Санкт-Петербургский государственный университет

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лекции для студентов факультета ПМ-ПУ
(III курс, 6-ой семестр)

Доцент кафедры моделирования электромеханических
и компьютерных систем, кандидат физ.-мат. наук
Владимир Олегович Сергеев

Санкт-Петербург, 2016

Оглавление

При составлении односеместрового курса лекций по функциональному анализу выбраны направления, связанные с постановкой задач прикладной математики. Эти направления представлены в следующих уже классических работах:

1. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

2. В. А. Треногин. Функциональный анализ. Москва "Наука" главная редакция физ.-мат. литературы, 1980.

3. В. А. Садовничий. Теория операторов. Издательство Московского университета, 1986.

Глава 1

Нормированные пространства

Изучение свойств отображений, как и в математическом анализе, начнём с введения определений, связанных с областями задания отображений.

1.1 Метрические пространства

Определение. В метрическом пространстве X для любых элементов $x, y \in X$ определено расстояние $\rho(x, y)$, которое удовлетворяет требованиям (аксиомам метрического пространства):

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, и $\rho(x, y) = 0$ означает, что элементы x и y совпадают,

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ — неравенство треугольника.

Расстояние (метрика) ρ определяет сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ к элементу $x^* \in X$:

$$x_n \to x^*, \text{ если } \rho(x_n, x^*) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Из аксиом метрического пространства следует непрерывность функции $\rho(x, y)$, то есть если $x_n \to x^*$, $y_n \to y^*$ при $n \to \infty$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x^*, y^*)$.

Естественным образом вводятся понятия:

– открытый шар, замкнутый шар, окрестность элемента $x_0 \in X$,

– внутренняя точка множества $M \in X$, открытое множество, замкнутое множество,

– подпространство X_0 метрического пространства: метрика в X_0 определяется метрикой пространства X, множество X_0 — замкнуто,

– фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, такая что $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $n = n(\varepsilon)$ такой что $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$ при $n > n(\varepsilon)$, $m \geq 1$ (последовательность, сходящаяся в себе).

Основные типы метрических пространств и множеств

1. **Полное метрическое пространство** — любая фундаментальная последовательность имеет предел, принадлежащий X (в математическом анализе — признак Коши сходимости числовой последовательности).

2. Множество $D \in X$ **плотно в множестве** $M_0 \in X$, если для каждого элемента $x_0 \in M_0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся элемент $z \in D$, такой что $\rho(x_0, z) < \varepsilon(z = z(\varepsilon))$. Если множество D плотно в M_0, то для любого элемента $x_0 \in M_0$ существует последовательность элементов $\{z_n\} \in D$ таких, что $\rho(z_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Ясно, что $\overline{D} = M_0$.

3. **Сепарабельное пространство** X — в таком пространстве существует счётное всюду плотное множество D: $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Для любого элемента $x_0 \in X$ можно найти такой номер $n = n(x_0, \varepsilon)$, что $\rho(x_0, z_n) < \varepsilon$.

   Пример. Пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций сепарабельно. В математическом анализе это теорема Вейерштрасса: для каждой непрерывной функции $x_0(t)$ существует полином P_n с рациональными коэффициентами такой что

   $$\rho(x_0, P_n) = \max_{t \in [a,b]} |x_0(t) - P_n(t)| < \varepsilon$$

   Множество таких полиномов счётно.

4. **Компактное множество метрического пространства** X

   Множество K компактно в X, если в любой подпоследовательности элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in K$ существует фундаментальная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $n_{k+1} > n_k$(т.е. последовательность n_k возрастает).

Компактность множеств играет важную роль при исследовании приближённых методов решения задач.

Если X полное пространство, то существует предельный элемент этой фундаментальной подпоследовательности, но он может не принадлежать множеству K.

Определение компактного множества не конструктивно. Следующая теорема Хаусдорфа даёт эффективный критерий компактности множеств.

Определение. Говорят, что в множестве $M \in X$ существует **конечная ε-сеть** $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N(\varepsilon)}\}$, если для любого элемента $x \in M$ можно указать элемент x_n ε-сети, такой что

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon, \, n = n(x, \varepsilon)$$

Теорема (Хаусдорф, около 1914 г.)**.** *Для того, чтобы множество $K \subset X$ было компактно в X, необходимо и достаточно чтобы для любого $\varepsilon > 0$ в множестве K существовала конечная ε-сеть.*

Доказательство. Необходимость (От противного) Пусть K — компактное в X множество. Предположим, что для заданного $\varepsilon > 0$ не существует конечной ε-сети. Возьмем любой элемент $x_1 \in K$. Согласно предположению он не образует конечной ε-сети и существует элемент $x_2 \in K$ такой что $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon$. Два элемента x_1 и x_2 не образуют ε-сети, и существует третий элемент $x_3 \in K$ такой что значения $\rho(x_3, x_1), \ \rho(x_3, x_2), \ \rho(x_2, x_1) > \varepsilon$.

Продолжая этот процесс, получим последовательность элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \in K$ таких что $\rho(x_i, x_j) > \varepsilon$ при $i \neq j$. Из этой последовательности нельзя составить ни одной фундаментальной подпоследовательности, что противоречит компактности множества K.

Достаточность Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ любая последовательность элементов множества K. Образуем последовательность чисел $\varepsilon_k > 0$, монотонно стремящуюся к 0.

Для значения ε_1 в множестве K существует конечная ε_1-сеть, т.е. все множество K может быть покрыто конечным числом шаров радиуса ε_1. Так как последовательность $\{x_n\}$ содержит бесконечное число элементов, то среди упомянутых шаров найдется хотя бы один шар $V_{\varepsilon_1}(z_1)$, в котором содержится бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим x_{n_1} первый из таких элементов: $x_{n_1} \in V_{\varepsilon_1}(z_1)$.

Далее, шар $V_{\varepsilon_1}(z_1)$ может быть покрыт конечным числом шаров радиуса $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Тогда в одном из таких шаров $V_{\varepsilon_2}(z_2)$ содержится бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, и первый после x_{n_1} такой элемент обозначим x_{n_2} :

$$x_{n_1} \in V_{\varepsilon_1}(z_1) \cap V_{\varepsilon_2}(z_2),$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность элементов $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ таких что $x_{n_k} \in V_{\varepsilon_k}(z_k)$,

$$x_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^{k} V_{\varepsilon_i}(z_i),$$

где n_k возрастающая последовательность чисел. При $m > k$ оба элемента x_{n_k} и x_{n_m} принадлежат шару $V_{\varepsilon_k}(z_k)$. По неравенству треугольника

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_m}) \leqslant \rho(x_{n_k}, z_k) + \rho(z_k, x_{n_m}) \leqslant \varepsilon_k + \varepsilon_k = 2\varepsilon_k.$$

Следовательно подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ является фундаментальной. ■

Следствие. *Если в множестве $K \subset X$ существует компактная в X ε-сеть H_ε, то множество K компактно в X.*

Действительно, так как H_ε является ε-сетью для множества K, то для любого элемента $x \in K$ существует элемент $x_\varepsilon \in H_\varepsilon$ такой что $\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$. Из условия компактности множества H_ε в пространстве X следует, что в H_ε существует конечная ε-сеть элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n$, и для элемента x_ε существует элемент $\bar{x}_k \in H_\varepsilon$ такой что $\rho(x_\varepsilon, \bar{x}_k) < \varepsilon$. Тогда $\rho(x, \bar{x}_k) \leqslant \rho(x, x_\varepsilon) + \rho(x_\varepsilon, \bar{x}_k) \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

Следовательно элементы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_n$, множества H_ε образуют в множестве K конечную 2ε-сеть. По теореме Хаусдорфа множество K компактно в X.

Ясно, что компактное множество ограничено: существует шар конечного радиуса, которому принадлежит компактное множество.

Примеры

1. Любое ограниченное множество в конечномерном пространстве компактно (в математическом анализе это теорема Больцано-Вейерштрасса).

2. Множества, компактные в пространстве непрерывных функций.

   Теорема (Чезаро Арцела, 1870; Джулио Асколи, 1900)**.** *Для того, чтобы множество $E \in C[a, b]$ было компактным, необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

   – *Все функции $x \in E$ ограничены в совокупности: $\max\limits_{[a,b]}|x| < const$.*
   – *Все функции $x \in E$ равностепенно непрерывны: $\forall \varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любых значений $t^{'}, t^{''} \in [a, b]$ таких, что $|t^{''} - t^{'}| < \delta$ верно неравенство $|x(t^{''}) - x(t^{'})| < \varepsilon$, где δ не зависит от выбора функции x из E.*

Доказательство. Достаточность Пусть известно, что для функции $x \in E$ выполнены условия теоремы. Построим в E компактную ε-сеть H_ε. Для $\varepsilon > 0$ найдем значение $\delta > 0$ такое, что $|x(t'') - x(t')| < \varepsilon$ для всех t', t'' таких, что $|t'' - t'| < \delta$. Построим конечное число узлов $\{t_i\}$, $a = t_1 < t_2 < ... < t_n = b, t_{k+1} - t_k < \delta$ и зафиксируем их. Рассмотрим множество ломаных $\bar{x}(t)$ с вершинами в точках (t_k, η_k), где $\eta_k = x(t_k)$. Множество всех таких ломаных, построенных для функций множества E, обозначим H_ε.

Множество H_ε компактно в $C[a, b]$. Действительно, каждая ломаная определяется n числами $(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$, где все числа η_k ограничены: $|\eta_k| \le const$. Из любой последовательности ломаных из H_ε можно образовать фундаментальную последовательность.

Покажем, что компактное множество H_ε образует в E ε-сеть. Для любой функции $x \in E$ построим ломаную $\bar{x}(t), \bar{x} \in H_\varepsilon$. Так как $x(t)$ непрерывна, то на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ она достигает своего максимального значения M_k и своего минимального значения m_k: $m_k \le x(t) \le M_k, t \in [t_k, t_{k+1}]$. В этих же пределах лежат и значения линейной функции $\bar{x}(t)$. Ясно, что $|x(t) - \bar{x}(t)| \le M_k - m_k, t \in [t_k, t_{k+1}]$.

В силу выбора значения δ величины $M_k - m_k < \varepsilon$. Тогда и $\rho(x, \bar{x} < \varepsilon$. Согласна следствию теоремы Хаусдорфа, множество E компактно в $C[a, b]$.

Необходимость Свойства функций из компактного множества E, указанные в теореме, сразу следуют из существования в E конечной ε-сети непрерывных на $[a, b]$ функций $x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t)$.

■

3. Множества, компактные в пространстве суммируемых со степенью $p, (p \ge 1)$ функций.

Теорема (Марсель Рисс, 1935 г.). *Для того, чтобы множество E пространства $L_p[a, b]$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы*

– $\int\limits_a^b |x(t)|^p dt \le const, x \in E,$

– *при $\tau \to 0$ интегралы $\int\limits_a^b |x(t+\tau) - x(t)|^p dt \to 0$ равномерно относительно $x \in E$.*

Условия теоремы М. Рисса аналогичны условиям теоремы Арцела-Асколи для пространства непрерывных функций. Доказательство теоремы основано на плотности множества непрерывных на $[a, b]$ функций в пространстве $L_p[a, b]$.

4. Принцип вложенных шаров (В математическом анализе — лемма о вложенных отрезках).

Теорема. *Пусть в полном метрическом пространстве X дана последовательность замкнутых шаров $\overline{V}_{r_n}(x_n)$:*

$$\overline{V}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \overline{V}_{r_n}(x_n), \text{ где } r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Тогда в X существует и единственен элемент x^*, принадлежащий всем шарам $\overline{V}_{r_n}(x_n)$

Доказательство. Для расстояний $\rho(x_n, x_{n+m})$ между центрами этих шаров верно

$$\rho(x_n, x_{n+m}) < r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

и последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Так как пространство X полное, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \subset X$ и этот предел единственен.

Ясно, что x^* принадлежит всем шарам $\overline{V}_{r_n}(x_n)$.

■

1.2 Пространства первой и второй категории

Множество D всюду плотно в метрическом пространстве X, если для каждого элемента $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $z \in D$ такой что $\rho(x, z) < \varepsilon$.

Сформулируем утверждение: множество E не является множеством всюду плотным в пространстве X.

Определение. Множество E **не является всюду плотным** в X (**нигде не плотным** в X), если в любом замкнутом шаре $\overline{V}_r(x)$ существует замкнутый шар, в котором нет элементов множества E.

Пример. На плоскости (в пространстве R_2) множество точек любой прямой — нигде не плотное в R_2 множество. Рассмотрим множество прямых l, параллельных оси x и пересекающих ось y в точках с рациональными значениями координат y_n. Ясно, что множество таких прямых счётно, и каждая прямая l_n этого множества есть множество нигде не плотное в пространстве R_2.

Будет ли множество точек $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} l_k$ совпадать со всем пространством R_2? Ответ отрицателен: прямые, пересекающие ось y в точках с иррациональными значениями, не принадлежат $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} l_k$.

Определение. Множество E называется множеством первой категории, если оно представимо в виде

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

где все множества E_k нигде не плотные в X. Если множество E нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств, то E называется множеством второй категории.

В общем случае верна теорема:

Теорема (Луи Бэр, 1905 г.)**.** *Полное метрическое пространство X является множеством второй категории.*

Доказательство. (От противного)

Предположим, что $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где все множества нигде не плотные. Пусть $\overline{V}_{r_0}(x_0)$ произвольный шар. Так как E_1 нигде не плотно в X, то в этом шаре существует шар $\overline{V}_{r_1}(x_1)$, в котором нет элементов множества E_1. Можно считать, что радиус этого шара $r_1 < \frac{1}{2} r_0$.

Множество E_2 нигде не плотно: в шаре $\overline{V}_{r_1}(x_1)$ существует шар $\overline{V}_{r_2}(x_2)$, в котором нет элементов множества E_2 (и элементов множества E_1). Можно считать, что $r_2 < \frac{1}{2}r_1 < \frac{1}{2^2}r_0$.

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных шаров $\overline{V}_{r_1}(x_1) \supset \overline{V}_{r_2}(x_2) \supset ... \supset \overline{V}_{r_n}(x_n) \supset ...; r_n < \frac{1}{2^n}r_0, r_n \to 0$ при $n \to \infty$, и в каждом шаре $\overline{V}_{r_n}(x_n)$ нет элементов множеств $E_1, E_2, ..., E_n$.

По теореме о вложенных шарах существует элемент $x^* \subset X$: $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$.

Ясно, что $x^* \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V}_{r_n}(x_n)$ и следовательно $x^* \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, что противоречит предположению $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Остается принять, что множество X пространство второй категории.

■

1.3 Линейные пространства, нормированные пространства, пространства Банаха

Определение. Множество элементов называется **линейным множеством**, если для его элементов определены действия сложения и умножения на число (вещественное или комплексное), не выводящие из множества X:

– если $x, y \in X$, то $x + y \in X$

– если $x \in X$, то $\lambda x \in X$

Эти действия должны удовлетворять обычным условиям (аксиомам). Если λ вещественные числа, то X — вещественное линейное множество, если λ комплексные, то X — комплексное линейное множество. Для вещественного линейного множества можно построить комплексное линейное множество Z: достаточно ввести элементы $z = x + iy, \quad x, y \in X$ и определить сумму элементов:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

и ввести умножение на комплексное число λ:

$$\lambda z = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

(комплексификация линейного множества X).

Для комплексного линейного множества Z каждый элемент $z = x + iy$, где x и y — элементы вещественного множества.

Рассмотрим вещественное пространство X пар (x, y), в котором определим сумму: $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ и умножение на вещественное число λ: $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Множество пар (x, y) образует вещественное линейное множество X (декомплексификация комплексного линейного множества Z).

Из аксиом линейного множества отметим некоторые следствия:

1. Существования нулевого элемента: $\ominus = x - x = (1 - 1)x = 0x$.

2. Из равенства $\lambda x = 0$ при $\lambda \neq 0$ следует $x = \ominus$.

3. Определение линейной независимости элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

4. Определение размерности линейного множества X как наибольшего числа линейно независимых элементов множества X.

5. Линейное множество бесконечномерно, если для любого натурального n существует n линейно независимых элементов.

Примеры линейных множеств

1. Вещественное пространство V_n n-мерных векторов.
2. Множество прямоугольных матриц размерности $(n \times m)$.
3. Множество $C[t_0, t_1]$ непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций x. Функции $x_k(t) = t^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ линейно независимы, а пространство $C[t_0, t_k]$ бесконечномерно.
4. Множество решений $x \in C^n[t_0, t_1]$ уравнения

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n = 0, \text{ где } a_k \in C[t_0, t_1]$$

Снабжая линейное пространство метрикой, мы получаем более богатую теорию. Связь метрики с алгебраическими действиями реализуется введением норм элементов x: норма $\|x\|$ элемента $x \in X$, согласно определению есть число, которое должно удовлетворять трем условиям:

1. $\|x\| \geq 0$; если $\|x\| = 0$, то $x = \ominus$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Норма $\|x\|$ является непрерывной функцией: $|\|x + \triangle x\| - \|x\|| \to 0$ при $\|\triangle x\| \to 0$.

Верно неравенство $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

Определим метрику в линейном пространстве X: $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Ясно, что введенная таким образом метрика удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства. Линейное множество с метрикой, определяемой нормой элементов, называется **нормированным пространством**. Если нормированное пространство полное, то оно называется **пространством Банаха** (Стефан Банах, 1892-1945, польский математик), банаховым пространством, B-пространством.

Определение. Подпространством нормированного пространства X называется любое линейное замкнутое множество $X_0 \in X$.

Примеры.

1. Банаховы пространства n-мерных векторов получаем введением различных норм векторов $\bar{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:
   - $\|\bar{x}\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$,
   - $\|\bar{x}\|_1 = \sum\limits_i |x_i|$,
   - $\|\bar{x}\|_2 = (\sum\limits_i |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
2. Бесконечномерное банахово пространство $C[t_0, t_1]$ функций $x(t)$ непрерывных на $[t_0, t_1]$. Норма:

$$\|x\| = \max_t |x(t)|$$

функции $x_k(t) = t^k, k = 1, 2, 3, \ldots$ линейно независимы.

3. Бесконечномерное банахово пространство $C_n[t_0, t_1]$. Норма:

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_i \left|\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right|$$

4. Пространство Банаха $L_p(a,b)$ измеримых и суммируемых со степенью p, $p \geq 1$, функций. Норма:

$$\|x\|^p = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

Множество полиномов с рациональными коэффициентами плотно в этих пространствах.

5. Пример неполного нормированного пространства.

В линейном множестве $C[0,1]$ непрерывных функций введем норму (и метрику):

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}, \quad \rho(x,y) = (\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

Получаемое пространство не является полным. Действительно, последовательность функций $x_k(t) = t^k$ является фундаментальной последовательностью:

$$\|x_{n+m} - x_n\|^p = \int_0^1 (t^n - t^{n+m})^p dt = \int_0^1 t^{np}(1-t^m)^p dt < \int_0^1 t^{np} dt = \frac{1}{np+1} \to 0, \text{ при } n \to \infty$$

Предел же $\lim x_n(t)$ при $n \to \infty$ в пространстве $C[0,1]$ не существует.

1.4 Пространства Гильберта

Рассматривается линейное комплексное пространство, в котором введено скалярное произведение (x, y) элементов x и y, удовлетворяющее обычным свойствам скалярного произведения:

1. $(x,y) = \overline{(y,x)}$
2. $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$
3. (x,x) — вещественное число, $(x,x) \geqslant 0$ и если $(x,x) = 0$, то $x = \ominus$

Верно неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x) \cdot (y,y)$$

Действительно:

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0,$$
$$(x,x)+\lambda(y,x)+(x,\lambda y)+\lambda\bar{\lambda}(y,y) > 0,$$
$$(x,x)+2Re(\lambda y,x)+|\lambda|^2(y,y) \geq 0$$

для любых чисел λ. Если $(y,y)=0$, $y=\ominus$, то доказываемое утверждение верно. Если $(y,y)\neq 0$, то положим

$$\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)},$$
$$(\lambda y, x) = -\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}.$$

Тогда

$$(x,x) - 2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geq 0,$$
$$(x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geq 0$$

и

$$(x,x)(y,y) \geq |(x,y)|^2,$$
$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y).$$

Введём норму элементов $\| x \| = \sqrt{(x,x)}$ и получим нормированное пространство. Действительно

– $\| \lambda x \|^2 = (\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2(x,x) = |\lambda|^2 \| x \|^2$ и $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$
– $\| x+y \|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2|(x,y)| + (y,y) \leq$ (по неравенству Коши-Буняковского) $\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2$ т.е. и третье условие в определении нормы тоже выполнено: $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Если полученное нормированное пространство полно, то оно называется **пространством Гильберта** (Давид Гильберт, 1862-1943, немецкий математик).

Примеры гильбертовых пространств

1. Пространство l^2 числовых последовательностей $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2$ сходится. Скалярное произведение $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k$ и норма $\| x \|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2$.

2. Пространство $L^2_{\varphi}(a,b)$.

$$(x,y) = \int\limits_a^b \varphi(t)x(t)\bar{y}(t)dt$$

$$\| x \|^2 = \int_a^b \varphi(t) |x(t)|^2 dt$$

Функция $\varphi(t)$ — функция, суммируемая на (a, b) такая, что $\varphi(t) > 0$ почти везде.

Пространство $L^2_\varphi(a, b)$ сепарабельно: проведя декомплексификацию этого пространства, получим вещественные пространства, в которых множества полиномов с рациональными коэффициентами являются всюду плотными.

Введение скалярного произведения определяет понятия:

– ортогональных элементов: если $(x, y) = 0$, то пишут $x \perp y$

– ортогональных множеств

Теорема. *Если H_1 подпространство пространства H, а H_2 — ортогональное дополнение H_1, то любой элемент $x \in H$ можно представить единственным образом в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_1$, а $x_2 \in H_2$ и $\rho(x, H_1) = \| x - x_1 \|$*

Теорема. *Если H — сепарабельное гильбертово пространство, то в нём существует не более чем счётная ортогональная система элементов $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ (базис пространства H), и любой элемент $x \in H$ представим в виде*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

где $c_k = (x, \varphi_k)$ и $\sum\limits_k |c_k|^2 = \| x \|^2$ (c_k - коэффициенты Фурье элемента x в базисе φ_k).

Примеры.

1. Функции $1, \cos\frac{2\pi(t-a)}{b-a}, \sin\frac{2\pi(t-a)}{b-a}, \ldots, \cos\frac{2\pi k(t-a)}{b-a}, \sin\frac{2\pi k(t-a)}{b-a}$ образуют базис вещественного сепарабельного гильбертова пространства $L_2(a, b)$

2. Полиномы Лежандра $P_k(t)$ степени k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ образуют базис вещественного сепарабельного гильбертова пространства $L_2(a, b)$

3. Полиномы Чебышева $T_k(t)$ образуют базис пространства $L^2_\varphi(a, b)$, где $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}$

Глава 2

Линейные операторы в нормированных пространствах

2.1 Линейные операторы в нормированных пространствах

Пусть X и Y два множества и множество $D \subset X$. Если каждому элементу $x \in D$ поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение F с областью задания $D = D(F)$. Множество элементов $y \in Y$, таких что $y = F(x)$, где $x \in D$, называется областью значений отображения F. Естественным образом вводятся понятия обратного отображения F^{-1} и взаимно-однозначного отображения. Для метрических пространств X и Y рассматривается непрерывность отображения на элементе $x_0 \in D$ и непрерывность отображения D на множестве $X_0 \subset D$.

Полезным свойством отображения является **замкнутость** отображения.

Определение. Отображение F замкнуто, если для любой последовательности $\{x_n\}$

1. имеющей предел $\lim x_n = x^* \in D$ при $n \to \infty$,
2. и такой, что существует $\lim F(x_n) = y^* \in Y$

верно равенство $F(x^*) = y^*$.

Пример. $D = [-1; 1]$, $Y = [0; \infty)$

$$F(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{, если } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x^{-1} & \text{, если } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Ясно, что это отображение не является непрерывным на $[-1; 1]$, единственная точка разрыва $x = 0$. Но это отображение замкнуто:

1. при $x_n \to 0$ — существует $\lim x_n = x^* = 0 \in D$,
2. предел $F(x_n)$ существует и равен $y^* = 1 \in Y$

верно равенство $F(x^*) = y^*$.

В определении замкнутости отображения исключаются сходящиеся последовательности $\{x_n\}$, для которых предел $F(x_n)$ не существует.

В этой главе мы будем рассматривать отображения, областями задания и областями значений которых являются линейные множества.

Определение. Отображение F называется **аддитивным**, если $F(x_1+x_2) = F(x_1)+F(x_2)$.

Определение. Отображение F называется **однородным**, если $F(\lambda x) = \lambda F(x)$. Для комплексных линейных множеств X и Y выполнено: $F(ix) = iF(x)$.

Определение. Отображения аддитивные и однородные будем называть **операторами**. Для оператора A верно:

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$$

В определении оператора требование непрерывности можно заменить непрерывностью на элементе $\ominus \in D(A)$: для любого элемента $x_0 \in D(A)$ рассмотрим $x \to x_0$ и

$$z = (x - x_0) \to \ominus.$$

Тогда

$$A(x - x_0) \to \ominus \text{ и } Ax \to Ax_0.$$

Важнейшим классом операторов являются ограниченные операторы.

Определение. Оператор A называется ограниченным, если любое ограниченное множество он отображает в множество, ограниченное в Y.

В дальнейшем мы будем рассматривать нормированные пространства X и Y.
Для ограниченного оператора A обозначим величину

$$\sup_{\|x\|=1} \| Ax \| = \sup_{S_1} \| Ax \| = C_0 < +\infty$$

Тогда

$$\sup_{S_R} \| Ax \| = R \cdot C_0 \text{ и величина } \sup_{S_R} \| Ax \| \to \infty \text{ при } R \to \infty.$$

Линейная зависимость

$$\sup_{S_R} \| Ax \|$$

от величины R для ограниченных операторов даёт более практичное определение ограниченного оператора.

Определение. Оператор A называется линейным оператором из X в Y, если величина

$$C_0 = \sup_{S_1} \| Ax \| < +\infty.$$

Эта величина называется **нормой** линейного оператора, она обозначается

$$\| A \|, \quad (\| A \|_{X \to Y}).$$

Величина $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \| Ax \| = \| A \| = \sup\limits_{\|x\|=1} \| Ax \|$.
Действительно,

$$C_0 \le \sup_{\|x\|=1} \| Ax \|.$$

С другой стороны

$$\| Ax \| = \| x \| \cdot \| A(\tfrac{x}{\|x\|}) \| \le C_0$$

при $\| x \| \leq 1$; $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \| Ax \| \leq C_0$.

Тогда

$$C_0 \geq \sup_{\|x\|\leq 1} \| Ax \|, \text{ и мы получаем } \sup_{\|x\|\leq 1} \| Ax \| = \| A \|.$$

Для линейных операторов верна оценка: $\| Ax \|_Y = \| A \| \cdot \| x \|_X$.

Замечание. Если получена оценка $\| Ax \| \leq C \| x \|$, то $\| A \| \leq C$.

Пример. Интегральный оператор K из $X = L_p(a,b)$ в $Y = L_q(a,b)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$y = K \cdot x \ , \ y(t) = \int\limits_a^b K(t,\tau) \cdot x(\tau) d\tau.$$

Относительно ядра $K(t,\tau)$ будем предполагать, что

$$(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q dt d\tau)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Согласно неравенству Гёльдера интеграл

$$|\int\limits_a^b K(t,\tau) \cdot x(\tau) d\tau| \leq (\int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau)^{\frac{1}{q}} \cdot (\int\limits_a^b |x(\tau)|^p d\tau)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \| x \|_{L_p(a,b)} \cdot (\int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau)^{\frac{1}{q}}.$$

$$\| y \|^q_{L_q(a,b)} = \int\limits_a^b |\int\limits_a^b K(t,\tau) \cdot x(\tau) d\tau|^q dt \leq \| x \|^q_{L_p(a,b)} \cdot \int\limits_a^b dt \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau.$$

$$\| y \|_{L_q(a,b)} = \| Kx \|_{L_q(a,b)} \leq (\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau dt)^{\frac{1}{q}} \cdot \| x \|_{L_p(a,b)}$$

и $\| K \| \leq (\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau dt)^{\frac{1}{q}}$.

Можно показать, что $\| K \| = (\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau dt)^{\frac{1}{q}}$.

2.2 Пространство линейных операторов

Рассмотрим множество всех линейных операторов их нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Множество таких операторов обозначим $L(X,Y)$. Введем в этом множестве операции сложения и умножения на число:

$$A + B : (A + B)x = Ax + Bx, \lambda A : (\lambda A) = \lambda Ax$$

Ясно, что выполнены все аксиомы линейного множества, множество $L(X,Y)$ - линейное множество. Введем метрику в этом множестве $\rho(A,B) = \| A - B \|$ и получим нормированное пространство $L(X,Y)$. Проверим, например, выполнение неравенства треугольника.

Согласно определению $(A+B)x = Ax + Bx$ и $\| (A+B)x \| \leq (\| A \| + \| B \|) \| x \|$. Следовательно $\| A+B \| \leq \| A \| + \| B \|$.

Определим теперь понятие сильной сходимости последовательности линейных операторов.

Определение. Последовательность $\{A_n\} \in L(X,Y)$ **сильно сходится** к линейному оператору $A \in L(X,Y)$, если $||A_n - A|| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема. *Если Y — банахово пространство, то пространство $L(X,Y)$ также банахово.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ - фундаментальная последовательность линейных операторов: $\| A_{n+m} - A \| \leq \varepsilon$ при достаточно больших n. Взяв произвольный элемент $x \in X$, построим последовательность $y_n \in Y$, $y_n = A_n x$. Эта последовательность сходится в себе $\| y_{n+m} - y_n \| \leq \| A_{n+m} - A_n \| \| x \| \leq \varepsilon \| x \|$, и в силу полноты пространства Y существует предельный элемент $y \leq Y$, такой что $y = \lim A_n x$ при $n \to \infty$. Следовательно определен оператор $A : y = Ax$.

Покажем, что этот оператор ограничен. Так как $|\| A_{n+m} \| - \| A_n \|| \leq \| A_{n+m} - A_n \| \leq \varepsilon$ при достаточно больших n, то числовая последовательность норм $\| A_n \|$ имеет предел $\lim_{n\to\infty} \| A_n \| = C$. Тогда $\| y_n \| \leq \| A_n \| \| x \|$ и переходя к пределу, получим $\| y \| \leq C \| x \|$, и норма оператора A ограничена, оператор A - линейный оператор, $\| A \| \leq C$, $A \in L(X,Y)$. ■

Определим теперь понятие поточечной сходимости последовательности линейных операторов.

Определение. Последовательность линейных операторов $\{A_n\} \in L(X,Y)$ сходится к оператору $A \in L(X,Y)$ поточечно, если для любого $x \in X$ последовательность элементов $y_n = A_n x \to Ax$ при $n \to \infty$

Из сильной сходимости $A_n \to A$ следует и поточечная сходимость последовательности $\{A_n\}$.

$$\| A_n x - Ax \|_Y = \| (A_n - A)x \| \leq \| A_n - A \| \| x \| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Обратное утверждение неверно.

Пример. Рассмотрим банахово пространство l_1 числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ таких что числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k|$ сходится и норма $\| x \| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$

Зададим последовательность аддитивных операторов A_n из l_1 в l_1: $A_n x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$

Операторы A_n линейные: $\| A_n \| = \sup\limits_{S_1} \| A_n x \| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| = 1$, $\| A_n \| = 1$, $A_n \in L(l_1, l_1)$.

Рассмотрим последовательность линейных операторов $E - A_n \in L(l_1, l_1)$. Ясно, что $\| (E - A_n)x \| = \| (0, 0, ..., 0, x_{n+1}, x_{n+2}, ...) \| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \to 0$ при $n \to \infty$, так как числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ сходится.

Таким образом $A_n x \to x$ для любых $x \in l_1$ при $n \to \infty$. Последовательность операторов A_n сходится поточечно к тождественному оператору.

На сфере S_1 в l_1 рассмотрим множество элементов S_1^0, таких что $x = (0, 0, ..., 0, x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k| = 1$. $\| E - A_n \| = \sup\limits_{S_1} \| (E - A_n)x \| \geq \sup\limits_{S_1^0} \| (E - A_n)x \| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k| = 1$ и $\| E - A_n \| \geq 1$ при всех n. Последовательность линейных операторов A_n не сходится сильно к тождественному оператору.

2.3 Теорема Банаха-Штейнгауза

Рассмотрим последовательность линейных операторов $A_n \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Пусть для каждого $x \subset X$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y(x) \subset Y$. Тем самым определен аддитивный и непрерывный оператор A, $Ax = y(x)$. Пример предыдущего параграфа показывает, что этот оператор может и не являться сильным пределом последовательности операторов A_n: хотя $A_n x \to Ex$, но $\lim A_n \neq E$.

Вопрос: при каких условия существует **линейный** оператор A и можно ли оценить его норму?

Мы начнем с простой леммы.

Лемма (Лемма I)**.** *Пусть оператор $A_n \subset \mathcal{L}(X, Y)$ и известно, что для всех элементов некоторого шара $S_r(x_0)$ нормы $\|A_n x\|_Y$ ограничены: $\|A_n x\| \le c$. Тогда существует постоянная M, такая что норма оператора A_n ограничена числом M: $\|A_n\| \le M$.*

Доказательство. Возьмем любой элемент $x \subset X$ и образуем элемент $x_0 + \frac{x}{\|x\|} r \subset S_r(x_0)$. Тогда:

$$\|A_n(x_0 + \tfrac{r}{\|x\|} x)\| \le c, \text{ т.е.}$$
$$c \ge \|A_n(x_0 + \tfrac{r}{\|x\|} x)\|,$$
$$c \ge \|\tfrac{r}{\|x\|} A_n x + A_n x_0\| \ge \|A_n x\| \tfrac{r}{\|x\|} - \|A_n x_0\| \ge \tfrac{r}{\|x\|} \|A_n x_0\| - c,$$
$$2c \ge \tfrac{r}{\|x\|} \|A_n x\|, \ \tfrac{2c}{r}\|x\| \ge \|A_n x\|, \ \|A_n x\| \le \tfrac{2c}{r}\|x\|$$

Достаточно положить $M = \frac{2c}{r}$: $\|A_n x\| \le M\|x\|$ для всех $x \subset X$, следовательно норма оператора $\|A\| \le M$. ■

Следующая лемма верна для полных нормированных пространств X, т.е. для банаховых пространств.

Лемма (Лемма II)**.** *Пусть X — пространство Банаха. Пусть $\{A_n\}$ последовательность операторов множества $\mathcal{L}(X, Y)$. Тогда если нормы $\|A_n x\|$ элементов $A_n x$ ограничены для каждого $x \subset X$, то нормы операторов A_n $\|A_n\|$ ограничены в совокупности.*

Доказательство. (От противного)

Предположим, что в X существует замкнутый шар $\bar{S}_0$, для **всех** элементов которого $\|A_n x\| < c$ при всех n, но последовательность норм $\|A_n\|$ неограниченна. Это предположение неверно, так как согласно Лемме I норма каждого оператора $\|A_n\| \le M$.

Остаётся предположить, что существует шар $\bar{S}_0$, в котором значения $\|A_n x\|$ неограниченны, т.е. найдется номер n_1 и найдется элемент $x_1 \subset \bar{S}_0$, такие что $\|A_{n1}(x_1)\| > 1$. Так как оператор A_{n1} (как и все операторы A_n) непрерывен, то существует шар $\bar{S}_1 \subset \bar{S}_0$, в котором $\|A_{n1}(x)\| > 1$.

Далее: значения $\|A_n x\|$ в шаре $\bar{S}_1$ не могут быть ограничены при всех n. Тогда должен существовать номер n_2 и элемент $x_2 \subset \bar{S}_2$, такие что $\|A_{n2}(x_2)\| > 2$, (а по непрерывности A_{n2}) и шар S_2, в котором $\|A_{n2}(x)\| > 2$ для всех $x \subset \bar{S}_2$.

Продолжая этот процесс мы получим последовательность вложенных шаров $\bar{S}_0 \supset \bar{S}_1 \supset \bar{S}_2 \ldots \supset \bar{S}_n \supset \ldots$ и последовательность элементов $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, таких что $\|A_{nk} x_k\| > k$. Ясно, что радиусы r_k шаров $\bar{S}_k$ можно выбирать так, что $r_k \to 0$.

Так как пространство X полное, то по теореме о вложенных шарах существует элемент $x^k \subset X$ принадлежащий всем шарам S_k. Тогда $\|A_n x_n\| \to \infty$ при $k \to \infty$, что противоречит условиям леммы. ■

Замечание. Если $\{\|A_n x\|\}$ не ограничена, то существует элемент $x^* \subset X$, на котором $\sup\|A_n x^*\| = \infty$ — принцип фиксации особенности в полном банаховом пространстве X.

Теперь можно указать условия, при которых из сходимости последовательности элементов $\{A_n x\}$ при любом $x \subset X$ следует поточечная сходимость последовательности операторов A_n к **линейному** оператору A: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y(x) \subset Y$, $Ax = y(x)$.

Теорема (Банаха-Штейнгауза). *Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, где X и Y — пространства Банаха. Для того, чтобы последовательность операторов $\{A_n\}$ сходилась поточечно к линейному оператору на всем пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены два условия:*

1. *Нормы $\|A_n\|$ ограничены в совокупности: $\|A_n\| \le M$.*
2. *Последовательность элементов $A_n x$ сходится в себе на множестве D плотном в X.*

Доказательство. Необходимость Пусть $A_n x \to Ax$. Тогда $\|A_n x\| \to \|Ax\| \le \|A\|\|x\|$, и последовательность норм элементов $\|A_n x\|$ ограничена при каждом $x \subset X$. По Лемме II нормы $\|A_n\|$ ограничены в совокупности — условие 1 выполнено.

Так как последовательность $A_n x$ сходится на всем пространстве X (и сходится в себе на всем X), то она сходится в себе на любом множестве пространства X — условие 2 выполнено.

Достаточность Покажем, что последовательность элементов $A_n x$ сходится в себе на всем пространстве X.

По любому заданному $\varepsilon > 0$ для любого элемента $x \subset X$ найдется элемент $x' \subset D$ такой, что $\|x - x'\| < \varepsilon$. Оценим $\|A_n x - A_m x\|$ при достаточно больших значениях m и n:

$$\|A_n x - A_m x\| = \|A_n x' - A_m x' + A_n x - A_n x' + A_m x' - A_m x\|$$

Значения $\|A_n x' - A_m x'\| < \varepsilon$ при достаточно больших m и n.

Значения $\|A_n x - A_n x'\| < M\varepsilon$, $\|A_m x' - A_m x\| < M\varepsilon$.

Итак, $\|A_n x - A_m x\| < (2M+1)\varepsilon$ при достаточно больших m и n, последовательность $A_n x$ сходится в себе на всем X, а так как пространство Y полное, то существует $\lim\limits_{n\to\inf} A_n x = y(x) \subset Y$ и тем самым определен оператор: $Ax = y(x)$. Для оценки нормы этого оператора из неравенства $\|A_n x\| < M\|x\|$ получим $\|A\| \ge \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|A_n\|$ ($\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ в интервале $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ содержится бесконечное число элементов последовательности $\{a_n\}$, а справа от этого интервала существует не более чем конечное число членов последовательности $\{a_n\}$).

Напомним, что последовательность операторов A_n может и не иметь сильного предела. ∎

Замечание. Формулировка теоремы не предполагает знания оператора A. Если же оператор предъявлен, то вместо условия 2 можно проверить сходимость $A_n x \to Ax$ на линейном множестве D плотном в X. В этом случае предположение, что Y банахово — излишне.

2.4 Теорема Банаха

Основной целью нашего курса является изучение условий разрешимости уравнения $Ax = y$, т. е. условие существования линейного оператора $B \in L(Y,X)$: $By = A^{-1}x$. Если такой оператор существует, то задача решения уравнения $Ax = y$ поставлена корректно по Адамару:

1. решение существует для любого $y \in Y$,

2. решение единственно,

3. вариации Δx решения непрерывно зависят от вариаций Δy элемента y: $\|\Delta x\|_X \leq \|B\|_{Y\to X}\|\Delta y\|_X$.

Оператор A предполагается линейным, а оператор B определен на всем банаховом пространстве Y. В этом случаем операторы A и B замкнуты. Действительно:

1. Из условий $\{x_n \to x^*; Ax_n \to y^*\}$ следует, что $Ax_n \to Ax^*$ и $y^* = Ax^*$, т.е. оператор A замкнут.

2. Пусть выполнены условия: $\{y_n \to y^*; By_n \to x^*\}$. Обозначим $x_n = A^{-1}y_n$ (оператор A^{-1} определен на всём пространстве Y). Тогда $x_n \to x^*$ и $y_n = Ax_n \to Ax^*$. Так как оператор A замкнут, то из условий $\{x_n \to x^*; Ax_n \to y^*\}$ следует, что $y^* = Ax^*$, т.е. $x^* = By^*$. Тогда оператор B замкнут.

Лемма. *Пусть оператор B задан на всем банаховом пространстве Y. Тогда в Y существует плотное множество элементов M, таких, что $\|By\|_X \leq C_0\|y\|_Y$, где значение постоянной C_0 не зависит от выбора элементов $y \subset M$.*

Доказательство. Построим множество M.

1. Для любого выбранного элемента $y \subset Y$ можно найти такое натуральное число k, что $\|By\| \leq k\|y\|$.

   Множество таких элементов y обозначим Y_k. Множество Y_k "однородно": если $y \subset Y_k$, то элементы $\lambda y \subset Y_k$ для всех чисел λ. Ясно, что при $m \leq k$ $Y_m \subset Y_k$ и что

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$$

   Так как Y полное пространство, то среди множеств Y_k найдется хотя бы одно множество, которое не является нигде не плотным в пространстве Y (см. теорему Бэра, глава I). Обозначим его Y_n.

2. В пространстве Y существует хотя бы один шар (например S), в котором любой шар (например $\overline{S}_{r_0}(u_0)$) содержит элементы множества Y_n.

   Таким образом, множество Y_n плотно в $\overline{S}_{r_0}(u_0) \subset S$. Можно считать, что элемент $u_0 \subset Y_n$. Зафиксируем элемент u_0 и число r_0.

3. Пусть y любой элемент Y, норма которого равна $r_0 : \|y\| = r_0$. Построим элемент $z_0 = u_0 + y$, принадлежащий границе шара $S_{r_0}(u_0)$. Далее построим последовательность элементов $u_j \subset S_{r_0}(u_0)$ таких, что

$$u_j \to z_0 \text{ и } u_j \subset Y_n.$$

   Обозначим $y_j = u_j - u_0$. Ясно, что $y_j \to y$, $y_j \subset S_{r_0}(u_j)$ (последовательность элементов y_j не обязательно принадлежит множеству Y_n!)

1. Свойство элементов y_j.

   $\|By_j\| = \|B(u_j - u_0)\|$ (аддитивность B) $= \|Bu_j - Bu_0\| \leq \|Bu_j\| + \|Bu_0\|(u_0, u_j \in Y_n) \leq n(\|u_j\| + \|u_0\|) \cdot 1$. Оценим $\|B_j\|$ через норму элементов $\|y_j\|$. Так как $y_j \to y$, то $\|y_j\| \to \|y\| = r_0$, и при достаточно больших значениях j:

$$\|y_j\|\frac{1}{r_0} > \frac{1}{2} \text{ и } 1 < \frac{2}{r_0}\|y_j\|.$$

Для таких значений j: $\|By_j\| \leq \frac{2}{r_0}n(\|u_j\| + \|u_0\|)$ и так как $\|u_j\| = \|u_0 + u_j - u_0\| \leq \|u_0\| + \|u_j - u_0\| \leq \|u_0\| + r_0$, то для достаточно больших значений j:

$$\|By_j\|_X \leq \frac{2}{r_0}(r_0 + \|u_0\|) \cdot n \cdot \|y_j\|_Y.$$

Величину $\frac{2}{r_0}(r_0 + \|u_0\|) \cdot n$ оценим натуральным числом N:

$$\|By_j\| \leq N\|y_j\| \text{ и } y_j \in Y_N.$$

Так как $y_j \to y$, то множество Y_N плотно в множестве элементов y с нормой r_0. Значение N, согласно п.п. 1.2, зависит только от фиксированных значений r, n_0 и $u_0 \in Y$. Так как множество Y_N "однородно", то и для любого $y \in Y$ существует последовательность элементов $y_j \in Y_N$, такая что $y_j \to y$ при $j \to \infty$ и $\|By_j\| \leq N|y_j\|$. Обозначив $M = Y_N$ и $C_0 = N$, завершим доказательство леммы.

■

Теорема (Банаха)**.** *Замкнутый оператор B, действующий из банахова пространства Y в банахово пространство X и определённый на всём пространстве Y, линеен.*

Доказательство. Согласно лемме в пространстве Y существует всюду плотное множество M, для элементов которого

$$\| By \|\leq C_0 \| y \|$$

1. Пусть y_0 любой элемент пространства Y.

   Построим шар радиуса $\frac{1}{4} \parallel y_0 \parallel$ с центром $\frac{3}{4}y_0$. В этом шаре найдём элемент $y_1 \in M$:

$$\| y_1 - \tfrac{3}{4}y_0 \|\leq \tfrac{1}{4} \| y_0 \|,$$

$$\| y_1 \|=\| y_1 - \tfrac{3}{4}y_0 + \tfrac{3}{4}y_0 \|\leq \tfrac{1}{4} \| y_0 \| +\tfrac{3}{4} \| y_0 \|=\| y_0 \|$$

2. Рассмотрим элемент $y_1 - y_0$. Для него

$$\| y_1 - y_0 \|=\| y - \tfrac{3}{4}y_0 + \tfrac{1}{4}y_0 \|\leq \tfrac{1}{4} \| y_0 \| +\tfrac{1}{4} \| y_0 \|= \tfrac{1}{2} \| y_0 \|$$

   Построим шар радиуса $\frac{1}{4} \parallel y_1 - y_0 \parallel$ с центром $\frac{3}{4}(y_1 - y_0)$. В этом шаре найдём элемент $y_2 \in M$:

$$\| y_2 + y_1 - y_0 \|=\| y_2 - \tfrac{3}{4}(y_1 - y_0) - \tfrac{1}{4}(y_1 - y_0) \|\leq \tfrac{1}{4} \| y_1 - y_0 \| +\tfrac{1}{4} \| y_1 - y_0 \|=$$

$$= \tfrac{1}{2} \| y_1 - y_0 \|\leq \tfrac{1}{2^2} \| y_0 \| ,$$

$$\| y_2 \|=\| y_2 - \tfrac{3}{4}(y_1 - y_0) + \tfrac{3}{4}(y_1 - y_0) \|\leq \tfrac{1}{4} \| y_1 - y_0 \| +\tfrac{3}{4} \| y_1 - y_0 \|=\| y_1 - y_0 \|\leq$$

$$\leq \tfrac{1}{2} \| y_0 \|$$

3. Рассмотрим элемент $y_2 + y_1 - y_0$. Для него

$$\| y_2 + y_1 - y_0 \| \leq \frac{1}{2^2} \| y_0 \| .$$

Построим шар радиуса $\frac{1}{4} \| y_2+y_1-y_0 \|$ с центром $\frac{3}{4}(y_2+y_1-y_0)$. В этом шаре найдём элемент $y_3 \in M$:

$$\| y_3 + y_2 + y_1 - y_0 \| = \| y_3 - \frac{3}{4}(y_0 - y_1 - y_2) - \frac{1}{4}(y_0 - y_1 - y_2) \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \| y_0 - y_1 - y_2 \| + \frac{1}{4} \| y_0 - y_1 - y_2 \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \| y_0 \| = \frac{1}{2^3} \| y_0 \| ,$$

$$\| y_3 \| = \| y_3 - \frac{3}{4}(y_0 - y_1 - y_2) + \frac{3}{4}(y_0 - y_1 - y_2) \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \| y_0 - y_1 - y_2 \| + \frac{3}{4} \| y_0 - y_1 - y_2 \| = \| y_0 - y_1 - y_2 \| \leq \frac{1}{2^2} \| y_0 \|$$

Продолжая этот процесс, получим элементы $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, ..., y_3, y_2, y_1 \in M$ такие что

$$\|y_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|y_0\|$$

и

$$\|y_n + y_{n-1} + y_{n-2} + ... + y_2 + y_1 + y_0\| \leq \frac{1}{2^n}\|y_0\|.$$

Обозначим $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k$. Тогда $s_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Последовательность элементов Bs_n сходится в себе:

$$\|Bs_{n+m} - Bs_n\|_X = \|B(s_{n+m} - s_n)\| = \|B(y_{n+1} + y_{n+2} + ... + y_{n+m})\| \leq$$

$$\leq C_0\|y_0\|(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + ... + \frac{1}{2^{n+m-1}}) = C_0\frac{1}{2^n}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{m-1}}) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Так как пространство X полное, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x^* \in X$.

Переходя в оценке $\|Bs_{n+m} - Bs_n\|$ к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\|x^* - Bs_n\| \leq C_0\|y_0\|(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + ...).$$

Так как $s_n \to y_0, Bs_n \to x^*$, то в силу замкнутости оператора B:

$$By_0 = x^*.$$

Оценим $\|By_0\|_X$:

$$\|By_0\| \leq \|x^* - Bs_n\| + \|Bs_n\| \leq$$

$$\leq C_0\|y_0\|[\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + ...] + C_0\|y_0\|[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}] = 2C_0\|y_0\|$$

$\|By_0\| \leq 2C_0\|y_0\|$, т.е. оператор B линеен, $\|By_0\|_{Y\to X} \leq 2C_0$.

■

Пример. В качестве примера рассмотрим обратную задачу теплопроводности.

1. Прямая задача теплопроводности.

   Рассматривается бесконечная пластина толщиной π: $0 \le \xi \le \pi$, $-\infty < y < +\infty$. Распределение температуры $x(\xi, y, t)$ в точках этой пластины зависит только от координаты ξ и времени t: $x(\xi, y, t) = x(\xi, t)$.На граничных плоскостях при $\xi = 0$ и при $\xi = \pi$ температура равна нулю при всех $t > 0$:

$$x(0,t) = 0,\ x(\pi,t) = 0 \tag{2.1}$$

   Внутри пластины источников тепла нет. Функция $x(\xi, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \text{ при } \xi \in (0,\pi),\ t > 0 \tag{2.2}$$

   В момент времени $t = 0$ распределение температуры известно:

$$x(\xi, 0) = x(\xi) \tag{2.3}$$

   Прямая задача теплопроводности состоит в нахождении функции $x(\xi, t)$ при всех $t > 0$, т.е. в решении уравнения (2.2) при граничных условиях (2.1) и при начальном условии (2.3).

   «Обобщенное» решение этой простейшей задачи при условии $x(\xi) \in L_2(0, \pi)$ получаем методом Фурье:

$$x(\xi,t) = \sum_{k=1}^{n} x_k e^{-k^2 t} X_k(\xi),$$

$$\text{где } X_k(\xi) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin(k\xi), \text{ а числа } x_k = (x, X_k) = \int\limits_0^{\pi} x(\xi) X_k(\xi) d\xi.$$

   Ясно, что $\|x(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,\pi)} \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \|x\|^2$, т.е. функция $x(\xi, t)$ как функция переменной ξ принадлежит пространству $L_2(0, \pi)$.

$$x(\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} X_k(\xi) \int\limits_0^{\pi} x(\eta) X_k(\eta) d\eta = \int\limits_0^{\pi} K(\xi,\eta,t) x(\eta) d\eta.$$

   В частности $x(\xi, T) = \int\limits_0^{\pi} K(\xi, \eta, T) x(\eta) d\eta = Ax$. Оператор A линейный интегральный оператор из пространства $L_2(0, \pi)$ в пространство $L_2(0, \pi)$. Норма этого оператора не превосходит 1, оператор A замкнут.

2. Обратная задача теплопроводности.

   В момент времени $t = T$ измеряется распределение температуры:

$$x(\xi, T) = y(\xi)$$

   Требуется «восстановить» неизвестное начальное распределение $x(\xi)$, т.е. требуется решить уравнение $Ax = y$, где $A \in \mathscr{L}(X, Y),\ X = L_2(0,\pi),\ Y = L_2(0,\pi)$ — банаховы пространства.

   Будет ли эта задача корректно поставлена по Адамару?

   Довольно просто доказать, что если решение задачи существует, то это решение единственно. Для того, чтобы задача была поставлена корректно по Адамару, остается доказать (согласно теореме Банаха), что задача разрешима при любой функции $y \in Y$, т.е. доказать, что обратный оператор $B = A^{-1}$ заданы на всем пространстве $Y = L_2(0, \pi)$.

   Это утверждение неверно.

   Действительно, рассмотрим функцию

$$y(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} X_k(\xi),\ y \in L_2(0,\pi),\ \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \|y\| = \frac{1}{\sqrt{6}}\pi.$$

   Предположим, что решение $x(\xi)$ такой обратной задачи существует. Тогда коэффициенты Фурье x_k этого решения должны быть равными

$$x_k = e^{k^2 T} \tfrac{1}{k} \quad \text{и} \quad x(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k X_k(\xi)$$

   Но ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{2k^2 T} \frac{1}{k^2}$ при $T > 0$ расходится, следовательно функция x не принадлежит пространству $L_2(0, \pi)$. Наше предположение неверно.

   Ясно, что отсутствует и непрерывная зависимость решения от вариации правых частей. Действительно, пусть x^* есть точное решение уравнения $Ax^* = y^*$. Рассмотрим вариацию правой части Δy:

$$\Delta y = \varepsilon \int_{k=1}^{n} \frac{1}{k} X_k(\xi), \quad \|\Delta y\|^2 = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \varepsilon^2 \frac{\pi^2}{6} \ \text{ и } \ \|\Delta y\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}}\pi.$$

   Для соответствующей вариации решения Δx получаем

$$\|\Delta x\|^2_{L_2(0,\pi)} = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} e^{2k^2 T},$$

   и величина $\|\Delta x\|$ сколь угодно велика при $n \longrightarrow \infty$.

2.5 Вполне непрерывные операторы

Определение. Линейный оператор $A \subset Z(X,Y)$ называется **вполне непрерывным**, если любое ограниченное в X множество он отображает в множество, компактное в Y.

Напомню, что в компактном множестве в любой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержится фундаментальная последовательность. Если же пространство Y полно, то согласно определению эта фундаментальная последовательность имеет предел в Y.

Множество всех вполне непрерывных операторов обозначим $\sigma(X,Y)$.

Теорема. *Множество $\sigma(X,Y)$ является подпространством пространства $Z(X,Y)$.*

Доказательство. Сostроит в доказательстве двух пунктов (согласно определению подпространства).

1. Если $A_1, A_2 \subset \sigma(X,Y)$, то их линейная комбинация $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in \sigma(X,Y)$.

   Рассмотрим множество AS_1, где S_1 — единичная сфера в пространстве X. Покажем, что множество AS_1 компактно в Y. Возьмем любую последовательность элементов $x_n \subset S_1$, $\|x_n\| = 1$. Обозначим элементы $Ax_n = y_n$, $y_n = \lambda_1 A_1 x_n + \lambda_2 A_2 x_n$.

   Так как множество $A_1 S_1$ компактно в Y, то из последовательности $\{A_2 x_{n_k}\}$ можно выделить фундаментальную последовательность $\{A_2 x_i'\}$. Ясно, что последовательность $\{(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) x_i'\}$ является фундаментальной последовательностью в Y.

2. Покажем, что множество $\sigma(X,Y)$ замкнуто. Так как $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$, то для выбранного $\varepsilon > 0$ рассмотрим операторы A_n такие что $\|A_n - A\| \le \varepsilon$ и при $x \subset S_1$ $\|A_n x - Ax\| \le \varepsilon$. Зафиксируем n. Рассмотрим множество элементов $A_n S_1$. Так как множество $A_n S_1$ компактно в Y, то в множестве $A_n S_1$ существует конечная ε-сеть $\{y_k\}$ $y_k = A_n x_k$, $x_k \subset S_1$. Тогда $\|y_k - Ax\| \le \|y_k - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| \le 2\varepsilon$. Следовательно, элементы y_k образуют 2ε-сеть в множестве Y и, согласно теореме Хаусдорфа, множество AS_1 компактно.

■

Контр-пример. Тождественный оператор E в сепарабельном гильбертовом пространстве не является вполне непрерывным оператором.

Действительно, пусть $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ..., \|\psi_n\| = 1$ — ортонормальный базис пространства. Множество S_1 ограничено, но множество $ES_1 (= S_1)$ не является компактным: из последовательности $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ нельзя выбрать фундаментальную последовательность, так как $\|\psi_n - \psi_m\|^2 = (\psi_n - \psi_m, \psi_n - \psi_m) = (\psi_n, \psi_n) + (\psi_m, \psi_m) = 2$ при $n \ne m$

Пример. Интегральный оператор $\widetilde{K}$ из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$.

$$y = \widetilde{K}x,\ y(t) = \int\limits_a^b \widetilde{K}(t,\tau) x(\tau) d\tau,$$

где ядро $\widetilde{K}(t,\tau)$ непрерывно в области $D = [a,b] \times [a,b]$, $|\widetilde{K}(t,\tau)| \le M$.

В этом случае функции $y(t)$ непрерывны:

$$|y(t_2) - y(t_1)|^2 \le \int\limits_a^b |\widetilde{K}(t_2,\tau) - \widetilde{K}(t_1,\tau)|^2 d\tau \cdot \int\limits_a^b |x(\tau)|^2 d\tau \le \varepsilon^2 (b-a) \|x\|^2{}_{L_2(a,b)}$$

Величина $|y(t_2) - y(t_1)| \to 0$ при $|t_2 - t_1| \to 0$ в силу непрерывности функции $\widetilde{K}(t, \tau)$ как функции двух переменных. Таким образом, множество функций $\widetilde{K}S_1$ равностепенно непрерывно.

Ясно, что функции множества $\widetilde{K}S_1$ ограничены в совокупности: $|y(t)|^2 \leq M^2(b-a)$.

По теореме Арцела-Асколи множество $\widetilde{K}S_1$ компактно в $C[a, b]$: из любой последовательности элементов $y_n = \widetilde{K}x_n$ можно выделить фундаментальную последовательность в $C[a, b]$, которая является фундаментальной последовательностью и в пространстве $L_2(a, b)$).

Пример. Интегральный оператор K из $L_2(a, b)$ в $L_2(a, b)$.

$$y = Kx,\ y(t) = \int\limits_a^b K(t, \tau)x(\tau)d\tau,$$

где $K(t, \tau) \subset L_2(D)$ (интегральный оператор Гильберта-Шмидта).

По теореме Лебега для функции $K(t, \tau)$ существует последовательность непрерывных в D функций $\widetilde{K}_n(t, \tau)$, таких что

$$\int\limits_a^b |K(t, \tau) - K_n(t, \tau)|^2 d\tau dt \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

$$\text{т.е. } \|K - \widetilde{K}_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Так как интегральные операторы $\widetilde{K}_n$ вполне непрерывны, то и интегральный оператор Гильберта-Шмидта вполне непрерывен.

Теорема. *Пусть оператор $A \subset \sigma(H, H)$, где H бесконечномерное сепарабельное пространство Гильберта. Задача решения уравнения $Ax = y$ поставлена некорректно по Адамару.*

Доказательство. В этом случае легко доказать, что нарушено условие непрерывной зависимости решения при вариации первой части. Действительно, так как множество AS_1 компактно в H, то из последовательности $\{A\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность элементов $\{A\psi_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$, а так как пространство Гильберта полное, то эта фундаментальная последовательность сходится к элементу $y_0 \subset H$: $y_0 = \lim\limits_{k \to \infty} A\psi_{n_k}$.

Уравнение $Ax = y_0$ не имеет решения: рассмотрим уравнения $Ax = A\psi_{n_k}$. Решения существуют и единственны: $x_k = \psi_{n_k}$. Предел в правой части $\lim\limits_{k \to \infty} A\varphi_k = y_0 \in H$ существует. Но предел решения $\lim\limits_{k \to \infty} x_k$ не существует. ■

Глава 3

Продолжение линейных операторов

3.1 Продолжение линейных операторов

Пусть линейный оператор $A_0 \in L(X_0, Y)$, где X_0 есть подпространство пространства X. Можно ли продолжить оператор A_0 на все пространство X с сохранением величины нормы, т.е. можно ли построить линейных оператор A такой что:

– $Ax = A_0 x$, если $x \in X_0$

– $\| A \| = \| A_0 \|$?

Исследование этого вопроса начинается со случая, когда оператор A_0 продолжается с подпространства X_0 на подпространство $X_1 \subset X$ элементов вида $x + \lambda x_1^0$, где $x \in X_0$, а элемент $x_1^0 \in X_0$ ($A = A_1$, A_1 - продолжение оператора A_0). Элемент x_0^1 назначен, и представление элементов подпространства X_1 однозначно: коэффициент $\lambda \in (-\infty, \infty)$ определен однозначно.

Легко получить необходимое условие этого "элементарного"расширения. Для построения элементарного продолжения достаточно априори задать элемент $y_1 = A_1 x_1^0$:

$$A_1(x) = A_!(x_0 + \lambda x_1^0) = A_1 x_0 + \lambda A_1 x_1^0 = A_0 x_0 + \lambda y_1,\ x_0 \in X_0$$

Пусть оператор A_1 существует. Тогда для любого элемента $x_0 \in X_0$ значение

$$\| y_1 - A_0 x_0 \| = \| A_1 x_1^0 - A_1 x_0 \| = \| A_1 (x_1^0 - x_0) \| \leq \| A_1 \| \| x_1^0 - x_0 \| = \| A_0 \| \| x_1^0 - x_0 \|_X .$$

Рассмотрим шары с центром в точках $A_0 x_0$ и радиусами $\| A_0 \| \| x_1^0 - x_0 \|$. При любом выборе элемента $x_0 \in X_0$ все сферы $S_{\| A_0 \| \| x_0 - x_1^0 \|}(A_0 x_0)$ должны содержать заданный общий элемент y_1.

Можно доказать, что это свойство пространства Y является достаточным условием продолжения линейных операторов. Такие пространства Y уникальны. Из числа практически интересных пространств такого типа отметим только пространство $M(D)$ вещественных ограниченных в конечной области D функций $y(t)$ с нормой $\| y \|_{M(D)} = \sup\limits_D |y(t)|$ и пространство R_1 вещественных чисел.

В общем случае даже элементарные продолжения линейных операторов невозможны.

3.2 Продолжение линейных функционалов. Теорема Хана-Банаха.

В нормированном пространстве X рассмотрим множество X^* линейных функционалов $X^* = Z(X, R_1)$:

$$f \in X^*, f(x) \in R_1 \text{ (пространство } Y = R_1).$$

Норма функционала f определяется естественным образом:

$$\|f\| = \underset{\|x\|=1}{sup} |f(x)|, |f(x)| \leq \|f\| * \|x\|_X$$

.

Теорема. *(Об элементарном продолжении). Пусть X_0 подпространство пространства X, и на X_0 определен функционал f_0 с нормой $\|f_0\| = \underset{\|x\|=1, x\in X_0}{sup} |f(x)|$.*

Пусть элемент $x_1^0 \in X$, но $x_1^0 \overline{\in} X_0$.

Введем множество $X_1 \subset X$ элементов вида $x_0 + \lambda x_1^0$, где x_0 любой элемент пространства X_0, $-\infty < \lambda < \infty$. Представление элемента x_1 в виде $x_0 + \lambda x_1^0$ единственно.

Доказательство. Действительно, если

$$x_0 + \lambda x_1^0 = x_0' + \lambda_1 x_1^0,$$

то

$$(x_0 - x_0') + (\lambda - \lambda_1)x_1^0 = 0.$$

Так как $(x_0 - x_0') \in X_0$, то $(\lambda - \lambda_1)x_1^0 \in X_0$, что возможно только при $\lambda = \lambda_1$. Тогда $x_0 = x_0^1$.

Требуется построить линейный функционал $f_1 \in Z(x_1, R_1)$, такой что
—$f_1(x) = f_0(x)$, если $x \in X_0$,
—$\|f_1\| = \|f_0\|$.

Функционал f_1 построим в виде $f_1 = f_0 + \lambda f_1(x_1^0)$. Число $f_1(x_1^0)$ выберем позднее.

Приступим к оценкам. Пусть x_0^1 и x_0^2 два любых элемента множества X_0.

$$f_0(x_0^1) - f_0(x_0^2) = f_0(x_0^1 - x_0^2) \leq \|f_0\| \cdot \|x_0^1 - x_0^2\| = \|f_0\| \cdot \|(x_0^1 + x_1^0) - (x_0^2 + x_1^0)\| \leq$$
$$\leq \|f_0\| \cdot (\|x_0^1 + x_1^0\| + \|x_0^2 + x_1^0\|)$$

или

$$f_0(x_0^1) - \|f_0\| \cdot \|x_0^1 + x_1^0\| \leq f_0(x_0^2) + \|f_0\| \cdot \|x_0^2 + x_1^0\|.$$

Зафиксируем элемент x_0^2. Тогда правая часть неравенства зависит только от выбранного элемента x_0^2, поэтому левая часть неравенства ограничена сверху: существует

$$\sup_{x_0^1 \in X_0} \left(f_0(x_0^1) - \|f_0\| \cdot \|x_0^1 + x_1^0\|\right) = \alpha,$$

и при любых элементах x_0^2 значение $f_0(x_0^2) + \|f_0\| \cdot \|x_0^2 + x_1^0\| \geq \alpha$.

Тогда существует

$$\inf_{x_0^2 \in X_0} \left(f_0(x_0^2) + \|f_0\| \cdot \|x_0^2 + x_1^0\|\right) = \beta, \beta \geq \alpha.$$

В результате получаем

$$f_0(x_0^1) - \|f_0\| \cdot \|x_0^1 + x_1^0\| \leq \alpha \leq \beta \leq f_0(x_0^2) + \|f_0\| \cdot \|x_0^2 + x_1^0\|, \; x_0^1 \text{ и } x_0^2 \in X_0.$$

На отрезке $[\alpha; \beta]$ выберем любое число γ. Тогда для любого элемента $x_0 \in X_0$:

$$f_0(x_0) - \|f_0\| \cdot \|x_0 + x_1^0\| \leq \gamma \leq f_0(x_0) + \|f_0\| \cdot \|x_0 + x_1^0\|$$

и

$$\begin{cases} f_0(x_0) - \gamma \leq \|f_0\| \cdot \|x_0 + x_1^0\| \\ \gamma - f_0(x_0) \leq \|f_0\| \cdot \|x_0 + x_1^0\| \end{cases}$$

Таким образом, верна оценка

$$f_0(x_0) - \gamma \leq \|f_0\| \cdot \|x_0 + x_1^0\| \qquad (*)$$

Для построения значения функционала f_1 назначим значение $f_1(x_1^0) = -\gamma$. Значение функционала f_1 на X_1 равно

$$f_1(x) = f_1(x_0 + \lambda x_1^0) = f_0(x_0) - \lambda\gamma.$$

Ясно, что функционал f_1 аддитивен и однороден. Покажем, что f_1 — линейный функционал.

$$|f_1(x)| = |f_0(x_0) - \lambda\gamma| \leq \left|\lambda f_0\left(\frac{x_0}{\lambda}\right) - \lambda\gamma\right| \leq |\lambda| \left|f_0\left(\frac{x_0}{\lambda}\right) - \gamma\right| \overset{(*)}{\leq} |\lambda| \cdot \|f_0\| \cdot \left\|\frac{x_0}{\lambda} + x_1^0\right\| =$$

$$= \lambda| \cdot \|f_0\| \cdot \left\|\frac{x_0 + \lambda x_1^0}{\lambda}\right\| = \|f_0\| \cdot \|x_0 + \lambda x_1^0\| = \|f_0\| \cdot \|x\|.$$

Следовательно, $f_1 \leq f_0$ и функционал f_1 линеен.

Обратное неравенство $f_0 \leq f_1$ получаем соответственно из оценки:

$$\|f_1\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |f_1(x)| \geq \sup_{x \in X_0, \|x\|=1} |f_1(x)| = \|f_0\|.$$

Итак, $\|f_1\| = \|f_0\|$.

Элементарное продолжение функционала определяется выбором значения $f_1(x)$ на элементе x_1^0. ■

Теорема (Хана-Банаха в случае сепарабельного пространства)**.** *В сепарабельном пространстве X существует всюду плотное счетное множество D линейно независимых элементов. В подпространстве $X_0 \subset X$ определен линейный функционал f_0 с нормой $\|f_0\|$. В множестве D укажем элементы $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, не принадлежащие X_0. Построим подпространство*

$$X_1 = X_0 + \{\lambda\} x_1$$

и элементарное расширение f_1 функционала f_0 на X_1, $\|f_1\| = \|f_0\|$;
построим подпространство

$$X_2 = X_1 + \{\lambda\} x_2$$

и элементарное расширение f_2 функционала f_1 на X_2, $\|f_2\| = \|f_1\|$.

Продолжая этот процесс, получим функционал f, определенный на $X = X_0 + \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k}$, $\|f\| = \|f_0\|$.

Теорема Хана-Банаха верна и для произвольного нормированного пространства X:

Теорема (Хана-Банаха, $\approx$ 1930 г)**.** *Пусть X вещественное нормированное пространство и функционал $f_0 \in Z(X_0, R_1)$, где X_0 — подпространство пространства X. Существует продолжение функционала f_0 на все пространство X с сохранением нормы.*

Замечание.

1) Продолжение функционала f_0 не единственно.

2) Если X - комплексное нормированное пространство, то теорема Хана-Банаха верна (значения функционалов f_0 и f_1 — комплексные числа).

3.3 Следствия теоремы Хана-Банаха

Следствие. <u>*Теорема о достаточном числе функционалов*</u>

Для любого элемента $x_0 \in X$, $(x_0 \neq 0)$ *существует функционал* $f \in X^*$, *такой, что* $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\|$

Доказательство. Обозначим $X_0 \subset X$ множество элементов пространства X вида $\{\lambda\}x_0$. Определим функционал f_0 на множестве X_0: $f_0(x_0) = \lambda\|x_0\|$. Ясно, что на X_0 функционал f_0 линеен:

$$|f_0(x)| = |\lambda|\|x_0\| = \|\lambda x_0\| = \|x\|; \|f_0\| = 1.$$

При $x = x_0$ $f_0(x_0) = \|x_0\|$. Продолжая этот функционал на всё пространство X, получим (по теореме Хана-Банаха) функционал f:

$$f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|; \|f\| = 1.$$

∎

Следствие. *Пусть* Ω *линейное множество в пространстве* X *и элемент* $x_0 \subset X$ *не принадлежит* Ω: $\inf\limits_{x' \in \Omega} \|x_0 - x'\| = d > 0$. *Тогда существует функционал* $f \in X^*$, *такой, что* $f(x') = 0$, *если* $x' \in \Omega$ *и* $\|f\| = 1, f(x_0) = d$

Доказательство. Образуем элементарное расширение X_0 множества Ω, т.е. множество элементов вида $x = x' + \{\lambda\}x_0$, где $x' \in \Omega$. Определим функционал $f_0 \subset X_0^*$: $f_0(x) = \lambda d$ при $x \in X_0$. Ясно, что $f_0(x_0) = d$ и $f_0(x) = 0$ при $x \in \Omega$. Оценим норму $\|x\|$:

$$\|x\| = \|x' + \lambda x_0\| = |\lambda|\|x_0 + \frac{x'}{\lambda}\| = |\lambda|\|x_0 - \frac{x'}{\lambda}\| \geq |\lambda| \inf_{x' \in \Omega} \|x_0 - x'\| = |\lambda| d = |f_0(x)|.$$

Таким образом $|f_0(x)| \leq \|x\|$ и $\|f_0\| \leq 1$.

Чтобы получить противоположное неравенство $\|f_0\| \geq 1$, найдем для заданное $\varepsilon > 0$ элемент $x'_\varepsilon \in \Omega$, такой, что $\|x_0 - x'_\varepsilon\| \leq d + \varepsilon$. Ясно, что $d = f_0(x_0) = f_0(x_0 - x'_\varepsilon) \leq \|f_0\|\|x_0 - x'_\varepsilon\| < \|f_0\|(d + \varepsilon)$, откуда получаем неравенства $\frac{d}{d+\varepsilon} \leq \|f_0\| \leq 1$ и стало быть $\|f_0\| = 1$ (ε любое > 0).

По теореме Хана-Банаха существует продолжение f функционала f_0 на все пространство X:

$$\|f\| = 1; \text{ при } x \in X_0, f(x) = \lambda d (f(x) = 0, x \in \Omega; f(x_0) = d).$$

∎

Следствие. *Если для всех* $f \subset X^*$ *значения* $f(x) = 0$, *то* $x = \ominus$

Следствие. *Если для всех функционалов* $f \in X^*$, *норма которых равна* 1, *выполнено неравенство* $f(x_0) \leq C$, *то* $\|x_0\| \leq C$.

Следствие. *Пусть* $\{x_1, x_2, x_3, ...x_n\}$ *система линейно независимых элементов нормированного пространства* X. *Тогда существует система функционалов* $\{f_1, f_2, f_3, ...f_n\}$, $f_n \in X^*$ *такая, что*

$$f_k(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k \\ 1 \text{ при } i = k \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим линейную оболочку системы элементов $\{x_2, x_3, ...x_n\}$ через Ω_1, $\Omega_1 \subset X$. Элемент $x_1 \overline{\in} \Omega_1$: $\rho(x_1, \Omega) = d_1 > 0$. Согласно свойству (2) существует функционал $f_1 \in X^*$, такой, что

$$\|f_1\| = d_1, f_1(x_1) = 1, f_1(\Omega_1) = 0 : f_1(x_2) = 0, f_1(x_3) = 0, ..., f_1(x_n) = 0.$$

Обозначим Ω_2 линейную оболочку элементов $\{x_1, x_3, ...x_n\}$. Элемент $x_2 \in \Omega_2$: $\rho(x_2, \Omega_2) = d_2$. По свойству (2) существует функционал $f_2 \in X^*$ такой, что

$$\|f_2\| = d_2 > 0, f_2(x_2) = 1, f_2(\Omega_2) = 0 : f_2(x_1) = 0, f_2(x_3) = 0, ..., f_2(x_n) = 0.$$

Продолжая этот процесс, получим функционалы $f_k \in X^*$, $k = 1, 2, ..., n$

$$f_k(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k \\ 1 \text{ при } i = k \end{cases}$$

■

Следствие. *Теорема об опорной плоскости*

Пусть $f \in X^*$. Плоскостью (гиперплоскостью) в пространстве X называется множество L элементов, удовлетворяющих условию $f(x) = C$, где C - вещественное число.

Определение. Если для всех элементов множества E верно неравенство $f(x) = C$ (или $f(x) \geq C$), то говорят, что E лежит по одну сторону от плоскости L. Плоскость L называется опорной для множества E в точке $x_0 \in E$, если E лежит по одну сторону от и $x_0 \in L$.

Теорема. *Для любого замкнутого шара $\overline{V}_r(\ominus)$, ($\|x\| \leq r$) и для любой точки $x_0 \in S_r(\ominus)$ существует опорная плоскость L к шару $\overline{V}_r(\ominus)$ в точке x_0.*

Доказательство. Построим подпространство X_0 элементов вида $\{\lambda\}x_0$. На X_0 определим функционал f_0:

$$f_0(x) = \lambda\|x_0\| = \lambda r, |f_0(x)| = |\lambda|\|x_0\| = \|\lambda x_0\| = \|x\|; \|f_0\| = 1.$$

Продолжим функционал f_0 на все пространство X с сохранением нормы. Опорная плоскость к шару $\overline{V}_r(\ominus)$ в точке x_0 определяется уравнением $f(x) = r$. Действительно, для $x \in \overline{V}_r(\ominus)$:

$$f(x) \leq 1\|x\| \leq r,$$

при $x_0 \in S_r(\ominus)$ значение $f(x_0) = r$. ■

Глава 4

Сопряженное пространство. Сопряженный оператор

4.1 Сопряженное пространство

Согласно определению пространством X^*, сопряженным нормированному пространству X, называется пространство линейных функционалов f, заданных на всем X. Все результаты, полученные для линейных операторов, переносятся на частный случай линейных функционалов.

Пространство X^* — полное пространство (пространство Банаха), $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$ (глава 2, §2).

В дальнейшем наряду с записью значения функционала f элементы $x \in X$ мы будем обозначать

$$f(x) = \langle x, f \rangle$$

Такое обозначение имеет своё обоснование.

Теорема (Рисса). *(Фридьёф Рисс, 1880-1956 г., один из основоположников функционального анализа) Об общем виде линейного функционала в пространстве Гильберта H. Для любого $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$, такой что $\langle x, f \rangle = (x, y)$ $(f(x) = (x, y)$, (x, y) — скалярное произведение в $H)$.*

Доказательство. Обозначим L подпространство элементов z таких, что значения функционала f равно 0: $\langle z, f \rangle = 0$. Можно считать, что $L \neq H$ в противном случае $f(x) = 0$ для любого $x \in H$, $\|f\| = 0$, $y = \ominus$.

Ортогональное дополнение подпространства L не пусто. Пусть $x_0 \perp L$, тогда и элемент $\lambda x_0 \perp L$, и можно считать, что $\langle x_0, f \rangle = 1$.

Пусть x — любой элемент H. На элементе $x - \langle x, f \rangle x_0$ значение функционала f равно:

$$\langle x - \langle x, f \rangle x_0, f \rangle = \langle x, f \rangle - \langle x, f \rangle \langle x_0, f \rangle = \langle x, f \rangle - \langle x, f \rangle = 0$$

Следовательно элемент $x - \langle x, f \rangle x_0 \subset L$, а $x_0 \perp L$:

$$(x - \langle x, f \rangle x_0, x_0) = 0; (x, x_0) - \langle x, f \rangle (x_0, x_0) = 0$$

Тогда $(x, f) = \frac{(x, x_0)}{\|x_0\|^2}$ и в качестве элемента y можно взять элемент $y = \frac{x}{\|x_0\|^2}$:$\langle x, f \rangle = (x, y)$.

Для нормы функционала f: $|\langle x, f \rangle| \leq \|y\| \|x\|$. Тогда $\|f\| \leq \|y\|$. С другой стороны $\langle y, f \rangle = (y, y) \leq \|f\| \|y\|$, $\|y\| \leq \|f\|$

Объединяя эти неравенства, получаем $\|f\| = \|y\|$.

Единственность элемента y: предположим, что существует другой элемент $y_1 \in H$ такой, что для любого $x \in H$:

$$\langle x, f \rangle = (x, y) = (x, y_1)$$

Тогда $(x, y - y_1) = 0$ и, взяв элемент $x = y - y_1$, получим $\|y - y_1\| = 0$, т.е. $y_1 = y$. ■

Сходимость последовательности функционалов $\{f_n\} \in X^*$ к функционалу $f_0 \in X^*$: **сильная сходимость**, если $\|f_n - f_0\| \to 0$ при $n \to \infty$; **поточечная сходимость** $f_n(x) \to f_0(x)$ при $n \to \infty$ для любых элементов $x \in X$. Верна теорема (Банаха-Штейнгауза, глава 2, §3):

Для того, чтобы последовательность f_n сходилась поточечно к линейному функционалу, необходимо и достаточно, чтобы:

1. Нормы f_n были ограничены в совокупности: $\|f_n\| \leq const$.

2. Существуют пределы числовых последовательностей $f_n(x)$ при $n \to \infty$ для всех элементов x, принадлежащих множеству D всюду плотному в X.

Введение сопряженного пространства приводит к новому типу сходимости последовательности $\{x_n\}$ элементов x_n пространства X.

Определение. Последовательность x_n сходится к элементу $x^* \in X$ **слабо**, если числовые последовательности $f(x_n) \to f(x^*)$ для любого функционала $f \in X^*$. В этом случае пишут $x_n \to x^*$. ($\langle x_n, f \rangle \;\to\; \langle x^*, f \rangle,\; f \in X^*$, при этом сами значения $f(x_n)$ и $f(x^*)$ зависят от выбора функционалов f).

Как сильный предел последовательности, так и слабый предел единственны: если $x_n \to\; x^*$ и $x_n \to \widetilde{x}$, то для любого функционала f: $f(x^* - \widetilde{x}) = 0$. По теореме Хана-Банаха (следствие 3): $x^* = \widetilde{x}$.

Лемма. *Если $x_n \to x_0$, то $\|x_n\| \leq \|x_0\|$. (Слабо сходящаяся последовательность элементов ограничена по норме).*

Доказательство. Для всех $f \in X*$ значения $f(x_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$. По теореме о достаточном числе функционалов (Глава 3, §2) для каждого элемента x_n существует функционал f_n, такой что $\|f_n\| = 1$ и $f_n(x_n) = \|x_n\|$. Тогда $f_n(x_n) \to f_n(x_0)$. Но $|f_n(x_0)| \leq \|f_n\| \cdot \|x_0\| = \|x_0\|$. Следовательно, предел $\{\|x_n\|\}$ может и не существовать, $\overline{\lim}\|x_n\| \leq \|x_0\|$. ■

Понятие слабой сходимости последовательности элементов порождает также понятие **слабо фундаментальной последовательности** $\{x_n\}$: последовательность $\{x_n\}$ называется слабо фундаментальной, если для каждого функционала $f \in X^*$ последовательность чисел $\{f(x_n)\}$ фундаментальна.

В соответствии с этим определением говорят, что множество K **слабо компактно**, если из любой последовательности его элементов можно составить ее подпоследовательность слабо функциональную: для последовательности $\{x_n\}$ существует ее подпоследовательность $\{x_{N(k)}\}$ такая что числовые последовательности $\{f(x_{N(k)})\}$ имеют предел при $k \to \infty$. Значения $f(x_{N(k)})$ и предельное значение зависят от выбора функционала f.

В конечномерном пространстве любое ограниченное множество компактно. Естественно ожидать, что в бесконечномерных пространствах условия слабой компактности не будут сложными.

Теорема. *В гильбертовом пространстве H любое ограниченное множество слабо компактно.*

Доказательство. Проведем доказательство для сепарабельных гильбертовых пространств. В этих пространства существует не более чем счетный базис элементов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$, $(\psi_i, \psi_j) = 0, i \neq j$; $\|\psi_i\|_H = 1$. ■

Обозначим множество элементов пространства H, таких что $\| x \|_H \leq C$ через K. Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность элементов множества K.

1. Для всех элементов x_n вычислим значения функционала f_1:

$$f_1(x) = \langle x, \Psi_1 \rangle = (x, \Psi_1).$$

   Числовая последовательность $f_1(x_n)$ ограничена:

$$|f_1(x_n)| = |\langle x, \Psi_1 \rangle| \leq \| x_n \| \leq C.$$

   По теореме Больцано-Вейерштрасса в $\{f_1(x_n)\}$ существует сходящаяся подпоследовательность, обозначим её $\langle x_{N(1,K)}, \Psi_1 \rangle$,

$$\{x_{N(1,K)}\} \subset \{x_n\},\ \langle x_{N(1,K)}, \Psi_1 \rangle \to \alpha_1 \text{ при } K \to \infty$$

2. Рассмотрим последовательность $\{x_{N(1,K)}\}$ и вычислим значения функционала f_2:

$$f_2(x) = \langle x, \Psi_2 \rangle$$

   на элементах этой последовательности. Числовая последовательность $\langle x_{N(1,K)}, \Psi_2 \rangle$ ограничена, существует её сходящаяся подпоследовательность. Обозначим её $\langle x_{N(2,K)}, \Psi_2 \rangle$:

$$\langle x_{N(2,K)}, \Psi_2 \rangle \to \alpha_2 \text{ при } K \to \infty,$$

$$\{x_{N(2,K)}\} \subset \{x_{N(1,K)}\} \subset \{x_n\},$$

$$\langle x_{N(2,K)}, \Psi_1 \rangle \to \alpha_1 \text{ при } K \to \infty.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательности $\{x_{N(i,K)}\}$, $i = 1, 2, 3 \ldots$, такие что

$$\{x_{N(1,K)}\} \supset \{x_{N(2,K)}\} \supset \{x_{N(3,K)}\} \supset \ldots$$

и для которых

$$\langle x_{N(i,K)}, \Psi_i \rangle \to \alpha_i \text{ при } K \to \infty,$$

$$\langle x_{N(i-1,K)}, \Psi_{i-1} \rangle \to \alpha_{i-1} \text{ при } K \to \infty,$$

$$\ldots$$

$$\langle x_{N(1,K)}, \Psi_1 \rangle \to \alpha_1 \text{ при } K \to \infty,$$

Рассмотрим «диагональные элементы» $x_{N(i,i)}$. Для них при любом фиксированном K значения $\langle x_{N(i,i)}, \Psi_K \rangle$ стремятся к α_K при $i \to \infty$.
Так как

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x_{N(i,i)}, \Psi_K \rangle|^2 \leq C^2$$

при любом i, то переходя к пределу при $i \to \infty$ получим $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \leq C^2$. Так как n любое, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < +\infty$. Следовательно существует элемент

$$\widetilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \Psi_k \in K$$

Покажем, что последовательность $\{x_{N(m,m)}\}$ слабо сходится к элементу $\widetilde{x}$.
Рассмотрим произвольный элемент y пространства H. Он определяет функционал f:

$$f(x) = (x, y)$$

Как элемент пространства H элемент y может быть представлен в виде

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \Psi_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \Psi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \Psi_k$$

Для заданного ε найдём номер $n(\varepsilon)$, такой что при $n > n(\varepsilon)$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 < \varepsilon^2$$

Зафиксируем значение n, $n > n(\varepsilon)$.

Значение функционала f на элементе $x_{N(m,m)} - \widetilde{x}$ равно

$$\langle x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, y \rangle = \langle x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, \sum_{k=1}^{n} y_k \Psi_k \rangle + \langle x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \Psi_k \rangle$$

Во втором слагаемом значение

$$|\langle x_{N(m,m)}, \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \Psi_k \rangle| \leq C \cdot \varepsilon$$

и значение

$$|\langle \widetilde{x}, \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \Psi_k \rangle| \leq C \cdot \varepsilon$$

В первом слагаемом значение

$$|\langle x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, \sum_{k=1}^{n} y_k \Psi_k \rangle| \leq (\sum_{k=1}^{n} [\langle x_{N(m,m)}, \Psi_k \rangle - \alpha_k]^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|$$

Так как значение n фиксировано, а значения

$$\langle x_{N(m,m)}, \Psi_K \rangle \to \alpha_K$$

при
$$m \to \infty$$
то для достаточно больших m:
$$\sum_{k=1}^{n} [\langle x_{N(m,m)}, \Psi_k \rangle - \alpha_k]^2 < \varepsilon^2.$$
Таким образом
$$|f(x_{N(m,m)} - \widetilde{x})| = |\langle x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, f\rangle| = |(x_{N(m,m)} - \widetilde{x}, y)| \leq \varepsilon[\|f\| + 2\varepsilon]$$
для любого $f \in H^*$, если $\{x_n\} \in K$ при достаточно больших m, т.е.
$$x_{N(m,m)} \to \widetilde{x}$$
на множестве K, и множество K слабо компактно в сепарабельном гильбертовом пространстве.

В доказательстве существенную роль играет теорема Рисса: $H = H^*$ и далее $(H^*)^* = H$. Банахово пространство X, для которого $(X^*)^* = X$ называется рефлексивным. В случае $X = L_p(T)$ можно показать, что общий вид линейного функционала определяется элементами $y \in L_q(T)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:
$$f(x) = \langle x, y \rangle = \int_T x(t)y(t)dt$$
(при $p = 1$ пространство $L_\infty(T)$ - пространство измеримых и почти везде конечных функций).

Ясно, что
$$(L_p^*(T))^* = L_p(T)$$
и пространство $L_p(T)$ рефлексивно.

Теорема. *Верна общая теорема: условие $\|x\|_X \leq C$ для элементов множества $K \subset X$ является необходимым и достаточным условием слабой компактности множества K в рефлексивных пространствах X.*

В частности множество $K \in L_p(T)$ элементов, таких что
$$\|x\|_{L_p(T)} \leq C$$
слабо компактно.

4.2 Сопряженный оператор

Пусть оператор $A \subset L(X, Y)$, функционал $f \in Y^*$. Вычислим значения $\langle Ax, f\rangle$. Эти значения можно трактовать как значения функционала φ, определённого на элементах пространства X:
$$\langle Ax, f\rangle = \varphi(x) \tag{4.1}$$
Ясно, что функционал φ задан на всём пространстве X и зависит от выбора функционала f:

1. функционал φ аддитивен и однороден:

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \langle A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), f\rangle = \lambda_1\langle Ax_1, f\rangle + \lambda_2\langle Ax_2, f\rangle = \\ = \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2)$$

2. функционал φ линейный:

$$\|\varphi\| \le \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| \le \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \cdot \|f\| = \|A\| \cdot \|f\|$$

Таким образом равенство $\langle Ax, f\rangle = \langle x, \varphi\rangle$ определяет линейный функционал $\varphi \in X^*$:

– каждому $f \in Y^*$ сопоставляется линейный функционал $\varphi \in X^*$, зависящий от выбора оператора A: эту зависимость обозначим $\varphi = A^* \cdot f$.

Эта зависимость от A однородна и аддитивна: если $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$, то

$$\varphi = \langle \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2\rangle = \alpha_1\langle A_1, f\rangle + \alpha_2\langle A_2, f\rangle = \alpha_1 A_1^* f + \alpha_2 A_2^* f$$

Оператор A^*, определённый на Y^* линеен: согласно неравенству:

$$\|\varphi\| = \|A^* \cdot f\| \le \|A\| \cdot \|f\|$$

$$\|A^*\|_{Y^* \to X^*} \le \|A\|_{X \to Y} \text{ и } A^* \in L(Y^*, X^*)$$

Докажем, что $\|A^*\| = \|A\|$. Возьмём произвольный элемент $x_0 \in X$ и вычислим $y_0 = Ax_0$. Для элемента y_0 по теореме Хана-Банаха существует линейный функционал f, такой что $f(y_0) = \|y_0\|$, $\|f\| = 1$.
Тогда

$$\|Ax_0\| = |\langle Ax_0, f\rangle| = |\langle x_0, A^* f\rangle| \le \|x_0\| \cdot \|A^*\| \cdot \|f\| = \|A^*\| \cdot \|x_0\|$$

Следовательно $\|A\| \le \|A^*\|$ и вместе с оценкой $\|A^*\| \le \|A\|$ получаем $\|A^*\| = \|A\|$.

Определение. Линейный оператор $A^* \in L(Y^*, X^*)$ называется оператором, сопряжённым с оператором $A \in L(X, Y)$, если для любого $f \in Y^*$ выполнено:

$$\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle$$

Замечание. Ясно, что $\|A^*\| = \|A\|$.

Пример. Рассмотрим комплексно-значные векторные пространства $X = V_n$, $Y = V_n$. Линейный оператор A задаётся матрицей $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ с комплексными элементами a_{ij}. Скалярное произведение векторов $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ равно $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = \overline{(y, x)}$

Координаты вектора $y = Ax$ равны $y_i = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} x_j$. Общий вид функционала в f в V_n определяется указанием элемента y: $f(x)\langle x, f\rangle = (x, y)$ Тогда

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle = (Ax, y) &= \sum_{i=1}^n (Ax)_i \bar{y}_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j)\bar{y}_i = \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij}\bar{y}_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ji}\bar{y}_j = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \overline{(\bar{a}_{ij}, y_j)} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{\sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij}, y_j)} = \\ &= (x, A^* y) = \langle x, A^* y\rangle\end{aligned}$$

Сравнивая полученное равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ (согласно определению сопряженного оператора) получаем, что $(A^*y)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{a_{ji}} y_j$. Элементы матрицы A^* получены из комплексно-сопряженной матрицы $\bar{A}$ с последующим транспонированием: $A^* = \{\bar{a}_{ji}\}_{j,i=1}^{n}$

Пример. $X = L_p(a,b)$, $Y = L_q(a,b)$. Оператор K интегральный оператор: $y = Kx$, $y(t) = \int\limits_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau \in L_q(a,b)$

Значение функционала $\langle Kx, f\rangle =$ (общий вид го функционала в $L_q(a,b) = \int\limits_a^b (Kx)(t)f(t)dt =$ (где $f \in L_p(a,b)) = \int\limits_a^b (\int\limits_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau)f(t)dt = \int\limits_a^b x(\tau)\int\limits_a^b K(t,\tau)f(t)dtd\tau =$ $= \int\limits_a^b x(t)\int\limits_a^b K(\tau,t)f(\tau)d\tau dt =$ (общий вид функционала в $L_p(a,b)) = \langle x, K^*f\rangle$ и $K^*f = \int\limits_a^b K(\tau,t)f(\tau)d\tau$.

Таким образом оператор K^* есть интегральный оператор(но из L_p в L_q), ядро которого $K^*(t,\tau) = K(\tau,t)$.

$$\| K \| = (\int_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau dt)^{1/q}$$

$$\| K^* \| = (\int_a^b |K(\tau,t)|^q dt d\tau)^{1/q} = (\int_a^b |K(t,\tau)|^q d\tau dt)^{1/q}$$

Пример. Рассмотри комплексно-значные пространства $X = L_p(a,b)$ и $Y = L_q(a,b)$. Пусть f функционал(комплексно-значный) f: $L_p(a,b) \to C$, где C - множество комплексных чисел. Общий вид линейного функционала в этом случае определяется заданием элемента $y \in L_q(a,b)$:

$$f(x) = \langle x, f\rangle = (x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$$

$$(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

$$\langle x, f\rangle = (y,\bar{x}) = \int_a^b \overline{(\bar{x}(t)y(t))}dt = \overline{\int_a^{-b} (y(t)\bar{x}(t))dt}$$

Величины $\int\limits_a^b y(t)\overline{x(t)}dt$ будем рассматривать как значение функционала из $L_q \to C$. Это значение полностью определено заданием элемента $x \in L_p(a,b)$. Этот функционал обозначим $f^*(y)$: $\langle x, f, \rangle = \langle y, \bar{f^*}\rangle = \bar{f}^*(y)$, $f = \bar{f}^*$ и $f^* = \bar{f}$,

Таким образом в пространстве $L_q(a,b)$ определен функционал f^* и $f^* = f$.

Глава 5

Теория Рисса линейных уравнений второго рода

В этой главе мы будем рассматривать вполне непрерывные операторы.

5.1 Теорема Шаудера

Определение. Последовательность $\{y_n\}$ элементов пространства Y называется **компактной**, если в ней существует фундаментальная подпоследовательность.

Лемма (I). *Пусть Y — банахово пространство. Если последовательность элементов $\{y_n\}$ слабо сходится к элементу $y_0 \in Y$ и компактна, то $y_n \to y_0$ сильно, т.е. $\|y_n - y_0\|_Y \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. (От противного) Предположим, что $\{y_n\}$ не стремится к y_0, т.е. существует подпоследовательность $\{y_{nk}\}$ такая, что $\|y_{nk} - y_0\| > \varepsilon$ при достаточно больших значениях k. Тогда (по теореме Хана-Банаха глава 3, §2, следствие 4) существует функционал $\varphi \in Y^*$, $\|\varphi\| = 1$ такой, что $\varphi(y_{nk} - y_0) = \|y_{nk} - y_0\| > \varepsilon$ при всех $k > k_0$. Следовательно последовательность $\{y_n\}$ не имеет слабого предела. ■

Лемма (II). *Пусть $A \subset \sigma(X, Y)$. Если $\{x_n\} \to x_0$, то $Ax_n \to Ax_0$ сильно.*

Доказательство. Так как $\{x_n\} \to x_0$, то $\{\|x_n\|\}$ ограничена (глава 4, §1). Из полной непрерывности оператора A следует, что последовательность элементов $y_n = Ax_n$ компактна.

Покажем, что $Ax_n \to Ax_0$.

Для любого линейного функционала $\varphi \in Y^*$ значения $\langle A(x_n - x_0), \varphi\rangle = \langle x_n - x_0, A^*\varphi\rangle$. Обозначим $A^*\varphi = f \in X^*$:

$$\langle A(x_n - x_0), \varphi\rangle = \langle x_n - x_0, f\rangle$$

и так как $x_n \to x_0$, то $\langle A(x_n - x_0), \varphi\rangle \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\underline{Ax_n \to Ax_0}$. По лемме I $\|Ax_n - Ax_0\|_Y \to 0$ при при $n \to \infty$. ■

Теорема (Шаудер). *Пусть $A \subset \mathcal{L}(X, Y)$, где Y — банахово пространство. Тогда операторы A и A^* вполне непрерывны одновременно.*

Доказательство. Пусть $A \subset \sigma(X, Y)$. Рассмотрим последовательность линейных функционалов $\varphi_n \in Y^*$ с нормами $\|\varphi_n\| = 1$. Покажем, что в последовательности функционалов $\{A^*\varphi_n\} \in X^*$ существует фундаментальная подпоследовательность, что и будет означать полную непрерывность оператора A^*.

Обозначим $\{\varphi_n\} = \{y_n\} \in Y^*$ и последовательность функционалов $A^*\varphi_n = A^*y_n = f_n \in X^*$. Ясно, что $\|f_n\| = \|A^*y_n\| = \|A^*\varphi_n\| \leq \|A^*\|\|\varphi_n\| = \|A\|$.

Таким образом $\{f_n\}$ ограничена в совокупности. Функционалы f зависят от выбранного y: $f_n = f_n(y) = f(y)$.

Ясно, что если y'' и $y' \in Y^*$, то

$$\|f(y'') - f(y')\| = \|A^*y'' - A^*y'\| \leq \|A\|\|y'' - y'\| \leq \varepsilon, \text{ если} \|y'' - y'\| < \delta \text{ и } \|A\|\delta < \varepsilon$$

Таким образом функции $f(y)$ равностепенно непрерывны. Следуя доказательству теоремы Арцела-Асколи (глава I, §1) получаем существование фундаментальной подпоследовательности $f_{nk} = A^*\varphi_{nk}$ последовательности $A^*\varphi_n$, $\varphi_n \in S_1 \subset Y^*$: A^* — вполне непрерывный оператор.

Если же $A^* \in \sigma(X^*, Y^*)$, то так как $(A^*)^* = A$, то получаем, что и оператор A вполне непрерывен. ∎

5.2 Уравнения второго рода с вполне непрерывными операторами.

Уравнения второго рода относительно элемента $x \in X$ имеют вид $x - Ax = y$, $A \in \sigma(X, X)$, X -банахово пространство

Уравнения первого рода: $Ax = y$.

Теорема. *Если A вполне непрерывный оператор, то множества $R(E - A) = (E - A)X$ и $R(I - A^*) = (I - A^*)X^*$ замкнуты.*

Доказательство. Пусть послдеовательность $y_n \to y_0$, $y_n \in R(E - A)$, т.е. $y_n = x_n - Ax_n$, $x_n \in X$. Следует доказать, что существует элемент $x_0 \in X$ такой, что $y_0 = (E - A)x_0$.

1. Предположим, что нормы элементов x_n ограничены:

   Тогда $y_n = x_n - Ax_n$ и $x_n = y_n + Ax_n$. Так как последовательность Ax_n принадлежит компактному множеству, то существует фундаментальная подпоследовательность Ax_{n_k}, и мы получаем, что $x_{n_k} = y_{n_k} + Ax_{n_k}$. Так как $y_{n_k} \to y_0$, то $\{y_{n_k}\}$ - фундаментальная последовательность. Следовательно, существует $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in X$, который мы обозначим x_0. Тогда $Ax_{n_k} \to Ax_0$. Переходя к пределу в равенствах $x_{n_k} = y_{n_k} + Ax_{n_k}$ при $k \to \infty$, получим $y_0 = x_0 - Ax_0$.

2. Остается рассмотреть случай неограниченной последовательности норм $\|x_n\|$. В этом случае существует последовательность элементов x_{n_k}, нормы которых $\|x_n\| \to \infty$ при $k \to \infty$.

   Обозначим через N подпространство пространства X элементов z, таких, что $(E - A)z = \ominus$. Ясно, что $(E - A)(x_n - z) = (E - A)x_n = y_n$.

   Если в N существует такой элемент z, что нормы $\|x_n - z\|$ ограничены, то согласно пункту 1. существует такой элемент $x_0 - z \in X$ такой, что $(x_n - z) \to (x_0 - z)$ при $n \to \infty$ и $y_0 = (x_0 - z) - A(x_0 - z) = x_0 - Ax_0 \in R(E - A)$.

   Если же для всех элементов z нормы $\|x_n - z\|$ неограничены, то можно считать, что величины $\alpha_n = \inf\limits_{z\in N} \|x_n - z\|$ стремятся к ∞ при $n \to \infty$.

   По определению inf существуют элементы $z_n \in N$ такие, что

$$\alpha_n \leq \|x_n - z\| \leq (1 + \frac{1}{n})\alpha_n \qquad (*)$$

Построим элементы u_n:

$$u_n = \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|}, \quad \|u_n\| = 1.$$

Для этих элементов вычислим элементы $(E - A)u_n$:

$$(E - A)u_n = \frac{1}{\|x_n - z\|} y_n$$

Так как $y_n \to y_0$, то нормы $\|y_n\|$ ограничены, поэтому последовательность $(E - A)u_n \to \ominus$. Сами же нормы $\|u_n\| = 1$. Согласно пункту 1. существует подпоследовательность последовательности $\{u_n\}$, такая, что $u_n \to u_0 \in X$. В нашем случае $u_0 \in N$, $\|u_0\| = 1$. Этот случай невозможен. Действительно, рассмотрим величины $\|u_n - u_0\|(1 + \frac{1}{n})\alpha_n$. Согласно (*):

$\|u_n - u_0\|\frac{n+1}{n}\alpha_n \geq \|u_n - u_0\|\|x_n - z_n\| = \|\|x_n - z_n\|(u_n - u_0)\| =$
$= \|u_n\|x_n - z_n\| - u_0\|x_n - z_n\|\| = \|x_n - z_n - \|x_n - z_n\|u_0\| = \|x_n - (z_n + \|x_n - z_n\|u_0)\|$

Элемент $z_n + \|x_n - z_n\|u_0 \in N$ как линейная комбинация элементов $z_n \in N$ и $u_0 \in N$. Поэтому $\|x_n - (z_n + \|x_n - z_n\|u_0)\| \geq \alpha_n$.

Тогда $\|u_n - u_0\|\frac{n+1}{n} \geq 1$ и $\|u_n - u_0\| \geq \frac{n}{n+1}$, что противоречит $u_0 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$

■

Из этой теоремы следует, что если рассмотреть уравнения

$$x - Ax = y_n, \text{ где } y_n \to y_0$$

их «приближенные» решения x_n: $x_n - Ax_n = y_n$, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, предел которой $x_0 \in X$ при $k \to \infty$, удовлетворяет уравнению $x_0 - Ax_0 = y_0$. Элемент x_0 может быть и не единственен: он зависит от выбора сходящейся подпоследовательности последовательности $\{Ax_n\}$.

5.3 Теоремы Фредгольма

Пусть A вполне непрерывный оператор в пространстве Банаха X: $A \in \sigma(X, X)$. Рассмотрим уравнения второго рода с вполне непрерывными операторами A и A^*:

$$(E - A)x = y, y \in X \tag{5.1}$$

$$(E - A)z = \ominus, z \in N(E - A) \tag{5.2}$$

$$(I - A^*)f = \omega, f \in X^*, \omega \in X^* \tag{5.3}$$

$$(I - A^*)\psi = \ominus, \psi \in N(I - A^*) \tag{5.4}$$

Теорема (Первая теорема Фредгольма)**.** *Следующие 4 утверждения эквивалентны:*

1. *Уравнение (5.1) имеет решение при любой правой части*
2. *Уравнение (5.2) имеет только тривиальное решение*
3. *Уравнение (5.3) имеет решение при любой правой части*
4. *Уравнение (5.4) имеет только тривиальное решение*

Доказательство. Докажем, например, что из 4 следует 1.
Пусть выполнено 4: $(I - A^*) = \ominus$. Предположим противное : 1 не верно: $R(E - A) \neq X$. Пусть $y_0 \in X$, но $y_0 \notin R(E - A)$. По теореме Хана-Банаха (следствие 2) существует линейный функционал $f_0 \in X^*$ такой, что $\langle y_0, f_0 \rangle = 1$, $\langle y, f_0 \rangle = 0$ для всех $y \in R(E - A)$. Тогда $\langle (E - A)x, f_0 \rangle = 0$ для всех $x \in X$, $\langle x, (I - A^* f_0) \rangle = 0$ для всех $x \in X$.
Тогда $(I - A^*)f_0 = \ominus$, т.е. $f_0 \in N(I - A^*)$ и $f_0 \neq \ominus$, что противоречит 4. ∎

Теорема (Вторая теорема Фредгольма)**.** *Уравнения (5.2) и (5.4) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.*

Теорема (Третья теорема Фредгольма)**.** *Для того, чтобы уравнение (5.1) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы $\langle y, \psi \rangle = 0$ для любого решения ψ уравнения (5.4).*

Доказательство. Необходимость. Если $N(E - A) = \ominus$, то по второй теореме Фредгольма $N(I - A^*) = \ominus$. Если же $N(E - A) \neq \ominus$, то уравнение $(E - A)x = y_0$, $y_0 \neq \ominus$ имеет решение x_0. Пусть $\psi \in N(I - A^*)$. Тогда

$$\langle y_0, \psi \rangle = \langle (E - A)x_0, \psi \rangle = \langle x_0, (I - A^*)\psi \rangle = 0$$

Достаточность. Пусть $\langle y_0, \psi \rangle = 0$ для всех $\psi \in N(I - A^*)$. Предположим, что $y_0 \notin R(E - A)$, т.е. решение уравнения $(E - A)x = y_0$ не существует. Так как по теореме Шаундера $R(E - A)$ есть подпространство, то существует линейный функционал $f \in X^*$, такой что

$$\langle y_0, f \rangle = 1 \text{ и } \langle (E - A)x, f \rangle = 0$$

для любых элементов x,

$$\langle x, (I - A^*)f \rangle = 0 \text{ и } (I - A^*)f = \ominus,\ f \in N(I - A^*),$$

т.е. f удовлетворяет уравнению (5.4). Таким образом,

$$f \in N(I - A^*),\ f \neq \ominus \text{ и } \langle y_0, f \rangle = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно. ∎