UFPE - Processos Estocásticos - **Lista de Exercícios**

[redacted] Uma seguradora de carros classifica os seus clientes em três classes: não desejáveis, satisfatórios e preferenciais. A classificação de um cliente pode mudar de um ano para o outro. Não é possível passar de preferencial a não desejável nem viceversa. 40 % dos segurados não desejáveis viram satisfatórios, 30% dos satisfatórios vira preferencial enquanto 10 % deles viram não desejáveis e 20% dos preferenciais viram satisfatórios.

Podemos representar esta situação usando uma cadeia de Markov $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde X_n representa a classificação de um cliente no ano. Temos portanto, $E = \{$não desejável, satisfatório, preferencial$\}$.

(a) Escreva a matriz de transição do modelo.
(b) Represente a topologia da cadeia.
(c) Calcule a probabilidade de um cliente preferencial continuar a sê-lo no próximo ano e virar satisfatório no ano seguinte.
(d) Calcule a probabilidade de um cliente não desejável virar satisfatório depois de dois anos.
(e) A longo prazo quais serão as proporções de clientes em cada uma das classes?

[redacted] Em um censo populacional de uma cidade de médio porte, foi constatado que a cada ano 7% da população rural migra para a zona urbana e que 2% da população urbana migra para a zona rural. Supondo que esse fenômeno social seja estável, não havendo mudanças nessas taxas, temos as seguintes questões:

a) Construa a matriz de transição dessa cadeia de Markov.
b) Construa a topologia em grafo.
c) Em 5 anos, qual a probabilidade de um indivíduo, atualmente na zona urbana, ter migrado para a zona rural?
d) Em 10 anos, qual a probabilidade de um indivíduo, atualmente na zona rural, ter migrado para a zona urbana?
e) A cadeia converge? Caso positivo, determine a distribuição assintótica dessa cadeia de Markov.

[redacted] Na ilha Nagashima 90% dos dias de sol são seguidos por dias de sol, e 80% dos dias de chuva são seguidos por dias de chuva.

Se hoje estiver a chover, preveja o estado do tempo para depois de amanhã e para o dia seguinte.

Se amanhã estiver a chover com 50% de probabilidade, preveja o estado do tempo para depois de amanhã.

Determine qual é a percentagem de dias com sol.

[redacted] **Seja uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição**

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Classifique os estados da cadeia.
b) Quantas classes irredutíveis a cadeia possui? Por que?
c) A cadeia possui distribuição assintótica? Por que?

[redacted] Considere uma cadeia de Markov com matriz de transição

$$\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Represente a topologia da cadeia.
(b) Classifique os estados em transitórios ou recorrentes
(c) Determine todas as classes irredutíveis. A cadeia é irredutível? Por quê?

[redacted] Considere as cadeias de Markov com as seguintes matrizes de transição:

$$P_1 = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad P_2 = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P_3 = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\\ \mathbf{4}\\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad P_4 = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\\ \mathbf{4}\\ \mathbf{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Represente as topologias correspondentes.
(b) Determine as classes irredutíveis e classifique os estados em transitórios ou recorrentes

[redacted] Uma pesquisa de mercado de um produto comercializado em três diferentes marcas constatou as seguintes probabilidades:

- Um consumidor da marca W deste produto, a cada compra, tem probabilidade $0,8$ de manter-se fiel à marca, probabilidade $0,05$ de escolher a marca G e probabilidade $0,15$ de escolher a marca R;
- Um consumidor da marca G deste produto, a cada compra, tem probabilidade $0,9$ de manter-se fiel à marca, probabilidade $0,01$ de escolher a marca W e probabilidade $0,09$ de escolher a marca R;
- Um consumidor da marca R deste produto, a cada compra, tem probabilidade $0,5$ de manter-se fiel à marca, probabilidade $0,3$ de escolher a marca G e probabilidade $0,2$ de escolher a marca W.

a) Represente a topologia da cadeia de Markov.
b) Determine a matriz estocástica.
c) Em 6 compras, qual a probabilidade de um consumidor da marca G optar pela marca W?
d) Em 8 compras, qual a probabilidade de um consumidor da marca R optar pela marca G?

f) Determine as classes irredutíveis da cadeia e os respectivos períodos.
g) Calcule como deverá ser a distribuição do mercado a longo prazo.