DERIVADAS

CONCEITO

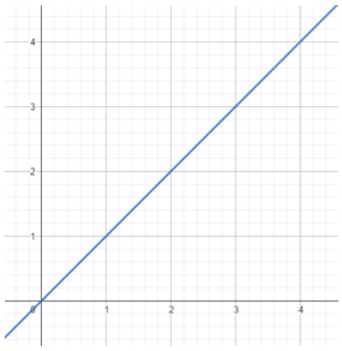
As derivadas nada mais são do que uma taxa de variação quando fazemos a variação entre dois pontos, a menor possível, ou seja, aproximamos esses dois pontos. Primeiro, vamos nos concentrar em entender a taxa de variação, vejam como exemplo a velocidade de um carro, quando dizemos que o mesmo se encontra atualmente em $50\,m/s$, e com uma aceleração de $2\,m/s^2$, temos que:

Tempo(s)	0	1	2	3	4	5
Velocidade(m/s)	50	52	54	56	58	60

Vemos que a velocidade está aumentando em $2\,m/s$ comparado ao momento anterior, dada a aceleração, essa variação que ocorre, é a nossa taxa de variação, mais como fazemos para calcular a mesma?

Primeiro, vejam as seguintes imagens:

Gráfico 1.1

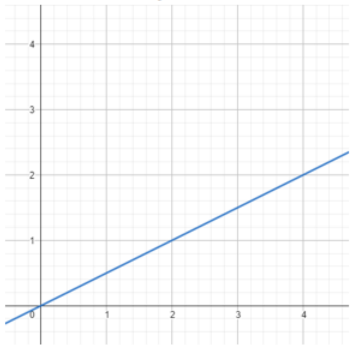


y = ax, a = 1

Gráfico 1.2

y = ax, a > 1

Gráfico 1.3



y = ax, a < 1

É observável que o ângulo da reta está ligado com o fator da variação, relembrando de conceitos passados, vimos que a equação da reta, pode ser escrita como:

$$y = mx + b, quando\ x_0 = 0$$

Onde podemos dizer que $y = f(x); b = y_0 = f(x_0)$, logo temos que:

$$f(x) = m(x - x_0) + f(x_0)$$

Como buscamos descobrir o ângulo de variação, iremos isolar o *m*.

$$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

Logo, vamos retornar ao exemplo da velocidade, leve em consideração o cenário que só conhecemos os valores assumidos, e desconhecemos a aceleração. Utilizando da ideia que vimos acima, teríamos que essa variação que ocorre entre o momento *x=0* e *x=1*:

$$m = \frac{52\,m/s - 50\,m/s}{(1s - 0s)} = 2\,m/s^2$$

Ao aplicar para os outros momentos observará que tal variação continuará a mesma.

Agora que sabemos um pouco do básico, vamos considerar que o carro esteja aumentando a aceleração também, ou seja, em um momento a aceleração estava em $2\,m/s^2$, e no próximo estava em $4\,m/s^2$

tempo(s)	0	1	2	3	4	5
velocidade(m/s)	50	52	56	62	70	80

Veja agora que nossa variação já não é mais constante, e quando vemos o gráfico nos encontramos com o seguinte formato:

Não estamos lidando com uma reta mais, e que o ângulo varia de momento para momento, de que forma deveríamos continuar? Vamos visualizar algumas imagens encontradas no livro de Hoffman e Bradley, Cálculo um curso moderno e suas aplicações 9 ed. seção 2.1, e então abordar sobre tal assunto e como prosseguir.

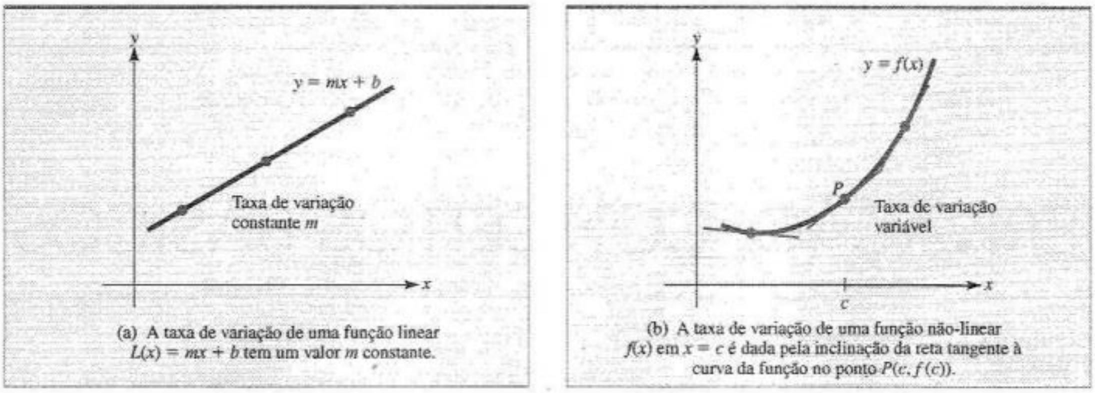


FIGURA 2.1 A taxa de variação pode ser medida pela inclinação de uma reta.

A ideia proposta, é que seria calculado uma taxa de variação entre dois pontos na curva, escolhidos dois pontos é possível traçar uma reta, e por meio dessa aplicamos aquilo que vimos até o momento. Porém vejam, que quanto maior for a distância dessa reta, menos preciso é do real valor da variação que ocorrerá.

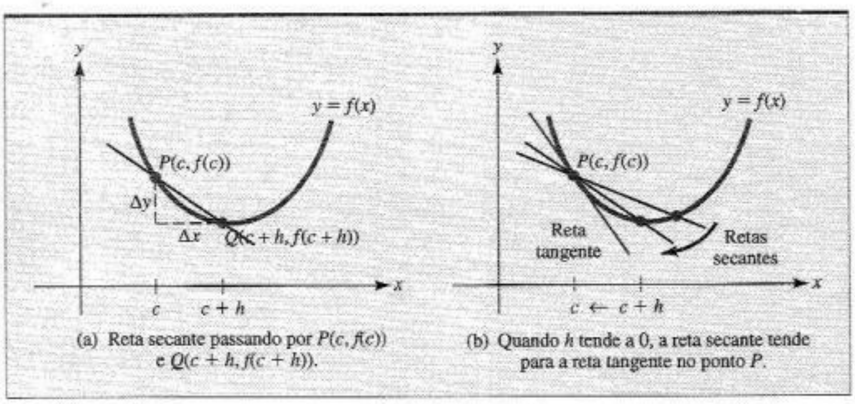


FIGURA 2.4 Reta tangente aproximada por retas secantes.

Vejam que ao escolher pontos próximos a reta criada vai se ajustando com a curva, e quanto mais perto do ponto mais preciso é a taxa de variação obtida, logo utilizando de um termo já visto, quando a diferença entre os pontos é quase nula, obteríamos a taxa de variação que consegue captar as mudanças próximas a aquele ponto.

$$\lim_{x_0 \to x} m = \lim_{x_0 \to x} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

Por questão de aprendizado, e costume, irei fazer algumas alterações nas variáveis da fórmula acima, essas as quais serão utilizadas a partir de agora. Primeiro o ponto inicial será conhecido como x e o ponto final como a, dado isso a diferença entre ambos consideraremos como h (distância), tal que quando x se aproxima de a, o h iria tender para zero. Vejam abaixo as alterações:

$a = ponto\ final(x);$

$x = ponto\ inicial(x_0);$

$h = a - x, \qquad com\ \ x \to a\ \leftrightarrow h \to 0;$

$(h\ \text{é}\ o\ incremento\ entre\ os\ pontos\ \boldsymbol{a}\ e\ \boldsymbol{x})$

$a = h + x;$

$(Logo, \boldsymbol{a}\ \text{é}\ o\ valor\ de\ \boldsymbol{x}\ mais\ esse\ incremento\ \boldsymbol{h})$

Logo, nossa fórmula seria:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = \lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{f(x + h) - f(x)}}{\boldsymbol{h}}$$

E com isso chegamos na fórmula da ***definição da derivada***.