Санкт-Петербургский государственный университет

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лекции для студентов факультета ПМ-ПУ
(III курс, 6-ой семестр)

Доцент кафедры моделирования электромеханических
и компьютерных систем, кандидат физ.-мат. наук
Владимир Олегович Сергеев

Санкт-Петербург, 2016

Оглавление

Глава 1

Сопряженное пространство. Сопряженный оператор

1.1 Сопряженное пространство

Согласно определению пространством X^*, сопряженным нормированному пространству X, называется пространство линейных функционалов f, заданных на всем X. Все результаты, полученные для линейных операторов, переносятся на частный случай линейных функционалов.

Пространство X^* — полное пространство (пространство Банаха), $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$ (глава 2, §2).

В дальнейшем наряду с записью значения функционала f элементы $x \in X$ мы будем обозначать

$$f(x) =< x, f >$$

Такое обозначение имеет своё обоснование.

Теорема (Рисса)**.** *(Фридьёф Рисс, 1880-1956 г., один из основоположников функционального анализа) <u>Об общем виде линейного функционала в пространстве Гильберта H.</u> Для любого $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$, такой что $< x, f >= (x, y)$ ($f(x) = (x, y)$, (x, y) — скалярное произведение в H).*

Доказательство. Обозначим L подпространство элементов z таких, что значения функционала f равно 0: $< z, f >= 0$. Можно считать, что $L \neq H$ в противном случае $f(x) = 0$ для любого $x \in H$, $\|f\| = 0$, $y = \ominus$.

Ортогональное дополнение подпространства L не пусто. Пусть $x_0 \perp L$, тогда и элемент $\lambda x_0 \perp L$, и можно считать, что $< x_0, f >= 1$.

Пусть x — любой элемент H. На элементе $x- < x, f > x_0$ значение функционала f равно:

$$< x- < x, f > x_0, f >=< x, f > - < x, f >< x_0, f >=< x, f > - < x, f >= 0$$

Следовательно элемент $x- < x, f > x_0 \subset L$, а $x_0 \perp L$:

$$(x- < x, f > x_0, x_0) = 0; (x, x_0)- < x, f > (x_0, x_0) = 0$$

Тогда $(x, f) = \frac{(x,x_0)}{\|x_0\|^2}$ и в качестве элемента y можно взять элемент $y = \frac{x}{\|x_0\|^2}$:$< x, f >= (x, y)$.

Для нормы функционала f: $|< x, f >| \leq \|y\|\|x\|$. Тогда $\|f\| \leq \|y\|$. С другой стороны $< y, f >= (y, y) \leq \|f\|\|y\|$, $\|y\| \leq \|f\|$

Объединяя эти неравенства, получаем $\|f\| = \|y\|$.

Единственность элемента y: предположим, что существует другой элемент $y_1 \in H$ такой, что для любого $x \in H$:

$$< x, f >= (x, y) = (x, y_1)$$

Тогда $(x, y - y_1) = 0$ и, взяв элемент $x = y - y_1$, получим $\|y - y_1\| = 0$, т.е. $y_1 = y$. ■

Сходимости последовательности функционалов $\{f_n\} \in X^*$ к функционалу $f_0 \in X^*$: **сильная сходимость**, если $\|f_n - f_0\| \to 0$ при $n \to \infty$; **поточечная сходимость** $f_n(x) \to f_0(x)$ при $n \to \infty$ для любых элементов $x \in X$. Верна теорема (Банаха-Штейнгауза, глава 2, §3):

Для того, чтобы последовательность f_n сходилась поточечно к линейному функционалу, необходимо и достаточно, чтобы:

1. Нормы f_n были ограничены в совокупности: $\|f_n\| \leq const$.
2. Существуют пределы числовых последовательностей $f_n(x)$ при $n \to \infty$ для всех элементов x, принадлежащих множеству D всюду плотному в X.

Введение сопряженного пространства приводит к новому типу сходимости последовательности $\{x_n\}$ элементов x_n пространства X.