Санкт-Петербургский государственный университет

Моделирование социально-экономических систем

Лекции

Доцент кафедры математического моделирования
энергетических систем, кандидат физ.-мат. наук
Александр Юрьевич Крылатов

Санкт-Петербург, 2016

Оглавление

1 Балансовая модель производства **2**
1.1 Модель «затрата - выпуск» (англ. input - output) 2

2 Лекции 2-3 **6**
2.1 Прямая и двойственная задачи линейного программирования 6
2.2 Задачи о дополнительности 8

3 Лекция 4 **14**

4 Лекции 5-6 **17**
4.1 Двойственная задача программирования 17
4.2 Задача выпуклого программирования 18
4.3 Численные методы решения задач нелинейного программирования с ограничениями 22

5 Лекция 7 **23**

6 Лекции 8-9 **26**
6.1 Дуополия Курно (1838 г.) 26
6.2 Более сложные модели производства 26
6.3 Дуополия Бертрана (1883 г.) 29
6.4 Дуополия Хотеллинга (1929 г.) 29
6.5 Дуополия Штакельберга (1934 г.) 30

7 Лекция 10 **32**

8 Лекция 11 **33**
8.1 Двухуровневая оптимизация 33

9 Рекомендуемая литература **35**

Глава 1

Балансовая модель производства

1.1 Модель «затрата - выпуск» (англ. input - output)

Предположим следующее:

1) Количество продукции характеризуется одним числом (у каждого экономического объекта).

2) Комплектность потребления: для выпуска продукции экономический объект должен получить продукты от других объектов.

3) Линейность : для увеличения количества производства в n раз, необходимо увеличить ресурс в n раз.

4) Делимость на конечный продукт и на продукт, который будет использоваться в производстве.

Пусть n — количество субъектов (экономических субъектов),
x_i — количество производства продукта i,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},$$

x_{ji} — количество продукта j, необходимого для производства i.

$$\begin{cases} x_{1i} = \alpha_{1i} x_i \\ x_{2i} = \alpha_{2i} x_i \\ \dots \\ x_{ni} = \alpha_{ni} x_i \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Определение 1.1. A — матрица коэффициентов прямых затрат (матрица технологических коэффициентов).

Матрица A — положительно полуопределённая ($z^T Az \geq 0$, для любых ненулевых векторов z).

y_i – количество i-го продукта на продажу.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i + y_i = x_j \qquad \forall j = \overline{1, n};$$

$$Ax + y = x \leftrightarrow y = (E - A)x$$

$$x = (E - A)^{-1} y$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j = \overline{1, n}.$$

Для того, чтобы это уравнение имело единственное решение необходимо и достаточно, чтобы $det(E - A) \neq 0$.

Замечание 1.1. Далее под обозначением $x \geq 0$ будем понимать покомпонентную неотрицательность вектора x.

Определение 1.2. Квадратная матрица A, такая, что $A_{ij} \geq 0 \, \forall ij$, называется продуктивной, если существует хотя бы один такой вектор $\bar{x} > 0$, что $(E - A)\bar{x} > 0$.

Теорема 1.1. *(О существовании и единственности решение балансовой системы уравнений) Матрица A продуктивна, тогда и только тогда, когда существует, единственно и неотрицательно решение системы $(E - A)x = y$ для любого вектора $y \geq 0$.*

Доказательство. Достаточность.

Рассмотрим $\bar{y} > 0$ и $\bar{x} \geq 0$. $(E - A)\bar{x} = \bar{y} > 0 \quad \to \quad \bar{x} > A\bar{x} \quad \to \quad \bar{x} \geq 0$. $(E - A)\bar{x} > 0$

Лемма 1.1. *Если A – продуктивна, то*

$$\lim_{\nu \to \infty} A^{\nu} = 0 \qquad \nu \in N$$

Доказательство. $\bar{x} \overset{\text{def}}{>} A\bar{x} \geq 0$. Существует $\lambda : 0 < \lambda < 1$ такая, что

$$\lambda \bar{x} > A\bar{x}.$$

Домножим обе части на A:

$$\lambda A\bar{x} \geq A^2 \bar{x} \geq 0$$

А теперь на λ:

$$\lambda^2 \bar{x} > \lambda A\bar{x} \geq 0$$

Не трудно увидеть, что $\lambda^2 \bar{x} > A^2 \bar{x} \geq 0$. Тогда продолжая этот процесс получим

$$\lambda^{\nu} \bar{x} > A^{\nu} \bar{x} \geq 0.$$

Так как $\lambda^{\nu} \to 0$ при $\nu \to \infty$, то $A^{\nu} \to 0$ при $\nu \to \infty$. ■

Лемма 1.2. *Если A – продуктивна и существует такой вектор $\bar{x}$, что выполняется $\bar{x} \geq A\bar{x}$, то $\bar{x} \geq 0$.*

Доказательство.

$$\bar{x} \geq A\bar{x} \geq A^2\bar{x} \geq \cdots \geq A^\nu \bar{x}$$

$$\bar{x} \geq A^\nu \bar{x} \to 0, \text{ при } \nu \to \infty$$

$$\bar{x} \geq 0$$

■

Лемма 1.3. *Если A – продуктивна, то $det(E-A) \neq 0$.*

Доказательство. От противного.
Если A – продуктивна, но $det(E-A) = 0$.
Пусть существует такой вектор $\hat{x} \neq 0$, и пусть $(E-A)\hat{x} = 0 \quad \overset{\text{Lemma1.2}}{\Longrightarrow} \quad \hat{x} \geq 0$.
Теперь возьмем вектор $(-\hat{x})$, $(E-A)(-\hat{x}) = 0 \quad \overset{\text{Lemma1.2}}{\Longrightarrow} \quad (-\hat{x}) \geq 0$. Пришли к противоречию. ■

Необходимость.

$$(E-A)x = y \quad \forall y \geq 0$$

По Лемме 1.3 $det(E-A) \neq 0$, следовательно решение единственно.

$$(E-A)x \geq 0$$

В силу Леммы 1.2 $x \geq 0$. ■

Теорема 1.2. *Матрица $A \geq 0$ – продуктивна тогда и только тогда, когда $S = (E-A)^{-1}$ существует и не отрицательна.*

Доказательство. Необходимость.
$S = \{\sigma_{ij}\}_i^j$
Рассмотрим $(E-A)x = u_j$, где
$u_j = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ (Единица на j-ом месте)
В силу теоремы (1.1) $(E-A)x = y$ имеет единственное решение $x = Sy$, следовательно $\sigma_{ij} \geq 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$.
Достаточность.
Рассмотрим $\hat{x}: \quad (E-A)^{-1}u$
$u = \begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$
$\hat{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij}$
Так как $|E-A| \neq 0, (E-A)^{-1}$ – ни один столбец не состоит из нулей. Тогда
$\hat{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} > 0$
$(E-A)\hat{x} = u > 0$
$S = (E-A)^{-1}$ ■

Определение 1.3. Компоненты матрицы S называются коэффициентами полезных затрат, а S – матрица коэффициентов полных затрат.
$x = Sy$

Составление плана не ясно, нужны комментарии.

Теорема 1.3. *Если A продуктивная, то* $\lim\limits_{\nu\to\infty} y_\nu = (E-A)^{-1}y_0$.

Доказательство. $y_\nu = (E-A)^{-1}y_0 - (E-A)^{-1}A^{\nu+1}y_0 \to (E-A)^{-1}y_0$ ■

Пример про составление плана с двумя определениями не понятно. Спросить.

Глава 2

Лекции 2-3

2.1 Прямая и двойственная задачи линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу линейного программирования, называемую двойственной или сопряженной по отношению к исходной или прямой. Связь исходной и двойственной задач заключается главным образом в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Прямая задача:	Двойственная задача:
$\max\limits_{x} c^T x$	$\min\limits_{y} d^T y$
$Ax \leq d$	$A^T y \geq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

Лемма 2.1. *Если x – допустимое решение прямой задачи, и вектор y – допустимое решение двойственной задачи:*

$$c^T x \leq x^T A^T y \leq d^T y \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. $c^T x^\star = d^T y^\star$, *где* $x^\star$, $y^\star$ *– оптимальные решения* (2.1).

$$\begin{aligned}
&L(d) = (c, x^\star) = (d, y^\star) \\
&\triangle L(d) = L(d + \triangle d) - L(d) = (d + \triangle d, y + \triangle y) - (d, y) = \\
&= (\triangle d, y) + (d, \triangle y) + (\triangle d, \triangle y), \text{ при малом } \triangle d\text{: } \triangle y = 0[!!!!!!!] \\
&\triangle L(d) = (\triangle d, y)
\end{aligned}$$

Теорема 2.2. *Для того, чтобы допустимые решения x и y прямой и двойственной задачи были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее:*

$$y_j^\star = 0, \ if \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^\star < d_j \tag{2.2}$$

$$x_i^\star = 0, \ if \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^\star < c_i \tag{2.3}$$

Если же прямая задача является (??? какой), то необходимо и достаточно выполнение только второго условия.

Доказательство. Достаточность

$$
\begin{aligned}
&1) \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \leq d_j,\ \forall j = \overline{1,n} \\
&y_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \right) = y_j d_j,\ \forall j = \overline{1,n} \\
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i y_j = (d, y) \\
&2) \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \geq c_i \\
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i y_j = (c, x) \\
&(d, y) = (c, x) \Rightarrow \text{оптимальное}
\end{aligned}
$$

Необходимость

$$
\begin{aligned}
&(d, y) = (c, x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i y_j \\
&\sum_{i=1}^{m} d_i x_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{m}(d_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j) = 0
\end{aligned}
$$

■

$$
\begin{array}{lcr}
\max c^T x & \Leftrightarrow & \min dy \\
Ax = d & & A^T y \geq c \\
x \geq 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_1 = c^T x + \lambda^T (Ax - d) + \eta^T x \\
&L_2 = d^T y + \omega^T (c - A^T y)
\end{aligned}
$$

$\eta^T x = 0$ – третье условие Куна-Таккера $\Rightarrow$ если $x = \omega$ и $\lambda = y$, то Лагранжианы одинаковы.

2.2 Задачи о дополнительности

$$\begin{aligned} &\max_x c^T x && \min_y b^T y \\ &Ax \le b && A^T y \ge c \\ &x \ge 0 && y \ge 0 \end{aligned}$$

$z^T \omega(z) = 0$
$z \ge 0$
$\omega \ge 0$

$$\overline{z} = b^T y \ge y^T A x \ge c^T x = \underline{z} \text{ – верхняя и нижняя оценки}$$

$$b^T y^\star = c^T x^\star \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} Ax - v = b,\ v \ge 0,\ x \ge 0 \\ A^T y + u = c,\ u \ge 0,\ y \ge 0 \end{gathered}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Из (2.4) $\Rightarrow x^T u + y^T v = 0$

$$\omega = q + Mz, \text{ где } q = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \omega(z) = 0$$

[??????]

Теорема 2.3. *Экстремальная задача*

$$\begin{aligned} &\min f(x) && f\text{– выпуклая} \\ &\quad g_1(x) = 0 && g_i\text{– выпуклые} \\ &\quad \vdots \\ &\quad g_m(x) = 0 \\ &\quad g_{m+1}(x) \le 0 \\ &\quad \vdots \\ &\quad g_{m+n} \le 0 \end{aligned}$$

имеет оптимальное решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &1) \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ &2) g_i(x)\ \forall i = \overline{1, m} \\ &3) \lambda_j g_j(x) = 0\ \forall j = \overline{m+1, m+n} \\ &\lambda_q \text{ – множители Лагранжа, } : \lambda_q \ge 0,\ \forall q = \overline{m+1, m+n} \end{aligned}$$

Пример 1.

$$\begin{aligned}
&\min_x \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{x_i} f_i(u)du \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = F \\
&f_i \geq 0
\end{aligned}$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{x_i} f_i(u)du + \omega(F - \sum_{i=1}^{n} x_i) + \sum_{i=1}^{n}(-x_i)\eta_i$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_i} =& f_i(x_i) - \omega - \eta_i \\
& f_i(x_i) = \omega + \eta_i \\
& \eta_i x_i \neq 0 \, \forall i
\end{aligned}$$

$$f_i(x_i^\star) \begin{cases} = \omega, \ x_i^\star > 0 \\ \geq \omega, \ x_i^\star = 0 \end{cases}$$

[Добавить картинки и больше описания]

2.2.1 next lection

$$\begin{aligned}
\max_x \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{x_i} f_i(u)du = \min_x \sum_{i=1} g(x_i) & \\
\sum_{i=1}^{n} x_i = F & \qquad\qquad \omega \\
f_i \geq 0 & \qquad\qquad \eta_i \geq 0
\end{aligned}$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{x_i} f_i(u)du + \omega(F - \sum_{i=1}^{n} x_i) + \sum_{i=1}^{n}(x_i)\eta_i$$

$$\begin{aligned}
& f_i(x_i) = \omega - \eta_i \\
& f_i(x_i^\star) \begin{cases} = \omega, \ x_i^\star > 0 \\ \leq \omega, \ x_i^\star = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

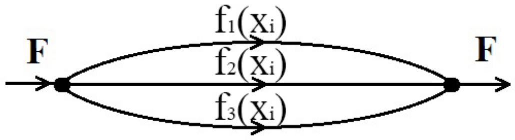

Рис. 2.1

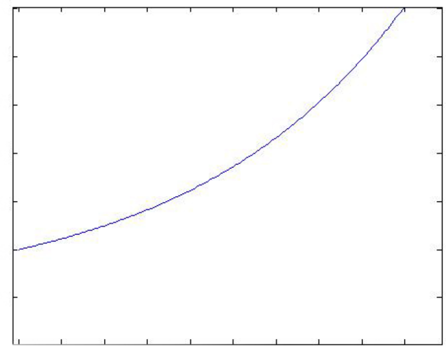

Рис. 2.2

[new example]

$$\min_x \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = F$$
$$f_i \geq 0$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)x_i + \omega(F - \sum_{i=1}^{n} x_i) + \sum_{i=1}^{n}(-x_i)\eta_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = f_i(x_i) + \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i}x_i - \omega - \eta_i$$
$$f_i(x_i) + \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i}x_i = \omega + \eta_i$$

$$f_i(x_i) + \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i}x_i \begin{cases} = \omega, \ x_i^\star > 0 \\ \geq \omega, \ x_i^\star = 0 \end{cases}$$

[рисунок перевернутой параболы]

$$\min_x \sum_{i=1}^{n} \int_0^{x_i} f_i(u)du$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = F$$
$$x_i \geq 0$$

$$f_i(x_i^\star) \begin{cases} = \omega, \ x_i^\star > 0 \\ \geq \omega, \ x_i^\star = 0 \end{cases}$$

Пусть $f_i(x_i) = a_i + b_i x_i$. Тогда

$$a_i + b_i x_i^\star \begin{cases} = \omega, \ x_i^\star > 0 \\ \geq \omega, \ x_i^\star = 0 \end{cases}$$

$$x_i^\star \begin{cases} = \omega - a_i, \ a_i \leq \omega \\ = 0, \ a_i > \omega \end{cases}$$

[тут еще раз проверить с индексом к]

Перенумеруем a_i, чтобы $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Существует такой номер k, что выполняется $a_k \leq \omega < a_{k+1}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^\star = \sum_{i=1}^{k} x_i^\star = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega}{b_i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i} = F$$

$$\omega = \frac{F + \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i}}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{b_i}}$$

$$x_i^\star = \begin{cases} \frac{1}{b_i} \frac{F + \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i}}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{b_i}} - \frac{a_i}{b_i}, \ i \leq k \\ 0, \ i > k \end{cases}$$

Ищем k:

$$a_k \leq \frac{F + \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i}}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{b_i}} < a_{k+1}$$

$$a_k \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{b_i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i} \leq F < a_{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{b_i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i}$$

[line]

[picture]

Пусть нам известны $f_i(x_i)$, нам нужно найти F. Эластичный спрос

$$\min_x \sum_{i=1}^{n} \int_0^{x_i} f_i(u) du - \int_0^F g^{-1}(\gamma) d\gamma$$

$$F - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \qquad \omega$$

$$x_i \geq 0 \qquad \eta_i \geq 0$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{0}^{x_i} f_i(u)du - \int\limits_{0}^{F} g^{-1}(\gamma)d\gamma + \omega(F - \sum_{i=1}^{n} x_i) + \sum_{i=1}(-x_i)\eta_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = f_i(x_i) - \omega\eta_i = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial F} = \omega - g^{-1}(F) = 0$$

$$f_i(x_i) = \omega + \eta_i$$
$$\omega = g^{-1}(F)$$

Пусть $g^{-1}(F) = T - F$, следовательно

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\omega}{b_i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i} = F$$
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\omega}{b_i} - \sum_{i=1} \frac{a_i}{b_i} = T - \omega$$

$$\omega = \frac{T + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i}}{1 + \sum i = 1^k \frac{1}{b_i}}$$

$$F = \frac{T \sum i = 1^k \frac{1}{b_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i}}{1 + \sum i = 1^k \frac{1}{b_i}} a_k \leq \frac{T \sum i = 1^k \frac{1}{b_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i}}{1 + \sum i = 1^k \frac{1}{b_i}} < a_k + 1$$

T – лояльность потребителей к потерям (задержкам).

2.2.2 Задача. Первая лабораторная

$$\min_x \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{0}^{x_i} f_i(u)du, \text{ где } f_i \text{ – любые выпуклые функции}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = F$$
$$x_i \geq 0$$

Вывод: $x,\ f_i(x_i)$.

2.2.3 Метод Франка-Вульфа

1. Задаем x^0 (например $x_i = \frac{F}{n}$), $LBD = 0$

2. $\overline{z}(x) = z(x^k) + \nabla z(x^k)(x - x^k)$ – минимизируем функцию.
   $\min \overline{z}(x)$
   $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = F$
   $x_i \geq 0$
   Получаем y^k. Вводим направление спуска $p^k = y^k - x^k$.

3. $LBD = \max\{LBD, \overline{z}(y^k)\}$ Критерий сходимости: $\frac{\overline{z}(x^k) - LBD}{LBD} < \varepsilon$

4. $arg \min\{z(x^k + lp^k)|0 \leq l \leq 1\}$ – находим длину шага

5. $x^{k+1} = x^k + l_k p^k$ – проверяем критерий сходимости, если не выполнено то возвращаемся к шагу 2.

Глава 3

Лекция 4

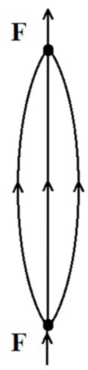

Рис. 3.1

$F = \sum\limits_{j=1}^{m} F^j$ – имеется m групп пользователей, F^j – поток группы.
Каждая группа стремиться минимизировать совой поток:

$$\min_{f^j} \sum_{i=1}^{n} t_i(f_i) f_i^j, \qquad f^j = (f_1^j, f_2^j, \dots, f_n^j) - \text{стратегия}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^j = F^j, \qquad f_i = \sum_{j=1}^{m} f_i^j$$

$$\frac{\partial L^j}{\partial f_i^j} = t_i(f_i) + \frac{\partial t_i(f_i)}{\partial f_i^j} f_i^j - \omega^j - \eta_i^j = 0$$

$$t_i(f_i) + \frac{\partial t_i(f_i)}{\partial f_i^j} f_i^j \begin{cases} = \omega^j & f_i^j > 0 \\ > \omega^j & f_i^j = 0 \end{cases}$$

$$t_i(f_i) = a_i + b_i f_i$$

$$a_i + b_i \sum_{j=1}^{m} f_i^j + b_i f_i^j \begin{cases} = \omega^j & f_i^j > 0 \\ \geq \omega^j & f_i^j = 0 \end{cases}$$

$$f_i^1 + \dots + 2 f_i^j + \dots + f_i^m \begin{cases} = \frac{\omega^j - a_i}{b_i} & f_i^j > 0 \\ \geq \frac{\omega^j - a_i}{b} & f_i^j = 0!!!!!!!!!!! \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i^1 \\ f_i^2 \\ \vdots \\ f_i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^1 - a_i}{b_i} \\ \frac{\omega^2 - a_i}{b_i} \\ \vdots \\ \frac{\omega^m - a_i}{b_i} \end{pmatrix}$$

Следовательно

$$\begin{pmatrix} f_i^1 \\ f_i^2 \\ \vdots \\ f_i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m+1} & \frac{-1}{m+1} & \cdots & \frac{-1}{m+1} \\ \frac{-1}{m+1} & \frac{m}{m+1} & \cdots & \frac{-1}{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{m+1} & \frac{-1}{m+1} & \cdots & \frac{m}{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega^1 - a_i}{b_i} \\ \frac{\omega^2 - a_i}{b_i} \\ \vdots \\ \frac{\omega^m - a_i}{b_i} \end{pmatrix}$$

Для экономии времени и места обозначим $\xi_i^j = \frac{\omega^j - a_i}{b_i}$.

$$f_i^j = \xi_i^j - \frac{1}{m+1} \sum_{q=1}^{m} \xi_i^q$$

$$F^j = \sum f_i^j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^j - \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} \xi_i^q \tag{3.1}$$

$$\begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ \vdots \\ F^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m+1} & \frac{-1}{m+1} & \cdots & \frac{-1}{m+1} \\ \frac{-1}{m+1} & \frac{m}{m+1} & \cdots & \frac{-1}{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{m+1} & \frac{-1}{m+1} & \cdots & \frac{m}{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ \vdots \\ F^m \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^j = F^1 + \cdots + 2F^j + \cdots + F^m$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega^j - a_i}{b_i} = F^j + \sum_{i=1}^{m} F^i$$

$$\omega^j = \frac{F^j + \sum\limits_{i=1}^{m} F^i + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}}$$

$$\xi_i^j = \frac{1}{b_i} \frac{F^j + \sum\limits_{q=1}^{m} F^q + \sum\limits_{s=1}^{n} \frac{a_s}{b_s}}{\sum\limits_{s=1}^{n} \frac{1}{b_s}} - \frac{a_i}{b_i}$$

Если $m = 1$, то

$$f_i^j = \frac{1}{b_i}\frac{F + \frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{n}\frac{a_s}{b_s}}{\sum\limits_{s=1}^{n}\frac{1}{b_s}} + \frac{1}{2}\frac{a_i}{b_i}$$

$$T^{u\varepsilon}(f_i) = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{f_i} t_i(u)du$$

$$T^{so}(f_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i(f_i)f_i$$

$$T_m^{n\varepsilon}(f_i) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} t_i(f_i)f_i^j$$

$$T^{so} \leq T_m^{n\varepsilon} \leq T^{u\varepsilon}$$

$$T^{so} = T_1^{n\varepsilon} \leq T_2^{n\varepsilon} \leq \cdots \leq T_{|F|}^{n\varepsilon} = T_\infty^{n\varepsilon} = T^{u\varepsilon}[!!!!!!!!!!!!]$$

Глава 4

Лекции 5-6

4.1 Двойственная задача программирования

Рассмотрим задачу о нахождении максимума функции $f(x)$ при заданных ограничениях $g_i(x) \geqslant 0,\ i = \overline{1, m}$:

$$\max_{x \in X} f(x) \tag{4.1}$$

$$X = \{\ x \mid x \in R^n,\ g_i(x) \geqslant 0,\ i = \overline{1, m}\ \},\ m < n \tag{4.2}$$

Построим функцию Лагранжа этой задачи:

$$F(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x) \tag{4.3}$$

И поставим вопрос о поиске величины:

$$\max_{x \in R^n} \min_{y \in Y} F(x, y),\ Y = \left\{\ y \mid y_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, m}\right\} \tag{4.4}$$

Определение 4.1. Пара (x^0, y^0) называется седловой точкой функции $F(x, y)$ на множестве $X \times Y$, если выполняется:

$$F(x, y^0) \leqslant F(x^0, y^0) \leqslant F(x^0, y),\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y$$

Иначе говоря, если точка (x^0, y^0) является седловой, то

$$\max_{x \in X} F(x, y^0) = \min_{y \in Y} F(x^0, y) = F(x^0, y^0)$$

Введем в рассмотрение величины:

$$\upsilon = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y),\ \bar{\upsilon} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$$

Лемма 4.1.

$$\upsilon \leqslant \bar{\upsilon} \text{ *или, что то же самое,* } \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) \leqslant \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$$

Доказательство.

$$\upsilon = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) \leqslant \sup_{x \in X} F(x, y'),\ \forall y' \in Y$$

и следовательно:

$$\upsilon \leqslant \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) = \bar{\upsilon}$$

■

Теорема 4.1. *Для того, чтобы функция $F(x, y)$ имела седловую точку на множестве $(x, y) \in X \times Y$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y)$$

Теорема 4.2. *Задачи* (4.1), (4.2) *и* (4.3), (4.4) *эквивалентны:*

1. $\bar{\upsilon} = \upsilon$;

2. $\max\limits_{x \in X} f(x) = \max\limits_{x \in R^n} \min\limits_{y \in Y} F(x, y)$.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию $\varphi(x) = \inf\limits_{y \in Y} F(x, y)$.

Для любого $x \in X$ и для любого номера $i \in \{1, 2, ..., m\}$ справедливо неравенство $g_i(x) \geqslant 0$, поэтому $F(x, y) \geqslant f(x)$ и, соответственно, $\varphi(x) = F(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in X$.

Если же $x \notin X$, то $g(i) < 0$ хотя бы для одного номера $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Построим такую последовательность векторов $\{y^k\} \in Y$, чтобы $y_i^k \to \infty$. Тогда $F(x, y^k) \to -\infty$, из чего следует, что $\varphi(x) = -\infty$, $\forall x \notin X$.

Таким образом, если $X \neq \emptyset$, то $\upsilon = \sup\limits_{x \in R} \varphi(x) = \sup\limits_{x \in X} \varphi(x) = \sup\limits_{x \in X} f(x) = \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x, y) = \bar{\upsilon}$, и решения задач (4.1),(4.2) и (4.3),(4.4) могут существовать только одновременно и совпадают.

При $X = \emptyset$ обе задачи не имеют решения. ■

Определение 4.2. Задача (4.3),(4.4) называется двойственной задачей по отношению к задаче (4.1),(4.2). Соотношение $\upsilon = \bar{\upsilon}$ называется соотношением двойственности, а теоремы, устанавливающие это соотношение, называются теоремами двойственности.

Теорема 4.3. *Если функция Лагранжа* (4.3) *имеет седловую точку на $R^n \times Y$, то выполняется соотношение двойственности: пусть точка (x^0, y^0) является седловой, тогда x^0 соответствует решению задачи* (4.1), (4.2), *а y^0 задачи* (4.3), (4.4).

4.2 Задача выпуклого программирования

Определение 4.3. Функция $f(x)$ называется выпуклой на X, если $\forall x', x'' \in X$ выполняется соотношение:

$$f(\lambda x' + (1 - \lambda) x'') \leqslant \lambda f(x') + (1 - \lambda) f(x''), \forall \lambda \in [0, 1]$$

Аналогично вводится определение вогнутой функции.

Определение 4.4. Функция $f(x)$ называется вогнутой на X, если $\forall x', x'' \in X$ выполняется соотношение:

$$f(\lambda x' + (1 - \lambda) x'') \geqslant \lambda f(x') + (1 - \lambda) f(x''), \forall \lambda \in [0, 1]$$

Определение 4.5. Задачей выпуклого программирования называется задача (4.1), (4.2) при условии, что $f(x)$ и $g_i(x)$ – вогнутые функции.

Лемма 4.2. *Множество допустимых решений задачи выпуклого программирования 4.1, 4.2 является выпуклым. Любой локальный максимум является глобальным.*

Доказательство. Пусть $x', x'' \in X$, т. е. $g_i(x') \geqslant 0$, $g_i(x'') \geqslant 0$, $i = \overline{1,m}$. Рассмотрим значение функций $g_i(x)$ в точке $x = \lambda x' + (1-\lambda)x''$:

$$g_i(x) = g_i(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \geqslant \lambda g_i(x') + (1-\lambda)g_i(x'') \geqslant 0$$

Следовательно x также принадлежит X, и X – выпуклое множество.

Пусть x^* – точка локального максимума. Это значит, что $f(x) \geqslant f(x)$, $\forall x \in X \cap S(x^*, \varepsilon)$, где $S(x^*, \varepsilon)$ – малая окрестность точки x^*.

Предположим, что существует точка $\hat{x} \in X$ и $f(\hat{x}) > f(x^*)$. Тогда для точки $\tilde{x} = \lambda x^* + (1-\lambda)\hat{x}$, $\lambda \in (0,1)$ справедливо:

$$f(\tilde{x}) \geqslant \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(\hat{x}) > \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(x^*) = f(x^*)$$

и существует такое $\lambda \in (0,1)$, что $\tilde{x}(\lambda) \in X \cap S(x^*, \varepsilon)$. Получаем противоречие, указывающее на ошибочность сделанного предположения.

Значит, для любой точки $x \in X$ выполняется соотношение $f(x) \leqslant f(x^*)$, что соответствует определению глобального максимума в точке x^*. ■

Теорема 4.4. *Пусть X и Y – выпуклые, замкнутые и ограниченные подмножества евклидова пространства, а функция $F(x,y) \in C(X \times Y)$ вогнута по x, $\forall y \in Y$, и выпукла по y, $\forall x \in X$. Тогда $F(x,y)$ имеет седловую точку на $X \times Y$.*

Определение 4.6. Задача выпуклого программирования удовлетворяет условию Слейтера, если $\exists x \in R^n :\ g_i(x) > 0,\ i = \overline{1,m}$.

Теорема 4.5. *Если задача выпуклого программирования удовлетворяет условию Слейтера, то необходимым и достаточным условием оптимальности точки x^0 в задаче* (4.1), (4.2) *является существование такого вектора $y^0 \in Y$, чтобы точка (x^0, y^0) была седловой для* (4.3).

Доказательство.

Достаточность следует из теоремы 4.3.

Необходимость. Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ z = (z_1, z_2, ..., z_m, z_{m+1})^T |\ z_i \leqslant g_i(x),\ i = \overline{1,m},\ z_{m+1} \leqslant f(x) \right\}, \\ B &= \left\{ z = (z_1, z_2, ..., z_m, z_{m+1})^T |\ z_i > 0,\ i = \overline{1,m},\ z_{m+1} > f(x^0) \right\}, \end{aligned}$$

где x^0 – решение задачи выпуклого программирования, а x – произвольная точка множества R^n.

Покажем, что множествл A является выпуклым. Пусть

$$z', z'' \in A \Rightarrow z' \leqslant g_i(x'),\ z'' \leqslant g_i(x''),\ z'_{m+1} \leqslant f(x'),\ z''_{m+1} \leqslant f(x'')$$

Рассмотрим точку $z^\alpha = \alpha z' + (1-\alpha)z''$.

$$z_i^\alpha \leqslant \alpha g_i(x') + (1-\alpha)g_i(x'') \leqslant g_i(\alpha x' + (1+\alpha)x'') = g_i(x^\alpha),$$

где $x^\alpha = \alpha x' + (1+\alpha)x''$, $i = \overline{1,m}$

$$z_{m+1}^\alpha \leqslant \alpha f(x') + (1-\alpha)x'' \leqslant f(x^\alpha),$$

т.е. $z^\alpha \in A$, поэтому A – выпуклое множество.

Множество B представляет собой открытый ортант с вершиной в точке $(0, 0, ..., f(x^0))^T$, поэтому B также выпукло.

В силу оптимальности вектора x^0 множества A и B не пересекаются, т. е. $A \cap B = \emptyset$. Значит, по теореме о разделяющей гиперплоскости существует такой ненулевой вектор $a = (a_1, a_2, ..., a_{m+1})^T$, что

$$(a, z^1) \leqslant (a, z^2),\ \forall z^1 \in A, z^2 \in B \tag{4.5}$$

Предположим, что $a_i < 0$, тогда, выбирая последовательность $\{z^k\} \in B$ таким образом, чтобы $z_i^k \to \infty$, а остальные компоненты были равны нулю, получим $(a, z^k) \to -\infty$, что противоречит неравенству (4.5), следовательно предположение неверно.

Так как точка $(0, 0, ..., f(x^0))^T$ является предельной для множества B, то выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(x) + a_{m+1} f(x) \leqslant a_{m+1} f(x^0) \tag{4.6}$$

Поэтому $a_{m+1} > 0$, поскольку, если $a_{m+1} = 0$, то из (4.6) получаем $\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(x) \leqslant 0, \forall x \in X$, что противоречит условию Слейтера.

Положим $y_i^0 = \dfrac{a_i}{a_{m+1}},\ i = \overline{1, m}$, тогда из (4.6) следует:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^0 g_i(x) + f(x) \leqslant f(x^0),\ \forall x \in R \tag{4.7}$$

При $x = x^0$ получаем $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i^0 g_i(x^0) \leqslant 0$. Но $y_i^0 \geqslant 0,\ g_i(x^0) \geqslant 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i^0 g_i(x^0) \geqslant 0$. Значит

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^0 g_i(x^0) = 0 \tag{4.8}$$

Прибавив эту сумму к правой части (4.7), получим: $F(x, y^0) \leqslant F(x^0, y^0), \forall x \in X$.

Поскольку $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x^0) \geqslant 0, \forall y \geqslant 0$, имеем $F(x^0, y^0) \leqslant F(x^0, y), \forall y \geqslant 0$. Значит, (x^0, y^0) – седловая точка. ■

Определение 4.7. Ограничения, которые выполняются в некоторой точке как равенства называются активными. Множество $I(x) = \{\ i \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ g_i(x) = 0\}$ - совокупность индексов активных ограничений.

Из свойства (4.8) седловой точки получаем, что $y_i^0 = 0, \forall i \notin I(x^0)$. Поэтому для определения x^0 и ненулевых y_i^0 имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \displaystyle\sum_{i \in I(x^0)} y_i^0 \dfrac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_j} = 0, \\ g_i(x^0) = 0,\ i \in I(x^0) \end{cases} \tag{4.9}$$

Теорема 4.6. *Система (4.9) представляет собой необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи выпуклого программирования в случае, когда $R = R^n$.*

Теорема 4.7. *Необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи выпуклого программирования в случае $R = \{\ x \mid x \geqslant 0\}$ можно представить в виде системы:*

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x^0,y^0)}{\partial x_j} \leqslant 0,\ j=\overline{1,n}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial F(x^0,y^0)}{\partial x_j} x_j^0 = 0, \\ g_i(x^0) y_i^0 = 0,\ i=\overline{1,m}. \end{cases}$$

Рассмотрим более общую задачу о поиске

$$max_{x \in R^n} f(x)$$

при ограничениях

$$g_i(x) \geqslant 0,\ i=\overline{1,m}$$

$$H_k(x) = 0,\ k=\overline{1,r}$$

Для данной задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 4.8. *Если $f(x)$ и $g_i(x)$ – вогнутые на гиперплоскости, определяемой уравнениями $H_k(x)=0,\ i=\overline{1,m}$, и на этой гиперплоскости выполняются условия Слейтера, то решение x^0 существует и является глобальным максимумом. При этом для функции Лагранжа $L(x,y,\nu) = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} y_i g_i(x) - \sum\limits_{k=1}^{r} \nu_k H_k(x)$ существуют такие $y_i^0 \geqslant 0,\ i=\overline{1,m}$ и $\nu_k^0,\ k=\overline{1,r}$, что в точке (x^0,y^0,ν^0) выполняются следующие условия:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0,\ j=\overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i} \geqslant 0,\ i=\overline{1,m}, \\ y_i^0 \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = 0,\ i=\overline{1,m}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \nu_k} = 0,\ k=\overline{1,r}, \end{cases}$$

Пример 2. На предприятии имеется два вида ресурсов. Цена ресурса первого вида 3 единицы, второго – 4 единицы. Известно, что из x_1 первого ресурса и x_2 второго ресурса можно получить $z(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ единиц продукта. Какое распределение ресурсов будет оптимальным, если всего на производство выделено 24 единицы?

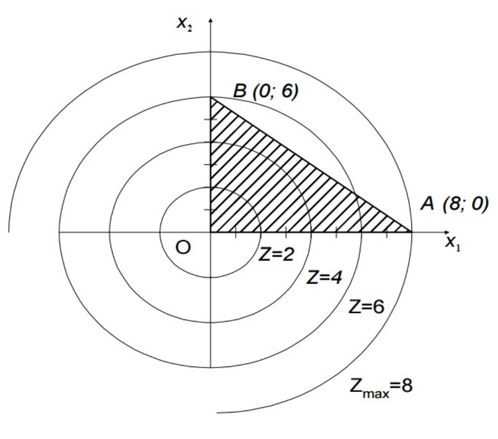

Рис. 4.1

Математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$z(x^0) = \max_x \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$
$$3x_1 + 4x_2 \leqslant 24,$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

Множество допустимых решений заштриховано на рис. 4.1. Если целевой функции придавать фиксированные значения 1, 2, 3, ..., то будем получать окружности с центром в начале координат и радиусом 1, 2, 3, ... Начертим ряд окружностей (линии уровня целевой функции). Из рисунка видно, что функция $z(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ достигает наибольшего значения, равного 8, в точке $(8; 0)$, т.е. $z_{\max} = z(8; 0) = 8$.

4.3 Численные методы решения задач нелинейного программирования с ограничениями

В зависимости от наличия ограничений градиентные методы модифицируются путем проекции полученного нового приближения на допустимое множество значений $x \in X$:

1. Градиентные методы:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k f'(x^k), \text{ где } f(x^k + \alpha_k f'(x^k)) = \max_{\alpha \geqslant 0} f(x^k + \alpha f'(x^k));$$

2. Проективные методы:

$$x^{k+1} = P_x(x^k + \alpha_k f'(x^k)).$$

Глава 5

Лекция 7

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{n} \int_0^{f_i} t_i(u)du \\
&a_i(f_i) = t_i(f_i) - t_i'(f_i) f_i \\
&b_i(f_i) = t_i'(f_i) \\
&\sum_{i=1}^{n} \ f_i = F \\
&f_i \geqslant 0, \forall i = \overline{1, n}
\end{aligned}
$$

f_i^k: перенумеруем f_i, u_i, b_i, t_i так, чтобы $a_1(f_1^k) \leqslant ... \leqslant a_n(f_n^k)$. Мы их перенумеровываем каждый раз все. Далее находим m^k - количество не нулевых f_i.

$$
\omega^k = \frac{F + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i(f_i^k)}{b_i(f_i^k)}}{\sum\limits_{i=1}^{m^n} \dfrac{1}{b_i(f_i^k)}}
$$

$a_{m^k}(f_{m^k}^k) \leqslant \omega^k < a_{m^{k+1}}(f_{m^{k+1}}^k)$

Как только находим m^k ищем

$$
f_i^{k+1} = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{b_i(f_i^k)}(F + \sum\limits_{s=1}^{m^k} \dfrac{a_s(f_s^k)}{b_s(f_s^k)})}{\sum\limits_{s=1}^{m^n} \dfrac{1}{b_s(f_s^n)}} - \dfrac{a_i(f_i^k)}{b_i(f_i^k)}, \ i \leqslant m^k \\ 0, \ i > m^k \end{cases}
$$

Предложение: на первом шаге взять $f_i^0 = \dfrac{F}{n}, \forall i = \overline{1, n}$

Для простоты будем рассматривать вариант $m^n = m^*$.

Рассмотрим $f_i^{k+1} - f_i^* = f_i^k - \dfrac{t_i(f_i^k)}{t_i'(f_i^k)} + \dfrac{F - \sum\limits_{s=1}^{m} \left[f_s^k - \dfrac{t_s^k(f_s^k)}{t_s'(f_s^k)} \right]}{\sum\limits_{s=1}^{m} \dfrac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}} - f_i^*$. Далее разложим F и внесем под сумму.

$$f_i^{k+1}-f_i^*=(f_i^k-f_i^*)-\frac{t_i(f_i^k)-t_i(f_i^*)}{t_i'(f_i^k)}-\frac{t_i(f_i^*)}{t_i'(f_i^k)}-\frac{\sum\limits_{s=1}^{m}\left[f_s^k-f_s^*-\dfrac{t_s(f_s^k)-t_s(f_s^*)}{t_s'(f_s^k)}-\dfrac{t_s(f_s^*)}{t_i'(f_i^k}\right]}{\sum\limits_{s=1}^{m}\dfrac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}}$$

Теперь, пользуясь замечательным свойством $t_i(f_i^\star)=\omega$, $\forall i$

$$f_i^{k+1}-f_i^*=(f_i^k-f_i^*)-\frac{t_i(f_i^k)-t_i(f_i^*)}{t_i'(f_i^k)}-\frac{\omega}{t_i'(f_i^k)}-\frac{\sum\limits_{s=1}^{m}\left[f_s^k-f_s^*-\dfrac{t_s(f_s^k)-t_s(f_s^*)}{t_s'(f_s^k)}-\dfrac{\omega}{t_i'(f_i^k)}\right]}{\sum\limits_{s=1}^{m}\dfrac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}}=$$

$$=(f_i^k-f_i^*)-\frac{t_i(f_i^k)-t_i(f_i^*)}{t_i'(f_i^k)}-\frac{\omega}{t_i'(f_i^k)}-\frac{\sum\limits_{s=1}^{m}\left[f_s^k-f_s^*-\dfrac{t_s(f_s^k)-t_s(f_s^*)}{t_s'(f_s^k)}\right]-\omega\sum\limits_{s=1}^{m}\dfrac{1}{t_i'(f_i^k)}}{t_i'(f_i^k)\sum\limits_{s=1}^{m}\dfrac{1}{t_s'(f_s^k)}}$$

$$f_i^{k+1}-f_i^*=(f_i^k-f_i^*)-\frac{t_i(f_i^k)-t_i(f_i^*)}{t_i'(f_i^k)}-\frac{\omega}{t_i'(f_i^k)}-\frac{\sum\limits_{s=1}^{m}\left[f_s^k-f_s^*-\dfrac{t_s(f_s^k)-t_s(f_s^*)}{t_s'(f_s^k)}\right]}{\sum\limits_{s=1}^{m}\dfrac{t_i'(f_i^k)}{t_s'(f_s^k)}}+\frac{\omega}{t_i'(f_i^k)}$$

Воспользуемся разложением Лагранжа

$$f_i^{k+1}-f_i^*=(f_i^k-f_i^*)-\frac{t_i'(\theta_i^k)}{t_i'(f_i^k)}(f_i^k-f_i^*)-\frac{\sum\limits_{s=1}^{m}\left[f_s^k-f_s^*-\dfrac{t_s'(\theta_s^k)}{t_s'(f_s^k)}(f_s^k-f_s^*)\right]}{t_i'(f_i^k)\sum\limits_{s=1}^{m}\dfrac{1}{t_s'(f_s^k)}}$$

$$f_i^{k+1}-f_i^*=\left[1-\frac{t_i'(\theta_i^k)}{t_i'(f_i^k)}\right](f_i^k-f_i^*)-\frac{\sum\limits_{s=1}^{m}\left[1-\dfrac{t_s'(\theta_s^k)}{t_s'(f_s^k)}(f_s^k-f_s^*)\right]}{t_i'(f_i^k)\sum\limits_{s=1}^{m}\dfrac{1}{t_s'(f_s^k)}}$$

Далее обозначим $g_i^k=1-\dfrac{t_i'(\theta_i^k)}{t_i'(f_i^k)}$; $\mathscr{L}=t_i'(f_i^k)\sum\limits_{s-1}^{m}\dfrac{1}{t_s'(f_s^k)}$;

$$|f_i^k-f_i^*|\leqslant|g_i^k||f_i^k-f_i^*|+\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{m}d_s^k(f_s^k-f_s^*)\right|}{|\mathscr{L}_i^k|}$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{m}|f_i^{n+1}-f_i^*|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|g_i^k||f_i^k-f_i^*|+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{|\mathscr{L}_i^k|}\left|\sum_{s=1}^{m}(f_s^k-f_s^*)\right|$ Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^{m}|f_i^k-f_i^*|\leqslant 2\sum_{i=1}^{m}|g_i||f_i^k-f_i^*|$$

Значит, следующий шаг ограничен сверху $\forall\varepsilon\ \exists\rho : f_i^k \in S_\rho(f^*)$;
$\sum\limits_{i=1}^{m} |f_i^{k+1} - f_i^*| \leqslant \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{m} |f_i^k - f_i^*| < \varepsilon^{k+1} \sum\limits_{i=1}^{m} |f_i^0 - f_i^k|$

Теперь покажем, что $|f_i^{k+1} - f_i^*| \leftrightarrow |f_i^k - f_i^*|^2$

$$t_i(f_i) = t_i(f_i^*) + t_i'(f_i^\star)(f_i^k - f_i^*) + \frac{t_i''(f_i^k)}{2}(f_i^k - f_i^*)^2$$

$$t_i(f_i^k) = \omega + t_i'(f_i^\star)(f_i^k - f_i^*) + \frac{t_i''(f_i^k)}{2}(f_i^k - f_i^*)^2$$

$$\frac{t_i(f_i^k)}{t_i'(f_i^*)} = \frac{\omega}{t_i'(f_i^*)} + (f_i^k - f_i^*) + \frac{t_i''(f_i^*)}{2t_i'(f_i^*)}(f_i^k - f_i^*)^2$$

$$(f_i^k - f_i^*) - \frac{t_i(f_i^k)}{t_i'(f_i^*)} = -\frac{t_i''(f_i^*)}{2t_i'(f_i^*)}(f_i^k - f_i^*)^2 - \frac{\omega}{t_i'(f_i^*)}$$

$$f_i^{k+1} - f_i^* = (f_i^k - f_i^*) - \frac{t_i(f_i^k)}{t_i(f_i^*)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{m}[\ldots]}{\sum\limits_{s=1}^{m}\frac{t_i'(f_i^*)}{t_s'(f_f^k)}}$$

$$f_i^{k+1} - f_i^* = -\frac{\omega}{t_i'(f_i^*)} - \frac{t_i''(f_i*)}{2t_i'(f_i^*)}$$

$$|f_i^{k+1} - f_i^*| \leqslant \left|\frac{t_i''(f_i^*)}{2t_i(f_i^*)}\right| \left|f_i^k - f_i^*\right|^2 + \left|\frac{\sum\limits_{s=1}^{m}[\ldots[!!!!!]]}{\sum\limits_{s=1}^{m}\frac{t_i'(f_i^*)}{t_s'(f_s^k)}}\right|$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left|f_i^{k+1} - f_i^*\right| \leqslant \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{t_i''(f_i^*)}{t_i'(f_i^*)}\right| \left|f_i^k - f_i^*\right|^2$$

Глава 6

Лекции 8-9

6.1 Дуополия Курно (1838 г.)

Некоторый продукт выпускается двумя фирмами. Фирма I выпускает q_1 единиц продукта, фирма II выпускает q_2 единиц продукта. Пусть p – некоторая начальная цена продукта, а c – его себестоимость.

Тогда прибыли фирм равны, соответственно:

$$B_1(q_1, q_2) = (p - q_1 - q_2)q_1 - cq_1$$
$$B_2(q_1, q_2) = (p - q_1 - q_2)q_2 - cq_2$$

Найдем равновесное состояние системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial B_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p - c - 2q_1 - q_2 = 0 \\ p - c - 2q_2 - q_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} q_1 = \dfrac{p - c - q_2}{2} \\ q_2 = \dfrac{p - c - q_1}{2} \end{cases}$$

Подставим выражение для q_1 во второе уравнение:

$$q_2 = \frac{p-c}{2} - \frac{p-c-q_2}{4} \Rightarrow q_2 = \frac{p-c}{3} \Rightarrow q_1 = \frac{p-c}{3}$$

6.2 Более сложные модели производства

Пусть n производителей выпускает m видов продуктов. Величина x_{ij} показывает, сколько единиц продукта j выпускает (потребляет, если величина x_{ij} отрицательная) производитель i.

Предполагается, что каждого товара выпускается не меньше, чем потребляется:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geqslant 0, j = \overline{1, m} \tag{6.1}$$

Обозначим $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{im})^T$ производственный план фирмы i. Введем в рассмотрение для каждой фирмы функцию полезности производственного плана $f_i(x_i)$.

Определение 6.1. Набор $x_1^*, ..., x_n^*$ является Парето-оптимальным, если выполняется:

1. $\forall i : f_i(x_i^*) = f_i(\hat{x}_i), \forall \hat{x}_i$

   или

2. $\exists i : f_i(x_i^*) > f_i(\hat{x}_i), \forall \hat{x}_i$

Пусть $p = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)^T$ – вектор стоимости продуктов. Поставим задачу максимизации функции полезности фирмы i при условии неубыточности производства.

$$\begin{cases} \max\limits_{x_i} f_i(x_i) \\ (p, x_i) \geqslant 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

Пусть $x_i(p)$ – решение (6.2).

Определение 6.2. Решение (6.2): $p^*, x_1^*(p^*), x_2^*(p^*), ..., x_n^*(p^*)$, удовлетворяющее (6.1), называется балансовым равновесием.

Сделаем следующие предположения:

1. $\forall i\ x_i \in X_i$, где X_i - выпуклое, замкнутое, ограниченное множество;
2. Пусть $P = \left\{ (\pi_1, ..., \pi_m)^T | \sum\limits_{j=1}^{m} \pi_j = 1, \pi_j \geqslant 0, j = \overline{1, m} \right\}$ – симлекс в R^m, тогда:

$$\exists p \in P : \forall i\ \exists x_i \in X_i : (p, x_i) > 0;$$

3. $\forall i :\ f_i(x_i)$ – вогнутые.

Теорема 6.1. *Пусть вышеуказанные предположения справедливы, тогда существует единственное решение* (6.2), *удовлетворяющее* (6.1).

Определение 6.3.

1. Отображение $g(x)$ переводит X в себя, если $\forall x \in X\ g(x) \in X$;
2. Отображение $g(x)$ непрерывно в точке $\bar{x}$, если $\forall \{x_i\} : x_i \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \bar{x}$ выполняется $g(x_i) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} g(\bar{x})$;
3. Отображение $g(x)$ непрерывно на X, если $g(x)$ непрерывно во всех $x \in X$;
4. Точка $x^0 \in X$ называется неподвижной точкой множества X относительно отображения $g(x)$, если $g(x^0) = x^0$.

Теорема 6.2 (Брауэра). *Пусть X – выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, $g(x)$ переводит X в себя. Тогда существует неподвижная точка.*

Лемма 6.1 (!!!!!!!). *Пусть X выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, $z(x)$ переводит X в себя. Пусть $\exists p \in P :\ (z(x), p) \geqslant 0,\ p = p(x)$. Тогда $z(x) \geqslant 0$.*

Доказательство. $z(x) = (z_1(x), ..., z_m(x))^T$. Введем в рассмотрение также отображение $r(p) = (r_1(p), ..., r_m(p))^T$, где $r_i(p) = \dfrac{\pi_i + \max\{0, -z_i(x)\}}{\sum_{j=1}^m \pi_j + \sum_{j=1}^m \max\{0, -z_j(x)\}}$

$$\sum_{i=1}^{m} r_i(p) = 1,\ r(p) \in P \Longrightarrow \exists \hat{p} : r(\hat{p}) = \hat{p} \text{ (по теореме Брауэра)}$$

$$\hat{\pi}_i = \frac{\hat{\pi}_i + \max\{0, -z_i(\hat{p})\}}{\sum_{j=1}^m \hat{\pi}_j + \sum_{j=1}^m \max\{0, -z_j(\hat{p})\}}$$

$$\max\{0, -z_i(\hat{p})\} = \hat{\pi}_i \sum_{j=1}^{m} \max\{0, -z_j(\hat{p})\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_i(\hat{p}) \max\{0, -z_i(\hat{p})\} = (\hat{p}, z(\hat{p})) \sum_{j=1}^{m} \max\{0, -z_j(\hat{p})\}$$

Если $\exists z_i(x\hat{p} < 0$, то приходим к противоречию. ∎

Лемма 6.2. *Пусть X_i - выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, $i = \overline{1, n}$. Тогда:*

1. *Существует единственное решение $x_i(p^*)$ задачи (6.2), удовлетворяющее (6.1);*
2. *$x_i(p^*)$ является непрерывным отображением симплекса P в R^m.*

Доказательство. Единственность решения $x_i(p^*)$ является следствием вогнутости $f_i(x_i)$ и выпуклости X_i

Докажем непрерывность. Предположим, что $\exists\{p_k\} : \lim\limits_{k\to\infty} p_k = \bar{p}$, но при этом $\lim\limits_{k\to\infty} x_i(p_k) = \hat{x}_i \neq x_i(\bar{p})$.

$$(x_i(p_k), p_k) \geqslant 0 \ \forall k \Longrightarrow (\hat{x}_i, \bar{p}) \geqslant 0$$

при этом $f_i(x_i(\bar{p})) > f_i(\hat{x}_i) \Longrightarrow \exists\alpha : f_i(\hat{x}_i) < f_i(x_i(\bar{p})) - \alpha$. Значит, для достаточно больших номеров k справедливо соотношение:

$$f_i(x_i(p_k)) < f_i(x_i(\bar{p})) - \frac{\alpha}{2} \tag{6.3}$$

следовательно:

$$(p_k, x_i(\bar{p})) < 0 \text{ (в силу единственности решения)} \tag{6.4}$$

$$\lim_{k\to\infty} (p_k, x_i(\bar{p})) = (\bar{p}, x_i(\bar{p})) \leqslant 0 \Longrightarrow (\bar{p}, x_i(\bar{p})) = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} (p_k, x_i(\bar{p})) = 0 \tag{6.5}$$

Согласно предположению 2 на стр. 27: $\exists\tilde{x}_i \in X_i : (\bar{p}, \tilde{x}_i) > 0$, а значит:

$$(p_k, \tilde{x}_i) > \frac{(\bar{p}, \tilde{x}_i)}{2} > 0 \tag{6.6}$$

Покажем, что (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) одновремененно невозможны.

Пусть $x_i^k = x_i(\bar{p}) + \lambda_k(\tilde{x}_i - x_i(\bar{p}))$, где $\lambda_k \in (0, 1)$ выбирается из условия $(p_k, x_i^k) = 0$:

$$\lambda_k = -\frac{(p_k, x_i(\bar{p}))}{(p_k, \tilde{x}_i) - (p_k, x_i(\bar{p}))}$$

Значит, x_i^k принадлежит отрезку между $x_i(\bar{p})$ и $\tilde{x}_i$, следовательно $x_i^k \in X_i$. При этом $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ (согласно (6.5)).

$$f_i(x_i^k) \leqslant f_i(x_i(p^k))$$

$$f_i(x_i^k) \geqslant f_i(x_i(\bar{p})) + \lambda_k(f_i(\tilde{x}_i) - f_i(x_i(\bar{p}))$$

$$f_i(x_i^k) > f_i(x_i(p_k)) + \frac{\alpha}{2}$$

Получаем противоречие. ∎

6.3 Дуополия Бертрана (1883 г.)

Две фирмы выпускают взаимозаменяемые продукты. Фирма I продает свой продукт по цене q_1, фирма II продает по цене q_2. Пусть k – коэффициент взаимозаменяемости продуктов, а c – их себестоимость, d – начальный спрос.

Тогда прибыли фирм равны, соответственно:

$$H_1(q_1, q_2) = (d - q_1 + kq_2)(q_1 - c)$$
$$H_2(q_1, q_2) = (d - q_2 + kq_1)(q_2 - c)$$

Найдем равновесное состояние системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial H_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d + c - 2q_1 + kq_2 = 0 \\ d + c - 2q_2 + kq_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{d + c + kq_2}{2} \\ q_2 = \dfrac{d + c + kq_1}{2} \end{cases}$$

Подставим выражение для q_1 во второе уравнение:

$$q_2 = \frac{1}{2}(d + c) + \frac{k}{4}(d + c + kq_2) \Rightarrow (4 - k^2)q_2 = (k + 2)(d + c)3 \Rightarrow q_2 = \frac{d + c}{2 - k} \Rightarrow q_1 = \frac{d + c}{2 - k}$$

6.4 Дуополия Хотеллинга (1929 г.)

Предполагается, что покупателями являются жители города, расположенного вдоль отрезка прямой $[0, 1]$ (например, вдоль шоссейной или железной дороги). Город заселен равномерно. Две фирмы, выпускающие одинаковый продукт по разным ценам (q_1 и q_2), располагаются на противоположных концах города. В единицу времени жители желают приобрести a единиц товара вне зависимости от цены. Доставка товара требует от покупателя затрат в размере t за единицу товара на единицу расстояния.

Покупатель, находящийся на расстояниях x_1 и x_2 от фирм, сравнивает свои расходы на покупку и доставку единицы товара от каждой из фирм ($q_1 + tx_1$ и $q_2 + tx_2$) и выбирает ту из фирм, чей товар обходится ему дешевле. Таким образом, город разбивается на две зоны, каждая из которых примыкает к «своей» фирме. Граница между зонами располагается на таких расстояниях x_1 и x_2 от фирм, где горожанам безразлично, у какой фирмы производить свои покупки. Положение границы определяется уравнениями:

$$\begin{cases} q_1 + tx_1 = q_2 + tx_2, \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Откуда $x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{q_2 - q_1}{2t}$, $x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{q_1 - q_2}{2t}$.

Тогда прибыли фирм в единицу времени равны, соответственно:

$$H_1(q_1, q_2) = \frac{a}{2t}(t + q_2 - q_1)(q_1 - c),$$
$$H_2(q_1, q_2) = \frac{a}{2t}(t + q_1 - q_2)(q_2 - c),$$

где c – себестоимость продукта.

Найдем равновесное состояние системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial H_2(q_1,q_2)}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t+c-2q_1+q_2=0 \\ t+c-2q_2+q_1=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{t+c+q_2}{2} \\ q_2 = \dfrac{t+c+q_1}{2} \end{cases}$$

Подставим выражение для q_1 во второе уравнение:

$$q_2 = \frac{1}{2}(t+c) + \frac{1}{4}(t+c+q_2) \Rightarrow q_2 = t+c \Rightarrow q_1 = t+c$$

6.5 Дуополия Штакельберга (1934 г.)

В дуополии Штакельберга предполагается иерархия игроков. Первым своё решение объявляет игрок I, после этого стратегию выбирает игрок II. Первый игрок называется лидером, а второй - ведомым. Обозначим через $y = R(x)$ правило, по которому игрок II выбирает оптимальную реакцию на стратегию x первого игрока.

Определение 6.4. Равновесием по Штакельбергу называется пара стратегий (x^*, y^*), где $y^* = R(x^*)$ – стратегия второго игрока, а стратегию x^* первый игрок выбирает, решая задачу максимизации своей прибыли:

$$H_1(x^*, y^*) = \max_x H_1(x, R(x))$$

Равновесие по Штакельбергу можно сравнить с задачей двухуровневой минимизаци временных затрат на пути, при нескольких возможных маршрутах.

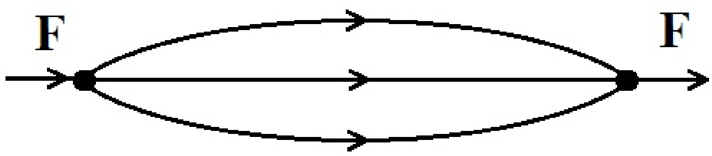

Рис. 6.1

Пусть величина $T = \sum_{i=1}^{n} t_i(f_i, c_i) f_i$ соответствует суммарному времени, которое потратит $F = f_1 + \dots + f_n$ автомобилей, чтобы преодолеть участок пути, изображенный на рисунке 6.1 (рисунок для случая $n = 3$), где c_i пропускная способность маршрута i, f_i – количество автомобилей, выбравших данный маршрут, а $t_i(f_i, c_i)$ – среднее время движения по нему.

Здесь правилу $y = R(x)$ соответствует решение задачи минимизации величины T при известных пропускных способностях маршрутов. Ее можно представить в виде задачи поиска:

$$\min_f \sum_{i=1}^{n} \int_0^{f_i} t_i(u, c_i) du$$

при условиях:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i = F, \\ f_i \geqslant 0, \ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Таким образом, при фиксированных пропускных способностях $c = (c_1, ..., c_n)$ получаем конкретное оптимальное распределение автомобилей по маршрутам $f = f(c)$.

Соответственно, выбор стратегии первого игрока из соотношения $H_1(x^*, y^*) = \max_x H_1(x, R(x))$ соответствует поиску оптимальных пропускных способностей:

$$\min_c \sum_{i=1}^{n} t_i(f_i, c_i) f_i$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \leqslant C$$

Здесь $f = (f_1, ..., f_n)$ выбирается по указанному выше правилу $f = f(c)$.

Глава 7

Лекция 10

[примеры про продажу электричества]

$$\begin{aligned}
&\min_f \sum_{(i,j)\in A} \int\limits_0^{f_{ij}} \Theta_{ij}(\tau)d\tau && \\
&\sum_{i\in\omega_j} f_{ij} - \sum_{i\in u_j} f_{ji} = d_j && \omega_j \text{ – вход в } j \text{ дугу} \\
&f_{ij} \geq 0 && u_j \text{ – исход из } j \text{ дуги}
\end{aligned}$$

лучше бы рассмотреть с нуля.

Глава 8

Лекция 11

8.1 Двухуровневая оптимизация

$$
\begin{aligned}
&T = \min_c \sum_{i=1}^n t_i(f,c) f_i \\
&\sum_{i=1}^n C_i \leqslant C \\
&\text{где} : \min_f \sum_{i=1}^n \int\limits_0^f t_i(u,c)du = Y(c) \\
&\sum_{i=1}^n f_i = F \\
&f_i \geqslant 0,\ \forall i = \overline{1,n}
\end{aligned}
$$

1. Линейная функция задержки $t_i(f_i, c_i) = a_i + c_i f_i$, но тогда $\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \geqslant \frac{1}{c}$; Выведем решение:

$$
f_i = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{c_i}\left[F + \sum\limits_{s=1}^k \frac{a_s}{c_s}\right]}{\sum\limits_{s=1}^n \frac{1}{c_s}} - \dfrac{a_i}{c_i},\ i \leqslant k \\ 0,\ i > k \end{cases}
$$

где k определяется из условий: $\sum\limits_{i=1}^k \frac{a_k - a_i}{c_i} \leqslant F < \sum\limits_{i=1}^{k+1} \frac{a_{k+1} - a_i}{c_i}$ Пусть используются все n маршрутов (для удобства). То есть $k = n$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \leqslant c$$

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{c_i \left[F + \sum\limits_{s=1}^{n} a_s b_s\right]}{\sum\limits_{s=1}^{k} c_s} - a_i c_i, if\ i \leqslant k \\ 0,\ i > k \end{cases}$$

Теперь предположим, что у нас F в такой окрестности, что $k = n$, тогда $f_i = \dfrac{c_i \left[F + \sum\limits_{s=1}^{n} a_s b_s\right]}{\sum\limits_{s=1}^{n} c_s} - a_i c_i$. Отсюда получаем, что

$$T = \frac{F + \sum\limits_{s=1}^{n} a_s c_s}{\sum\limits_{s=1}^{n} c_s} \sum_{i=1}^{n} c_i \left[\frac{F + \sum\limits_{s=1}^{n} a_s c_s}{\sum\limits_{s=1}^{n} c_s} - a_i \right] \to \min_c$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \leqslant c$$

Теперь запишем общий вид.

$$T = \frac{F + \sum\limits_{s=1}^{n} a_s c_s}{\sum\limits_{s=1}^{k} c_s} \sum_{i=1}^{k} c_i \left[\frac{F + \sum\limits_{s=1}^{k} a_s c_s}{\sum\limits_{s=1}^{k} c_s} - a_i \right] \to \min_c$$

$$a_1 \leqslant ... \leqslant a_n;$$

Выпишем условие для k:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i (a_k - a_i) \leqslant F < \sum_{i=1}^{k+1} c_i (a_{k+1} - a_i)$$

Эвристический подход. Алгоритм для решения последней задачи

1.$C^0 = (C_1^0, ..., C_n^0)$, $C_i^0 \geqslant 0$, $\forall i = \overline{1, n}$

2.$f^0 = arg \left[\min\limits_f (\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_0^{f_i} | \sum\limits_{i=1}^{n} f_i = F,\ f_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, n} \right]$

3.$T^0 = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i(f^0, c_i^0) f_i^0$

4.Сравнение T^0 в популяции. Выбираем 10 лучших

5.Новая популяция. Следовательно 100 штук образуют линейную комбинацию нулевой популяции.

6.Нахожим T^1 и выбираем 10 наилучших, затем сравниваем в 10-ю лучшими из T^0 и берем 10 лучших из лучших

Глава 9

Рекомендуемая литература

1. «Новое индустриальное общество», Джон Кеннет Гэлбрейт