RESUMO DE FUNDAMENTOS DE CÁLCULO I: INTEGRAIS

INTEGRAIS DE PRODUTOS/DIVISÕES:

Vimos que nas derivadas de produtos e divisão, não poderíamos aplicar diretamente os métodos que tínhamos aprendido até aquele momento, a mesma coisa ocorre com as integrais, não podemos aplicar diretamente o que foi feito até agora em um produto ou divisão, como exemplo:

$$\int x \cdot e^x dx$$

Sabemos como integrar o polinômio x e a exponencial de x, separadamente, porém não sabemos como integrar o produto delas, e também não conseguiremos fazer uma relação com a derivada de uma função que já vimos anteriormente, pois nenhuma até agora deu uma derivada de apenas $x \cdot e^x$, com isso irei mostrar dois métodos para integrar tais tipos de integrais.

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Um dos métodos para integrar esses problemas, é o de integração por substituição, onde fazemos uma substituição de variável, que por consequência também mudará a derivada qual iremos integrar, veja o seguinte caso:

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx$$

Saberíamos integrar se a função fosse apenas $\int 2x\, dx$ ou $\int x^2 + 1\, dx$, ou até mesmo se estiverem da seguinte forma $\int 2x \cdot (x^2+1) dx = \int 2x^3 + 2x\, dx$, sabemos integrar qualquer uma dessas 3 integrais de forma simples, porém como integraríamos a função acima? Para isso aplicaremos uma transformação, ao criar uma nova variável u onde:

$$u = \boldsymbol{x^2 + 1} \therefore du = \boldsymbol{2x\, dx}$$

Substituindo o $x^2 + 1$ por u em nossa integral, temos:

$$\int \frac{\boldsymbol{2x}}{u} \boldsymbol{dx}$$

E o que fazemos com $\boldsymbol{2x\, dx}$, que ainda estão em relação a x? Vemos em cima que $\boldsymbol{du = 2x\, dx}$, onde basicamente é aquilo que sobrou de nossa antiga integral, logo podemos também substituir o $\boldsymbol{2x\, dx}$ por $\boldsymbol{du}$

$$\int \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{du}$$

Vejam, que saímos de uma função que não sabíamos como integrar, e ao fazer a mudança de variáveis, passamos a ter uma nova função a qual sabemos e conhecemos sua integral:

$$\int \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{du} = \boldsymbol{ln}\ |\boldsymbol{u}| + \boldsymbol{c}$$

Por fim, como começamos com a variável x, precisamos retomar a ela não? Sabendo que $u = x^2 + 1$, logo:

$$\boldsymbol{ln}\ \left|\boldsymbol{x^2 + 1}\right| + \boldsymbol{c}$$

$$\int \frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{x^2 + 1}} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{ln}\ \left|\boldsymbol{x^2 + 1}\right| + \boldsymbol{c}$$

Com isso encontramos a primitiva da função. A escolha da variável de substituição é de certa forma intuitiva, dependendo de sua escolha, talvez não consiga encontrar uma melhor função para integrar, a qual vai acarretar entre duas escolhas, tentar fazer uma substituição diferente com outra função, ou integrar por partes, que será o assunto que veremos a seguir.

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Na integração por partes, utilizaremos a mesma lógica da integração por substituição, porém acrescentando algumas coisas extras. Vejamos a integral que introduzimos no início:

$$\int x \cdot e^x dx$$

Vamos tentar inicialmente aplicar o método de substituição e ver o resultado, vamos fazer duas substituições $u_1 = x\ e\ u_2 = e^x$, tal que:

$$u_1 = x\ \therefore du_1 = 1 \cdot dx$$

$$\int u_1 \cdot e^x dx$$

Veja que na *exponencial* tem um *x,* e que $du_1 = dx$, logo:

$$u_1 = x\ \therefore du_1 = 1 \cdot dx$$

$$\int u_1 \cdot e^{u_1} du_1$$

Vejam que na primeira substituição, acabamos retornando ao problema inicial, de um produto de uma variável com a exponencial dessa mesma variável. Vamos ver agora com a segunda substituição:

$$u_2 = e^x \therefore du_2 = e^x\ dx$$

$$\int x \cdot u_2 dx$$

Vejam que ainda restam $x\ dx$ em nossa integral, porém como $du_2 = e^x\ dx \neq x\ dx$ não há como substituir a mesma com isso impossibilitando continuar. Logo, vemos que o método de substituição nesse caso não daria certo, com isso vem o método de integrar por partes, onde escolheremos uma função para derivar e a outras iremos integrar, de tal forma que:

$$u = f(x) \therefore du = f'(x)dx$$

$$dv = g'(x)dx \therefore v = \int g'(x)dx$$

Tal que nossa função seria:

$$\int \boldsymbol{f(x) \cdot g'(x)dx} = \int \boldsymbol{u \cdot dv = u \cdot v} - \int \boldsymbol{v \cdot du}$$

Logo, para integrar a função:

$$\int x \cdot e^x dx$$

Obs.: Pelo que foi dito vocês podem se perguntar **<u>como decidir qual derivar ou integrar? Qual ordem seguir?</u>** Dado a possível existência dessas duvidas, irei apresentar uma sigla para vocês que ajuda ***a decidir qual função escolher para derivar***, essa sigla é **L.I.A.T.E.,**

$\boldsymbol{L \rightarrow Logaritmo}$;

$\boldsymbol{I \rightarrow Inversa\ de\ trigonom\acute{e}trica}$;

$\boldsymbol{A \rightarrow Algoritma(Polinomios\ e\ afins)}$;

$\boldsymbol{T \rightarrow Trigonom\acute{e}tricas}$;

$\boldsymbol{E \rightarrow Exponencial}$;

Escolheremos o algoritmo x para derivar e $e^x dx$ para integrar, pois o objetivo nesse método é reduzir a função, tal que se tivéssemos feito a escolha contrária, teríamos que a derivada da e^x é ela mesma, ou seja, não mudaria em nada nossa situação, já a integral de $x\, dx$ seria $\frac{x^2}{2}$ que pioraria aquilo que já tínhamos, logo continuando fazendo a substituição sugerida, teremos:

$$u = x \therefore du = dx$$

$$dv = e^x \therefore v = \int e^x dx = e^x$$

Logo a integral de

$$\int x \cdot e^x dx = u \cdot v - \int v du = x \cdot e^x - \int e^x dx$$

E como sabemos a $\int e^x dx$ separadamente, que é a própria exponencial, teremos no fim:

$$\int \boldsymbol{x \cdot e^x dx} = x \cdot e^x - e^x + C = \boldsymbol{e^x \cdot (x - 1) + C}$$

Com isso encontramos a primitiva da função.

Obs. A razão a qual na ordem L.I.A.T.E. a função logaritmo é sempre a prioridade na escolha da função a ser derivada, é pela razão a qual não sabemos a integral da mesma, ou seja, sua primitiva, logo nosso objetivo é remover qualquer função logaritmo da equação, é demonstrado no fim do documento a integral da função logaritmo natural. Em contra partida a função exponencial é a última em prioridade, abaixo apenas das funções trigonométricas, a qual faz sentido, dado que as derivadas das mesmas resultam, ou em si mesmas, ou outras funções maiores.