REVISÃO FUNDAMENTOS DE CÁLCULO I – CONTINUIDADE

CONTINUIDADE:

➔ Um dos fatores importantes a serem utilizados futuramente é o conceito de continuidade, como já diz em seu nome, buscamos saber se a função é contínua ou não, ou seja, se a função não apresenta nenhuma interrupção ou buraco em um determinado intervalo, ou ponto, de x. Para isso verificaremos os possíveis pontos onde possa ocorrer tal quebra de continuação, e para fazer essa verificação iremos considerar 3 pressupostos:

1. *A função deve existir no ponto* $\boldsymbol{a}$;
   Ou seja, a função deve assumir um valor quando $x = a$, um caso onde a função não é continua, são as funções racionais como $f(x) = {}^{1}/_{x}$, onde considerando o intervalo $x\colon [-\infty, +\infty]$, a função não tem um valor quando $x = 0$, logo a mesma não seria contínua;

$$\boldsymbol{f(a) = K}$$

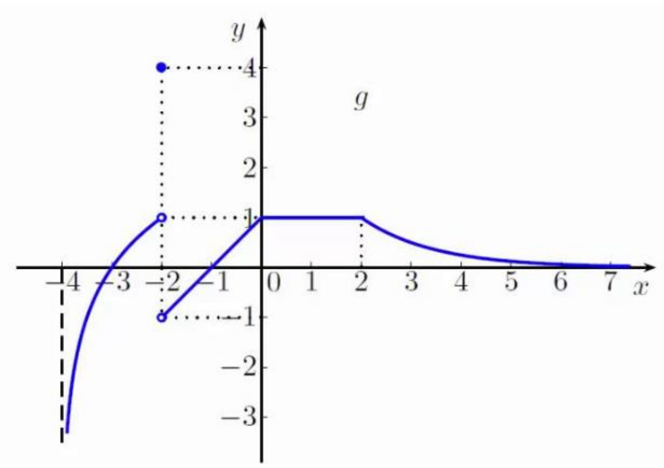
2. *O Limite da função no ponto* $\boldsymbol{a}$ *existe*, ou seja, quando a função se aproxima do ponto, independente da direção, vão para um único valor **L**. Logo, o limite da função quando aproximarmos por valores menores que $\boldsymbol{a}$ deve ser o mesmo quando aproximarmos com valores maiores que $\boldsymbol{a}$;

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L}$$

3. Por fim, para ter certeza que a função é contínua vai ser necessário verificar se *o valor que a função assume no ponto* $\boldsymbol{a}$ *é o mesmo valor aproximado pelos limites*, ou seja:

$$\boldsymbol{f(a) = \lim_{x \to a} f(x)}$$

   Observem o seguinte gráfico:



É possível notar, que a função *y* ou *f(x)*, como preferir, existe no ponto *-2* assumindo o valor de 4 (*a bola azul preenchida)*, porém vejam que quando a mesma vai se aproximando desse mesmo ponto, pelas laterais, ambas assumem valores diferentes uma da outra, enquanto o $\lim_{x \to -2^-} \boldsymbol{f(x) = 1}$ o outro limite é $\lim_{x \to -2^+} \boldsymbol{f(x) = -1}$, ou seja não existe limite nesse ponto, dado que *os limites vão para diferentes valores*.

Vamos imaginar agora que ambos limites vão para 1, ou seja, $\lim_{x \to -2^-} \boldsymbol{f(x)} = \lim_{x \to -2^+} \boldsymbol{f(x) = 1}$, a função seria continua nesse caso?

Dado os pressupostos a qual primeiro a função deve existir no ponto, ela existe e possui o valor 4, segundo o limite deve existir, ou seja, o valor da função pelos limites laterais tende para o mesmo valor, considerando o caso proposto, o mesmo existe e possuirá o valor de 1, porém pelo terceiro pressuposto teríamos que o valor da função no ponto tenha de ser igual ao valor do limite. Logo, a função continuaria não sendo contínua dado o terceiro pressuposto (4 ≠ 1).

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

- ➔ Nessa parte irei resolver alguns problemas retirados dos livros de Cálculo volume 1, 7 ed. de James Stewart e Cálculo um Curso moderno e suas aplicações, 9 ed. por Hoffman.

Hoffman – Capítulo 1.6 (Continuidade): Vejamos se as funções dadas são contínuas no ponto.

19. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ em $x = 1$

Para verificar se uma função é continua no ponto, era necessário ver se a mesma cumpre com os 3 pressupostos ditos, a qual primeiro a função deve existir no ponto, a segunda que os limites laterais vão para o mesmo valor, ou seja o limite deve existir, e por fim, que o Limite seja igual ao valor da função no ponto.

1º A função existe no ponto? *(Ela deve assumir algum valor para existir)*

$$f(1) = \frac{(1)+1}{(1)-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}}$$

Logo, é observado que a **função não tem um valor no ponto** em específico, só por isso já podemos afirmar que a mesma **não é continua**.

24. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{para } x < 0 \\ x-1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$ em $x = 0$

Nessa segunda questão, vemos que a função assume formas diferentes após certo ponto, ponto esse que será de nosso interesse verificar se continua contínuo, ou não.

Verifiquemos os pressupostos: *(Lembrem pegamos o formato daquele que tem os seguintes símbolos $x \geq 0, x = 0$ ou $x \leq 0$)*

1º *função existe no ponto*: $f(0) = (0-1) = -1$, como a função tem valor no ponto, verificamos que o 1º pressuposto segue correto, partiremos para o 2º.

2º *Limite existe: (Para o limite existir iremos verificar pelas laterais qual valor a função tende ao se aproximar de 0, lembre-se que quando assume valores menores que 0 a função tem uma forma, e quando assume maiores a forma é outra)*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} x+1 = \lim_{x\to 0^+} x-1$$

$$1 \neq -1$$

Os **limites são diferentes**, logo o mesmo não existe, por consequência nossa função **não é contínua**.

James Stewart – Capítulo 2.5 (Continuidade): Vamos buscar se as funções serão contínuas.

46. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leqslant x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Essa será um pouco mais complicada, pois aquilo que buscamos é saber o valor para duas incógnitas a qual fará que nossa função seja contínua em todo momento. Ainda continuaremos utilizando de nossos pressupostos, porém iremos aplicar os mesmos para cada ponto de mudança. Primeiro cuidaremos do ponto *x=2* e após iremos para o ponto *x=3*.

x=2

1º $f(2) = a(2)^2 - b(2) + 3 = 4a - 2b + 3$, mesmo não dando um valor exato, manteremos tal informação com a gente.

2º

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} ax^2 - bx + 3$$

Aqui sabemos o valor que dará, porém o outro é uma indeterminação $\frac{0}{0}$, com isso iremos resolver rapidamente a mesma para então continuar.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$$

Logo, temos que:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} ax^2 - bx + 3$$

$$4 = 4a - 2b + 3$$

$$\mathbf{4a - 2b = 1}$$

Temos nossa primeira equação, mas o que ela significa para nós? Ela significa que o limite da função existirá se os valores de a e b forem tais que o resultado da equação seja *1,* vamos manter ela, e partir para o próximo ponto.

x=3

1º $f(3) = 2(3) - a + b = 6 - a + b$, seguimos a mesma ideia do ponto passado, manteremos tal em mente.

2º

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 3^-} ax^2 - bx + 3 = \lim_{x \to 3^+} 2x - a + b$$

$$a(3)^2 - b(3) + 3 = 2(3) - a + b$$

$$9a - 3b + 3 = 6 - a + b$$

$$\mathbf{10a - 4b = 3}$$

Após fazer ambos limites laterais, encontramos duas equações, a quais apresentam os termos a e b em ambos os lados, logo apenas rejeitamos nossa equação, colocando as incógnitas em um lado e as constantes no outro. E assim obtemos nossa segunda equação, que será suficiente para resolver o problema da questão.

Veja que temos 2 equações que dependem de a e b, logo podemos fazer um sistema de equação simples e descobrir tais valores.

$$\begin{cases} 4a - 2b = 1 \\ 10a - 4b = 3 \end{cases}$$

Há diversas formas de resolver um sistema de equação, as mais simples são a da soma e a do isolamento. Vamos ir pela soma, para isso temos que fazer uma das incógnitas sumirem, vejam que a equação de baixo tem o dobro do valor de b vista na equação acima, logo para sumir com o b em nossa vida, podemos multiplicar a primeira equação por *-2*, para cancelar o b, veja como ficaria:

$$\begin{cases} (-2).(4a - 2b) = (-2).1 \\ 10a - 4b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a + 4b = -2 \\ 10a - 4b = 3 \end{cases}$$

Somando as equações, teríamos:

$$(10a - 8a) + (4b - 4b) = 3 - 2$$

$$2a = 1 \therefore a = \frac{1}{2}$$

Logo, obtemos ao isolar o a que o mesmo é igual a um meio, e para descobrir *b* basta substituir o valor de *a* que encontramos em uma das duas equações, vamos ir pela primeira:

$$4a - 2b = 1$$

$$4(\frac{1}{2}) - 2b = 1$$

$$2 - 2b = 1 \therefore 2b = 1 \therefore b = \frac{1}{2}$$

Logo, temos que *b* também é um meio. Sabendo de ambos valores, resta apenas verificar uma única condição, o 3º pressuposto, onde o valor do Limite deve ser igual ao valor da função no ponto, vamos retornar aos pontos.

x=2

Tínhamos que o Limite da mesma era: $4 = 4a - 2b + 3$

Logo, temos: $4 = 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3$

$$4 = 2 - 1 + 3 \therefore \mathbf{4} = \mathbf{4}\ (Limite\ existe)$$

E o valor da função era: $f(2) = 4a - 2b + 3 = 4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \mathbf{4}$

3º *O valor da função no ponto é igual ao Limite da função no ponto.*

Pelo observado vemos que a função é contínua no ponto *x=2*, vejamos agora no ponto *x=3.*

x=3

Tínhamos que o Limite no ponto era: $9a - 3b + 3 = 6 - a + b$

$$9\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 6 - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$4{,}5 - 1{,}5 + 3 = 6 \therefore \mathbf{6} = \mathbf{6}\ \text{(Limite existe)}$$

E a função no ponto x=3: $f(3) = 6 - a + b = 6 - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{6}$

Logo, a função nesse ponto também é contínua, logo podemos afirmar que os valores de *a* e *b* que tornam a função contínua em todo ponto é:

$$\boldsymbol{a = b = \frac{1}{2}}$$