

REVISÃO FUNDAMENTOS DE CÁLCULO I – LIMITES: PROPRIEDADES E INDETERMINAÇÃO.

LIMITES

➔ Utilizamos limites quando buscamos saber para onde o valor de uma função vai quando a mesma *tende* em direção a um ponto específico.

Como exemplos já vistos, vamos considerar os seguintes casos:

- a) Uma função linear qualquer: $f(x) = ax + b$, o que é esperado acontecer quando aproximamos o x á zero?
(Esperamos que o valor da função se aproxime mais ainda de b)

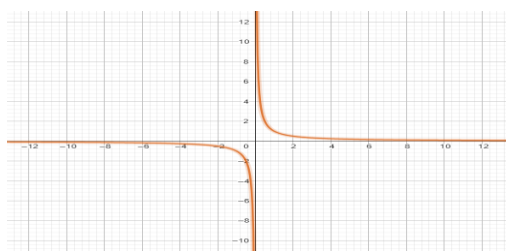
Vamos levar em consideração a seguinte função: $f(x) = 2 \cdot x + 4$

x	$f(x)$
1	6
0,75	5,5
0,5	5
0,1	4,2
0,01	4,02
0,001	4,002

- b) Claro, isso acontece por ser uma função básica, polinomial, a qual não possui nenhuma restrição, porém existe funções que não existem em determinado ponto, ou intervalo, como uma função racional $f(x) = 1/x$ onde a mesma não existe quando o *denominador* é igual a zero, ou uma função logaritmo quando o número dentro da mesma é negativo, tal como funções de raízes de números pares.

Vamos considerar alguns casos e estudar o que acontece quando elas se aproximam desse ponto em específico.

1. $f(x) = 1/x$



Vejam que quando o x está se aproximando de zero a função faz uma curva e explode para valores muito altos, quando isso ocorre teremos uma *Assíntota Vertical*, porém quando o x está indo para valores mais elevados e o valor da função se aproxima muito de zero ou algum outro valor teremos então uma *Assíntota Horizontal*, vamos verificar esse acontecimento por meio de uma tabela.

$x \rightarrow 0$	$f(x)$	$f(x) = 1/x$	$x \rightarrow \infty$	$f(x)$
1	1		1	1
0,5	2		5	0,25
0,25	4		25	0,04
0,1	10		100	0,01
0,01	100		1000	0,001
0,001	1000		10000	0,0001
0,0001	10000		100000	0,00001

As Assíntotas verticais ocorrem normalmente, quando a função se aproxima de um valor (*ela não assume o valor, apenas se aproxima*), e o valor da função explode, seja para $+\infty$ ou $-\infty$. Já as Assíntotas horizontais ocorrem quando o x vai para valores elevados e a função fica se aproximando de um valor específico, como no exemplo onde quanto maior o x mais próximo de zero é o valor da função.

E se tivéssemos uma outra função racional:

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

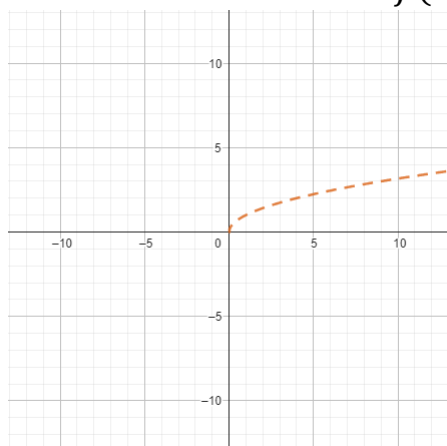
Se fossemos nós aproximar o x a *zero* nesse caso, iríamos ver que a função iria se aproximar do valor $-\frac{1}{2}$, porém perceberemos que quando tentamos aproximar o x até 2, acontece o mesmo efeito visto a cima, logo quando estamos lidando com funções racionais nosso objetivo em si é analisar o que acontece com a função quando a parte de baixo da divisão é igual a zero, ou seja, em que ponto x faz que $x - 2 = 0$.

2. Já com a função logaritmo, ou a função raiz quadrática, quarta ordem, sexta ordem, raízes de ordem par, a função não existe no momento que o

valor que está dentro é negativo, logo, a função não existirá a partir de um ponto.

Veja o seguinte caso:

$$f(x) = \sqrt[2]{x}$$



Observem que a função não assume nenhum valor real quando x é negativo.

Claro há casos especiais onde temos junções das funções que vimos até o momento, como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$$

Nesse caso temos uma função racional, onde a parte de baixo é uma raiz quadrática, pelo que vimos até agora sabemos que por ser raiz de ordem par, a função não deve existir quando o $x - 4 < 0$, logo quando x for menor que 4, e por ser um racional a função deve tender a grandes valores quando o x se aproxima de 4, porém o mesmo não assume o valor 4, pois caso assumisse tal valor o *denominador* da divisão seria 0.

$x \rightarrow 4$	$f(x)$
5	1
4,5	1,414
4,1	3,162
4,01	10
4,001	31,623
4,0001	100

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$$

A notação básica a ser utilizada para se referir a Limites vai ser:

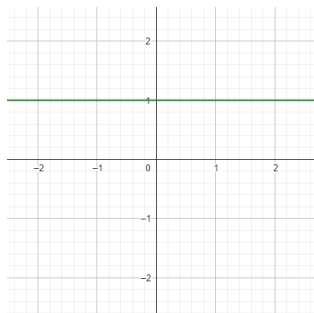
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Onde $f(x)$ é a função a qual se busca o limite, a o ponto de estudo e L é o valor que tende a função quando se aproxima desse mesmo ponto.

Propriedades dos Limites

1. *Constante:* O limite de uma constante vai ser ela mesma, basicamente pense em uma linha reta, que não muda em nenhum momento, logo o valor que ela assume no ponto atual, não mudará no próximo ponto. Tal que:

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C$$



Veja que ao fazer $f(x) = 1$ temos que para todo x a função continua a mesma coisa, ou seja, constante. Tal que $\lim_{x \rightarrow 2} 1 = 1$.

2. *Soma e Subtração:* Uma das propriedades que vemos de limites é o limite da soma ou subtração, onde quando estamos fazendo o limite de uma soma/subtração de funções, ou apenas uma soma/subtração, podemos separar tal limite em diversas partes. Veja:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Qual seria a importância em fazer tal separação? A ideia é bem simples, ao dividir um limite em partes, podemos trabalhar de forma separada cada uma, assim podendo utilizar de métodos, ou propriedades a qual já conhecemos, darei um exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 4} 4 \cdot x + 6 = \lim_{x \rightarrow 4} 4 \cdot x + \lim_{x \rightarrow 4} 6 = (\lim_{x \rightarrow 4} 4 \cdot x) + 6 = 22$$

Nesse exemplo, separei a soma que acontecia, ao separar observem que aparece o limite de uma constante $\lim_{x \rightarrow 4} 6$ e sabemos que o limite de uma constante é ela mesma, logo no fim só precisaríamos fazer o limite de $4 \cdot x$, que no fim daria 16 somando com o 6, obteríamos que $\lim_{x \rightarrow 4} 4 \cdot x + 6 = 22$. Claro foi um exemplo simples, a qual poderia ser feito de forma direta, porém em funções mais complexas possa surgir essa necessidade de separar o limite em vários.

3. *Multiplicação e divisão:* Outra propriedade é o de multiplicação e divisão, basicamente saiba que o limite do produto, será o produto dos limites, a mesma ideia com a divisão, vamos ver alguns casos:

a. *Multiplicação e divisão com constante:*

$$\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow a} C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{C} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} C}$$

Dado conhecimentos passados, temos que o limite da constante é ela mesma, tal que teríamos:

$$\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow a} C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{C} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} C} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{C}$$

Ou seja, o limite de um produto entre uma constante e função vai ser essa mesma constante multiplicada pelo limite da função.

b. *Multiplicação e divisão entre funções:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Seguindo da mesma ideia, podemos separar produtos, ou divisões em uma função e trabalhar o limite de forma separada, e no fim juntar as partes novamente.

Vamos para um exemplo utilizando todas propriedades vistas:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 4x + 2}{3x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + \lim_{x \rightarrow 4} 4x + \lim_{x \rightarrow 4} 2}{\lim_{x \rightarrow 4} 3x - \lim_{x \rightarrow 4} 1}$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + \lim_{x \rightarrow 4} 4x + \lim_{x \rightarrow 4} 2}{\lim_{x \rightarrow 4} 3x - \lim_{x \rightarrow 4} 1} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow 4} x^2\right) + \left(4 \cdot \lim_{x \rightarrow 4} x\right) + 2}{\left(3 \cdot \lim_{x \rightarrow 4} x\right) - 1} = \frac{(16) + (16) + 2}{(3 \cdot 4) - 1} = \frac{34}{11}$$

4. **Potencia e Raízes:** Segue a mesma ideia do que já foi visto, o limite da raiz será a raiz do limite, tal como o limite da potência é a potência do limite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^k = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)^k$$

Limites a qual não é possível determinar o seu valor

A ideia é que sempre que fazemos o limite de uma função, é esperado que cheguemos a algum valor ou que esse vá para o infinito seja positivo ou negativo. Porém a casos especiais que não sabemos dizer exatamente o valor, esses sendo:

$$(\infty - \infty, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot \pm\infty, \frac{0}{0}, 0^0, 1^\infty, \infty^0)$$

Ou seja, caso o limite da função tenda para um dos casos acima, não conseguiremos obter o valor da forma tradicional, assim teremos que buscar métodos ou manipulações para encontrar o valor da mesma e sair da indeterminação, um método é o de L'hospital, que será visto após certo tempo, focaremos no momento em manipulações, que serão vistas na parte de resoluções.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

➔ Nessa parte irei resolver alguns problemas retirados dos livros de Cálculo volume 1, 7 ed. de James Stewart e Cálculo um Curso moderno e suas aplicações, 9 ed. por Hoffman.

James Stewart – Capítulo 2.3 (Limites): Vamos buscar se os limites das funções existem.

5. $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

Para calcular esse limite podemos utilizar das propriedades:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2} &= \frac{\lim_{t \rightarrow -2} t^4 - \lim_{t \rightarrow -2} 2}{\lim_{t \rightarrow -2} 2t^2 - \lim_{t \rightarrow -2} 3t + \lim_{t \rightarrow -2} 2} = \frac{\left(\lim_{t \rightarrow -2} t\right)^4 - 2}{2\left(\lim_{t \rightarrow -2} t\right)^2 - 3\left(\lim_{t \rightarrow -2} t\right) + 2} \\ &= \frac{(16) - 2}{2(4) - 3(-2) + 2} = \frac{14}{8 + 6 + 2} = \frac{14}{16} = \frac{7.2}{8.2} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$

O que fizemos, fora por meio das propriedades separar as funções, e através disso trabalhar separadamente com cada uma, observado acima, e após chegar em números, foi possível fatorar o valor obtido, logo o limite da função existe e é $\frac{7}{8}$.

15. $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

Vamos ver se existe o limite da função acima, vamos começar utilizando do mesmo método acima, como já conhecem como funciona partirei para o valor que será encontrado, mas é necessário que façam apenas para a prática:

$$\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3} = \frac{0}{0}$$

Dado que fora abordado sobre limites, é de conhecimento que o valor observado é indeterminado, ou seja, não sabemos que valor seria $\frac{0}{0}$, logo se faz necessário algum método ou manipulação para resolver com esse problema, primeiro vou fazer uma pequena revisão, e relembrar algumas coisas, para então aplicar uma forma de resolver tais problemas quando a função tem uma aparência parecida com a que é vista acima.

Alguns devem se lembrar do termo *Completar quadrados*, alguns não, porém irei rever a ideia aqui. Quando buscamos completar um quadrado isso está ligado com a função quadrática:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1) \cdot (x + 1) = (x + 1)^2$$

Ou seja, buscamos pegar uma função e deixar ela em um formato mais simples, porém podemos encontrar essa mesma função da seguinte forma:

$$x^2 + 2x$$

Aqui não conseguiríamos chegar na mesma forma acima, para isso precisaríamos do $+ 1$, porém podemos fazer uma pequena manipulação para que isso ocorra, para isso vamos ver a função de uma forma diferente:

$$x^2 + 2x + 0$$

Podemos dizer que qualquer coisa está sendo somada 0, ou subtraída, e sabemos que algumas coisas somadas e subtraídos dão zero, isso ocorre quando fazemos a subtração entre números iguais: (1-1); (2-2); (3-3); e assim vai, logo podemos dizer que $0 = (1 - 1)$, logo teríamos:

$$x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1$$

Isso que foi feito é o que seria *Completar quadrados*. Pequenas manipulações como essa são úteis para resolver problemas, tais que também poderíamos ver uma situação onde teríamos $x^2 + 3x + 1$, nesse caso podemos ver:

$$3x = 2x + x$$

Tal que:

$$x^2 + (2x + x) + 1 = (x + 1)^2 + x$$

Para o nosso problema isso será o suficiente, veja como será utilizado.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3} &= \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{2t^2 + 6t + t + 3} = \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{2(t^2 + 3t) + (t + 3)} \\ \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{2(t^2 + 3t) + (t + 3)} &= \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{2t(t + 3) + (t + 3)} = \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{(t + 3) \cdot (2t + 1)} \\ \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t + 3) \cdot (t - 3)}{(t + 3) \cdot (2t + 1)} &= \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t - 3)}{(2t + 1)} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Logo, o limite existe e ele é seis quintos.

James Stewart – Capítulo 2.6 (Limites no infinito): Vamos buscar se os limites das funções existem

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$$

Ao aplicar aquilo que já foi visto, perceberá que o valor obtido novamente é uma indeterminação, agora sendo $\frac{\infty}{\infty}$, para esses casos aplicaremos uma outra manipulação que pode ser utilizada quando temos que a variável tende a infinito. Para isso vamos utilizar de algo parecido com a manipulação feita acima, porém agora com multiplicações ou divisões, a qual sabemos que todo número multiplicado por 1 é o próprio número, e sabemos que um número é 1 quando fazemos uma divisão onde o numerador é igual ao denominador, como a seguir:

$$\frac{(x+2)}{(x-2)} \cdot 1 = \frac{(x+2)}{(x-2)} \cdot \frac{(x-2)}{(x-2)} = \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$$

Pode parecer complicado, porém dependendo da situação tal técnica ajuda muito a resolver alguns problemas a serem vistos, como nosso problema atual, iremos fazer a seguinte manipulação, a qual dividiremos todos pela variável de maior ordem no denominador, que é x^3 . Vejam como será utilizado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2} \cdot \frac{1/x^3}{1/x^3}$$

Como dito acima iremos dividir tanto em cima quanto em baixo pela variável de maior ordem, e para manter o valor atual do limite, teríamos que tal tinha que oferecer o valor 1.

$$\frac{1/x^3}{1/x^3} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^3}{1} = 1$$

Utilizamos da ideia de que a divisão de frações, é o produto da primeira fração com o inverso da segunda. Com isso podemos avançar, vamos abrir nosso limite com a adição que fizemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2} \cdot \frac{1/x^3}{1/x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3}}{\frac{x^3 - x + 2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{2}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \infty \end{aligned}$$

Logo temos que quando a função vai pro infinito, o limite da mesma tende ao infinito também.