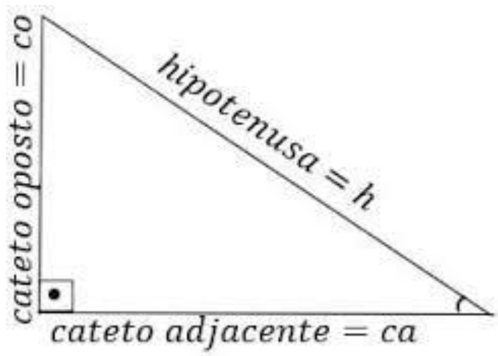
RESUMO DE FUNDAMENTOS DE CÁLCULO I: INTEGRAIS

SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As substituições trigonométricas são uma forma de simplificar algumas integrais que possuem algumas funções complexas por uma função trigonométrica. Para isso vamos relembrar algumas coisas envolvendo o triangulo retângulo, a relação entre seus ângulos e os seus lados:



$$h^2 = co^2 + ca^2$$

Sabemos que podemos calcular o valor da $hipotenusa$ com a soma dos catetos ao quadrado. Agora vamos ver alguns casos específicos:

a) $Hipotenusa\ desconhecida;\ cateto\ oposto\ e\ adjacente\ conhecidos;$

$$\boldsymbol{h = \sqrt{co^2 + ca^2}}$$

b) $Cateto\ adjacente\ desconhecido; cateto\ oposto\ e\ hipotenusa\ conhecida;$

$$h^2 = co^2 + ca^2 \therefore ca^2 = h^2 - co^2 \leftrightarrow \boldsymbol{ca = \sqrt{h^2 - co^2}}$$

c) $Cateto\ oposto\ desconhecido; cateto\ adjacente\ e\ hipotenusa\ conhecida;$

$$h^2 = co^2 + ca^2 \therefore co^2 = h^2 - ca^2 \leftrightarrow \boldsymbol{co = \sqrt{h^2 - ca^2}}$$

E agora vamos relacionar esses casos com alguns ângulos e funções trigonométricas. Sabemos que:

Função trigonométrica	*Relação com o triângulo retângulo*
$\boldsymbol{sen(x)}$	$= \boldsymbol{\frac{co}{h}}$
$cos(x)$	$= \frac{ca}{h}$
$\boldsymbol{tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}}$	$= \boldsymbol{\frac{co}{ca}}$
$\boldsymbol{sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}}$	$= \boldsymbol{\frac{h}{ca}}$
$cossec(x) = \frac{1}{sen(x)}$	$= \frac{h}{co}$
$cotg(x) = \frac{1}{tg(x)}$	$= \frac{ca}{co}$

Agora, vamos fazer as seguintes considerações:

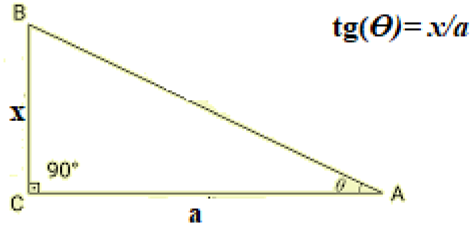
<u>1º Caso:</u>

$\boldsymbol{h = \sqrt{co^2 + ca^2}}$ $(\boldsymbol{Considere\ o\ cateto\ oposto\ como\ x\ e\ cateto\ adjacente\ como\ a})$

$$\boldsymbol{h = \sqrt{co^2 + ca^2} = \sqrt{x^2 + a^2}}$$

Nesse caso conhecemos apenas os valores dos catetos, quais das funções trigonométricas se utilizar apenas dessas duas informações? *(consideramos um ângulo Θ qualquer)*

$\boldsymbol{tg(\theta) = \frac{co}{ca}}$ $(\boldsymbol{\ dado\ como\ definimos\ o\ cateto\ oposto\ como\ x\ e\ adjacente\ como\ a})$



$$\boldsymbol{tg(\theta) = \frac{x}{a} \leftrightarrow x = a \cdot tg(\theta) \therefore dx = a \cdot sec^2(\theta)\, d\theta}$$

Logo, quando lidamos com o seguinte caso $\sqrt{\boldsymbol{x^2 + a^2}}$, poderemos aplicar uma substituição trigonométrica ao substituir $\boldsymbol{x = a \cdot tg(\theta)}$. Vejamos um exemplo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx$$

Percebam que integrar tal função por qualquer um dos métodos seria inadequado, dado a complexidade da função. Com isso nos restar tentar manipular a mesma, primeiro identificamos nossos elementos:

$$\boldsymbol{h = \sqrt{x^2 + a^2}}$$

Percebam que quando o caso é de hipotenusa desconhecida, temos um elemento x^2 somando com uma constante ao quadrado, comparando com nossa raiz quadrada na função:

$$\boldsymbol{\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{x^2 + 9}}$$

Nosso $a^2 = 9$, logo temos que $a = |\sqrt{9}| = 3$. Com isso podemos aplicar a substituição:

$$\boldsymbol{tg(\theta) = \frac{x}{a} \leftrightarrow x = a \cdot tg(\theta) \therefore dx = a \cdot sec^2(\theta)\, d\theta}$$

$$\boldsymbol{tg(\theta) = \frac{x}{3} \leftrightarrow x = 3 \cdot tg(\theta) \therefore dx = 3 \cdot sec^2(\theta)\, d\theta}$$

Trazendo essas modificações em nossa integral temos então:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(3 \cdot tg(\theta))^2 + 9}} \cdot (3 \cdot sec^2(\theta)\, d\theta) = \int \frac{3 \cdot sec^2(\theta)}{\sqrt{9 \cdot tg^2(\theta) + 9}} \cdot d\theta = \int \frac{3 \cdot sec^2(\theta)}{\sqrt{9 \cdot (tg^2(\theta) + 1)}} \cdot d\theta$$

Agora vamos nos lembrar de uma das principais relações trigonométricas, para resolver o caso acima:

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1\ (Dividimos\ todos\ por\ cos^2(x))$$

$$\frac{sen^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} \leftrightarrow \boldsymbol{tg^2(x) + 1 = sec^2(x)}$$

Vejam que aquilo que temos acompanhado do 9 é essa soma $tg^2(\theta) + 1$, e como visto na relação acima, tal é igual a $sec^2(\theta)$. Com isso podemos retornar a nossa integral:

$$\int \frac{3 \cdot sec^2(\theta)}{\sqrt{9 \cdot sec^2(\theta)}} \cdot d\theta = \int \frac{3 \cdot sec^2(\theta)}{3 \cdot \sec(\theta)} d\theta = \int \sec(\theta)\, d\theta$$

Fazendo todos esses passos no fim chegamos em uma integral simples, da função secante, a qual integrando:

$$\int \sec(\theta)\, d\theta = \int \sec(\theta) \cdot \frac{(\sec(\theta) + tg(\theta))}{(\sec(\theta) + tg(\theta))}\, d\theta$$

E aplicamos a integração por substituição:

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{sec}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{tg}(\boldsymbol{\theta}) \therefore \boldsymbol{du} = \sec(\theta)\, tg(\theta) + sec^2(\theta) d\theta = \mathbf{sec}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \left(\mathbf{sec}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{tg}(\boldsymbol{\theta})\right) \boldsymbol{d\theta}$$

$$\int \frac{\sec(\theta) \cdot (\sec(\theta) + tg(\theta))}{(\sec(\theta) + tg(\theta))}\, d\theta = \int \frac{1}{u}\, du = ln|u| + C$$

Agora temos que fazer os passos reversos para chegar em uma função de *x*:

$$u \to \theta \to x$$

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{sec}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{tg}(\boldsymbol{\theta}) \to \boldsymbol{tg}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}} \therefore \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{arctg}(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}})$$

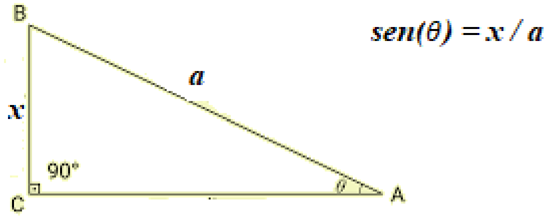
$$ln|u| + C = ln|\sec(\theta) + tg(\theta)| + C = \boldsymbol{ln}\left|\mathbf{sec}\left[\boldsymbol{arctg}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}\right)\right] + \boldsymbol{tg}\left[\boldsymbol{arctg}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}\right)\right]\right| + \boldsymbol{C}$$

Logo, chegamos que a primitiva de nossa função é:

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{9}}} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{ln}\left|\mathbf{sec}\left[\boldsymbol{arctg}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}\right)\right] + \boldsymbol{tg}\left[\boldsymbol{arctg}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}\right)\right]\right| + \boldsymbol{C}$$

2º Caso:

$$\boldsymbol{ca = \sqrt{h^2 - co^2}} \quad (\boldsymbol{Considere\ o\ cateto\ oposto\ como\ x\ e\ a\ hipotenusa\ como\ a})$$



$$\boldsymbol{ca = \sqrt{h^2 - co^2} = \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Seguindo a mesma lógica no caso anterior, verificamos que as funções trigonométricas que utilizam de hipotenusa e cateto oposto são:

$$sen(x) = \frac{co}{h} \quad e \quad cossec(x) = \frac{h}{co}$$

Como estamos considerando x como o cateto oposto, utilizaremos a função $sen(x)$ para realizar as manipulações. Segue-se o mesmo processo:

$$\boldsymbol{sen(\theta) = \frac{x}{a} \leftrightarrow x = a \cdot sen(\theta) \therefore dx = a \cdot cos(\theta)\ d\theta}$$

Vamos resolver agora, uma função parecida com a anterior, porém trocando a ordem dos fatores:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx$$

Identificamos quem é a:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{9 - x^2} \therefore a^2 = 9 \therefore \boldsymbol{a = 3}$$

$$sen(\theta) = \frac{x}{3} \leftrightarrow \boldsymbol{x = 3 \cdot sen(\theta) \therefore dx = 3 \cdot cos(\theta)\ d\theta}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9 - \left(3 \cdot sen(\theta)\right)^2}} \cdot (3 \cdot cos(\theta)\ d\theta) = \int \frac{3 \cdot cos(\theta)}{\sqrt{9 - 9 \cdot sen^2(\theta)}} d\theta = \int \frac{3 \cdot cos(\theta)}{\sqrt{9 \cdot \left(1 - sen^2(\theta)\right)}} d\theta$$

Usando a relação:

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \therefore cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$$

$$\int \frac{3 \cdot cos(\theta)}{\sqrt{9 \cdot \left(1 - sen^2(\theta)\right)}} d\theta = \int \frac{3 \cdot cos(\theta)}{\sqrt{9 \cdot cos^2(\theta)}} d\theta = \int \frac{3 \cdot cos(\theta)}{3 \cdot cos(\theta)} d\theta = \int 1\, d\theta = \theta + C$$

Agora retornando de $\theta \to x$:

$$\boldsymbol{sen(\theta) = \frac{x}{3} \therefore \theta = arcsen\left(\frac{x}{3}\right)}$$

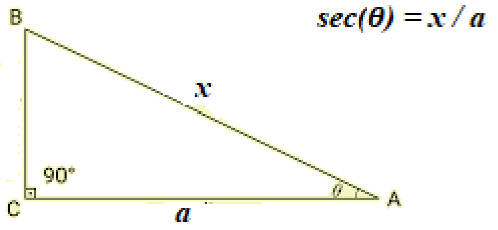
$$\theta + C = \boldsymbol{arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + C}$$

Logo a primitiva de nossa função é:

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx = arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + C}$$

3º Caso:

$\boldsymbol{co = \sqrt{h^2 - ca^2}}$ $\boldsymbol{(Considere\ a\ hipotenusa\ \ como\ x\ e\ o\ cateto\ adjacente\ como\ a)}$



$$\boldsymbol{co = \sqrt{x^2 - a^2}}$$

Nesse caso conhecemos a hipotenusa e o cateto adjacente, e as funções trigonométricas que utilizam dessa informação são:

$$\cos(x) = \frac{ca}{h} \quad e \sec(x) = \frac{h}{ca}$$

Como nesse caso estamos considerando a hipotenusa como x, iremos trabalhar com a função secante. E com isso teremos a seguinte substituição:

$$\boldsymbol{sec(\theta) = \frac{x}{a} \leftrightarrow x = a \cdot sec(\theta) \therefore dx = -\, a \cdot sec(\theta) \cdot tg(\theta)\, d\theta}$$

Para terminar com tal assunto, continuaremos utilizando da mesma função com a ordem trocada:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$$

Identificamos quem é a:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x^2 - 9} \therefore a = 3$$

$$sec(\theta) = \frac{x}{3} \leftrightarrow x = 3 \cdot sec(\theta) \therefore dx = -\, 3 \cdot sec(\theta) \cdot tg(\theta)\, d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(3 \cdot sec(\theta)\right)^2 - 9}} \cdot (-\,3 \cdot sec(\theta) \cdot tg(\theta)\, d\theta) = \int \frac{-\,3 \cdot sec(\theta) \cdot tg(\theta)}{\sqrt{9 \cdot (sec^2(x) - 1)}} \cdot d\theta$$

Relembrando as relações utilizadas:

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1\ (Dividimos\ todos\ por\ cos^2(x))$$

$$\frac{sen^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} \leftrightarrow \boldsymbol{tg^2(x) + 1 =\ sec^2(x)} \therefore \boldsymbol{sec^2(x) - 1 = tg^2(x)}$$

$$\int \frac{-\,3 \cdot sec(\theta) \cdot tg(\theta)}{\sqrt{9 \cdot \boldsymbol{tg^2(x)}}} \cdot d\theta = \int \frac{-\,3 \cdot sec(\theta) \cdot tg(\theta)}{3 \cdot tg(\theta)} \cdot d\theta = \int -\,sec(\theta)\, d\theta$$

Como já integramos a função secante anteriormente, já sabemos que a integral seria:

$$\int sec(\theta)\, d\theta = ln|\sec(\theta) + tg(\theta)| + C \therefore \int \boldsymbol{-sec(\theta)\, d\theta = -ln|\sec(\theta) + tg(\theta)| + C}$$

Retornando de $u \rightarrow x$:

$$sec(\theta) = \frac{x}{3} \therefore \boldsymbol{\theta = \mathrm{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)}$$

$$-ln|\sec(\theta) + tg(\theta)| + C = -ln\left|\sec\left[\mathbf{arcsec}\left(\boldsymbol{\frac{x}{3}}\right)\right] + tg\left[\mathbf{arcsec}\left(\boldsymbol{\frac{x}{3}}\right)\right]\right| + C$$

Com isso temos que a primitiva da função é:

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} dx = -ln\left|\mathbf{sec}\left[\mathbf{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)\right] + tg\left[\mathbf{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)\right]\right| + C}$$