

# Simulación numérica de la vibración de una cuerda de guitarra

Antonio Martínez García

Profesora: Yolanda Bolea

Q1 2017-2018

## Índice

1. Introducción .....	2
2. Ecuación en diferencias parciales de onda ideal 1D .....	3
2.1. Suposiciones realizadas para hallar la ecuación .....	3
2.2. Origen de la ecuación .....	3
2.3. La constante $c$ .....	5
3. Modelo de diferencias finitas .....	6
3.1. Aproximación de derivadas .....	6
3.2. Aproximación de la EDP .....	6
La condición Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) .....	7
Condiciones de contorno .....	8
Condiciones iniciales .....	8
4. Implementación en Matlab .....	9
4.1. Inicialización de variables .....	9
4.2. Condiciones iniciales .....	9
4.3. Condiciones de contorno .....	9
4.4. Diferencias finitas .....	9
5. Verificación del código .....	10
5.1. Velocidad y dirección de propagación de la onda .....	10
5.2. Comportamiento en los extremos .....	12
5.3. Inestabilidad numérica .....	13
5.4. Dispersión numérica .....	14
6. Interpretación y análisis de resultados .....	16
6.1. Parámetros de simulación .....	16
6.2. Evolución temporal de la solución .....	17
6.3. Relación entre tensión y frecuencia .....	18
6.4. Afinación de la cuerda .....	20
6.5. Relación entre longitud y frecuencia de la nota .....	20
6.6. Verificación del primer traste .....	23
7. Ecuación de onda 1D con fricción .....	24
7.1. Modelización de la fricción .....	24
7.2. Aproximación de la EDP .....	24
7.3. Evolución temporal de la solución .....	25
8. Conclusiones .....	26
Referencias .....	27

## 1. Introducción

Este proyecto trata de modelizar la ecuación que describe la vibración de una cuerda de guitarra fijada en ambos extremos cuando es punteada y simular este comportamiento con el programa Matlab.

Primero se describirá el movimiento de la cuerda de la manera más sencilla posible: con la ecuación de onda ideal en una dimensión. Se explicará el origen teórico de esta ecuación en diferencias y se describirá el método utilizado para solucionarla. A continuación, se presentará su implementación en Matlab y se verificará que la solución obtenida es correcta.

A continuación, se estudiará cómo influyen las características de la cuerda en la solución. Para ello se analizará la relación entre varios parámetros.

Finalmente, se incluirá el fenómeno de la fricción con el aire en el estudio.

## 2. Ecuación en diferencias parciales de onda ideal 1D

### 2.1. Suposiciones realizadas para hallar la ecuación

- Las oscilaciones en la cuerda son pequeñas, por lo que:
  - Los puntos de la cuerda solo se mueven verticalmente.
  - El ángulo que forma cualquier segmento de la cuerda con el eje horizontal es reducido.
- La cuerda es flexible.
- No hay pérdidas de energía.
- La masa de la cuerda está distribuida de manera uniforme.
- Se desprecia la gravedad (la cuerda tiene poca masa).

### 2.2. Origen de la ecuación

Se considera un segmento de la cuerda de longitud infinitesimal ( $\Delta x$ ) en un instante de tiempo donde la cuerda no se encuentra en su estado de equilibrio (totalmente horizontal), tal y como muestra la figura 2.1.

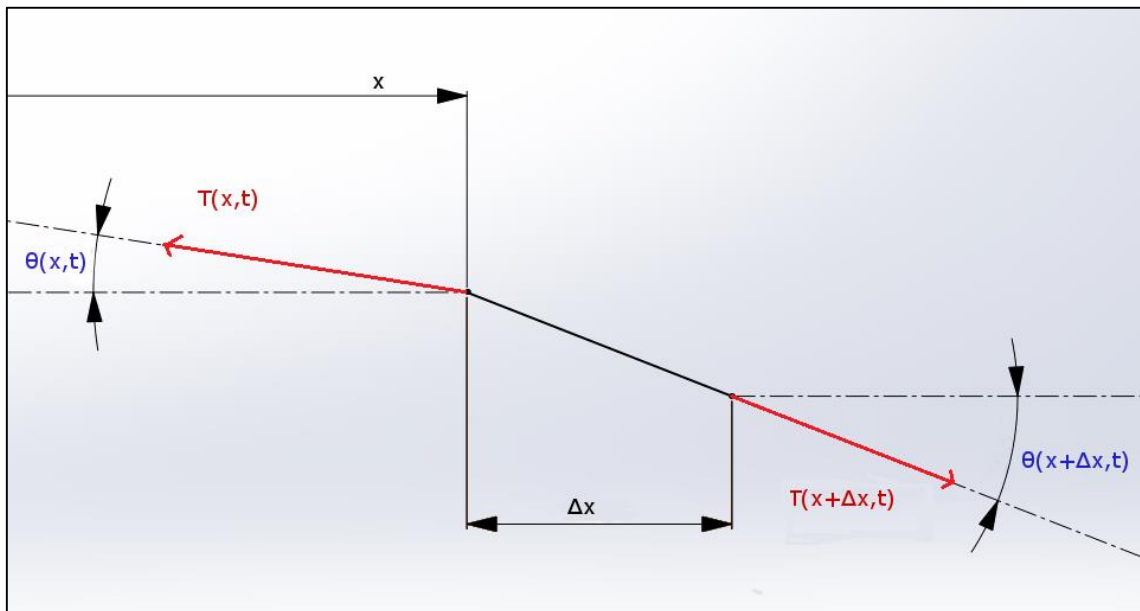


Figura 2.1: Segmento de cuerda infinitesimal

- $T(x, t)$  es la tensión que ejerce el resto de cuerda sobre el punto  $x$  en el instante de tiempo  $t$ .
- $\theta(x, t)$  es el ángulo que forma el vector tensión en el punto  $x$  e instante  $t$  con la horizontal.
- $u(x, t)$  es el desplazamiento vertical del punto  $x$  en el instante  $t$ .

Sobre este segmento solo actúa la tensión de los extremos fijos, con distinta dirección.

Como no hay desplazamiento horizontal, la suma de fuerzas en esta dirección es nula:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow T(x, t) \cos \theta(x, t) = T(x + \Delta x, t) \cos \theta(x + \Delta x, t) = T_x \quad (1)$$

En cuanto a la dirección vertical, queda:

$$\sum F_y = T(x + \Delta x, t) \sin \theta(x + \Delta x, t) - T(x, t) \sin \theta(x, t)$$

$$\Sigma F_y = T(x + \Delta x, t) \cos \theta(x + \Delta x, t) \tan \theta(x + \Delta x, t) - T(x, t) \cos \theta(x, t) \tan \theta(x, t) \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2), queda:

$$\Sigma F_y = T_x \tan \theta(x + \Delta x, t) - T_x \tan \theta(x, t) \quad (3)$$

Además, se deduce que:

$$\tan \theta(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3):

$$\Sigma F_y = T_x \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T_x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (5)$$

Si ahora se aplica la 2ª ley de Newton en dirección vertical queda:

$$\Sigma F_y = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6)$$

Igualando (5) y (6):

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_x \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T_x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_x \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_x \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)}{\Delta x}$$

Donde  $\rho$  es la densidad lineal de la cuerda (kg/m).

Cuando  $\Delta x$  tiende a 0, se obtiene la segunda derivada de  $u$  respecto  $x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T_x \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)}{\Delta x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_x}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Esta ecuación es la que se conoce como ecuación de onda ideal.

### 2.3. La constante $c$

$$c = \sqrt{\frac{T_x}{\rho}}$$

La constante  $c$  tiene un sentido físico: es la velocidad (en m/s) a la que se propaga la onda longitudinalmente a través de la cuerda (ver figura 2.2).

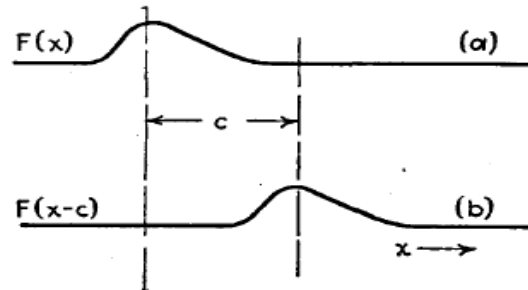


Figura 2.2: Representación gráfica de la propagación de una onda en una cuerda. Fuente: Philip M. Morse, *Vibration and Sound*, McGraw-Hill Book Company Inc., 1948

### 3. Modelo de diferencias finitas

El método utilizado para simular la ecuación es el de diferencias finitas, que consiste principalmente en aproximar las derivadas hasta llegar a una ecuación más sencilla que se pueda implementar fácilmente en código.

#### 3.1. Aproximación de derivadas

En este caso se usarán dos aproximaciones distintas de una derivada [4]:

Forward difference approximation

$$\frac{\partial f}{\partial n} \approx \frac{f(n+\Delta n) - f(n)}{\Delta n} \quad (7)$$

Backward difference approximation

$$\frac{\partial f}{\partial n} \approx \frac{f(n) - f(n-\Delta n)}{\Delta n} \quad (8)$$

#### 3.2. Aproximación de la EDP

Aplicando (7) a la derivada segunda de  $u$  respecto  $t$  queda:

$$u_{tt}(t, x) = \frac{u_t(t+\Delta t, x) - u_t(t, x)}{\Delta t} \quad (9)$$

Aplicando (8) a las derivadas temporales de primer orden que han aparecido en (9) queda:

$$u_t(t, x) = \frac{u(t, x) - u(t-\Delta t, x)}{\Delta t} \quad (10)$$

$$u_t(t + \Delta t, x) = \frac{u(t+\Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} \quad (11)$$

Sustituyendo (10) y (11) en (9) queda:

$$u_{tt}(t, x) = \frac{u(t+\Delta t, x) - 2u(t, x) + u(t-\Delta t, x)}{(\Delta t)^2} \quad (12)$$

A continuación se utiliza el mismo procedimiento para las derivadas de  $u$  respecto  $x$ .

$$u_{xx}(t, x) = \frac{u_x(t, x+\Delta x) - u_x(t, x)}{\Delta x}$$

$$u_x(t, x) = \frac{u(t, x) - u(t, x-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$u_x(t, x + \Delta x) = \frac{u(t, x+\Delta x) - u(t, x)}{\Delta x}$$

$$u_{xx}(t, x) = \frac{u(t, x+\Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (13)$$

Finalmente, sustituyendo (12) y (13) en la EDP queda:

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - 2u(t, x) + u(t - \Delta t, x)}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

$$u(t + \Delta t, x) - 2u(t, x) + u(t - \Delta t, x) = R^2 [u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)]$$

Si ahora consideramos  $t_n = n\Delta t$ ,  $x_k = k\Delta x$  y cambiamos  $u(t_n, x_k)$  por  $u(n, k)$ :

$$u(n + 1, k) = R^2 [u(n, k + 1) - 2u(n, k) + u(n, k - 1)] + 2u(n, k) - u(n - 1, k) \quad (14)$$

Donde  $n$  es un instante de tiempo discreto y  $k$  es un punto de la cuerda.





Para que la solución sea estable, es necesario que el cono de dependencia numérica incluya el de dependencia de la solución [2]. La figura 3.2 muestra tres casos:  $R = 1$  (izquierda),  $R > 1$  (centro) y  $R < 1$  (derecha). Se puede comprobar que el caso del centro incumple la condición.

El incumplimiento de la condición implica inestabilidad numérica, que se traduce en desplazamientos verticales infinitos (ver apartado 5.2).

Por tanto, habrá que escoger intervalos de tiempo ( $\Delta t$ ) y espacio ( $\Delta x$ ) tales que  $R$  sea menor o igual que 1.

### 3.4. Condiciones de contorno

La cuerda estará fijada en los extremos, por lo que:

$$u(n, 0) = u(n, L) = 0, \quad \forall n$$

Donde  $L$  es la longitud de la cuerda.

### 3.5. Condiciones iniciales

El instante inicial será aquel cuando la púa suelta la cuerda. Por tanto, en el instante inicial la cuerda tendrá la forma que le haya forzado la púa y velocidad nula en todos los puntos:

$$u(0, x) = b(x)$$

$$u_t(0, x) = 0, \quad \forall x$$

Donde  $b(x)$  es la función que describe la forma inicial de la cuerda.

Volviendo a (10):

$$u_t(t, x) = \frac{u(t, x) - u(t - \Delta t, x)}{\Delta t} \quad (10)$$

Para que la velocidad vertical en un instante ( $u_t(t, x)$ ) sea 0, el desplazamiento vertical debe ser el mismo para dos instantes consecutivos. Por tanto, se fijará a  $b(x)$  el desplazamiento vertical de todos los puntos de la cuerda para los dos primeros instantes de tiempo.

$$u(0, k) = b(x)$$

$$u(1, k) = b(x)$$

## 4. Implementación en Matlab

### 4.1. Inicialización de variables

En primer lugar se crean el vector fila  $x$ , que contiene los  $Nx$  puntos de la cuerda con una separación  $dx$ , y el vector columna  $t$ , que contiene los  $T$  instantes de tiempo con una separación  $dt$ . También se definen constantes, como la velocidad de la onda ( $c$ ) y el punto de aplicación de la fuerza ( $fx$ ).

Por último, se genera una matriz vacía  $U$  de dimensiones  $[T \times Nx]$ , donde cada columna representa un punto de la cuerda y cada fila un instante de tiempo.

$$U = \begin{bmatrix} u(0,0) & \cdots & u(0, Nx - 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(T - 1, 0) & \cdots & u(T - 1, Nx - 1) \end{bmatrix}$$

### 4.2. Condiciones iniciales

Aquí se genera la forma inicial de la cuerda y se copia a las primeras dos filas de  $U$ . De esta manera los primeros dos instantes de tiempo tendrán la forma impuesta por la fuerza (ver figura 4.1).

### 4.3. Condiciones de contorno

Para fijar los extremos de la cuerda, se impone que los valores de la primera y última columna (que corresponden a los extremos) sean todos 0 (ver figura 4.1).

### 4.4. Diferencias finitas

Haciendo uso de un bucle que recorre las filas desde la tercera a la última y las columnas de la segunda a la penúltima, se realiza el cálculo indicado por la ecuación (14) para cada elemento de la matriz incluido en el bucle.

Contorno		Iniciales				Contorno	
0	$b(1)$	$b(2)$	...	$b(Nx - 2)$		0	
0	$b(1)$	$b(2)$	...	$b(Nx - 2)$		0	
0	$u(2,1)$	$u(2,2)$	...	$u(2, Nx - 2)$		0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
0	$u(T - 1, 1)$	$u(T - 1, 2)$	...	$u(T - 1, Nx - 2)$		0	

Figura 4.1: Matriz resultante

## 5. Verificación del código

En esta sección se realizará una primera simulación de la ecuación de onda 1D y se comparará con los conocimientos teóricos y otras simulaciones ya hechas para comprobar que el método utilizado es correcto.

Las características de esta simulación (que no pretenden ajustarse a las de una cuerda de guitarra real) son:

- Cuerda de 100 m de longitud dividida en intervalos de 1 m.
- 1001 intervalos de tiempo con 0,002 s entre ellos.
- $R = 1$
- $c = 500$  m/s
- Fuerza aplicada en el centro de la cuerda.

### 5.1. Velocidad y dirección de propagación de la onda

Si la onda se genera en un punto que no sean los extremos (como es el caso), la onda se propagará hacia izquierda y derecha con dos formas de onda similares a la original pero de menor amplitud [2].

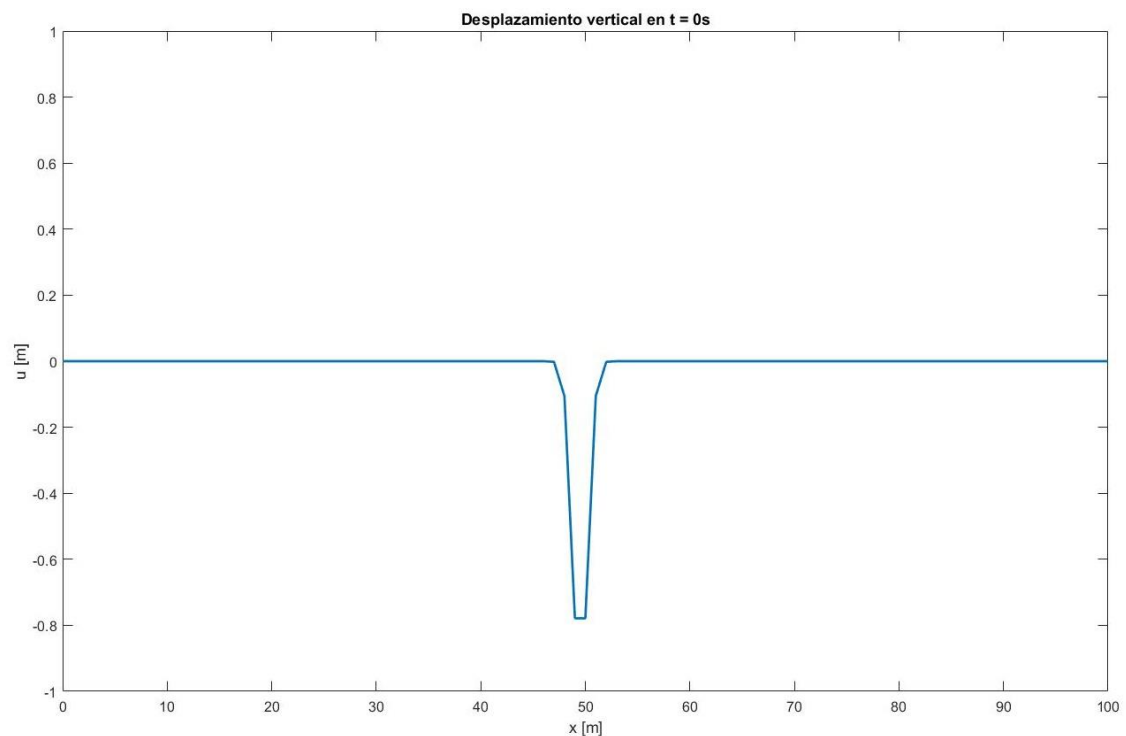
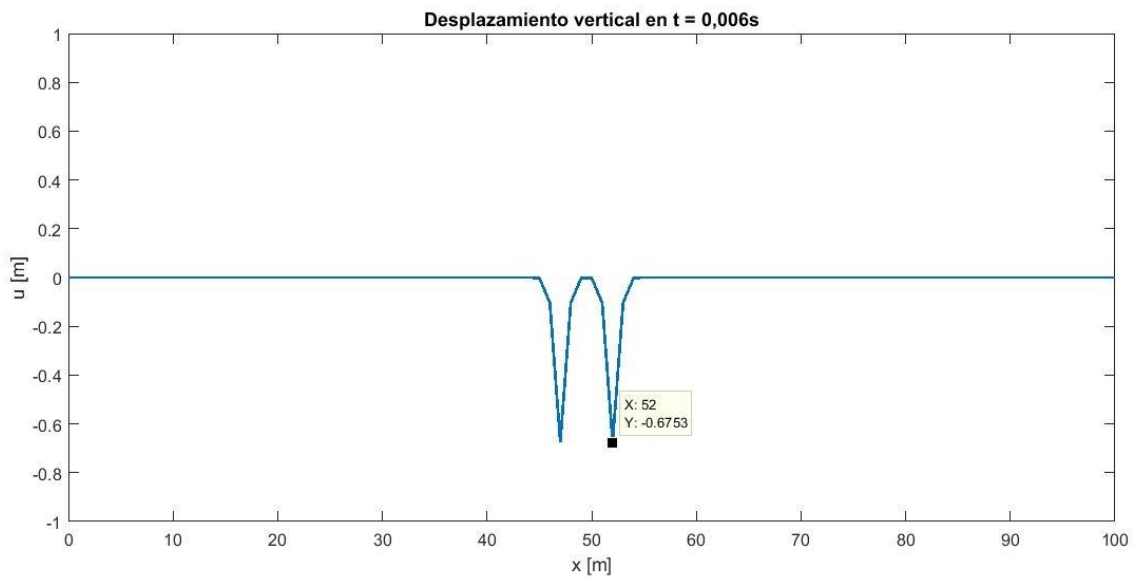


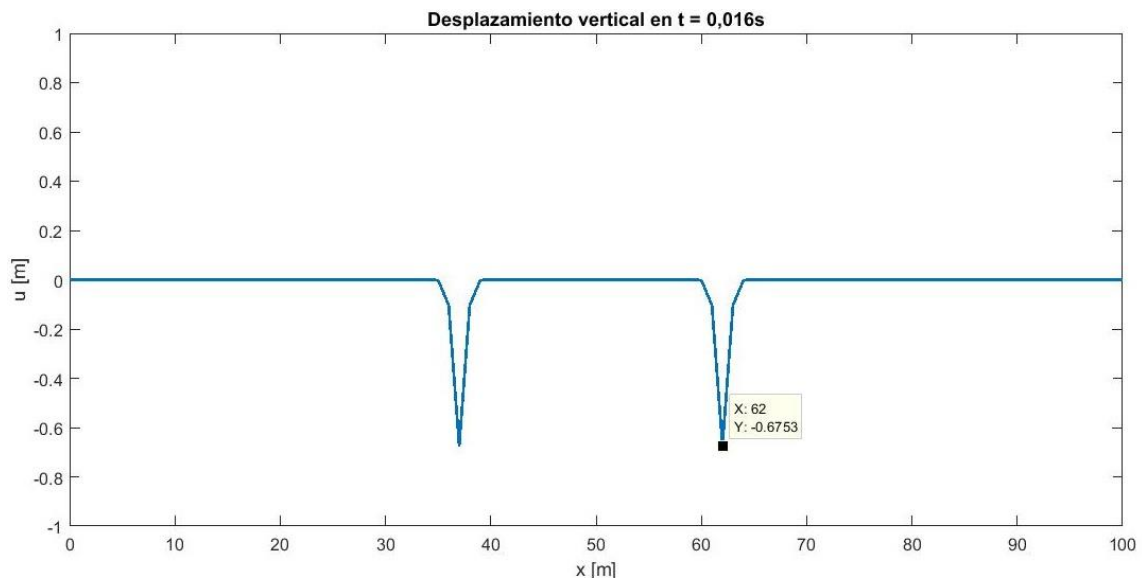
Figura 5.1: Solución de la simulación de prueba en  $t = 0$  s



**Figura 5.2: Solución de la simulación de prueba en  $t = 0,006s$**

Comparando las figuras 5.1 y 5.2, que corresponden a la forma de la cuerda en el instante inicial y después de 3 intervalos de tiempo (respectivamente), se puede comprobar que la forma inicial de la onda se divide en dos ondas parecidas de menor amplitud que viajan en sentidos contrarios.

Además, después de 10 intervalos de tiempo la onda debería haberse desplazado 10 metros ( $500 \cdot 10 \cdot 0,002 = 10$ ). Esto se verifica viendo que el punto (de la onda) que en la figura 5.2 ( $t=0,006s$ ) está en  $x = 52$  m pasa a estar a  $x = 62$  m en la figura 5.3 ( $t=0,016s$ ).



**Figura 5.3: Solución de la simulación de prueba en  $t = 0,016s$**

## 5.2. Comportamiento en los extremos

Las condiciones de contorno escogidas no introducen pérdidas de energía. Por tanto, lo que hacen es reflejar la misma onda con signo invertido [2]. Las figuras 5.4 y 5.5 muestran que, efectivamente, es así.

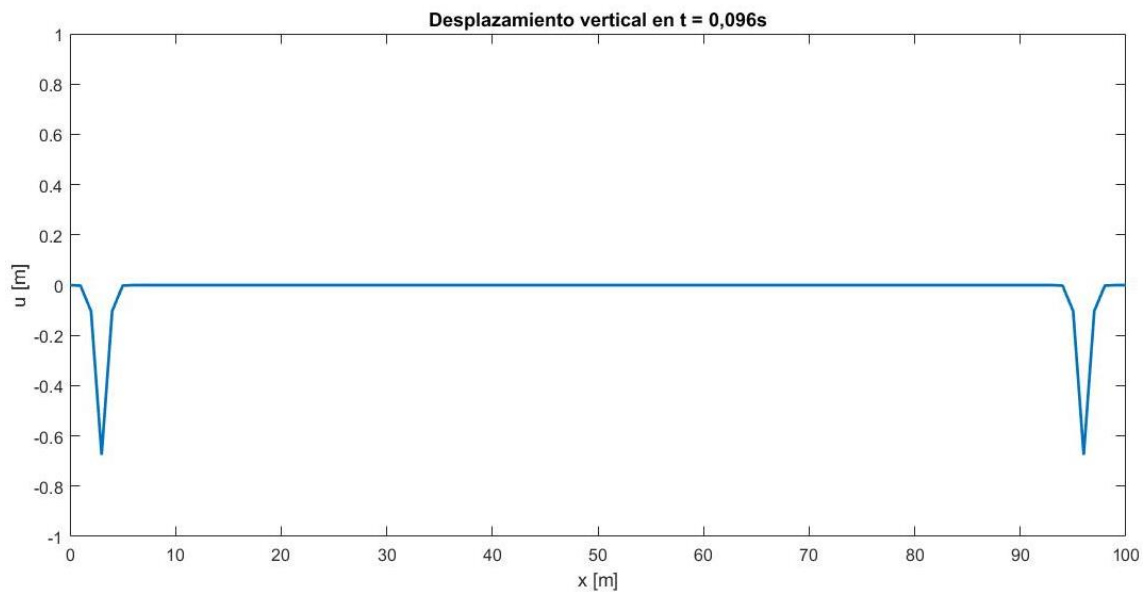


Figura 5.4: Solución de la simulación de prueba en  $t = 0,096$ s

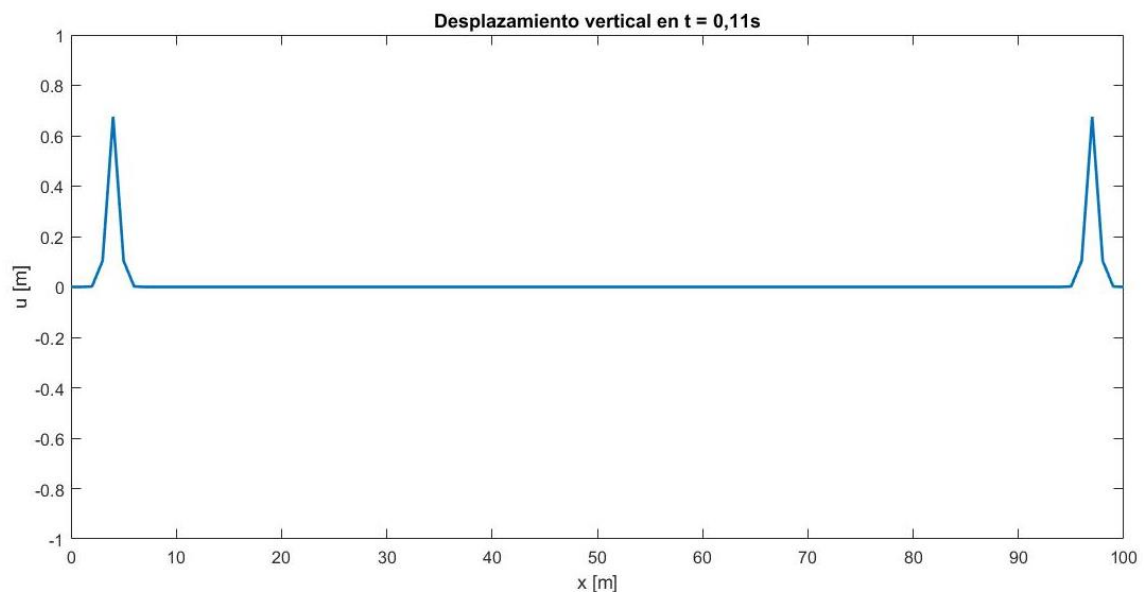


Figura 5.5: Solución de la simulación de prueba en  $t = 0,11$ s

### 5.3. Inestabilidad numérica

Como se ha mencionado antes, incumplir la condición CFL implica inestabilidad numérica. Si se cambia el valor de  $R$  para que sea superior a 1, se puede observar que a medida que avanza el tiempo el desplazamiento vertical crece hacia valores infinitos (ver figuras 5.6, 5.7 y 5.8).

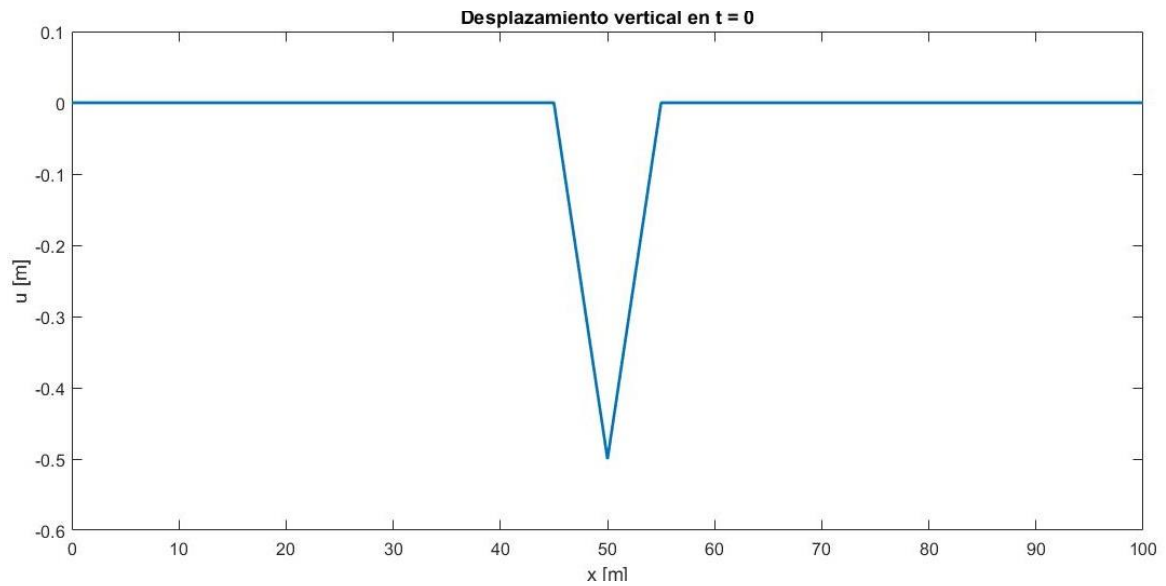


Figura 5.6: Solución de la simulación de prueba con  $R > 1$  en  $t = 0s$

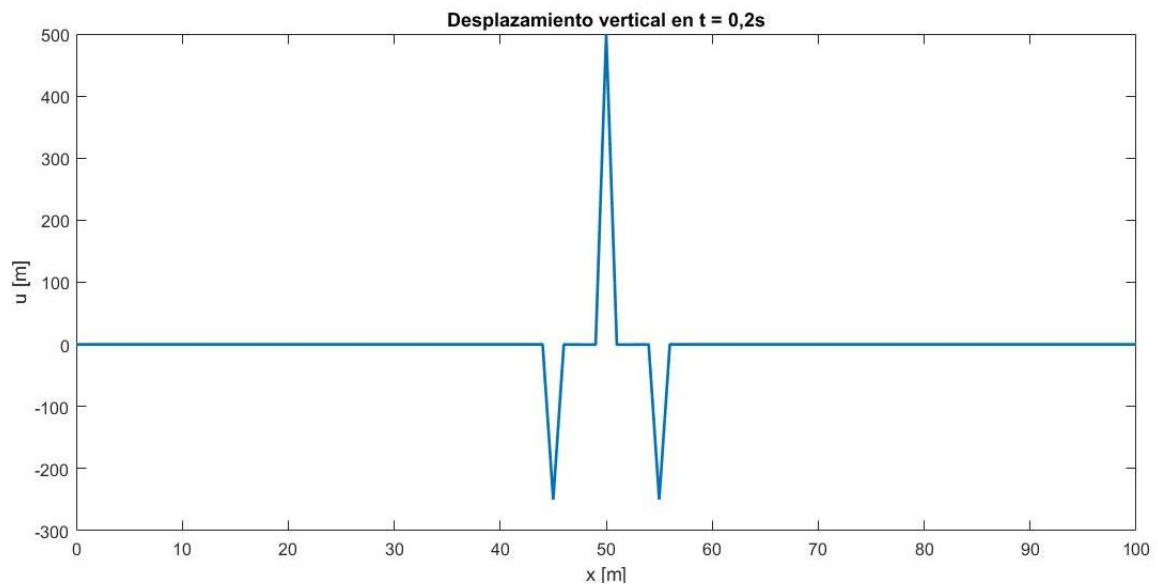
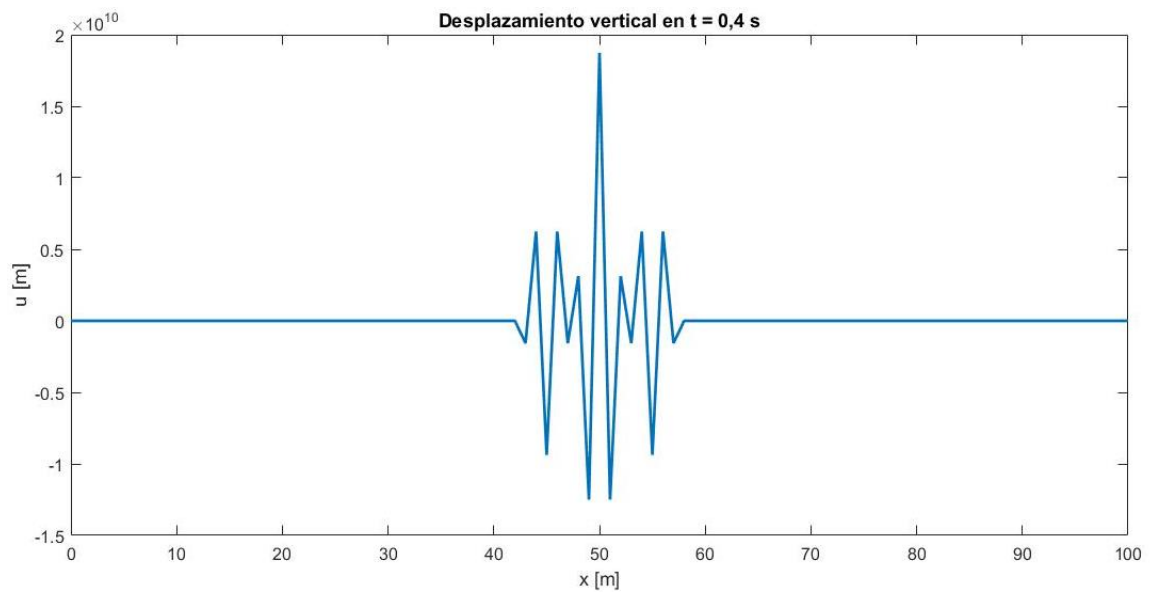


Figura 5.7: Solución de la simulación de prueba con  $R > 1$  en  $t = 0,2s$

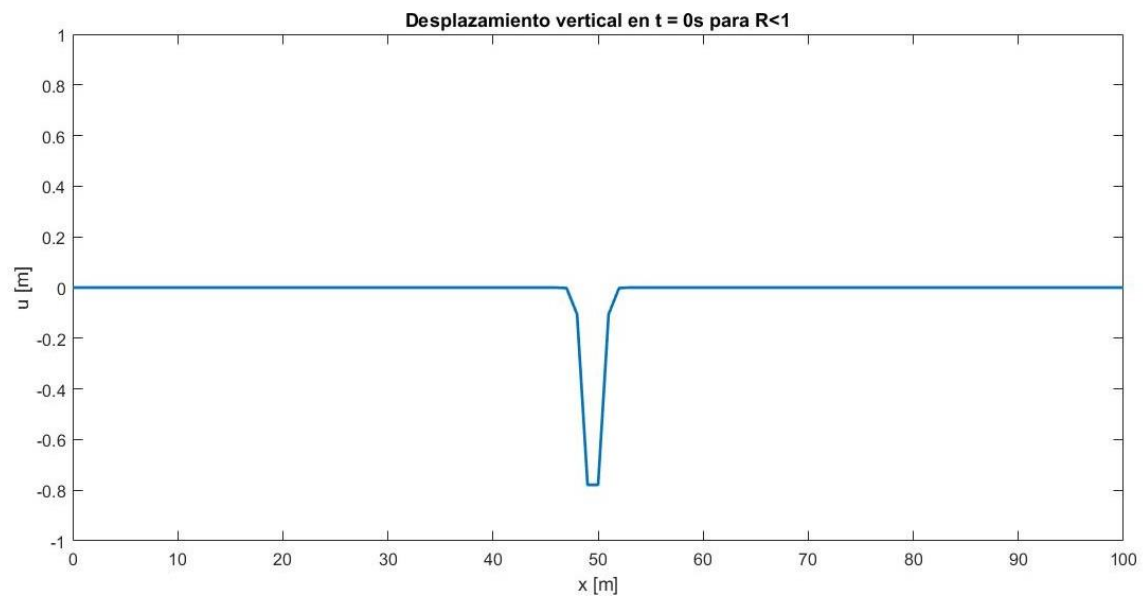


**Figura 5.8: Solución de la simulación de prueba con  $R > 1$  en  $t = 0,4s$**

#### 5.4. Dispersión numérica

Para valores de  $R$  estrictamente menores que 1 aparece el fenómeno de dispersión numérica. Se trata de una anomalía numérica que genera componentes de mayor frecuencia que distorsionan la forma de onda inicial. Es una consecuencia de la discretización [2].

Las figuras 5.9, 5.10 y 5.11, en las cuales solo se ha cambiado  $dt$  para que el valor de  $R$  sea menor que 1, muestran este comportamiento.



**Figura 5.9: Solución de la simulación de prueba con  $R < 1$  en  $t = 0s$**

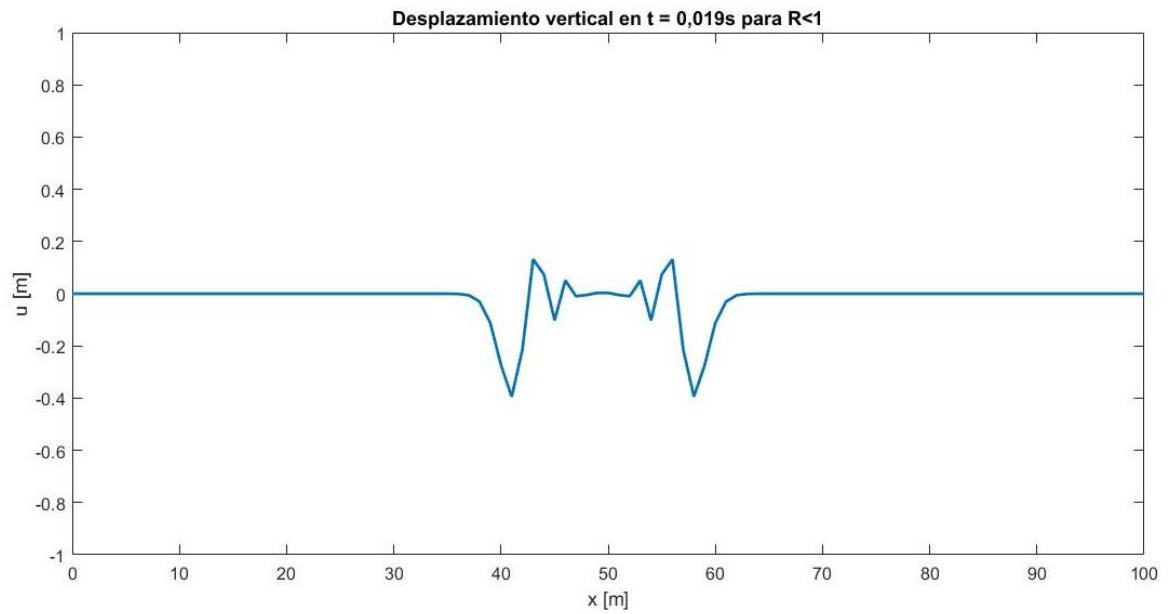


Figura 5.10: Solución de la simulación de prueba con  $R < 1$  en  $t = 0,019s$

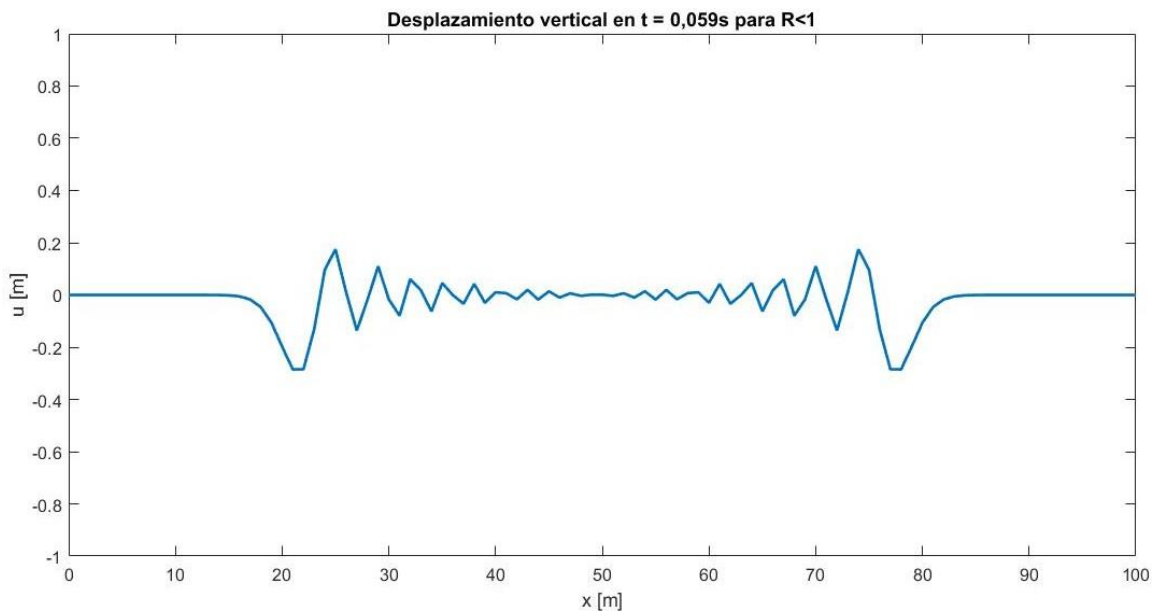


Figura 5.11: Solución de la simulación de prueba con  $R < 1$  en  $t = 0,059s$



## 6. Interpretación y análisis de resultados

Una vez verificado que el código resuelve y simula correctamente la ecuación de onda ideal 1D se pasa a simular el caso de la cuerda de guitarra.

### 6.1. Parámetros de simulación

Se quiere simular una cuerda de guitarra con las características de la tabla 6.1 [1].

<b>Longitud</b>	0,686 m
<b>Densidad lineal</b>	0,00525 kg/m
<b>Tensión</b>	60 N

Tabla 6.1: Datos de la cuerda

Los parámetros de simulación son los de la tabla 6.2. Se coge  $R = 1$  para evitar la dispersión numérica, lo cual fija  $dt$ .

<b>Punto de aplicación de la fuerza</b>	0,2 m
<b>Desplazamiento inicial causado por la fuerza</b>	0,01 m
<b>dx</b>	0,001 m
<b>R</b>	1
<b>dt</b>	$dx/c$

Tabla 6.2: Parámetros de simulación

En cuanto al desplazamiento inicial de los puntos de la cuerda, se ha cogido una forma triangular invertida con el vértice en  $x = 0,2$  m (ver figura 6.1).

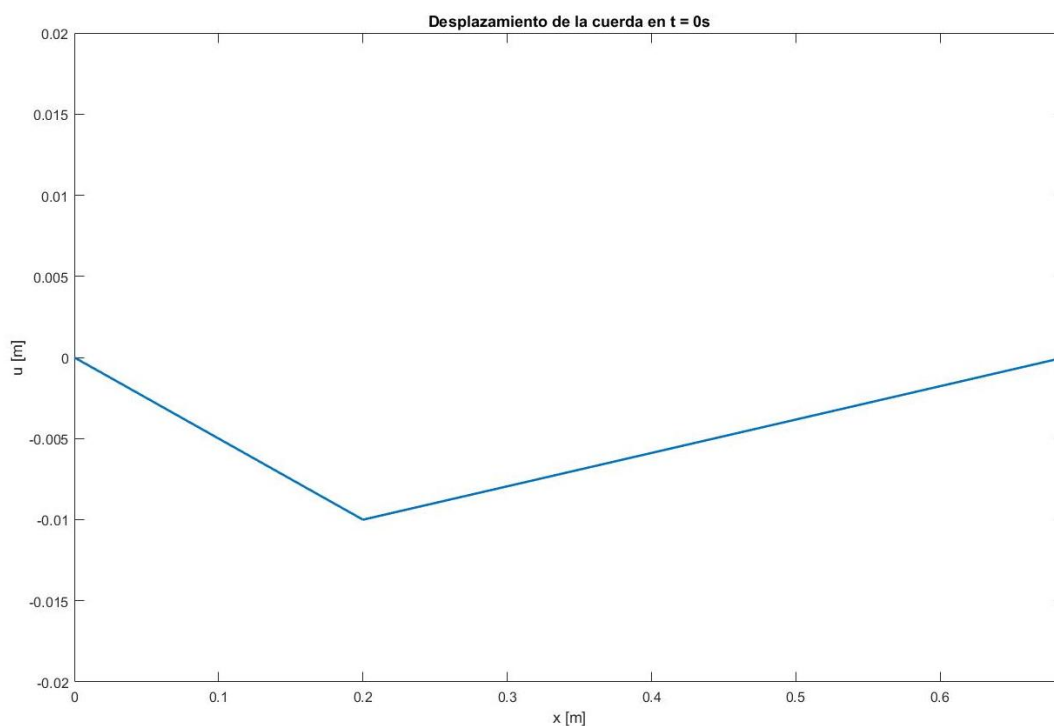
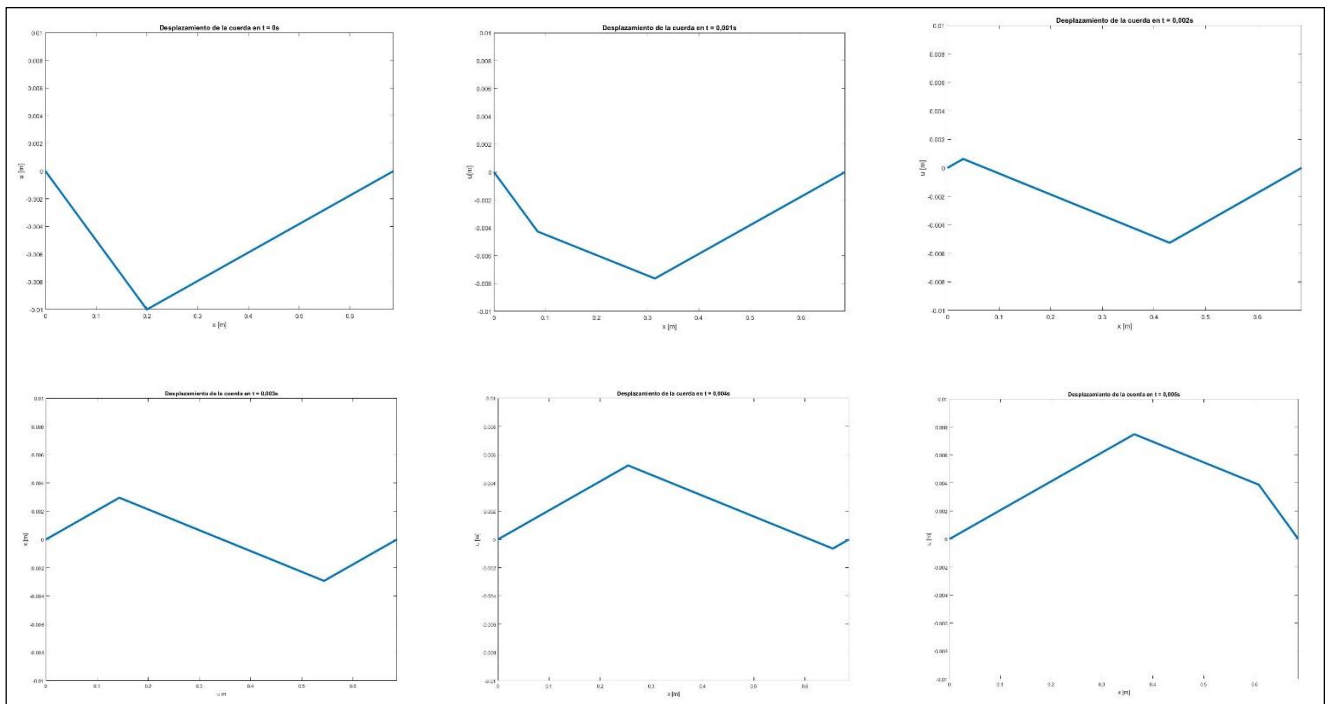


Figura 6.1: Condiciones iniciales de la simulación

## 6.2. Evolución temporal de la solución



**Figura 6.2: Evolución temporal del desplazamiento de la cuerda, de izquierda a derecha y de arriba abajo, concretamente en  $t = 0; 0,001; 0,002; 0,003; 0,004$  y  $0,005$  segundos.**

Se puede ver (aunque con más dificultad) que la solución cumple con las características vistas en el apartado 5.

### 6.3. Relación entre tensión y frecuencia

Si se observa un punto de la cuerda en concreto se puede medir la frecuencia con la cual la onda pasa por ahí. Ésta es la frecuencia a la cual vibra la cuerda y, por tanto, también es la frecuencia de la nota que produce.

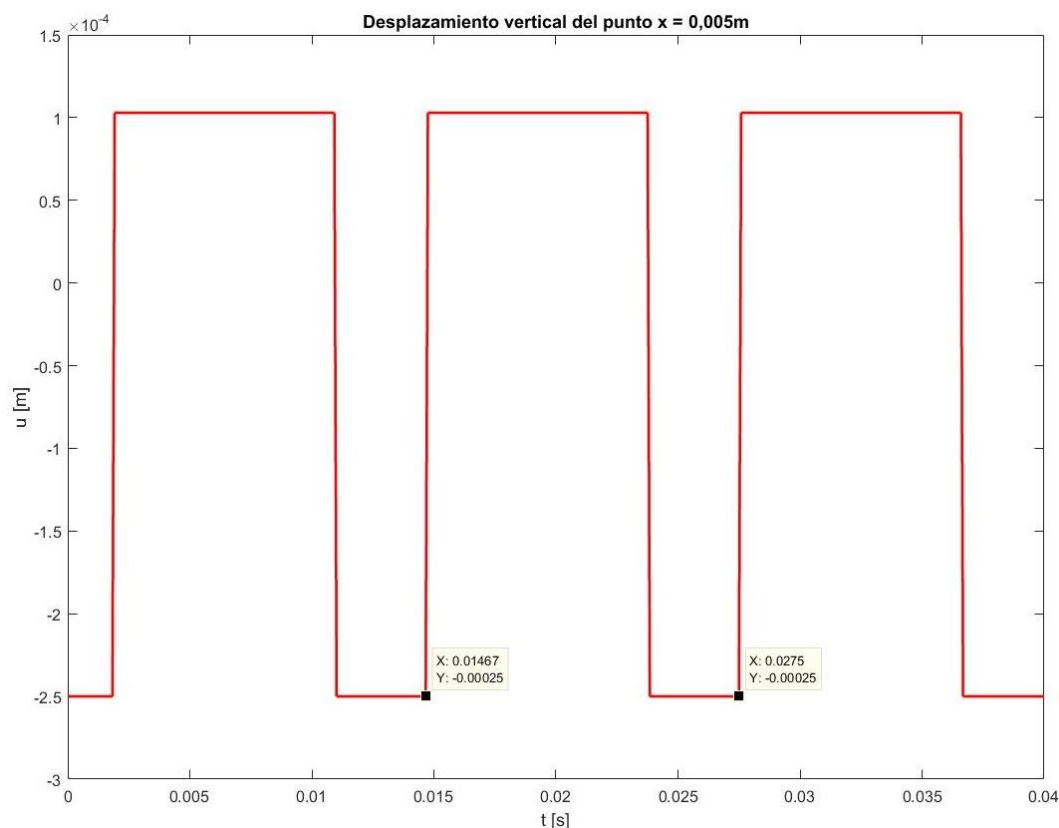


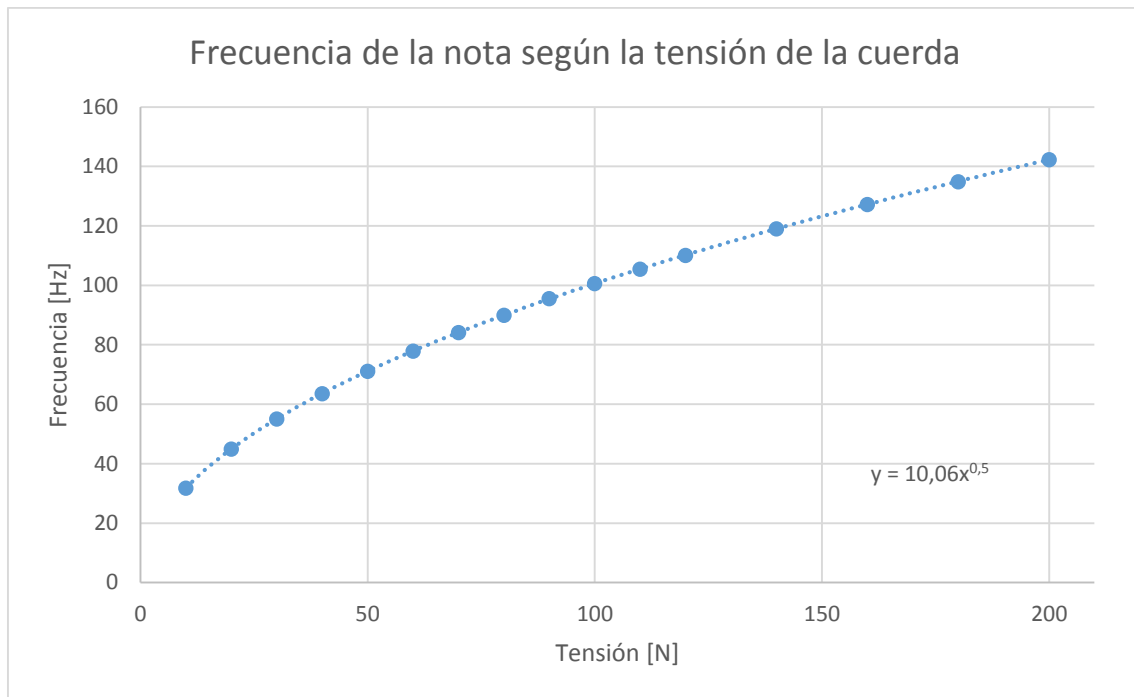
Figura 6.3: Desplazamiento vertical del punto x = 0,005 m en función del tiempo

A partir de los datos de la figura 6.3 se calcula dicha frecuencia:

$$f_{onda} = \frac{1}{0,0275 - 0,01467} = 77,94 \text{ Hz}$$

Esta frecuencia no coincide con la de ninguna nota en concreto, aunque sí se aproxima a la nota D#<sub>2</sub> (ver tabla 6.3). Esto significa que la cuerda está desafinada.

El proceso de afinación de una guitarra real consiste en modificar la tensión de la cuerda hasta que suena la nota deseada. Por tanto, es interesante descubrir la relación que existe entre la tensión a la que está sometida la cuerda y la frecuencia de la nota que produce su vibración.



**Figura 6.4: Frecuencia obtenida para cada simulación a distinta tensión**

Después de realizar simulaciones de la cuerda a con distintos valores de tensión y medir la frecuencia en cada caso, se llega a la curva frecuencia-tensión de la figura 6.4. Se puede observar que la relación no es lineal.

Ahora que ya se conoce esta relación, se puede usar la curva ajustada para calcular el valor de tensión necesario para que la cuerda vibre a la frecuencia correspondiente a una nota musical. Esto se ha hecho para varias notas de la segunda octava, como muestra la tabla 6.3.

Nota	Frecuencia [Hz]	Tensión [N]
C <sub>2</sub>	65,4	42,2629235
C# <sub>2</sub>	69,3	47,4537467
D <sub>2</sub>	73,4	53,2348652
D# <sub>2</sub>	77,8	59,8085444
E <sub>2</sub>	82,4	67,0901035
F <sub>2</sub>	87,3	75,3065108
F# <sub>2</sub>	92,5	84,5449174
G <sub>2</sub>	98	94,89781
G# <sub>2</sub>	103,8	106,463011

**Tabla 6.3: Tensión necesaria para afinar la cuerda a distintas notas**

En el siguiente apartado se cambiará la simulación para que la cuerda esté afinada a la nota E<sub>2</sub> (que corresponde a la afinación estándar).

## 6.4. Afinación de la cuerda

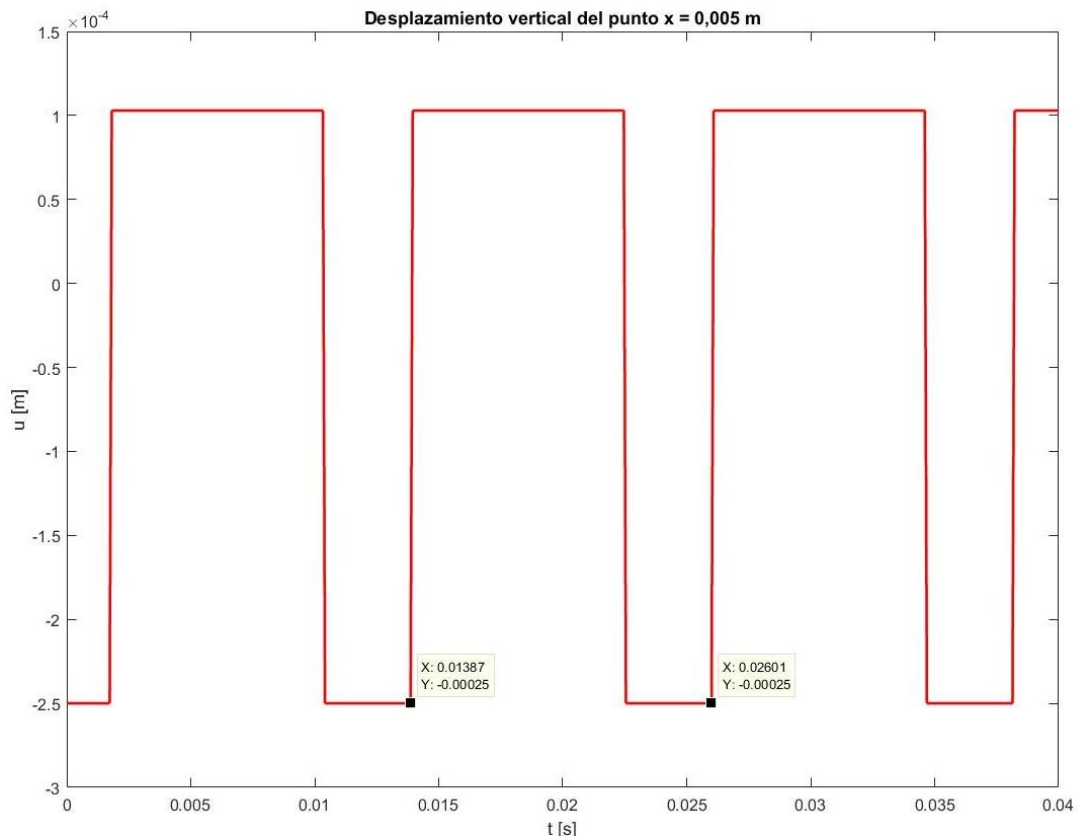


Figura 6.5: Desplazamiento vertical del punto  $x = 0,005 \text{ m}$  una vez se ha afinado la cuerda

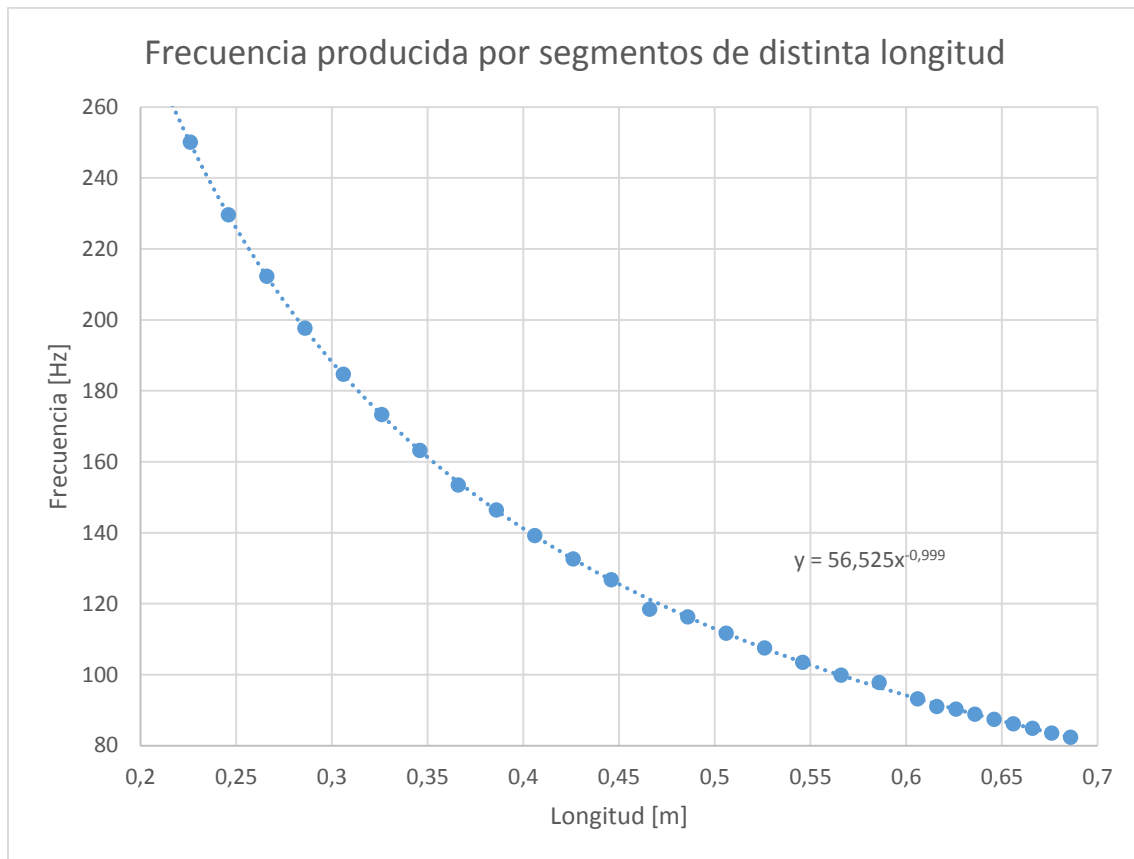
Una vez cambiada la tensión se repite el procedimiento anterior para medir la frecuencia de vibración.

$$f_{onda} = \frac{1}{0,02601 - 0,01387} = 82,4 \text{ Hz} = f_{E_2}$$

Efectivamente, la frecuencia coincide con la de la nota  $E_2$ .

## 6.5. Relación entre longitud y frecuencia de la nota

A continuación, sería interesante conocer la relación entre la longitud de la cuerda y la frecuencia, ya que esto podría ayudar a entender por qué los trastes, que sirven para poder tocar notas musicales distintas en la misma cuerda a base de variar la longitud de cuerda que vibra, están colocados de la manera en la que lo están.



**Figura 6.6: Frecuencia obtenida en cada simulación a distinta longitud**

Después de realizar simulaciones con distintas longitudes de cuerda, se llega al gráfico de la figura 6.6. Una vez más, la relación entre frecuencia y longitud no es lineal.

Una vez obtenida la curva ajustada que describe esta relación, se calcula la longitud que le corresponde a cada nota musical hasta llegar a los 24 trastes, un valor habitual en algunos modelos de guitarra. Este procedimiento está resumido en la tabla 6.4.

Número de traste	Nota	Frecuencia [Hz]	Longitud [m]
0	E <sub>2</sub>	82,4	0,6860
1	F <sub>2</sub>	87,3	0,6475
2	F# <sub>2</sub>	92,5	0,6111
3	G <sub>2</sub>	98,0	0,5768
4	G# <sub>2</sub>	103,8	0,5446
5	A <sub>2</sub>	110,0	0,5139
6	A# <sub>2</sub>	116,5	0,4852
7	B <sub>2</sub>	123,5	0,4577
8	C <sub>3</sub>	130,8	0,4321
9	C# <sub>3</sub>	138,6	0,4078
10	D <sub>3</sub>	146,8	0,3850
11	D# <sub>3</sub>	155,6	0,3633
12	E <sub>3</sub>	164,8	0,3430
13	F <sub>3</sub>	174,6	0,3237
14	F# <sub>3</sub>	185,0	0,3055
15	G <sub>3</sub>	196,0	0,2884
16	G# <sub>3</sub>	207,7	0,2721
17	A <sub>3</sub>	220,0	0,2569
18	A# <sub>3</sub>	233,1	0,2425
19	B <sub>3</sub>	246,9	0,2289
20	C <sub>4</sub>	261,6	0,2161
21	C# <sub>4</sub>	277,2	0,2039
22	D <sub>4</sub>	293,7	0,1925
23	D# <sub>4</sub>	311,1	0,1817
24	E <sub>4</sub>	329,6	0,1715

Tabla 6.3: Longitud del segmento de cuerda necesaria para que suene cada nota

Una vez obtenidos los valores de longitud, se pueden marcar en una línea y superponerla a una imagen de guitarra real. El resultado es el de la figura 6.7, donde se observa que este cálculo de trastes se ajusta bien a la realidad.

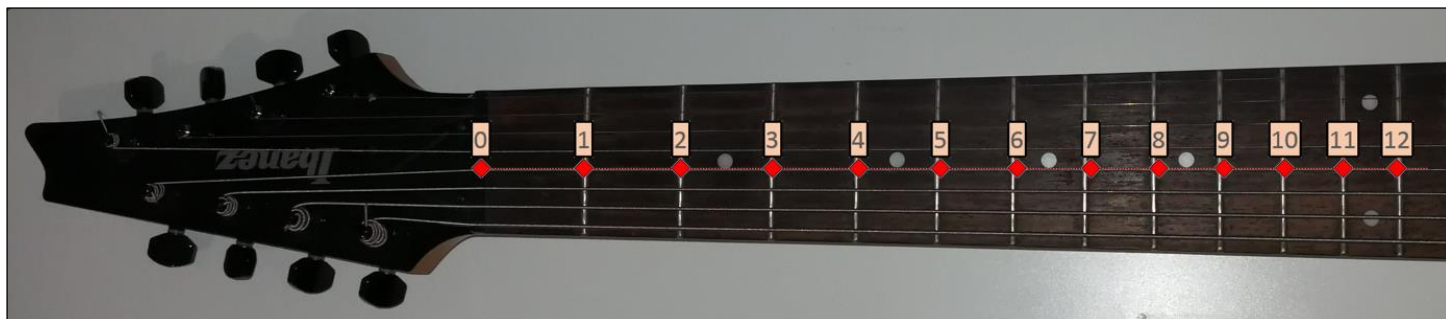


Figura 6.7: Distribución de trastes obtenida numéricamente superpuesta a la imagen de una guitarra real

## 6.6. Verificación del primer traste

Una vez se conoce la localización de los trastes, se pasa a comprobar para uno de ellos (en este caso el primero) que la frecuencia que produce es la que le corresponde.

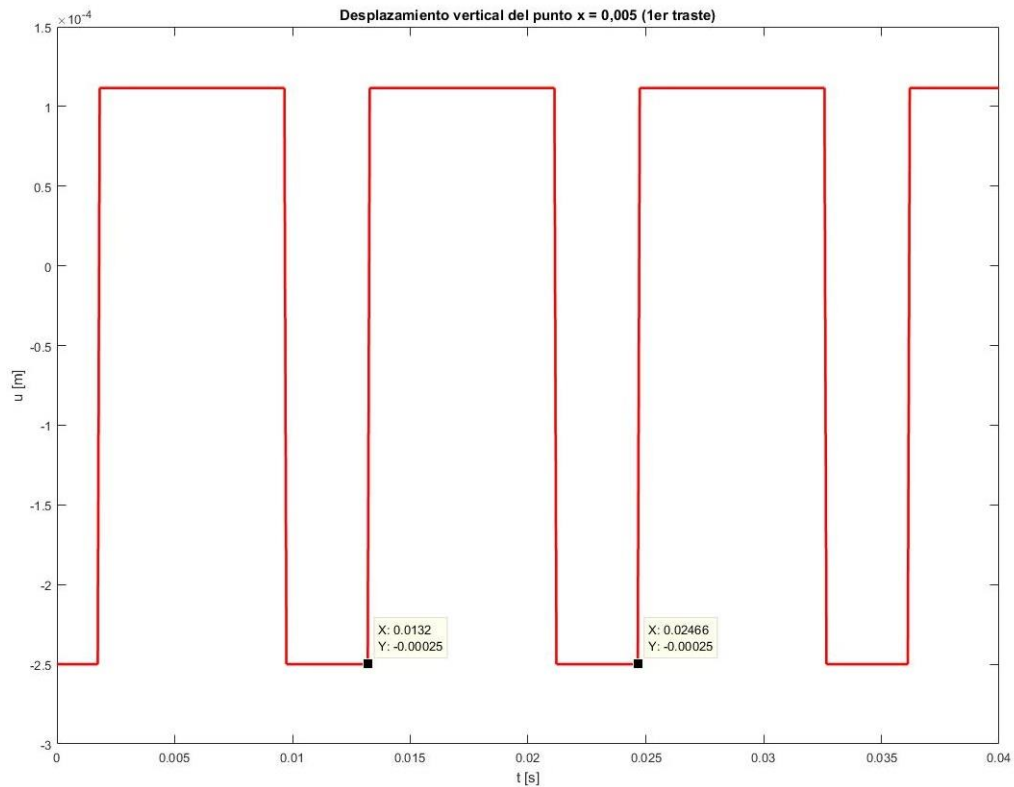


Figura 6.8: Desplazamiento vertical del punto x = 0,005 m cuando se utiliza el primer traste

$$f_{onda} = \frac{1}{0,02466 - 0,0132} = 87,3 \text{ Hz} = f_{F_2}$$

A partir de los datos de la figura 6.8 se puede comprobar que la frecuencia corresponde con la nota que debería producir el primer traste,  $F_2$ .



## 7. Ecuación de onda 1D con fricción

En este apartado se planteará, se resolverá y se analizará la ecuación que describe la vibración de una cuerda de guitarra fijada en ambos extremos cuando es punteada sin despreciar la fricción de ésta con el aire.

### 7.1. Modelización de la fricción

Se parte de la ecuación diferencial de onda ideal 1D hallada en el apartado 2, a la cual se le añade el término de fricción. Este término es análogo a una fuerza de amortiguamiento y, por tanto, se representa con una derivada temporal de primer orden con signo contrario al desplazamiento multiplicada por una constante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial t} \\ u_{tt} &= c^2 u_{xx} - b u_t\end{aligned}$$

Donde  $b$  es la constante de fricción.

### 7.2. Aproximación de la EDP

Para la nueva derivada que ha aparecido en la ecuación se utilizará otro tipo de aproximación:

Central difference approximation

$$\frac{\partial f}{\partial n} \approx \frac{f(n+\Delta n) - f(n-\Delta n)}{2\Delta n}$$

Con esta nueva aproximación y las vistas anteriormente se llega a:

$$\frac{u(t+\Delta t, x) - 2u(t, x) + u(t-\Delta t, x))}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u(t, x+\Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x-\Delta x))}{(\Delta x)^2} - b \frac{u(t+\Delta t, x) - u(t-\Delta t, x))}{2\Delta t}$$

A partir de aquí se coge  $R = 1$  para evitar la dispersión numérica.

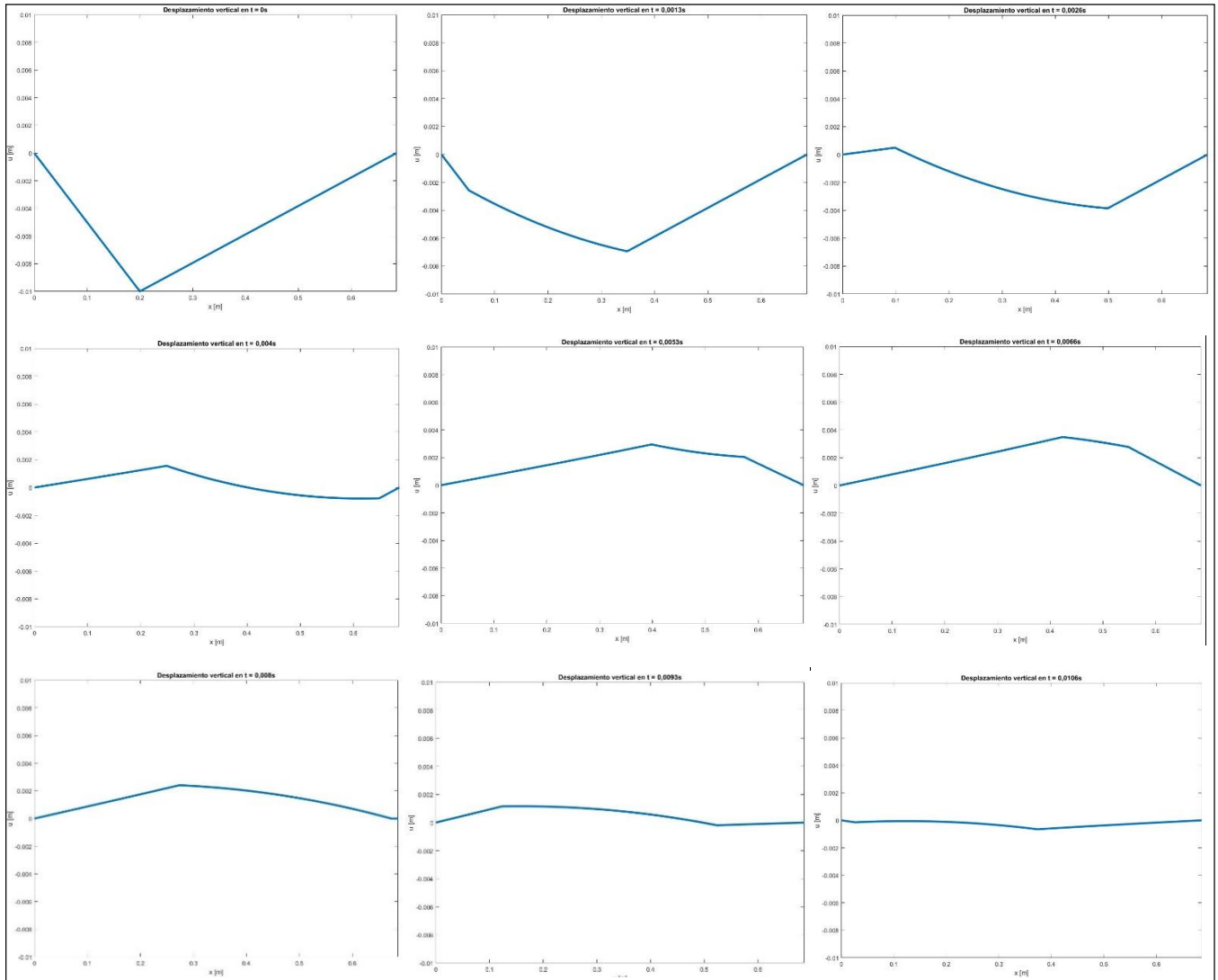
Si se reorganiza la ecuación, se definen  $t_n = n\Delta t$  y  $x_k = k\Delta x$  y finalmente se cambia  $u(t_n, x_k)$  por  $u(n, k)$  queda:

$$\begin{aligned}u(n+1, k) &= g \cdot [u(n, k+1) + u(n, k-1)] - a \cdot u(n-1, k) \\ g &= \frac{1}{1 + b \cdot \frac{dt}{2}} & a &= \frac{1 - b \cdot \frac{dt}{2}}{1 + b \cdot \frac{dt}{2}}\end{aligned}$$

Ahora solo es necesario cambiar el código para que haga este cálculo en cada iteración. Por lo demás, el método de resolución es idéntico al de la onda ideal.

### 7.3. Evolución temporal de la solución

Inicialmente se quería simular la fricción con un coeficiente  $b$  realista (del orden de  $10^{-4}$ ), pero al ser tan corta la simulación el efecto de este fenómeno era imperceptible. Por tanto, finalmente se ha cogido  $b = 300 \text{ s}^{-1}$  para que se pueda apreciar el efecto de la fricción.



**Figura 7.1: Evolución temporal del desplazamiento de la cuerda, de izquierda a derecha y de arriba abajo, concretamente en  $t = 0$ ; 0,0013; 0,0026; 0,004; 0,004; 0,0053; 0,0066; 0,008; 0,0093 y 0,0106 segundos.**

La figura 7.1 muestra cómo la cuerda intenta evolucionar como en el caso ideal, pero la fricción deforma la forma de onda inicial y le resta amplitud, hasta el punto en que la cuerda deja de vibrar.

## 8. Conclusiones

Con este trabajo no solo se ha aprendido y puesto en práctica uno de los métodos utilizados en la simulación de ecuaciones en diferencias parciales, sino que además se ha llegado a entender mejor la vibración de una cuerda.

Además, ha resultado interesante que la aproximación del fenómeno a la onda ideal haya permitido entender en mayor profundidad el funcionamiento de un instrumento de cuerda al poder relacionar parámetros de interés.

## Referencias

- [1] E. Bécache, A. Chaigne, G. Derveux y P. Joly, «Numerical Simulation of a Guitar».
- [2] S. Bilbao, Numerical Sound Synthesis: Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics, John Wiley & Sons, 2009.
- [3] Mohazzabi, P. y Shankar, S.P. (2017) Damping of a Simple Pendulum Due to Drag on Its String. Journal of Applied Mathematics and Physics, 5, 122-130.
- [4] V. Välimäki, J. Pakarinen, C. Erkut y M. Karjalainen, «Discrete-time modelling of musical instruments,» IOP Publishing Ltd, 2006.