Lista 8

Curso de Ciências atuariais
Disciplina Probabilidade 1 - Professora Cristina
19/08/2022 - Exercícios distribuição binomial

1)
a) Qual a probabilidade de obter 3 números maiores que 4, em 4 lançamentos de um dado?

Y = Obter um número maior que 4 em lançamento de um dado

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Y} > 4\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$\mathrm{X} \sim \mathrm{Bin}\left(4, \frac{2}{6}\right)$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 3) = \binom{4}{3} * \left(\frac{2}{6}\right)^3 * \left(\frac{2}{6}\right)^1 = \frac{4!}{3!(4-3)!} * \frac{4}{36} * \frac{4}{6} = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$$

b) Qual a probabilidade de obter 8 caras em 10 lançamento de uma moeda não viciada?

Y = Obter cara (k) no lançamento de uma moeda

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Y} = \mathrm{k}\right) = \frac{1}{2}$$

$\mathrm{X} \sim \mathrm{Bin}\left(10, \frac{1}{2}\right)$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=8)=\binom{10}{8}*\left(\frac{1}{2}\right)^{8}*\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{10!}{8!(10-8)!}*\frac{1}{256}*\frac{1}{4}=\frac{45}{1.024}$$

c)Suponha que a probabilidade de um casal ter um filho com cabelos loiros seja $\frac{1}{4}$. Se houverem 6 crianças na família, qual é a probabilidade de que metade delas tenha cabelos loiros? Y = Criança nascer com cabelo loiro

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Y}=\mathrm{s}\right)=\frac{1}{4}$$

$\mathrm{X} \sim \mathrm{Bin}\left(6, \frac{1}{4}\right)$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}=3)=\binom{6}{3}*\left(\frac{1}{4}\right)^{3}*\left(\frac{3}{4}\right)^{3}=\frac{6!}{3!(6-3)!}*\frac{1}{64}*\frac{27}{64}=\frac{540}{4.096}=\frac{135}{1.096}$$

d) Se a probabilidade de atingir um alvo num único disparo é 0,3, qual é a probabilidade de que em 4 disparos o alvo seja atingido no mínimo 3 vezes?

Y = Atingir o alvo com um disparo

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Y}=\mathrm{s}\right)=0{,}3$$

$\mathrm{X} \sim \mathrm{Bin}(4, 0.3)$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}\geq 3)=\mathbb{P}(\mathrm{X}=3)+\mathbb{P}(\mathrm{X}=4)$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}\geq 3)=\binom{4}{3}*(0,3)^{3}*(0,7)^{1}+\binom{4}{4}*(0,3)^{4}*(0,7)^{1}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}\geq 3)=\frac{4!}{3!(4-3)!}*0{,}027*0{,}7+\frac{4!}{4!(4-4)!}*0{,}0081*1$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}\geq 3)=0{,}0189+0{,}0081=0{,}0270$$

2)
a) Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos aleatoriamente de uma carga
muito grande de tubos que se sabe que contém 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 dos tubos extraídos sejam defeituosos?

Y = Selecionar tubo defeituoso

$$\mathbb{P}\,(\mathrm{Y} = \mathrm{s}) = 20\%$$

$\mathrm{X} \sim \mathrm{Bin}\,(4, 0.2)$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > 2) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{X} \leq 2) = 1 - [\mathbb{P}(\mathrm{X} = 2) + \mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) + \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0)]$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 2) = \binom{10}{2} * (0,2)^2 * (0,8)^8 = \frac{10!}{2!(10-2)!} * 0{,}04 * 0{,}16777 = 0{,}3020$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) = \binom{10}{1} * (0,2)^1 * (0,8)^9 = \frac{10!}{1!(10-1)!} * 0{,}2 * 0{,}13422 = 0{,}2684$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \binom{10}{0} * (0{,}2)^0 * (0{,}8)^{10} = \frac{10!}{0!(10-0)!} * 1 * 0{,}10737 = 0{,}10737$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > 2) = 1 - [0,3020 + 0,2684 + 0,1074] = 1 - 0{,}5168 = 0{,}4832$$

b) Um engenheiro de inspeção extrai uma amostra de 15 itens aleatoriamente de um processo de fabricação sabido produzir 85% de itens aceitáveis. Qual a probabilidade de que 10 dos itens extraídos sejam aceitáveis?

Y = Selecionar item defeituoso

$$\mathbb{P}\,(\mathrm{Y} = \mathrm{s}) = 85\%$$

$\mathrm{X} \sim \mathrm{Bin}(15, 0.85)$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 10) = \binom{15}{10} * (0{,}85)^{10} * (0{,}15)^{5}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 10) = \frac{15!}{10!(15-10)!} * 0{,}19687 * 0{,}00007 = 0{,}00001$$

3) A probabilidade de ocorrência de turbulência em um determinado percurso a ser feito por uma aeronave é de 0,4 em um circuito diário. Seja X o número de voos com turbulência em um total de 7 desses voos (ou seja, uma semana de trabalho). Qual a probabilidade de que:
a) Não haja turbulência em nenhum dos 7 voos?

Y = Haver turbulência no voo

$$\mathbb{P}\,(\mathrm{Y} = \mathrm{s}) = 0{,}4$$

$\mathrm{X} \sim \mathrm{Bin}(7, 0.4)$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \binom{7}{0} * (0{,}4)^{0} * (0{,}6)^{7} = \frac{7!}{0!(7-0)!} * 1 * 0{,}02799 = 0{,}02799$$

b) Haja turbulência em pelo menos 3 deles?

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geq 3) = 1 \text{ - } \mathbb{P}(\mathrm{X} < 3) = 1 \text{ - } [\mathbb{P}(\mathrm{X} = 2) + \mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) + \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0)]$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 2) = \binom{7}{2} * (0,4)^{2} * (0,6)^{5} = \frac{7!}{2!(7-2)!} * 0{,}16 * 0{,}07776 = 0{,}2612$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) = \binom{7}{1} * (0,4)^{1} * (0,6)^{6} = \frac{7!}{1!(7-1)!} * 0{,}4 * 0{,}26214 = 0{,}1306$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \binom{7}{0} * (0{,}4)^{0} * (0{,}6)^{7} = \frac{7!}{0!(7-0)!} * 1 * 0{,}0280 = 0{,}0280$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > 2) = 1 \text{ - } [0,2612 + 0,1306 + 0,0279] = 1 \text{ - } 0{,}4198 = 0{,}5802$$

4) O Professor Paulo ministra, de segunda a sexta feira, aulas para uma turma com 30 homens e 20 mulheres. Suponha que todos os 50 alunos estão presentes durante as

cinco aulas. Durante uma dada semana, ele decide sortear um aluno por dia para ser examinado. Se X é a variável aleatória que representa o número de dias em que um homem foi selecionado, qual a função de probabilidade, a média e a variância de X? Considere que o mesmo aluno pode ser selecionado mais de uma vez.

Y = Selecionar um homem

$$\mathbb{P}\,(\mathrm{Y} = \mathrm{s}) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

$$\mathrm{X} \sim \mathrm{Bin}\left(5, \frac{3}{5}\right)$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}) = \binom{n}{x} * (\mathrm{p})^{x} * (1 \text{ - } \mathrm{p})^{n-x}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \binom{5}{0} * \left(\frac{3}{5}\right)^{0} * \left(\frac{2}{5}\right)^{5} = \frac{5!}{0!(5-0)!} * 1 * \frac{32}{3.125} = 0{,}01024$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) = \binom{5}{1} * \left(\frac{3}{5}\right)^{1} * \left(\frac{2}{5}\right)^{4} = \frac{5!}{1!(5-1)!} * \frac{3}{5} * \frac{16}{625} = \frac{240}{3.125} = 0{,}0768$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 2) = \binom{5}{2} * \left(\frac{3}{5}\right)^{2} * \left(\frac{2}{5}\right)^{3} = \frac{5!}{2!(5-2)!} * \frac{9}{25} * \frac{8}{125} = \frac{720}{3.125} = 0{,}2304$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 3) = \binom{5}{3} * \left(\frac{3}{5}\right)^{3} * \left(\frac{2}{5}\right)^{2} = \frac{5!}{3!(5-3)!} * \frac{27}{125} * \frac{4}{25} = \frac{1.080}{3.125} = 0{,}3456$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 4) = \binom{5}{4} * \left(\frac{3}{5}\right)^{4} * \left(\frac{2}{5}\right)^{1} = \frac{5!}{4!(5-4)!} * \frac{81}{625} * \frac{2}{5} = \frac{810}{3.125} = 0{,}2592$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = 5) = \binom{5}{5} * \left(\frac{3}{5}\right)^{5} * \left(\frac{2}{5}\right)^{0} = \frac{5!}{5!(5-5)!} * \frac{243}{3.125} * 1 = \frac{243}{3.125} = 0{,}0778$$

$$\mathrm{E(X)} = \mathrm{np}$$

$$\mathrm{E(X)} = 5 * \frac{3}{5} = 3$$

$$\mathrm{V(X)} = \mathrm{np(1\text{-}p)}$$

$$E(X) = 5 * \frac{3}{5} * \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

5) Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como passa ou falha. Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja de 0,8 e que as pastilhas sejam independentes. Qual é a probabilidade de que todas as três pastilhas passem no teste?

Y = Pastilha passar no teste

$$\mathbb{P}\,(Y = s) = 0{,}8$$

$X \sim \text{Bin}(3, 0.8)$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{3} * (0{,}8)^3 * (0{,}2)^0 = \frac{3!}{3!(3-3)!} * 0{,}512 * 1 = 0{,}512$$

6) Numa fábrica, 10% dos copos de vidro se quebram ao serem colocados em caixas que comportam 5 copos. Escolhendo ao acaso uma caixa, determine a probabilidade de:
a) Haver 3 copos quebrados

Y = Copo quebrar na caixa

$$\mathbb{P}\,(Y = s) = 10\% = 0{,}1$$

$X \sim \text{Bin}(5, 0.1)$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3} * (0{,}1)^3 * (0{,}9)^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!} * 0{,}001 * 0{,}81 = 0{,}0081$$

b) Haver algum copo quebrado

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geq 1) = 1 \text{ - } \mathbb{P}(\mathrm{X} < 1) = 1 \text{ - } \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0)$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geq 1) = 1 \text{ - } \left[\binom{5}{0} * (0,1)^0 * (0,9)^5\right] = 1 \text{ - } \left[\frac{5!}{0!(5-0)!} * 1 * 0,59049\right] = 1 \text{ - } 0{,}5905$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \geq 1) = 0{,}4095$$