Санкт-Петербургский государственный университет

Моделирование социально-экономических систем

Лекции

Доцент кафедры математического моделирования
энергетических систем, кандидат физ.-мат. наук
Александр Юрьевич Крылатов

Санкт-Петербург, 2016

Оглавление

Глава 1

Балансовая модель производства

1.1 Модель «затрата - выпуск» (англ. input - output)

Предположим следующее:

1) Количество продукции характеризуется одним числом (у каждого экономического объекта).

2) Комплектность потребления: для выпуска продукции экономический объект должен получить продукты от других объектов.

3) Линейность : для увеличения количества производства в n раз, необходимо увеличить ресурс в n раз.

4) Делимость на конечный продукт и на продукт, который будет использоваться в производстве.

Пусть n — количество субъектов (экономических субъектов),
x_i — количество производства продукта i,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix},$$

x_{ji} — количество продукта j, необходимого для производства i.

$$\begin{cases} x_{1i} = \alpha_{1i} x_i \\ x_{2i} = \alpha_{2i} x_i \\ ... \\ x_{ni} = \alpha_{ni} x_i \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & ... & \alpha_{1n} \\ ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & ... & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Определение 1.1. A — матрица коэффициентов прямых затрат (матрица технологических коэффициентов).

Матрица A — положительно полуопределённая ($z^T Az \geq 0$, для любых ненулевых векторов z).

y_i – количество i-го продукта на продажу.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i + y_i = x_j \qquad \forall j = \bar{1, n};$$

$$Ax + y = x \leftrightarrow y = (E - A)x$$
$$x = (E - A)^{-1} y$$

Для того, чтобы это уравнение имело единственное решение необходимо и достаточно, чтобы $det(E - A) \neq 0$. $x_j \geq 0 \qquad \forall j$

Замечание 1.1. Далее под обозначением $x \geq 0$ будем понимать покомпонентную неотрицательность вектора x.

Определение 1.2. Квадратная матрица A, такая, что $A_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j$, называется продуктивной, если существует хотя бы один такой вектор $\bar{x} > 0$, что $(E - A)\bar{x} > 0$.

Теорема 1.1. *(О существовании и единственности решение балансовой системы уравнений) Матрица A продуктивна, тогда и только тогда, когда существует, единственно и неотрицательно решение системы $(E - A)x = y$ для любого вектора $y \geq 0$.*

Доказательство. Достаточность.

Рассмотрим $\bar{y} > 0$ и $\bar{x} \geq 0$. $(E - A)\bar{x} = \bar{y} > 0 \quad \rightarrow \quad \bar{x} > A\bar{x} \quad \rightarrow \quad \bar{x} \geq 0$. $(E - A)\bar{x} > 0$

Лемма 1.1. *Если A – продуктивна, то*

$$\lim_{\nu \to \infty} A^\nu = 0 \qquad \nu \in N$$

Доказательство. $\bar{x} \overset{\text{def}}{>} A\bar{x} \geq 0$. Существует $\lambda : 0 < \lambda < 1$ такая, что

$$\lambda\bar{x} > A\bar{x}.$$

Домножим обе части на A:

$$\lambda A\bar{x} \geq A^2\bar{x} \geq 0$$

А теперь на λ:

$$\lambda^2\bar{x} > \lambda A\bar{x} \geq 0$$

Не трудно увидеть, что $\lambda^2\bar{x} > A^2\bar{x} \geq 0$. Тогда продолжая этот процесс получим

$$\lambda^\nu\bar{x} > A^\nu\bar{x} \geq 0.$$

Так как $\lambda^\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$, то $A^\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$. ■

Лемма 1.2. *Если A – продуктивна и существует такой вектор $\bar{x}$, что выполняется $\bar{x} \geq A\bar{x}$, то $\bar{x} \geq 0$.*

Доказательство.

$$\bar{x} \geq A\bar{x} \geq A^2\bar{x} \geq \dots \geq A^\nu \bar{x}$$

$$\bar{x} \geq A^\nu \bar{x} \to 0, \text{ при } \nu \to \infty$$

$$\bar{x} \geq 0$$

■

Лемма 1.3. *Если A – продуктивна, то $det(E - A) \neq 0$.*

Доказательство. От противного.
Если A – продуктивна, но $det(E - A) = 0$.
Пусть существует такой вектор $\hat{x} \neq 0$, и пусть $(E - A)\hat{x} = 0 \quad \overset{\text{Lemma1.2}}{\Longrightarrow} \quad \hat{x} \geq 0$.
Теперь возьмем вектор $(-\hat{x})$, $(E - A)(-\hat{x}) = 0 \quad \overset{\text{Lemma1.2}}{\Longrightarrow} \quad (-\hat{x}) \geq 0$. Пришли к противоречию. ■

Необходимость.

$$(E - A)x = y \quad \forall y \geq 0$$

По Лемме 1.3 $det(E - A) \neq 0$, следовательно решение единственно.

$$(E - A)x \geq 0$$

В силу Леммы 1.2 $x \geq 0$. ■

Теорема 1.2. *Матрица $A \geq 0$ – продуктивна тогда и только тогда, когда $S = (E - A)^{-1}$ существует и не отрицательна.*

Доказательство. Необходимость.
$S = \{\sigma_{ij}\}_i^j$
Рассмотрим $(E - A)x = u_j$, где
$u_j = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ (Единица на j-ом месте)
В силу теоремы (1.1) $(E - A)x = y$ имеет единственное решение $x = Sy$, следовательно $\sigma_{ij} \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$.
Достаточность.
Рассмотрим $\hat{x}: \quad (E - A)^{-1}u$
$u = \begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$
$\hat{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij}$
Так как $|E - A| \neq 0, (E - A)^{-1}$ – ни один столбец не состоит из нулей. Тогда
$\hat{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} > 0$
$(E - A)\hat{x} = u > 0$
$S = (E - A)^{-1}$ ■

Определение 1.3. Компоненты матрицы S называются коэффициентами полезных затрат, а S – матрица коэффициентов полных затрат.
$x = Sy$

Составление плана не ясно, нужны комментарии.

Теорема 1.3. *Если A продуктивная, то* $\lim\limits_{\nu\to\infty} y_\nu = (E-A)^{-1}y_0$.

Доказательство. $y_\nu = (E-A)^{-1}y_0 - (E-A)^{-1}A^{\nu+1}y_0 \to (E-A)^{-1}y_0$ ■

Пример про составление плана с двумя определениями не понятно. Спросить.

Глава 2

Линейное программирование

[LECTION N4]

[Здесь могла быть ваша реклама] $F = \sum\limits_{j=1}^{m} F^j$ – имеется m групп пользователей, F^j – поток группы.
Каждая группа стремиться минимизировать совой поток:

$$\min_{f^j} \sum_{i=1}^{n} t_i(f_i) f_i^j, \qquad f^j = (f_1^j, f_2^j, \dots, f_n^j) - \text{стратегия}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^j = F^j, \qquad f_i = \sum_{j=1}^{m} f_i^j$$

$$\frac{\partial L^j}{\partial f_i^j} = t_i(f_i) + \frac{\partial t_i(f_i)}{\partial f_i^j} f_i^j - \omega^j - \eta_i^j = 0$$

$$t_i(f_i) + \frac{\partial t_i(f_i)}{\partial f_i^j} f_i^j \begin{cases} = \omega^j & f_i^j > 0 \\ > \omega^j & f_i^j = 0 \end{cases}$$

$$t_i(f_i) = a_i + b_i f_i$$

$$a_i + b_i \sum_{j=1}^{m} f_i^j + b_i f_i^j \begin{cases} = \omega^j & f_i^j > 0 \\ \geq \omega^j & f_i^j = 0 \end{cases}$$

$$f_i^1 + \dots + 2f_i^j + \dots + f_i^m \begin{cases} = \frac{\omega^j - a_i}{b_i} & f_i^j > 0 \\ \geq \frac{\omega^j - a_i}{b} & f_i^j = 0!!!!!!!!!!! \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i^1 \\ f_i^2 \\ \vdots \\ f_i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^1 - a_i}{b_i} \\ \frac{\omega^2 - a_i}{b_i} \\ \vdots \\ \frac{\omega^m - a_i}{b_i} \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$\begin{pmatrix} f_i^1 \\ f_i^2 \\ \vdots \\ f_i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m+1} & \frac{-1}{m+1} & \cdots & \frac{-1}{m+1} \\ \frac{-1}{m+1} & \frac{m}{m+1} & \cdots & \frac{-1}{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{m+1} & \frac{-1}{m+1} & \cdots & \frac{m}{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega^1 - a_i}{b_i} \\ \frac{\omega^2 - a_i}{b_i} \\ \vdots \\ \frac{\omega^m - a_i}{b_i} \end{pmatrix}$$

Для экономии времени и места обозначим $\xi_i^j = \frac{\omega^j - a_i}{b_i}$.

$$f_i^j = \xi_i^j - \frac{1}{m+1}\sum_{q=1}^{m}\xi_i^q$$

$$F^j = \sum f_i^j = \sum_{i=1}^{n}\xi_i^j - \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\xi_i^q \tag{2.1}$$

$$\begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ \vdots \\ F^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m+1} & \frac{-1}{m+1} & \cdots & \frac{-1}{m+1} \\ \frac{-1}{m+1} & \frac{m}{m+1} & \cdots & \frac{-1}{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{m+1} & \frac{-1}{m+1} & \cdots & \frac{m}{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ \vdots \\ F^m \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^j = F^1 + \cdots + 2F^j + \cdots + F^m$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega^j - a_i}{b_i} = F^j + \sum_{i=1}^{m}F^i$$

$$\omega^j = \frac{F^j + \sum\limits_{i=1}^{m}F^i + \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}}$$

$$\xi_i^j = \frac{1}{b_i}\frac{F^j + \sum\limits_{q=1}^{m}F^q + \sum\limits_{s=1}^{n}\frac{a_s}{b_s}}{\sum\limits_{s=1}^{n}\frac{1}{b_s}} - \frac{a_i}{b_i}$$

Если $m = 1$, то

$$f_i^j = \frac{1}{b_i}\frac{F + \frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{n}\frac{a_s}{b_s}}{\sum\limits_{s=1}^{n}\frac{1}{b_s}} + \frac{1}{2}\frac{a_i}{b_i}$$

$$T^{u\varepsilon}(f_i) = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{f_i} t_i(u)du$$

$$T^{so}(f_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i(f_i)f_i$$

$$T_m^{n\varepsilon}(f_i) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} t_i(f_i) f_i^j$$

$$T^{so} \leq T_m^{n\varepsilon} \leq T^{u\varepsilon}$$

$$T^{so} = T_1^{n\varepsilon} \leq T_2^{n\varepsilon} \leq \cdots \leq T_{|F|}^{n\varepsilon} = T_\infty^{n\varepsilon} = T^{u\varepsilon} [!!!!!!!!!!!!]$$

Глава 3

Нелинейное программирование))))))

Глава 4

Рекомендуемая литература

1. «Новое индустриальное общество», Джон Кеннет Гэлбрейт