Санкт-Петербургский государственный университет

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лекции для студентов факультета ПМ-ПУ
(III курс, 6-ой семестр)

Доцент кафедры моделирования электромеханических
и компьютерных систем, кандидат физ.-мат. наук
Владимир Олегович Сергеев

Санкт-Петербург, 2016

Обозначим множество элементов пространства H, таких что $\| x \|_H \leq C$ через K. Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность элементов множества K.

1. Для всех элементов x_n вычислим значения функционала f_1:

$$f_1(x) =< x, \Psi_1 >= (x, \Psi_1).$$

   Числовая последовательность $f_1(x_n)$ ограничена:

$$|f_1(x_n)| = | < x, \Psi_1 > | \leq \| x_n \| \leq C.$$

   По теореме Больцано-Вейерштрасса в $\{f_1(x_n)\}$ существует сходящаяся подпоследовательность, обозначим её $< x_{N(1,K)}, \Psi_1 >$,

$$\{x_{N(1,K)}\} \subset \{x_n\}, < x_{N(1,K)}, \Psi_1 >\to \alpha_1 \text{ при } K \to \infty$$

2. Рассмотрим последовательность $\{x_{N(1,K)}\}$ и вычислим значения функционала f_2:

$$f_2(x) =< x, \Psi_2 >$$

   на элементах этой последовательности. Числовая последовательность $< x_{N(1,K)}, \Psi_2 >$ ограничена, существует её сходящаяся подпоследовательность. Обозначим её $< x_{N(2,K)}, \Psi_2 >$:

$$< x_{N(2,K)}, \Psi_2 >\to \alpha_2 \text{ при } K \to \infty,$$

$$\{x_{N(2,K)}\} \subset \{x_{N(1,K)}\} \subset \{x_n\},$$

$$< x_{N(2,K)}, \Psi_1 >\to \alpha_1 \text{ при } K \to \infty.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательности $\{x_{N(i,K)}\}$, $i = 1, 2, 3...$, такие что

$$\{x_{N(1,K)}\} \supset \{x_{N(2,K)}\} \supset \{x_{N(3,K)}\} \supset ...$$

и для которых

$$< x_{N(i,K)}, \Psi_i >\to \alpha_i \text{ при } K \to \infty,$$

$$< x_{N(i-1,K)}, \Psi_{i-1} >\to \alpha_{i-1} \text{ при } K \to \infty,$$

....

$$< x_{N(1,K)}, \Psi_1 >\to \alpha_1 \text{ при } K \to \infty,$$

Рассмотрим "диагональные элементы"$x_{N(i,i)}$. Для них при любом фиксированном K значения $< x_{N(i,i)}, \Psi_K >$ стремятся к α_K при $i \to \infty$.
Так как

$$\sum_{k=1}^{n} | < x_{N(i,i)}, \Psi_K > |^2 \leq C^2$$

при любом i, то переходя к пределу при $i \to \infty$ получим $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \le C^2$. Так как n любое, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < +\infty$. Следовательно существует элемент

$$\widetilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \Psi_k \in K$$

Покажем, что последовательность $\{x_{N(m,m)}\}$ слабо сходится к элементу $\widetilde{x}$.
Рассмотрим произвольный элемент y пространства H. Он определяет функционал f:

$$f(x) = (x, y)$$

Как элемент пространства H элемент y может быть представлен в виде

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \Psi_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \Psi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \Psi_k$$

Для заданного ϵ найдём номер $n(\epsilon)$, такой что при $n > n(\epsilon)$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 < \epsilon^2$$

Зафиксируем значение n, $n > n(\epsilon)$.

Значение функционала f на элементе $x_{N(m,m)} - \widetilde{x}$ равно

$$< x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, y >=< x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, \sum_{k=1}^{n} y_k \Psi_k > + < x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \Psi_k >$$

Во втором слагаемом значение

$$| < x_{N(m,m)}, \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \Psi_k > | \le C \cdot \epsilon$$

и значение

$$| < \widetilde{x}, \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \Psi_k > | \le C \cdot \epsilon$$

В первом слагаемом значение

$$| < x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, \sum_{k=1}^{n} y_k \Psi_k > | \le (\sum_{k=1}^{n} [< x_{N(m,m)}, \Psi_k > - \alpha_k]^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|$$

Так как значение n фиксировано, а значения

$$< x_{N(m,m)}, \Psi_K > \to \alpha_K$$

при

$$m \to \infty$$

то для достаточно больших m:

$$\sum_{k=1}^{n} [< x_{N(m,m)}, \Psi_k > - \alpha_k]^2 < \epsilon^2$$

Таким образом

$$|f(x_{N(m,m)} - \widetilde{x})| = | < x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, f > | = |(x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, y)| \leq \epsilon[\|f\| + 2\epsilon]$$

для любого $f \in H^*$, если $\{x_n\} \in K$ при достаточно больших m, т.е.

$$x_{N(m,m)} \to \widetilde{x}$$

на множестве K, и множество K слабо компактно в сепарабельном гильбертовом пространстве.

В доказательстве существенную роль играет теорема Рисса: $H = H^*$ и далее $(H^*)^* = H$. Банахово пространство X, для которого $(X^*)^* = X$ называется рефлексивным. В случае $X = L_p(T)$ можно показать, что общий вид линейного функционала определяется элементами $y \in L_q(T)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$f(x) =< x, y >= \int_T x(t)y(t)dt$$

(при $p = 1$ пространство $L_\infty(T)$ - пространство измеримых и почти везде конечных функций).

Ясно, что

$$(L_p^*(T))^* = L_p(T)$$

и пространство $L_p(T)$ рефлексивно.

Теорема. *Верна общая теорема: условие $\|x\|_X \leq C$ для элементов множества $K \subset X$ является необходимым и достаточным условием слабой компактности множества K в рефлексивных пространствах X.*

В частности множество $K \in L_p(T)$ элементов, таких что

$$\|x\|_{L_p(T)} \leq C$$

слабо компактно.