Integrais Múltiplas - Mudança de Variáveis

Diretório de Apoio Acadêmico

1 Mudança de variáveis em integrais de uma variável

Tal como outros tópicos já abordados, a mudança de variáveis em uma integral já foi vista anteriormente quando trabalhavamos com uma única variável. Em si sempre utilizavamos parte dela ao trabalhar com integrais complexas, a qual seria necessário alguma manipulação, seja por substituição ou fazer uma integração por partes. Vamos relembrar alguns desses casos:

$$\int 2x * e^{x^2+4}\ dx$$

Nesse caso não conseguiriamos integrar normalmente, fazendo se necessário manipular de alguma forma tal função, para que conseguissemos integrar ela da mesma forma que integrariamos outras funções, uma dessas formas é a **SUBSTITUIÇÃO**, onde escolhemos um parte da função para *substituir* por uma variável qualquer, com objetivo de que a derivada dessa parte da função seja igual aquilo que resta em nossa integral, confuso, mais veja como ocorre esse caso:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) * g'(u)du$$

(vamos considerar que a função no expoente da exponencial seja igual a u)

$$u = x^2 + 4 \to du = 2x\ dx$$

(ao derivamos tal função em relação a x, obteriamos a função $g'(u)$, primeiro vamos substituir $x^2 + 4$ na nossa função principal por u)

$$\int 2x * e^u\ dx$$

(veja que ao apenas substituir a parte que escolhemos pela variável u, ainda há uma parte da integral que está dependente de x, que seria o $2x\ dx$)

$$\int e^u * \mathbf{2x\ dx}$$

(porém vimos que a derivada de u, é igual a $du = 2x\ dx$, que seria essa parte restante da integral, logo poderiamos substituir a mesma também)

$$\int e^u \mathbf{du}$$

(assim chegamos em uma integral mais simples de resolver)

$$\int e^u du = e^u + K$$

(e no final retornavamos as mudanças feitas, onde tiver u colocariamos x^2+4, que seria a função principal)

$$\int 2x * e^{x^2+4} dx = e^{x^2+4} + K$$

Veja que conseguimos simplificar um caso de integral, ao fazer essa mudança de variável na função. Em integrais múltiplas o caso não será tão diferente, nosso objetivo será reescrever a função, com outras variáveis com objetivo de simplificar a mesma, ou de simplificar o cálculo do *intervalo* da mesma, esse último caso iremos abordar mais profudamente a seguir.

2 Mudança de variáveis em integrais de múltiplas variáveis

Como dito anteriormente, utilizamos das mudanças de variáveis com o objetivo de simplificar as integrais feitas, podemos perceber que uma *integral* será complexa e trabalhosa observando a função que estamos trabalhando, ou no intervalo de suas variáveis. Visto que em alguns casos os intervalos de uma variável são funções que dependem das outras variáveis, como no caso abaixo:

$$\int\int_R (x+y)e^{x-y}dA$$

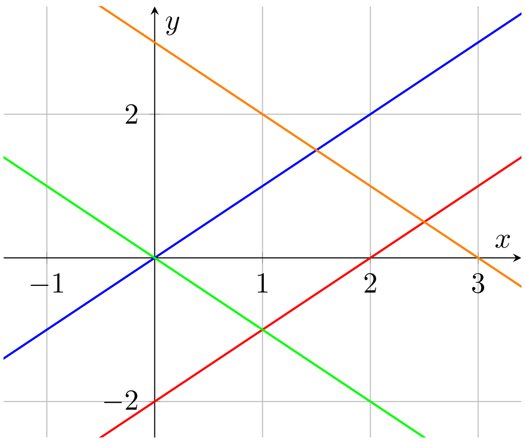
$$delimitada\ pelo\ retângulo:$$

$$x-y=0;\ \ x-y=2$$

$$x+y=0;\ \ x+y=3$$

Observem que os intervalos são dados em funções, assim deixando complicado na escrita da integral, dado tal complexidade. Observem a fígura a qual a área é de nosso interesse:

Gráfico delimitado pelas funções



Observem que queremos essa área criada pelas funções delimitadoras, porém não conseguiríamos descobrir o intervalo da mesma para aplicar em uma integral. Logo, buscamos uma outra forma de solução a qual facilitaria na resolução, ao realizar uma mudança de variáveis, para fazer tal mudança podemos considerar 2 pontos:

$$1)\ Uma\ mudanca\ simples\ de\ variáveis;$$

$$2)\ Ou\ utilizar\ das\ funcões\ delimitadoras\ como\ uma\ nova\ variável;$$

Levando esses pontos em consideração, poderiamos dizer que:

$$u=x$$

$$v=x+y=u+y\rightarrow y=v-u$$

Ambas transformações são as funções delimitadoras que formam o retângulo da imagem. Após fazer a transformação, é de interesse buscar o novo **INTERVALO** delimitador, para isso vejam que:

$$R=\{(x,y)\mid 0\leq x-y\leq 2,\ \ 0\leq x+y\leq 3\}$$

(Ao realizar a transformação de *(x,y)* -¿ *(u,v)*)

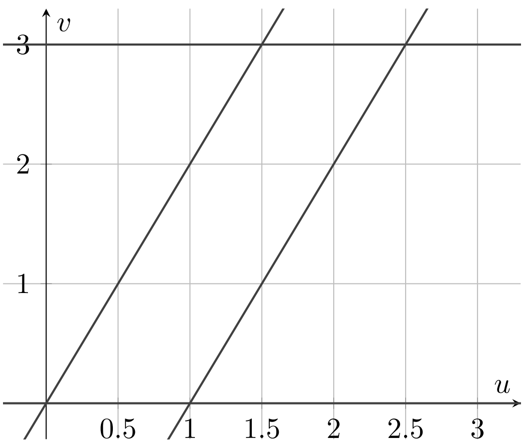
$$R=\{(u,v)\mid 0\leq u-(v-u)\leq 2,\ \ 0\leq v\leq 3\}$$

$$R=\{(u,v)\mid 0\leq 2u-v\leq 2,\ \ 0\leq v\leq 3\}$$

$$R = \left\{(u,v) \mid \frac{v}{2} \leq u \leq \frac{2+v}{2},\ 0 \leq v \leq 3\right\}$$

Vejam que agora ficou mais fácil compreender o intervalo que delimita a área, vejam como essa mudança modificou a figura:

Gráfico delimitado pelas funções



E nossa integral ficaria:

$$\int \int_R (x+y)e^{x-y}dxdy$$

(onde tiver x colocaremos u, onde tiver y colocaremos v - u)

$$\int \int_R (u+(v-u))e^{u-(v-u)}dxdy$$

(Aplicando os intervalos encontrados para u e v)

$$\int_0^3 \int_{\frac{v}{2}}^{\frac{2+v}{2}} (v)e^{2u-v}dxdy$$

Observem que agora diferente de antes, a qual tinhamos uma função complicada, e um intervalo complexo, agora temos uma função um pouco mais simples e com um intervalo mais simplificado. Outro ponto a se observar é que mudamos as *variáveis* a serem trabalhadas, porém ainda há **dx** e **dy** em nossa integral, ao invés de **du** e **dv**. Logo para realizar a integral, precisamos fazer essa modificação, e para tal utilizaremos das transformações feitas inicialmente:

$$u = x \rightarrow x = 1u + 0v$$

$$v = x + y \rightarrow y = 1v - 1u$$

(Observe que as derivadas seriam)

$$dx = 1du + 0dv$$

(lembrando que a derivada completa, de uma função de múltiplas derivadas, é a soma das derivadas parciais)

$$dy = 1dv - 1du$$

Vejam que buscamos *dxdy*, ou seja, o cruzado entre ambas, uma solução para descobrir tal de forma rápida, é utilizar de um mecanismo parecido com *HASSIANO*, coloca as derivadas parciais em uma matriz, e a partir dela calcular o determinante:

$$\begin{array}{c|cc} & u & v \\ \hline x & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ y & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array}$$

O determinante dessa matriz irá representar $dxdy$ em nossa integral, esse processo é chamado de **JACOBIANO**. Logo, considerando:

$$x = u$$

$$y = v - u$$

Teriamos a seguinte matriz:

$$\begin{array}{c|cc} & u & v \\ \hline x & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \end{array}$$

A qual seu determinante seria:

$$J = (1 * 1) - (0 * -1) = 1$$

Logo, nossa integral ficaria:

$$\int_0^3 \int_{\frac{v}{2}}^{\frac{2+v}{2}} (v)e^{2u-v} \mathbf{dxdy} = \int_0^3 \int_{\frac{v}{2}}^{\frac{2+v}{2}} (v)e^{2u-v} \left| J \right| \mathbf{dudv} = \int_0^3 \int_{\frac{v}{2}}^{\frac{2+v}{2}} (v)e^{2u-v} \; 1\mathbf{dudv}$$

(Utilizamos o módulo do Jacobiano)

Com a integral arrumada, poderíamos de forma simples resolvê-la, ao contrário da integral que tinhamos inicialmente. E chegamos na conclusão, que ao mudar as variáveis de uma integral de múltiplas variáveis, teriamos:

$$\int\int f(x, y) \; dxdy = \int\int g(u, v) * |J| \; dudv$$

Para concluir, vamos realizar um novo exemplo, utilizando de um dos problemas oferecidos no livro de *James Stewart*, Cálculo Vólume 2, 7^a edição:

19. $\iint_R xy\, dA$, onde R é a região no primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e as hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v$, $y = v$

Figure 1: *Questão* 19, *Capítulo* 15.10

A questão nos oferece a função a ser integrada $f(x, y) = xy$, ela também nos oferece os delimitadores do intervalo, quando estamos abordando o quadrantes de uma função, iremos considerar o plano cartesiano:

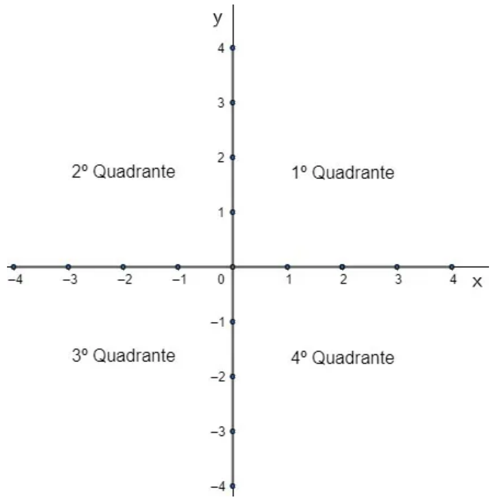


Figure 2: Quadrantes

Observe que quando consideramos o 1^o**quadrante**, temos que $x \geq 0, y \geq 0$, logo a questão está dizendo que os valores de x e y são maiores que 0. Caso, a região fosse limitada no 2^oquadrante, teriamos $x \leq 0, y \geq 0$, nesse caso x seria valores negativos e y valores positivos.
A questão também nos oferece, funções que delimitam mais ainda a área:

$$y = x \ e \ y = 3x$$

(Vejam que isso poderia ser o intervalo de y)

$$xy = 1 \ e \ xy = 3$$

Observem que nenhuma dessas funções, ou na própria questão, é nos dado o intervalo de x. Logo, como resolveriamos tal integral, se não sabemos exatamente o intervalo de x?
Podemos aplicar uma mudança de variáveis, assim ao ínves de trabalhar em um intervalo que não conhecemos, para um caso onde os intervalos são conhecidos. A própria questão já nos oferece as transformações indicadas:

$$x = \frac{u}{v}, \ y = v$$

Como sabemos as transformações, poderiamos aplicar o **JACOBIANO**, para já arrumar a integral:

	u	v
x	$\frac{1}{v}du$	$-\frac{u}{v^2}dv$
y	0	dv

$$T = (\frac{1}{v}du * dv) - (-\frac{u}{v^2}dv * 0) = \frac{1}{v}dudv$$

A integral ficaria:

$$\int\int_R xy\ dxdy = \int\int_R (\frac{u}{v}) * (v)\ (\frac{1}{v} dudv)$$

$$\int\int_R \frac{u}{v} dudv$$

Com a integral arrumada, basta descobrir o intervalo da integral, para isso vamos utilizar das funções de transformação e limitadoras:

$$y = v,\ x = \frac{u}{v}$$

(veja que $y = v$ logo, poderiamos substituir na transformação de x)

$$x = \frac{u}{y} \to xy = u$$

(observe que a função que temos é bem parecido com uma das funções que limitam o intervalo)

$$xy = 1\ e\ xy = 3$$

Nesse caso vemos que por $u = xy$ e $1 \leq xy \leq 3$, teriamos o intervalo de u como:

$$1 \leq u = xy \leq 3 \to 1 \leq u \leq 3$$

Sabendo o intervalo de u, basta descobrir o intervalo de v, dado que:

$$x = \frac{u}{v}\ e\ y = v$$

$$y = x\ e\ y = 3x$$

(vamos considerar $y = x$ primeiro)

$$y = x \to v = \frac{u}{v} \to v^2 = u \to v = \sqrt{u}$$

$$y = 3x \to v = 3 * \frac{u}{v} \to v^2 = 3u \to v = \sqrt{3u}$$

Logo, teriamos então: $R = \{(u,v)|\ 1 \leq u \leq 3,\ \sqrt{u} \leq v \leq \sqrt{3u}\}$

E nossa integral final seria:

$$\int_1^3 \int_{\sqrt{u}}^{\sqrt{3u}} \frac{u}{v} dudv$$

Nesse formato seria possível resolver a integral. Com isso terminamos esse tópico, os próximos dois resumos, são mais dois casos de mudança de variáveis: **Integrais em Coordenadas Cilíndricas** e **Integrais em Coordenadas Esferícas**, é recomendado entenderem a lógica por trás da mudança de variáveis para facilitar o compreendimento desses dois próximos tópicos.