REVISÃO FUNDAMENTOS DE CÁLCULO I – CONTINUIDADE

CONTINUIDADE:

➔ Um dos fatores importantes a serem utilizados futuramente é o conceito de continuidade, como já diz em seu nome, buscamos saber se a função é contínua ou não, ou seja, se a função não apresenta nenhuma interrupção ou buraco em um determinado intervalo, ou ponto, de x. Para isso verificaremos os possíveis pontos onde possa ocorrer tal quebra de continuação, e para fazer essa verificação iremos considerar 3 pressupostos:

1. *A função deve existir no ponto* $\boldsymbol{a}$;
   Ou seja, a função deve assumir um valor quando $x = a$, um caso onde a função não é continua, são as funções racionais como $f(x) = {}^{1}/_{x}$, onde considerando o intervalo $x: [-\infty, +\infty]$, a função não tem um valor quando $x = 0$, logo a mesma não seria contínua;

$$\boldsymbol{f(a) = K}$$

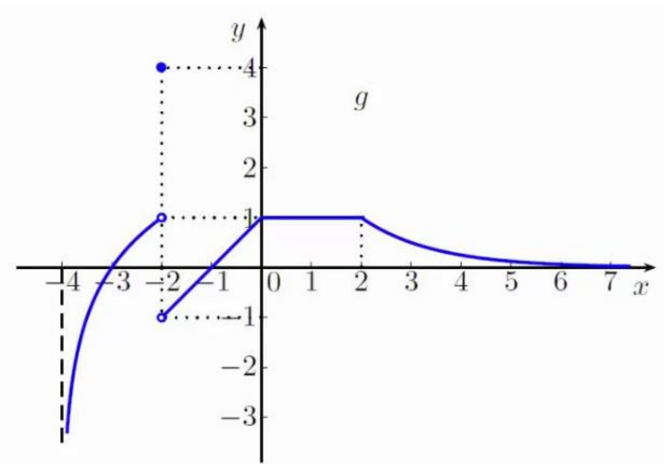
2. *O Limite da função no ponto* $\boldsymbol{a}$ *existe*, ou seja, quando a função se aproxima do ponto, independente da direção, vão para um único valor **L**. Logo, o limite da função quando aproximarmos por valores menores que $\boldsymbol{a}$ deve ser o mesmo quando aproximarmos com valores maiores que $\boldsymbol{a}$;

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

3. Por fim, para ter certeza que a função é contínua vai ser necessário verificar se *o valor que a função assume no ponto* $\boldsymbol{a}$ *é o mesmo valor aproximado pelos limites*, ou seja:

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

   Observem o seguinte gráfico:



É possível notar, que <u>a função *y* ou *f(x)*, como preferir, existe no ponto *-2* assumindo o valor de 4</u> (*a bola azul preenchida)*, porém vejam que quando a mesma vai se aproximando desse mesmo ponto, pelas laterais, ambas assumem valores diferentes uma da outra, enquanto o $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 1$ o outro limite é $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -1$, ou seja <u>não existe limite nesse ponto</u>, dado que *os limites vão para diferentes valores*.

Vamos imaginar agora que ambos limites vão para 1, ou seja, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 1$, a função seria continua nesse caso?

Dado os pressupostos a qual primeiro a função deve existir no ponto, ela existe e possui o valor 4, segundo o limite deve existir, ou seja, o valor da função pelos limites laterais tende para o mesmo valor, considerando o caso proposto, o mesmo existe e possuirá o valor de 1, porém pelo terceiro pressuposto teríamos que o valor da função no ponto tenha de ser igual ao valor do limite. Logo, a função continuaria não sendo contínua dado o terceiro pressuposto (4 ≠ 1).

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

- ➔ Nessa parte irei resolver alguns problemas retirados dos livros de Cálculo volume 1, 7 ed. de James Stewart e Cálculo um Curso moderno e suas aplicações, 9 ed. por Hoffman.

James Stewart – Capítulo 2.3 (Limites): Vamos buscar se os limites das funções existem.

5. $\lim_{t\to -2} \frac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

Para calcular esse limite podemos utilizar das propriedades:

$$\lim_{t\to -2} \frac{\boldsymbol{t^4 - 2}}{\boldsymbol{2t^2 - 3t + 2}} = \frac{\lim_{t\to -2} t^4 - \lim_{t\to -2} 2}{\lim_{t\to -2} 2t^2 - \lim_{t\to -2} 3t + \lim_{t\to -2} 2} = \frac{\left(\lim_{t\to -2} t\right)^4 - 2}{2\left(\lim_{t\to -2} t\right)^2 - 3\left(\lim_{t\to -2} t\right) + 2}$$

$$= \frac{(16) - 2}{2(4) - 3(-2) + 2} = \frac{14}{8 + 6 + 2} = \frac{14}{16} = \frac{7.2}{8.2} = \boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

Oque fizemos, fora por meio das propriedades separar as funções, e através disso trabalhar separadamente com cada uma, observado acima, e após chegar em números, foi possível fatorar o valor obtido, logo o limite da função existe e é $\boldsymbol{\frac{7}{8}}$.

15. $\lim_{t\to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

Vamos ver se existe o limite da função acima, vamos começar utilizando do mesmo método acima, como já conhecem como funciona partirei para o valor que será encontrado, mas é necessário que façam apenas para a prática:

$$\lim_{t\to -3} \frac{\boldsymbol{t^2 - 9}}{\boldsymbol{2t^2 + 7t + 3}} = \frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{0}}$$

Dado que fora abordado sobre limites, é de conhecimento que o valor observado é indeterminado, ou seja, não sabemos que valor seria $\frac{0}{0}$, logo se faz necessário algum método ou manipulação para resolver com esse problema, primeiro vou fazer uma pequena revisão, e relembrar algumas coisas, para então aplicar uma forma de resolver tais problemas quando a função tem uma aparência parecida com a que é vista acima.

Alguns devem se lembrar do termo *Completar quadrados*, alguns não, porém irei rever a ideia aqui. Quando buscamos completar um quadrado isso está ligado com a função quadrática:

$$\boldsymbol{x^2+2x+1} = (x+1).(x+1) = \boldsymbol{(x+1)^2}$$

Ou seja, buscamos pegar uma função e deixar ela em um formato mais simples, porém podemos encontrar essa mesma função da seguinte forma:

$$\boldsymbol{x^2+2x}$$

Aqui não conseguiríamos chegar na mesma forma acima, para isso precisaríamos do *+ 1*, porém podemos fazer uma pequena manipulação para que isso ocorra, para isso vamos ver a função de uma forma diferente:

$$\boldsymbol{x^2+2x+0}$$

Podemos dizer que qualquer coisa está sendo somada 0, ou subtraída, e sabemos que algumas coisas somadas e subtraídos dão zero, isso ocorre quando fazemos a subtração entre números iguais: (1-1); (2-2); (3-3); e assim vai, logo podemos dizer que $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{(1-1)}$, logo teríamos:

$$\boldsymbol{x^2+2x+1-1 = (x+1)^2-1}$$

Isso que foi feito é o que seria *Completar quadrados*. Pequenas manipulações como essa são úteis para resolver problemas, tais que também poderíamos ver uma situação onde teríamos $\boldsymbol{x^2+3x+1}$, nesse caso podemos ver:

$$3x = 2x + x$$

Tal que:

$$\boldsymbol{x^2+(2x+x)+1 = (x+1)^2+x}$$

Para o nosso problema isso será o suficiente, veja como será utilizado.

$$\lim_{t\to-3}\frac{\boldsymbol{t^2-9}}{\boldsymbol{2t^2+7t+3}} = \lim_{t\to-3}\frac{(t+3)\cdot(t-3)}{2t^2+\boldsymbol{6t}+\boldsymbol{t}+3} = \lim_{t\to-3}\frac{(t+3)\cdot(t-3)}{2(\boldsymbol{t^2+3t})+(\boldsymbol{t+3})}$$

$$\lim_{t\to-3}\frac{(t+3)\cdot(t-3)}{2(t^2+3t)+(t+3)} = \lim_{t\to-3}\frac{(t+3)\cdot(t-3)}{2t(\boldsymbol{t+3})+(\boldsymbol{t+3})} = \lim_{t\to-3}\frac{(t+3)\cdot(t-3)}{(t+3)\cdot(2t+1)}$$

$$\lim_{t\to-3}\frac{(t+3)\cdot(t-3)}{(t+3)\cdot(2t+1)} = \lim_{t\to-3}\frac{(t-3)}{(2t+1)} = \frac{\boldsymbol{-6}}{\boldsymbol{-5}} = \frac{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{5}}$$

Logo, o limite existe e ele é seis quintos.

James Stewart – Capítulo 2.6 (Limites no infinito): Vamos buscar se os limites das funções existem

29. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

Ao aplicar aquilo que já foi visto, perceberá que o valor obtido novamente é uma indeterminação, agora sendo $\frac{\infty}{\infty}$, para esses casos aplicaremos uma outra manipulação que pode ser utilizada quando temos que a variável tende a infinito. Para isso vamos utilizar de algo parecido com a manipulação feita acima, porém agora com multiplicações ou divisões, a qual sabemos que todo número multiplicado por 1 é o próprio número, e sabemos que um número é 1 quando fazemos uma divisão onde o numerador é igual ao denominador, como a seguir:

$$\frac{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}\cdot\mathbf{1} = \frac{(x+2)}{(x-2)}\cdot\frac{(x-2)}{(x-2)} = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{4}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}}$$

Pode parecer complicado, porém dependendo da situação tal técnica ajuda muito á resolver alguns problemas a serem vistos, como nosso problema atual, iremos fazer a seguinte manipulação, a qual dividiremos todos pela variável de maior ordem no denominador, que é x^3. Vejam como será utilizado:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}\cdot\mathbf{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2}\cdot\frac{1/x^3}{1/x^3}$$

Como dito acima iremos dividir tanto em cima quanto em baixo pela variável de maior ordem, e para manter o valor atual do limite, teríamos que tal tinha que oferecer o valor 1.

$$\frac{\mathbf{1}/\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{1}/\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}} = \frac{1}{x^3}\cdot\frac{x^3}{1} = \mathbf{1}$$

Utilizamos da ideia de que a divisão de frações, é o produto da primeira fração com o inverso da segunda. Com isso podemos avançar, vamos abrir nosso limite com a adição que fizemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2}\cdot\frac{1/x^3}{1/x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4-3x^2+x}{x^3}}{\frac{x^3-x+2}{x^3}} \cdot= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty}x - \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty}1 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty}x - 0 + 0}{1-0+0} = \infty$$

Logo temos que quando a função vai pro infinito, o limite da mesma tende ao infinito também.

Hoffman – Capítulo 1.6 (Continuidade): Vejamos se as funções dadas são contínuas no ponto.

19. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ em $x = 1$

Para verificar se uma função é continua no ponto, era necessário ver se a mesma cumpre com os 3 pressupostos ditos, a qual primeiro a função deve existir no ponto, a segunda que os limites laterais vão para o mesmo valor, ou seja o limite deve existir, e por fim, que o Limite seja igual ao valor da função no ponto.

1º A função existe no ponto? *(Ela deve assumir algum valor para existir)*

$$f(1) = \frac{(1)+1}{(1)-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}}$$

Logo, é observado que a **função não tem um valor no ponto** em específico, só por isso já podemos afirmar que a mesma **não é continua**.

24. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{para } x < 0 \\ x-1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$ em $x = 0$

Nessa segunda questão, vemos que a função assume formas diferentes após certo ponto, ponto esse que será de nosso interesse verificar se continua contínuo, ou não.

Verifiquemos os pressupostos: *(Lembrem pegamos o formato daquele que tem os seguintes símbolos $x \geq 0, x = 0$ ou $x \leq 0$)*

1º *função existe no ponto*: $f(0) = (0-1) = -1$, como a função tem valor no ponto, verificamos que o 1º pressuposto segue correto, partiremos para o 2º.

2º *Limite existe: (Para o limite existir iremos verificar pelas laterais qual valor a função tende ao se aproximar de 0, lembre-se que quando assume valores menores que 0 a função tem uma forma, e quando assume maiores a forma é outra)*

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0^-} x + 1 = \lim_{x \to 0^+} x - 1$$

$$1 \neq -1$$

Os **limites são diferentes**, logo o mesmo não existe, por consequência nossa função **não é contínua**.

James Stewart – Capítulo 2.5 (Continuidade): Vamos buscar se as funções serão contínuas.

46. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leqslant x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Essa será um pouco mais complicada, pois aquilo que buscamos é saber o valor para duas incógnitas a qual fará que nossa função seja contínua em todo momento. Ainda continuaremos utilizando de nossos pressupostos, porém iremos aplicar os mesmos para cada ponto de mudança. Primeiro cuidaremos do ponto *x=2* e após iremos para o ponto *x=3*.

x=2

1º $f(2) = a(2)^2 - b(2) + 3 = 4a - 2b + 3$, mesmo não dando um valor exato, manteremos tal informação com a gente.

2º

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} ax^2 - bx + 3$$

Aqui sabemos o valor que dará, porém o outro é uma indeterminação $\frac{0}{0}$, com isso iremos resolver rapidamente a mesma para então continuar.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$$

Logo, temos que:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} ax^2 - bx + 3$$

$$4 = 4a - 2b + 3$$

$$\boldsymbol{4a - 2b = 1}$$

Temos nossa primeira equação, mas o que ela significa para nós? Ela significa que o limite da função existirá se os valores de *a* e *b* forem tais que o resultado da equação seja *1,* vamos manter ela, e partir para o próximo ponto.

x=3

1º $f(3) = 2(3) - a + b = 6 - a + b$, seguimos a mesma ideia do ponto passado, manteremos tal em mente.

2º

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 3^-} ax^2 - bx + 3 = \lim_{x\to 3^+} 2x - a + b$$

$$a(3)^2 - b(3) + 3 = 2(3) - a + b$$

$$9a - 3b + 3 = 6 - a + b$$

$$\mathbf{10a - 4b = 3}$$

Após fazer ambos limites laterais, encontramos duas equações, a quais apresentam os termos *a* e *b* em ambos os lados, logo apenas rejeitamos nossa equação, colocando as incógnitas em um lado e as constantes no outro. E assim obtemos nossa segunda equação, que será suficiente para resolver o problema da questão.

Veja que temos 2 equações que dependem de *a* e *b*, logo podemos fazer um sistema de equação simples e descobrir tais valores.

$$\begin{cases} 4a - 2b = 1 \\ 10a - 4b = 3 \end{cases}$$

Há diversas formas de resolver um sistema de equação, as mais simples são a da soma e a do isolamento. Vamos ir pela soma, para isso temos que fazer uma das incógnitas sumirem, vejam que a equação de baixo tem o dobro do valor de *b* vista na equação acima, logo para sumir com o *b* em nossa vida, podemos multiplicar a primeira equação por *-2*, para cancelar o *b*, veja como ficaria:

$$\begin{cases} (-2).(4a - 2b) = (-2).1 \\ 10a - 4b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a + 4b = -2 \\ 10a - 4b = 3 \end{cases}$$

Somando as equações, teríamos:

$$(10a - 8a) + (4b - 4b) = 3 - 2$$

$$2a = 1 \therefore a = \frac{1}{2}$$

Logo, obtemos ao isolar o *a* que o mesmo é igual a um meio, e para descobrir *b* basta substituir o valor de *a* que encontramos em uma das duas equações, vamos ir pela primeira:

$$4a - 2b = 1$$

$$4(\frac{1}{2}) - 2b = 1$$

$$2 - 2b = 1 \therefore 2b = 1 \therefore b = \frac{1}{2}$$

Logo, temos que *b* também é um meio. Sabendo de ambos valores, resta apenas verificar uma única condição, o 3º pressuposto, onde o valor do Limite deve ser igual ao valor da função no ponto, vamos retornar aos pontos.

x=2

Tínhamos que o Limite da mesma era: $4 = 4a - 2b + 3$

Logo, temos: $4 = 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3$

$$4 = 2 - 1 + 3 \therefore \mathbf{4} = \mathbf{4}\ (Limite\ existe)$$

E o valor da função era: $f(2) = 4a - 2b + 3 = 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \mathbf{4}$

3º *O valor da função no ponto é igual ao Limite da função no ponto.*

Pelo observado vemos que a função é contínua no ponto *x=2*, vejamos agora no ponto *x=3*.

x=3

Tínhamos que o Limite no ponto era: $9a - 3b + 3 = 6 - a + b$

$$9\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 6 - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$4{,}5 - 1{,}5 + 3 = 6 \therefore \mathbf{6} = \mathbf{6}\ \text{(Limite existe)}$$

E a função no ponto x=3: $f(3) = 6 - a + b = 6 - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{6}$

Logo, a função nesse ponto também é contínua, logo podemos afirmar que os valores de *a* e *b* que tornam a função contínua em todo ponto é:

$$\boldsymbol{a = b = \frac{1}{2}}$$