Derivadas Parciais

Diretorio de Apoio Ácadêmico

October 27, 2024

1 Conceito

Para entender as derivadas parciais, é necessário retormar o conceito da derivada pela definição, a qual fora vista anteriormente em Fundamentos de Cálculo I. Onde a derivada de uma função em determinado ponto é dada por:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

A qual o resultado é a taxa de variação no ponto. Porém estamos lidando agora com uma função de múltiplas variáveis:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y+h)-f(x,y)}{h}=f'(x,y)$$

Porém como já abordado nos primeiros assuntos, lidar com uma função contendo inúmeras variáveis é complexo e trabalhoso, logo para facilitar tratavamos apenas umas delas como variável e a restante como uma constante. Vamos considerar o seguinte exemplo, a qual temos uma tabela de valores representado a função de temperatura aparente no ar, dado um temperatura real T e uma umidade relativa H.

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C)	T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
	26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
	28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
	32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
	34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
	36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Figure 1: tabela 1 de James Stewart capítulo 14.3 ed.7 Vol.2

Considerando que a função de temperatura aparente seja: $I = f(T,H)$, vamos calcular a derivada dessa função quando a Umidade(H) está em 70%, ou seja, $I = f(T,70)$. Ao fixarmos a umidade em uma constante qualquer, poderemos ver a taxa de variação da temperatura aparente em relação a temperatura real($f_T(T,H) = \frac{\partial f}{\partial T}$), dado isso qual seria a taxa de variação desta quando a temperatura é de $32°C$:

$$\frac{\partial f}{\partial T}=f_T(T,H)=\lim_{h\to 0^{\pm}}\frac{f(T+h,H)-f(T,H)}{h}$$

A função acima é a notação de uma derivada parcial, caso estivessemos derivando em relação a umidade (H) e fixado a temperatura real (T), teriamos:

$$\frac{\partial f}{\partial H} = f_H(T,H) = \lim_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(T,H+h) - f(T,H)}{h}$$

Continuando com o nosso exemplo, como não temos uma função conhecida, vamos considerar o incremento (h) como 2 e -2.

$$f_T(32,70) \approx \lim_{h\to 0^+} \frac{f(32+h,70) - f(32,70)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(32+2,70) - f(32,70)}{2} =$$

$$\frac{f(34,70) - f(32,70)}{2} = \frac{49-45}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$f_T(32,70) \approx \lim_{h\to 0^-} \frac{f(32+h,70) - f(32,70)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(32-2,70) - f(32,70)}{-2} =$$

$$\frac{f(30,70) - f(32,70)}{2} = \frac{41-45}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Em alguns casos esses limites podem variar, para resolver o problema podemos fazer uma média dos valores para então obter um valor aproximado da real taxa de variação. Para fixar o conceito, calculemos agora $f_H(34,50)$, derivada parcial em relação a umidade (H), quando o percentual é 50%, em uma temperatura real fixa de $34°C$.

Note que na tabela, enquanto a temperatura real dava passos de 2 em 2 graus, a umidade tem passos de 5 em 5, logo considerando nosso incremento como 5 e -5.

$$f_H(34,50) \approx \lim_{h\to 0^+} \frac{f(34,50+h) - f(34,50)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(34,50+5) - f(34,50)}{5} =$$

$$\frac{f(34,55) - f(34,50)}{5} = \frac{45-43}{5} = \frac{2}{5}$$

$$f_H(34,50) \approx \lim_{h\to 0^-} \frac{f(34,50+h) - f(34,50)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(34,50-5) - f(34,50)}{-5} =$$

$$\frac{f(34,45) - f(34,50)}{-5} = \frac{42-43}{-5} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

Nesse caso as taxas variam dependendo por qual lado se aproxima, logo fazemos uma média entre os mesmos, tal que:

$$f_H(34,50) \approx \frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{5}}{2} = \frac{\frac{3}{5}}{2} = \frac{3}{10} = 0,3$$

2 Regras de Derivação

As regras de derivação que foram vistas anteriormente apenas com uma única variável, não irão se alterar com 2 ou mais variáveis. Para isso vamos ver cada uma com alguns exemplos:

1. *Regra da queda*

   Nessa regra tinhamos que, a derivada de uma potência, seria:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2 * x^{2-1} = 2 * x^1 = 2 * x$$

   Em uma formula mais geral:

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = n * x^{n-1}$$

   Como dito anteriormente, na derivação escolhemos uma única variável para variar, enquanto as outras serão constantes, para isso vamos utilizar o seguinte exemplo:

$$f(x, y) = x * y^2 + x^3 + y^4 + x^2 * y$$

   Se fossemos derivar tal função em relação a x, estariamos considerando y como uma constante K qualquer, tal que aquilo que é aplicado para a constante em uma derivação de uma única varíavel, será aplicado para y também:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = 1 * x^{1-1} * y^2 + 3x^{3-1} + 0 + 2 * x^{2-1} * y = 1 * y^2 + 3 * x^2 + 2 * x * y$$

   E se derivassemos em relação a y, fariamos o inverso, considerariamos o x como uma constante:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = x * 2 * y^{2-1} + 0 + 4 * y^{4-1} + x^2 * 1 * y^{1-1} = x * 2 * y + 4 * y^3 + x^2 * 1$$

   Vejam que quando derivamos em relação a x o termo isolado y^4 é 0, pois estamos considerando y como constante, já na derivada de y o termo isolado x^3 acaba sendo 0, pois consideramos x uma constante.

2. *Regra do produto e Regra do quociente*

   Sem segredo, a aplicação continuará sendo a mesma, para isso vejamos a fórmula geral quando era uma única variável, para então reaplicar quando a função conter 2 ou mais variáveis:

$$F(x) = f(x) * g(x) \Rightarrow F'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

$$G(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow G'(x) = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g^2(x)}$$

   Vamos lidar primeiro com um problema de produto entre funções, segue o exemplo:

$$f(x, y) = x * ln(x * y) + y * e^y$$

   Fazendo a derivada parcial em relação a x e y, teremos então:

$$f_x(x, y) = [1 * ln(x * y) + x * \frac{1}{x * y} * y] + 0 = ln(x * y) + 1$$

$$f_y(x, y) = [x * \frac{1}{x * y} * x] + [1 * e^y + y * e^y] = \frac{x}{y} + y * e^y + e^y$$

Na primeira função derivamos parcialmente em relação a x, logo $y * e^y$ é uma constante, e com isso zeramos a mesma, restando apenas $x * ln(x * y)$ a qual tem x fora e dentro da função logaritmo, assim aplicando a regra do produto. Na segunda derivamos em relação a y, seguindo a mesma lógica.
Agora um exemplo de uma função quociente:

$$g(x,y) = \frac{x^2 + sen(y)}{cos(x)}$$

$$g_x(x,y) = \frac{(2 * x^{2-1} + 0) * cos(x) - (x^2 + sen(y)) * (-sen(x))}{cos^2(x)} =$$

$$\frac{2 * x * cos(x) + x^2 * sen(x) + sen(y) * sen(x)}{cos^2(x)}$$

$$g_y(x,y) = \frac{0 + cos(y)}{cos(x)} = \frac{cos(y)}{cos(x)}$$

3. *Outras regras*
Em grande parte a forma que as regras funcionam não mudam na adição de uma ou mais variáveis como visto acima, logo para as demais regras também continuarão com a mesma lógica, no próximo assunto abordaremos a **Regra da Cadeia** de forma separada, para aprofundar na questão da derivada parcial.