Limites e Continuidade de funções de múltiplas variáveis

Diretorio de Apoio Ácadêmico

September 15, 2024

1 Conceito

Quando lidavamos com uma função de uma única variável, seu limite existia se os limites laterais fossem iguais:

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = L$$

A ideia para o limite de uma função de múltiplas variáveis não se diferencia muito, ainda precisamos que os limites sejam iguais, aquilo que diferencia e os lados a se verificar, pois como estamos lidando com muitas variáveis e necessário que independente da direção os limites sejam igual, ou seja:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)^{\pm}} f(x,y) = L$$

Vamos primeiro ver alguns exemplos utilizados por Stewart:

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Figure 1: Funções utilizadas como exemplo no capítulo 14.2

TABELA 1 Valores de $f(x, y)$

$x \backslash y$	−1,0	−0,5	−0,2	0	0,2	0,5	1,0
−1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455
−0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
−0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0	0,841	0,990	1,000		1,000	0,990	0,841
0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455

TABELA 2 Valores de $g(x, y)$

$x \backslash y$	−1,0	−0,5	−0,2	0	0,2	0,5	1,0
−1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000
−0,5	−0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	−0,600
−0,2	−0,923	−0,724	0,000	1,000	0,000	−0,724	−0,923
0	−1,000	−1,000	−1,000		−1,000	−1,000	−1,000
0,2	−0,923	−0,724	0,000	1,000	0,000	−0,724	−0,923
0,5	−0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	−0,600
1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000

Figure 2: Comportamento das funções quando (x,y) tendem a zero

Vejam que nesse exemplo, não observamos apenas $x \to 0$, vemos $(x, y) \to (0, 0)$, em diversas direções, seja vertical, horizontal e diagonal, e como vimos para lidar com funções de múltiplas variáveis podemos fixar uma, ou mais, delas e observar o comportamento pela variação da variável restante. No exemplo, apenas a primeira função é contínua, pois todos os lados (vertical, horizontal e vertical) tendem ao valor de *1*, já na segunda função isso não ocorre, pois um dos lados se aproximam de 1, outro de -1, e as diagonais de 0.

É possível perceber que para afirmar que uma função de múltipla variável ser contínua é complicado e trabalhoso, pois é necessário que indenpendente por onde se aproximar, os valores sejam iguais, logo aplicamos uma abordagem diferente, buscaremos provar que a função não tem limite, pois basta apenas o limite de uma dessas direções possuir um valor diferente que já saberemos que a função não terá um limite.

Por fim, veremos alguns métodos de verificação de limites:

1. ***Método de substituição direta***

   Nesse método basicamente iremos observar diversos cenários, seja fixando uma das variáveis, ou criando uma ligação, por exemplo, podemos considerar tais:

   (x , 0): *fixamos y em 0, e aproximamos x de seu limite*;
   (0 , y): *podemos também observar o inverso*;
   (x , 2x) : *Podemos considerar que y seja dependente de x*;
   (y^2 , y): *Ou que x dependa de y*;

   Observe que mesmo sendo escolhido aleatoriamente, tais ainda contam como uma das direções que a função pode se aproximar de seu limite, ou seja, basta a função com qualquer um desses cenários ter um valor diferente, que poderemos dizer que a mesma não tem um limite;
   Vamos ver alguns exemplos:

   James Stewar, vol. 2; cap. 14 seção 2

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   Nesse caso, se fossemos diretamente substituir x e y como 0, teriamos uma indeterminação ($\frac{0}{0}$). Logo vamos observar um por vez, considerando os cenários de exemplo acima:

   $$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x*0}{\sqrt{x^2+0^2}} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x*0}{x} = 0$$

   $$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0*y}{\sqrt{0^2+y^2}} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0*y}{y} = 0$$

   $$\lim_{(x,2x)\to(0,0)} \frac{x*2x}{\sqrt{x^2+(2x)^2}} = \lim_{(x,2x)\to(0,0)} \frac{2x^2}{\sqrt{5x^2}} = \lim_{(x,2x)\to(0,0)} \frac{2x^2}{x\sqrt{5}} = \lim_{(x,2x)\to(0,0)} \frac{2x}{\sqrt{5}} = 0$$

   $$\lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^2*y}{\sqrt{(y^2)^2+y^2}} = \lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{\sqrt{y^2*(y^2+1)}} = \lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{y\sqrt{y^2+1}} = \lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{y^2+1}} = 0$$

   Observe que em cada cenário, o limite da função é 0, logo podemos considerar, até que se prove o contrário, que a função tem limite e é contínua.

2. ***Teoria do Confronto***

   A teoria do confronto, ou método do sanduíche, buscamos restringir a função que queremos saber o limite, por meio de outras funções que tenham uma relação de ser menor ou maior que a mesma, ou seja:

   $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$

   Onde temos nossa função $f(x,y)$ e sabemos que ela mantém uma relação de ser maior ou igual que á função $g(x, y)$ e menor ou igual á função $h(x, y)$. E utilizando das propriedades do limite teriamos então que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) \leq \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) \leq \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x, y)$$

Por essa relação conseguimos forçar o limite da função que queremos buscar, por exemplo se o limite da função $g(x, y)$ e da função $h(x, y)$ são iguais á 0, obrigatoriamente pela nossa relação o limite de $f(x, y)$ também será 0. Vimos no exemplo anterior uma forma de ver o limite e continuidade de uma função de múltiplas variáveis, vamos ver nesse mesmo exemplo, agora utilizando o método do confronto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Nosso primeiro passo será identificar quais serão nossas funções $g(x, y)$ e $h(x, y)$, para isso vamos buscar essas funções através de nossa função de interesse. Observem que podemos dizer que a raiz da soma ao quadrado é menor ou igual que a soma ao quadrada dos elementos:

$\sqrt{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2$

E por ser uma relação de raiz quadrada temos que os valores são obrigatoriamente positivos, ou seja maiores ou iguais a zero, logo podemos acrescentar que:

$0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2$

Observe que a função no meio é quase parecida com nossa função $f(x, y)$ correto? Porém a raiz não deveria está no denominador de uma fração? Para obtemos isso podemos dividir todos os lados por $(\sqrt{x^2 + y^2})^2$, então ficariamos com:

$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

Observe que $(\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2$. Com isso estamos mais próximos de nossa função original, restando apenas o produto de xy no numerador da fração, da mesma forma que fizemos anteriormente, ao dividimos um lado, dividimos todos, logo se vamos multiplicar um lado por dado valor, multiplicamos todos. Logo, ao multiplicar todos os lado por $x * y$ temos:

$0 \leq \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq xy$

Vejam agora, que temos no centro nossa função $f(x, y)$ e ao redor temos as outras funções, o 0 seria nosso $g(x, y)$ e o produto $x * y$ nossa $h(x, y)$. E utilizando a propriedade vista:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) \leq \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) \leq \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x, y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x * y$$

Sabemos que o limite de 0 é 0, e o limite de $x * y$ quando ambos vão para 0, também será 0:

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 0$$

Logo, podemos afirmar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

E com isso sabemos que a função de interesse tem limite e é contínua.

Com isso terminamos esse tópico em relação a limites e continuidade de funções de múltiplas variáveis, lembrando que aquilo que pode ser feito com funções de duas variáveis, pode ser feito com outras funções com 3, ou mais, variáveis.