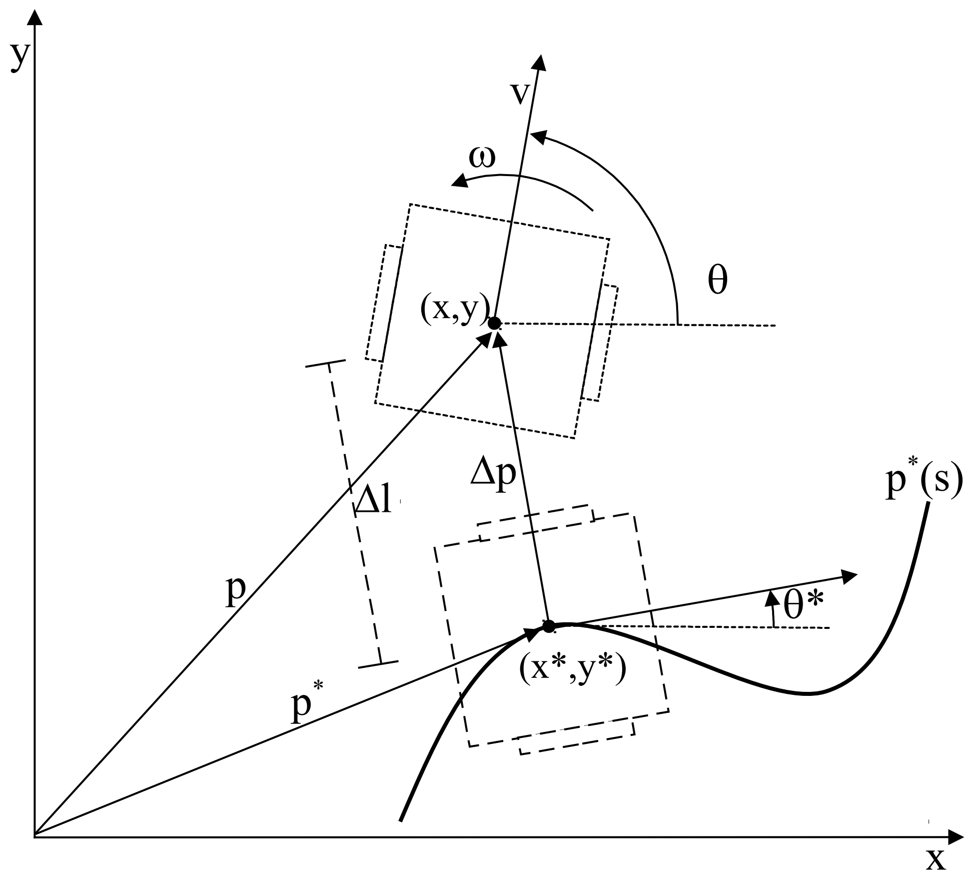
- **<u>Controlador Seguidor de Caminho</u>:**

Descrição do Robô em relação ao Caminho Desejado

No controlador apresentado a seguir, ([Samson, C.: Control of chained systems—application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots. IEEE Trans. Autom. Control 40(1), 64–77 (1995)], ver também [Joanna Płaskonka, Different Kinematic Path Following Controllers for a Wheeled Mobile Robot of (2,0) Type. Journal of Intelligent & Robotic Systems. September, 2013]), a descrição da posição do robô em relação ao caminho desejado, é baseada em um referencial Serret-Frenet, (vetor tangente, vetor normal e vetor binormal a uma curva), movendo-se ao longo do caminho. No controlador aqui descrito, este referencial é localizado no ponto da projeção ortonormal do robô sobre o caminho.



O caminho desejado é uma curva parametrizada $p^*(s)$, onde s é o comprimento do mesmo medido a partir do seu início. Ou seja, a posição p do robô deve convergir para o alvo virtual $p^*(s)$, que se move com o referencial Serret-Frenet. Se a distância entre o robô e o alvo virtual é Δl, o erro de posição, expresso no referencial Serret-Frenet é dado por:

$$\Delta p = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta l \\ 0 \end{bmatrix}$$

O caminho é caracterizado por uma curvatura $\kappa(s)$. Assim, a orientação desejada θ^* do robô, (velocidade do alvo virtual), satisfaz:

$$\dot{\theta}^* = \frac{v^*}{r} \Rightarrow \dot{\theta}^* = K(s) \cdot \dot{s}$$

Na expressão acima, v^* é a velocidade linear do alvo virtual, r é o raio de giro instantâneo e $K = K(s)$ é a curvatura do caminho no ponto em que se encontra o alvo virtual (no ponto do caminho correspondente ao parâmetro s corrente).

O alvo virtual existe se as seguintes condições são satisfeitas:

i) A curvatura $K(s)$ possui um limite superior (o caminho desejado não pode possuir curvas muito pronunciadas).
ii) O robô não pode se movimentar muito longe do caminho (uma vez que a parametrização Serret-Frenet é local).

No referencial inercial, podemos representar a posição do robô pela soma vetorial:

$$p = p^* + R \cdot \Delta p$$

Onde a matriz de rotação que projeta vetores do referencial Serret-Frenet para o referencial inercial corresponde a uma rotação de um ângulo θ^* em torno do eixo z:

$$R=\begin{bmatrix} \cos(\theta^*) & -sen(\theta^*) & 0 \\ sen(\theta^*) & \cos(\theta^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A derivada temporal da equação vetorial da posição do robô corresponde à relação de velocidades entre os três referenciais:

$$\dot{p}=\dot{p}^*+R\cdot\Delta\dot{p}+\dot{R}\cdot\Delta p$$

onde:

$$\dot{R}=\begin{bmatrix} -sen(\theta^*) & -\cos(\theta^*) & 0 \\ \cos(\theta^*) & -sen(\theta^*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\dot{\theta}^*$$

Rearranjando a expressão das velocidades relativas, isolando a velocidade do robô em relação ao alvo virtual:

$$\Delta\dot{p}=R^T\cdot\dot{p}-R^T\cdot\dot{p}^*-R^T\cdot\dot{R}\cdot\Delta p$$

Analisemos cada termo desta expressão.

O termo à esquerda corresponde a:

$$\Delta\dot{p}=\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\dot{l} \\ 0 \end{bmatrix}$$

O primeiro termo da expressão à direita representa a velocidade do robô projetada sobre os eixos do referencial Serret-Frenet:

$$R^T \cdot \dot{p} = \begin{bmatrix} \cos(\theta^*) & sen(\theta^*) & 0 \\ -sen(\theta^*) & \cos(\theta^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

mas, do modelo cinemático:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) v \\ sen(\theta) v \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então:

$$R^T \cdot \dot{p} = \begin{bmatrix} \cos(\theta^*) & sen(\theta^*) & 0 \\ -sen(\theta^*) & \cos(\theta^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta^*) & sen(\theta^*) & 0 \\ -sen(\theta^*) & \cos(\theta^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) v \\ sen(\theta) v \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$R^T \cdot \dot{p} = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta) v \\ sen(\Delta\theta) v \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde o erro de orientação do robô em relação ao alvo móvel é dado por:

$$\Delta\theta = \theta - \theta^*$$

O segundo termo da expressão à direita representa a velocidade do alvo virtual projetada sobre os eixos do seu próprio referencial (referencial Serret-Frenet). O alvo virtual possui velocidade linear ao longo do eixo x do referencial Serret-Frennet, uma vez que se desloca sempre tangente ao caminho:

$$v^* = \dot{s}$$

Assim:

$$-R^T \cdot \dot{p}^* = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O terceiro termo da expressão à direita é dado por

$$-R^T \cdot \dot{R} \cdot \Delta p = \begin{bmatrix} -\cos(\theta^*) & -sen(\theta^*) & 0 \\ sen(\theta^*) & -\cos(\theta^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -sen(\theta^*) & -\cos(\theta^*) & 0 \\ \cos(\theta^*) & -sen(\theta^*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\theta}^* \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta l \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$-R^T \cdot \dot{R} \cdot \Delta p = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}^* & 0 \\ -\dot{\theta}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta l \cdot \dot{\theta}^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desta forma, a relação entre as velocidades dos três referenciais é expressa por:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \dot{l} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta) v \\ sen(\Delta\theta) v \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta l \cdot \dot{\theta}^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira linha desta equação vetorial podemos obter a velocidade do alvo móvel em função da velocidade do robô e da curvatura do caminho no ponto em que se encontra o alvo virtual:

$$\dot{s} = \cos(\Delta\theta) v + \Delta l \cdot \dot{\theta}^*$$

Substituindo a velocidade angular do alvo virtual pela sua expressão equivalente, em função da sua velocidade linear e da curvatura do caminho:

$$\dot{s}=\cos(\Delta\theta)v+\Delta l\cdot K(s)\cdot\dot{s}\Rightarrow\dot{s}=\frac{\cos(\Delta\theta)v}{1-K(s)\Delta l}$$

Da segunda linha da expressão vetorial, temos:

$$\Delta\dot{l}=sen(\Delta\theta)v$$

Finalmente, derivando o erro de orientação do robô em relação ao alvo móvel:

$$\Delta\dot{\theta}=\dot{\theta}-\dot{\theta}^{*}\Rightarrow\Delta\dot{\theta}=\omega-K(s)\cdot\dot{s}\Rightarrow\Delta\dot{\theta}=\omega-\frac{K(s)\cdot\cos(\Delta\theta)v}{1-K(s)\Delta l}$$

Assim, finalmente, o modelo cinemático do robô expresso de forma equivalente no referencial Serret-Frenet, é dado por:

$$\dot{s}=\frac{\cos(\Delta\theta)v}{1-K(s)\Delta l}$$

$$\Delta\dot{l}=sen(\Delta\theta)v$$

$$\Delta\dot{\theta}=\omega-\frac{K(s)\cdot\cos(\Delta\theta)v}{1-K(s)\Delta l}$$

De acordo com o modelo acima, o problema de seguimento de caminho para o robô com acionamento diferencial, pode ser estabelecido da seguinte forma:

- Projetar uma lei de controle tal que o robô com acionamento diferencial, cuja dinâmica é conhecida completamente, siga um caminho desejado e os erros de rastreio do caminho convirjam para zero. Ou seja, o objetivo de controle é:

$$\Delta\theta\rightarrow 0 \quad e \quad \Delta l\rightarrow 0 \quad quando\, t\rightarrow\infty$$

- O caminho desejado deve ser admissível, ou seja, o mesmo pode ser executado sem derrapagem das rodas do robô. Assume-se que o caminho desejado é uma curva suave e, pelo menos, as suas duas primeiras derivadas em relação ao parâmetro s são suaves e limitadas.

A lei de controle de Samson para seguimento de caminho é estipulada da seguinte forma:

$$v = constante$$

$$\omega = -\left(k_\theta \cdot \Delta\theta + k_l \cdot \Delta l \cdot v \cdot \frac{sen(\Delta\theta)}{\Delta\theta}\right) + \frac{K(s) \cdot \cos(\Delta\theta)\, v}{1 - K(s)\Delta l}$$

onde k_θ e k_l são ganhos constantes positivos.

Pode se provar que o sistema realimentado com esta lei de controle é assintoticamente estável, usando a função de Lyapunov abaixo e o Lema de Barbalat.

$$V(\Delta l, \Delta\theta) = \frac{(k_l \cdot \Delta l^2 + \Delta\theta^2)}{2}$$