 1dam = 10m. Assim, tanto o comprimento X como a largura Y de um terreno sorteado

ao acaso, podem ser iguais a 1, 2 ou 3. A tabela a seguir fornece (apenas parcialmente) a distribuição conjunta de X e de Y, variáveis aleatórias supostas independentes:

X	Y			$\mathbb{P}(X)$
	1	2	3	
1	0,35		0,14	
2				0,20
3	0,05			
$\mathbb{P}(Y)$		0,30		

Considere as v.a.'s $V = 2X + 2Y$, o perímetro do terreno e $W = XY$, a área do terreno. Calcule:

a) O valor de cada probabilidade, conjunta ou marginal, omitido na tabela acima.

X	Y			$\mathbb{P}(X)$
	1	2	3	
1	0,35	a	0,14	b
2	c	d	e	0,20
3	0,05	f	g	h
$\mathbb{P}(Y)$	i	0,30	j	k

$$0,35 + c + 0,05 = i$$

$$0,35 + (0,20 * i) + 0,05 = i$$

$$0,40 = 0,8i$$

$$i = 0,5$$

$$0,20 * i = c$$

$$0,20 * 0,5 = c$$

$$c = 0,1$$

$$k = 1$$

$$i + 0,30 + j = k$$

$$0,5 + 0,30 + j = 1$$

$$j = 0,2$$

$$b * j = 0,14$$

$$0,2 * b = 0,14$$

$$b = 0,7$$

$$b + 0,2 + h = k$$

$$0,7 + 0,2 + h = 1$$

$$h = 0,1$$

$$0,35 + a + 0,14 = b$$

$$0,35 + a + 0,14 = 0,7$$

$$a = 0,21$$

$$d = 0,30 * 0,20$$

$$d = 0,06$$

$$f = 0,30 * h$$

$$f = 0,30 * 0,1$$

$$f = 0,03$$

$$e = 0,20 * j$$

$$e = 0,20 * 0,2$$

$$e = 0,04$$

$$g = h * j$$

$$g = 0,1 * 0,2$$

$$g = 0,02$$

X	Y			$\mathbb{P}(X)$
	1	2	3	
1	0,35	0,21	0,14	0,70
2	0,10	0,06	0,04	0,20
3	0,05	0,03	0,02	0,10
$\mathbb{P}(Y)$	0,5	0,30	0,2	1

b) A probabilidade condicional de que a área seja igual a 4dam^2 , dado que o perímetro é igual a 8dam .

X	Y	V	W	$\mathbb{P}(X = x \cap Y = y)$
1	1	4	1	0,35
1	2	6	2	0,10
1	3	8	3	0,05
2	1	6	2	0,21
2	2	8	4	0,06
2	3	10	6	0,03
3	1	8	3	0,14
3	2	10	6	0,04
3	3	12	9	0,02

V	W						$\mathbb{P}(V)$
	1	2	3	4	6	9	
4	0,35	0	0	0	0	0	0,35
6	0	0,31	0	0	0	0	0,31
8	0	0	0,19	0,06	0	0	0,19
10	0	0	0	0	0,07	0	0,07
12	0	0	0	0	0	0,02	0,02
$\mathbb{P}(W)$	0,35	0,31	0,19	0,06	0,07	0,02	1

$$\mathbb{P}(W = 4 \mid V = 8) = \frac{\mathbb{P}(W = 4) * \mathbb{P}(V = 8)}{\mathbb{P}(V = 8)} = \mathbb{P}(W = 4) = 0,06$$

Formulário:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i * \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$$

Se X e Y são independentes, então: $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i) * \mathbb{P}(Y = y_j)$

$$E(X \mid Y = y_j) = \sum_{i=1}^n x_i * \mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y_j)$$