Lista 10

Curso de Ciências atuariais
Disciplina Probabilidade 1- Professora Cristina
02/09/2022 - Exercícios distribuição de Poisson

1) Um departamento de polícia recebe em média 5 solicitações por hora. Qual a probabilidade de receber 2 solicitações em duas horas selecionada aleatoriamente?

X = O departamento de polícia receber solicitações

$$\lambda = 5 \text{ ligações/ hora} * 2 = 10 \text{ ligações/2 horas}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=2) = \frac{e^{-10} * 10^2}{2!} = \frac{100e^{-10}}{2} = \frac{0,00454}{2} = 0{,}00227$$

2) A experiência passada indica que um número médio de 6 clientes por hora para para colocar gasolina numa bomba.
a) Qual é a probabilidade de 3 clientes pararem qualquer hora?

X = Clientes pararem na bomba para abastecer

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=3) = \frac{e^{-6} * 6^3}{3!} = \frac{216e^{-6}}{6} = \frac{0,53541}{6} = 0{,}08923$$

b) Qual é a probabilidade de 3 clientes ou menos pararem em qualquer hora?

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leq 3) = \mathbb{P}(\mathrm{X}=0) + \mathbb{P}(\mathrm{X}=1) + \mathbb{P}(\mathrm{X}=2) + \mathbb{P}(\mathrm{X}=3)$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leq 3) = \frac{e^{-6} * 6^0}{0!} + \frac{e^{-6} * 6^1}{1!} + \frac{e^{-6} * 6^2}{2!} + \frac{e^{-6} * 6^3}{3!}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leq 3) = \frac{e^{-6}}{1} + \frac{6e^{-6}}{1} + \frac{36e^{-6}}{2} + \frac{216e^{-6}}{6}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leq 3) = 61e^{-6} = 0{,}1512$$

c) Qual é o valor esperado (média) e o desvio padrão para esta distribuição?

$$\text{E(X)} = \text{V(X)} = \lambda = 6$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = 2{,}4495$$

3) A experiência passada mostra que 1% das lâmpadas incandescentes produzidas numa fábrica são defeituosas. Encontre a probabilidade de mais que uma lâmpada numa amostra aleatória de 30 lâmpadas sejam defeituosas, usando:
a) A distribuição Binomial;

X = A lâmpada seja defeituosa

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 1) = 1 \text{ - } \mathbb{P}(\text{X} < 1) = 1 \text{ - } \mathbb{P}(\text{X} = 0)$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 1) = 1 \text{ - } \left[\binom{30}{0} * 0,1^0 * 0,99^{30}\right] = 1 \text{ - } 0{,}7397 = 0{,}2603$$

b) A distribuição de Poisson

$$\lambda = \text{np} = 30 * 0{,}01 = 0{,}3 \text{ lâmpada defeituosa/hora}$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 1) = 1 \text{ - } \left[\frac{e^{-0,3} * 0,3^0}{0!}\right] = 1 \text{ - } 0{,}7408 = 0{,}2592\text{‘}$$

4) Um processo de produção produz 10 itens defeituosos por hora. Encontre a probabilidade que 4 ou menos itens sejam defeituosos numa retirada aleatória por hora usando a distribuição de Poisson.

X = Obter um item defeituoso

$$\mathbb{P}(\text{X} \leq 4) = \mathbb{P}(\text{X} = 0) + \mathbb{P}(\text{X} = 1) + \mathbb{P}(\text{X} = 2) + \mathbb{P}(\text{X} = 3) + \mathbb{P}(\text{X} = 4)$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \leq 4) = \frac{e^{-10} * 10^0}{0!} + \frac{e^{-10} * 10^1}{1!} + \frac{e^{-10} * 10^2}{2!} + \frac{e^{-10} * 10^3}{3!}$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \leq 4) = \frac{e^{-10}}{1} + \frac{10e^{-10}}{1} + \frac{100e^{-10}}{2} + \frac{1000e^{-10}}{6} = \frac{683e^{-10}}{3}$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \leq 4) = 0{,}00941$$

5) O número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson, com parâmetro 2. As atuais instalações podem atender, no máximo, a três petroleiros por dia. Se mais de três aportarem num dia, o excesso é enviado a outro porto.
a) Em um dia, qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?

X = Chegar um navio petroleiro

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(\text{X} < 4) = 1 - [\mathbb{P}(\text{X} = 0) + \mathbb{P}(\text{X} = 1) + \mathbb{P}(\text{X} = 2) + \mathbb{P}(\text{X} = 3)]$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 4) = 1 - \left[\frac{e^{-2} * 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} * 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} * 2^2}{2!} + \frac{e^{-2} * 2^3}{3!}\right]$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 4) = 1 - \left[\frac{e^{-2}}{1} + \frac{2e^{-2}}{1} + \frac{4e^{-2}}{2} + \frac{8e^{-2}}{6}\right] = 1 - \frac{19e^{-2}}{3}$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 4) = 1 - 0{,}85712 = 0{,}14288$$

b) Qual o número médio de petroleiros que chegam por dia?

$$\text{E(X)} = \lambda = 2$$

6) Um vendedor de seguros vende em média 3 apólices por semana (7 dias). O número de apólices vendidas pode ser modelada por uma distribuição de Poisson.
a) Calcule a probabilidade de que ele venda 2 ou mais apólices numa dada semana

X = Vender uma apólice de seguro

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(\text{X} < 2) = 1 - [\mathbb{P}(\text{X} = 0) + \mathbb{P}(\text{X} = 1)]$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 2) = 1 - \left[\frac{e^{-3} * 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} * 3^1}{1!}\right] = 1 - \left[\frac{e^{-3}}{1} + \frac{3e^{-3}}{1}\right] = 1 - \frac{4e^{-3}}{1}$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 2) = 1 - 0{,}19915 = 0{,}80085$$

b) Foram escolhidas 4 semanas aleatoriamente, de maneira que se possa supor independência das vendas entre as semanas. Deseja-se saber a probabilidade de em exatamente 3 semanas, entre as 4 escolhidas, terem sido vendidas 2 ou mais apólices

Y = Bater a meta semanal de venda apólices de seguro

$$\mathbb{P}(\text{X} = 3) = \binom{4}{3} * 0,80085^3 * 0,19915^1$$

$$\mathbb{P}(\text{X} = 3) = \frac{4!}{3!1!} * 0,51364 * 0,19915 = 0{,}40916$$

7) Uma fonte radioativa é observada durante intervalos de tempo, cada um de 1 segundo de duração. O número de partículas emitidas (X), durante cada intervalo, tem uma Distribuição de Poisson com parâmetro 0,5 partículas/segundo.
a) Qual a probabilidade – para um intervalo de tempo – de que 5 ou mais partículas sejam emitidas?

X = Observar a emissão de partículas

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 5) = 1 \text{ - } \mathbb{P}(\text{X} < 5) = 1 \text{ - } [\mathbb{P}(\text{X} = 0) + \mathbb{P}(\text{X} = 1) + \mathbb{P}(\text{X} = 2) + \mathbb{P}(\text{X} = 2)]$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 5) = 1 \text{ - } \left[\frac{e^{-0,5} * 0,5^0}{0!} + \frac{e^{-0,5} * 0,5^1}{1!} + \frac{e^{-0,5} * 0,5^2}{2!} + \frac{e^{-0,5} * 0,5^3}{3!}\right]$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 5) = 1 \text{ - } \left[\frac{e^{-0,5}}{1} + \frac{0,5e^{-0,5}}{1} + \frac{0,25e^{-0,5}}{2} + \frac{0,125e^{-0,5}}{6}\right]$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 5) = 1 \text{ - } \frac{5,3125e^{-0,5}}{3} = 1 \text{ - } 0{,}53703 = 0{,}46297$$

b) Qual a probabilidade de que, em pelo menos 1 dos 6 intervalos de tempo, 5 ou mais partículas sejam emitidas?

Y = Observar mais que 5 partículas serem emitidas no intervalo de tempo

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 1) = 1 \text{ - } \mathbb{P}(\text{X} < 1) = 1 \text{ - } \mathbb{P}(\text{X} = 0)$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 1) = 1 \text{ - } \left[\binom{6}{0} * 0,46297^0 * 0,53703^6\right]$$

$$\mathbb{P}(\text{X} \geq 1) = 1 \text{ - } \left[\frac{6!}{0!6!} * 1 * 0,02399\right] = 0{,}97601$$

8) O pessoal de controle de qualidade de uma empresa de asfalto, afirma que uma das rodovias que conecta o Rio de Janeiro com Minas gerais apresenta em média um buraco a cada 50 km. Admitindo que a distribuição do número de buracos a cada 50 km é modelado por uma distribuição de Poisson, calcule as probabilidades:
a) De que não exista nenhum buraco em 30 km.

X = Encontrar um buraco na rodovia

$$\lambda = \frac{1 * 30}{50} = 0{,}6 \text{ buraco/trecho da rodovia}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \frac{e^{-0,6} * 0,6^0}{0!} = \frac{e^{-0,6}}{1} = 0{,}54881$$

b) De ocorrerem no máximo dois buracos em 125 km.

$$\lambda = \frac{1 * 125}{50} = 2{,}5 \text{ buraco/trecho da rodovia}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leq 2) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) + \mathbb{P}(\mathrm{X} = 2)$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leq 2) = \frac{e^{-2,5} * 2,5^0}{0!} + \frac{e^{-2,5} * 2,5^1}{1!} + \frac{e^{-2,5} * 2,5^2}{2!}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leq 2) = \frac{e^{-2,5}}{1} + \frac{2,5e^{-2,5}}{1} + \frac{6,25e^{-2,5}}{2}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leq 2) = \frac{6,625e^{-2,5}}{1} = 0{,}54381$$

c) De ocorrer pelo menos um buraco em 100 km.

$$\lambda = \frac{1 * 100}{50} = 2 \text{ buraco/trecho da rodovia}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{X} < 1) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0)$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - \frac{e^{-2} * 2^0}{2!} = 1 - \frac{e^{-2}}{2} = 1 - 0{,}06767 = 0{,}93233$$