DERIVADAS: REGRAS DE DERIVAÇÃO

4. DERIVADA DO QUOCIENTE:

Para derivar a divisão entre duas funções consideraremos a função a seguir,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$$

Como de costume, irei derivar pela definição, e logo em seguida mostrar a regra utilizada para lidar com tais casos em geral.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x+h)^2+2}{(x+h)} - \frac{x^2+2}{x}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{x\cdot(x+h)^2+x\cdot 2-(x+h)\cdot x^2-(x+h)\cdot 2}{x\cdot(x+h)}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x\cdot(x+h)^2+x\cdot 2-(x+h)\cdot x^2-(x+h)\cdot 2}{x\cdot(x+h)\cdot h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x\cdot\left(x^2+2xh+h^2\right)+x\cdot 2-x^3-x^2h-2x-2h}{x\cdot(x+h)\cdot h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^3+2x^2h+xh^2-x^3-x^2h-2h}{x\cdot(x+h)\cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2h+xh^2-2h}{x\cdot(x+h)\cdot h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^2+xh-2}{x\cdot(x+h)} = \frac{x^2+x\cdot 0-2}{x\cdot(x+0)} = \frac{\boldsymbol{x^2-2}}{\boldsymbol{x^2}};$$

Para evitar ter que fazer todo esse caminho, cada vez que busca derivar uma divisão entre funções, é possível utilizar da **Regra do Quociente**, a qual diz:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{f}{g} \therefore f'(x) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$$

Logo utilizando da nossa regra, escolheríamos $f = x^2 + 1$ e $g = x$

$$f = x^2 + 2 \therefore f' = 2x$$
$$g = x \therefore g' = 1$$

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x} \therefore$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+2) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$$

Outro exemplo:

$$f(x) = \frac{x \cdot (x+1)}{x^2+3}$$

Observem que não é apenas um quociente agora, temos um produto no numerador, ou seja, quando fomos fazer a derivada de *f* teremos que utilizar a regra do produto, vejam como ocorreria:

$$f_1 = x \cdot (x+1);\ f_2 = x \rightarrow f_2{}' = 1\ e\ g_2 = (x+1) \rightarrow g_2{}' = (1+0) \therefore$$

$$f_1' = 1 \cdot (x+1) + x \cdot (1+0) = 2x+1$$

$$g_1 = x^2+3 \therefore g_1' = 2x+0 = 2x$$

$$f(x) = \frac{x \cdot (x+1)}{x^2+3} \therefore$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1) \cdot (x^2+3) - [x \cdot (x+1)] \cdot 2x}{(x^2+3)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{(2x^3+6x+x^2+3) - 2x^3 - 2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{(6x+3) - x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{\boldsymbol{-x^2+6x+3}}{\boldsymbol{(x^2+3)^2}}$$