Санкт-Петербургский государственный университет

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лекции для студентов факультета ПМ-ПУ
(III курс, 6-ой семестр)

Доцент кафедры моделирования электромеханических
и компьютерных систем, кандидат физ.-мат. наук
Владимир Олегович Сергеев

Санкт-Петербург, 2016

Оглавление

1 Теория Рисса линейных уравнений второго рода **2**
1.1 Теорема Шаудера 2

Глава 1

Теория Рисса линейных уравнений второго рода

В этой главе мы будем рассматривать вполне непрерывные операторы.

1.1 Теорема Шаудера

Определение. Последовательность $\{y_n\}$ элементов пространства Y называется **компактной**, если в ней существует фундаментальная подпоследовательность.

Лемма (Лемма I)**.** *Пусть Y — банахово пространство. Если последовательность элементов $\{y_n\}$ слабо сходится к элементу $y_0 \in Y$ и компактна, то $y_n \to y_0$ сильно, т.е. $\|y_n - y_0\|_Y \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. (от противного) Предположим, что $\{y_n\}$ не стремится к y_0, т.е. существует подпоследовательность $\{y_{nk}\}$ такая, что $\|y_{nk} - y_0\| > \varepsilon$ при достаточно больших значениях k. Тогда (по теореме Хана-Банаха глава 3, §2, следствие 4) существует функционал $\phi \in Y^*$, $\|\phi\| = 1$ такой, что $\phi(y_{nk} - y_0) = \|y_{nk} - y_0\| > \varepsilon$ при всех $k \to k_0$. Следовательно последовательность $\{y_n\}$ не имеет слабого предела. ∎

Лемма (Лемма II)**.** *Пусть $A \subset \sigma(X, Y)$. Если $\{x_n\} \to x_0$, то $Ax_n \to Ax_0$ сильно.*

Доказательство. Так как $\{x_n\} \to x_0$, то $\{\|x_n\|\}$ ограничена (глава 4, §1). Из полной непрерывности оператора A следует, что последовательность элементов $y_n = Ax_n$ компактна.

Покажем, что $Ax_n \to Ax_0$.

Для любого линейного функционала $\phi \in Y^*$ значения $< A(x_n - x_0), \phi >=< x_n - x_0, A^*\phi >$. Обозначим $A^*\phi = f \in X^*$:

$$< A(x_n - x_0), \phi >=< x_n - x_0, f >$$

и так как $x_n \to x_0$, то $< A(x_n - x_0), \phi >\to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\underline{Ax_n \to Ax_0}$. По лемме I $\|Ax_n - Ax_0\|_Y \to 0$ при при $n \to \infty$. ∎

Теорема (Шаудер)**.** *Пусть $A \subset \mathcal{L}(X, Y)$, где Y — банахово пространство. Тогда операторы A и A^* вполне непрерывны одновременно.*

Доказательство. Пусть $A \subset \sigma(X, Y)$. Рассмотрим последовательность линейных функционалов $\phi_n \in Y^*$ с нормами $\|\phi_n\| = 1$. Покажем, что в последовательности функционалов $\{A^*\phi_n\} \in X^*$ существует фундаментальная подпоследовательность, что и будет означать полную непрерывность оператора A^*.

Обозначим $\{\phi_n\} = \{y_n\} \in Y^*$ и последовательность функционалов $A^*\phi_n = A^*y_n = f_n \in X^*$. Ясно, что $\|f_n\| = \|A^*y_n\| = \|A^*\phi_n\| \leq \|A^*\|\|\phi_n\| = \|A\|$.

Таким образом $\{f_n\}$ ограничена в совокупности. Функционалы f зависят от выбранного y: $f_n = f_n(y) = f(y)$.

Ясно, что если y'' и $y' \in Y^*$, то

$$\|f(y'') - f(y')\| = \|A^k y'' - A^k y'\| \leq \|A\|\|y'' - y'\| \leq \varepsilon, \text{ если} \|y'' - y'\| < \delta \text{ и } \|A\|\delta < \varepsilon$$

Таким образом функции $f(y)$ равностепенно непрерывны. Следуя доказательству теоремы Арцела-Асколи (глава I, §1) получаем существование фундаментальной подпоследовательности $f_{nk} = A^k\phi_{nk}$ последовательности $A^*\phi_n$, $\phi_n \in S_1 \subset Y^*$: A^* — вполне непрерывный оператор.

Если же $A^* \in \sigma(X^*, Y^*)$, то так как $(A^*)^* = A$, то получаем, что и оператор A вполне непрерывен. ■