ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт
(национальный технический университет)»

Динамическое проектирование систем управления движением ЛА

Москва – 2023

Введение

В данном документе изложены основные материалы, необходимые для выполнения лабораторного практикума по дисциплине «Динамическое проектирование систем автоматического управления ЛА».

Приведен текст заданий с подробно изложенным алгоритмом его выполнения. Таким образом, студенту необходимо осуществить реализацию программно-алгоритмического обеспечения, результат работы которого будет являться решением предложенной к рассмотрению инженерной задачи в рамках изучаемой дисциплины.

1. Общие соотношения кинематики и динамики КА, оснащенного управляющими двигателями-маховиками

Уравнения динамики КА как твердого тела в общем случае имеют вид:

$$\dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_{\Sigma} \qquad (1)$$

где: $\mathbf{K}$ – вектор кинетического момента КА; $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения КА вокруг центра масс; $\mathbf{M}_{\Sigma}$ – вектор суммарного момента сил, действующих на КА. Уравнение (1) называется уравнением динамики Эйлера.

Введем в рассмотрение связанную с КА (ССК) систему координат. Направления осей этой СК совпадают с главными центральными моментами инерции аппарата, а центр расположен в центре масс КА. Обозначим осевые моменты инерции КА в ССК как J_x, J_y, J_z. Тогда учитывая, что центробежные моменты относительно ССК нулевые, запишем тензор инерции КА в виде:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Как известно, тензор связывает момент импульса тела и кинетическую энергию его вращения с угловой скоростью. Тогда справедливо соотношение:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K} \text{ и } \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{K}}\,, \qquad (3)$$

подставляя соотношения (3) в (1), получим

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_\Sigma \,, \qquad (4)$$

Преобразуя к форме Коши, окончательно из (4) получим векторное дифференциальное уравнение динамики Эйлера для КА как твердого тела:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{J}^{-1}(\mathbf{M}_\Sigma - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}) \,. \qquad (5)$$

Поскольку размерность момента силы $\mathbf{M}_\Sigma$ [Н·м], а компонент тензора инерции $\boldsymbol{J}$ [кг·м^2], то угловые скорости и ускорения $\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ будут иметь размерность [1/с], [1/с^2], соответственно.

Рассмотрим теперь случай, когда в состав КА входят управляющие двигатели-маховики (ДМ), принцип работы которых заключается в изменении углового ускорения вращения КА за счет ускорения роторов электродвигателей, входящих в состав ДМ. Рассмотрим простейший случай, когда три ДМ установлены соосно ССК КА. В этом случае, пренебрегая малостью взаимного влияния ускорения КА от внешних возмущений на изменение скорости вращения ДМ, уравнение (3) и (1) можно записать в виде:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + I\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{K} \text{ и } \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\mathbf{K}}, \qquad (6)$$

$$\left(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + I\dot{\boldsymbol{\Omega}}\right) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + I\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{M}_\Sigma,$$

где I – момент инерции ротора ДМ (в случае, если используются одинаковые ДМ в составе КА), $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор угловых скоростей вращения ДМ.

Рассматривая далее идентичность устанавливаемых для управления ДМ, и обозначив $I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\mathbf{h}}$, запишем окончательно уравнение (6) в форме Коши для КА оснащенного ДМ в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{M}_\Sigma - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + I\boldsymbol{\Omega}) - \dot{\mathbf{h}}\right) \qquad (7)$$

Таким образом, управление вращательным движением КА будет осуществляться за счет изменения вектора кинетического момента систем $\dot{\mathbf{h}}$, за счет подачи управляющего напряжения на каждый из ДМ. Итоговая система дифференциальных уравнений, описывающих вращательное движение КА с идеальным ДМ (отработка сигнала управления без запаздывания, перерегулирования, отсутствие возмущающих моментов от трения на валу электродвигателей ДМ и т.п.) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{M}_\Sigma - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + I\boldsymbol{\Omega}) - \dot{\mathbf{h}}\right) \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} = I\dot{\mathbf{h}} \end{cases} \qquad (8)$$

Для управления вращательным движением КА требуется формировать на каждый из ДМ вектор управляющих сигналов прямо пропорциональный $\dot{\mathbf{h}}$. В простейшем случае, для этого может применяться пропорционально-дифференциальный регулятор.

Уравнения (5) и (8) описывают динамику вращательного движения КА. Т.е их решение позволяет определить вектор угловой скорости относительно инерциального пространства. В тоже время, угловое положение ССК КА относительно известного вектора угловой скорости, описывается нелинейными соотношениями. Наиболее широкое распространение получили кинематические уравнения в кватернионной форме (уравнения Пуассона) или представленные в виде матрицы направляющих косинусов. Рассмотрим оба этих варианта.

Для случая в матричном представлении, уравнения динамики Эйлера дополняются соотношениями вида (9).

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_\omega \boldsymbol{A},\ \text{где } \mathbf{A}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$. Следует учитывать, что при интегрировании уравнения (9) требуется отслеживать ортогональность получаемой матрицы *A*.

Время от времени для обеспечения ортонормированности матрицы A необходимо осуществлять следующую коррекцию ее элементов:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A} - \frac{1}{2}(A\,A^T - E)A$$

Для формирования управления из матрицы *A* необходимо перейти к каким-либо другим кинематическим характеристикам, например к углам Эйлера по соотношениям (10).

$$\varphi_x = atan2(-A_{12}, A_{11})$$

$$\varphi_y = atan2(-A_{20}, A_{00})$$

$$\varphi_z = asin(A_{10}) \qquad (10)$$

Вторым вариантом является представление кинематических соотношений в виде уравнений Пуассона (11).

$$\dot{\Lambda} = 0.5\Lambda \otimes \boldsymbol{\omega} \qquad (11)$$

где Λ – кватернион ориентации КА в пространстве, ⊗ - оператор кватернионного перемножения, который при программной реализации удобно представить в виде матричной операции:

$$\Lambda \otimes \Lambda_\omega = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & -\Lambda_3 & \Lambda_2 \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 & \Lambda_0 & -\Lambda_1 \\ \Lambda_3 & -\Lambda_2 & \Lambda_1 & \Lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

Геометрический смысл кватерниона можно определить так:

$$\Lambda = \left[\cos\frac{\varphi}{2} \quad e_x \sin\frac{\varphi}{2} \quad e_y \sin\frac{\varphi}{2} \quad e_z \sin\frac{\varphi}{2}\right]^T$$

Где φ – угол поворота вокруг орта $\mathbf{e} = [e_x \quad e_y \quad e_z]^T$. Т.е кватернион характеризует орт оси пространственного поворота и угол, на который нужно вокруг этой оси повернуть КА, чтобы оси его связанной системы координат заняли определенное положение относительно осей инерциальной системы координат.

При интегрировании уравнения (11) после каждого шага интегрирования осуществлять нормировку получаемого кватерниона, т.е обеспечивать выполнение равенства:

$$\sqrt{\Lambda_0^2 + \Lambda_x^2 + \Lambda_y^2 + \Lambda_z^2} = 1$$

Комбинация уравнений кинематики и динамики полностью описывают вращательное движение КА как твердого тела.

2. Орбитальное движение КА

Рассмотрим модель орбитального движения спутника, которая получается в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения с учетом следующих внешних возмущений:

- несферичности гравитационного поля Земли (учитывая влияние только второй зональной гармоники),
- гравитационного воздействия Солнца,

В геоцентрической инерциальной системе координат J2000 уравнении возмущенного орбитального движения можно записать в виде (12).

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_{grav} + \mathbf{a}_{sun}, \qquad (12)$$

где:

$\mathbf{a}_{grav}$ – ускорение за счёт влияния несферичности гравитационного поля;

$\mathbf{a}_{sun}$ – ускорение, приобретаемое за счёт гравитационного влияния Солнца;

$\mu = 398600.4415$ – гравитационный параметр Земли.

$\mathbf{r}$ – радиус-вектор КА в инерциальной СК.

Возмущающее ускорение в гринвичской вращающейся системе координат, возникающее под влиянием второй зональной гармоники из разложения в ряд по сферическим функциям гравипотенциала Земли, определяется из соотношения:

$$\mathbf{a}^{g}_{grav} = -1.5J_2\left(\frac{\mu}{|\mathbf{r}_{\mathrm{g}}|^2}\right)\left(\frac{R_\oplus}{|r_{\mathrm{g}}|}\right)\begin{bmatrix}\left(1-5\left(\frac{z}{|\mathbf{r}_{\mathrm{g}}|}\right)^2\right)\frac{x}{|\mathbf{r}_{\mathrm{g}}|}\\ \left(1-5\left(\frac{z}{|\mathbf{r}_{\mathrm{g}}|}\right)^2\right)\frac{y}{|\mathbf{r}_{\mathrm{g}}|}\\ \left(3-5\left(\frac{z}{|\mathbf{r}_{\mathrm{g}}|}\right)^2\right)\frac{z}{|\mathbf{r}_{\mathrm{g}}|}\end{bmatrix} \qquad (13)$$

где $R_\oplus = 6.378137 \cdot 10^6$ [м] - средний радиус Земли,

$\mu = 3.986004418 \cdot 10^{14}$ – гравитационная постоянная Земли,

$J_2 = 1.08262668355 \cdot 10^{-3}$ – коэффициент второй зональной гармоники,

$\mathbf{r}_{\text{g}} = \mathbf{M}_{\text{гр}}^{j2k}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ – радиус-вектор КА в гринвичской СК, в метрах (в уравнении (12) интегрирование ведется в километрах, поэтому при расчете $\mathbf{r}_{\text{g}}$ вектор $\mathbf{r}$ нужно перевести в метры),

$\mathbf{a}_{grav}^{g}$ – вектор возмущающего ускорения от несферичности гравитационного поля Земли в проекции на оси Гринвичской СК.

После того, как получены значения вектора $\mathbf{a}_{grav}^{g}$ его значения требуется перевести в км/с^2 (изначально значения в м/с^2) и перевести в инерциальную СК для последующей подстановки в уравнение (4) согласно следующему выражению: $\mathbf{a}_{grav} = \mathbf{M}_{J2k}^{\text{гр}}\mathbf{a}_{grav}^{g}$, где $\mathbf{M}_{J2k}^{\text{гр}} = \left(\mathbf{M}_{\text{гр}}^{j2k}\right)^{T}$.

Переход от инерциальной системы J2000 к гринвичской производится в соответствии с соотношениями:

$$\mathbf{r}_{\text{g}} = \mathbf{M}_{\text{гр}}^{j2k}\mathbf{r}\,, \qquad \mathbf{M}_{\text{гр}}^{j2k} = \mathbf{H}(t)\cdot\mathbf{\Theta}(t)\cdot\mathbf{N}(t)\cdot\mathbf{P}(t),$$

где:

$\mathbf{r}_{\text{g}}$ – радиус-вектор во вращающейся гринвичской системе координат,

$\mathbf{r}$ – радиус-вектор в инерциальной системе координат J2000,

$\mathbf{P}$(t) – матрица перехода, отвечающая прецессии – вековому изменению положения оси вращения Земли на момент t вследствие моментов от гравитационного воздействия Солнца и Луны,

$\mathbf{N}$(t) – матрица перехода, отвечающая нутационному движению оси вращения Земли на момент t,

$\boldsymbol{\theta}$(t) – матрица перехода, отвечающая собственному вращению Земли на момент t,

$\mathbf{H}$(t) – матрица перехода, отвечающая движению полюсов Земли на момент t.

Формулы для расчета элементов указанных матриц определяются документами Международного Астрономического союза. В данной работе будем учитывать только собственное вращение Земли.

Введем в рассмотрение набор констант:

A	-19089.451590
B	8640184.812866
C	0.093104
D	-6.2e-6
JD0	2451545
JDD	36525
DS2R	7.272205216643039903848712e-5

Поставим в соответствие текущему времени, для которого справедливо положение КА вычисленное по соотношениям (12), Юлианскую дату JD.

Тогда, определим гринвичский угол по соотношениям (14).

$$t = \frac{JD - JD0}{JDD}$$
$$f = 86400 \cdot fmod(\mathrm{JD}, 1.0)$$
$$\alpha = \mathrm{DS2R} \cdot \big((A + (B + (C + D \cdot t) \cdot t) \cdot t) + f\big) \qquad (14)$$
$$\alpha = \mathrm{fmod}(\alpha, 2\pi)$$
$$\text{Если } \alpha < 0, \alpha = \alpha + 2\pi$$

где: fmod(a,b) – остаток от деления a на b.

Матрица перехода от J2000 в гринвичскую СК будет определяться из соотношения:

$$\mathbf{M}_{\text{гр}}^{j2k} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Гравитационное ускорение, обусловленное влиянием Солнца:

$$\mathbf{a}_{sun} = \mu_s \left(\frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_s|^3} \right),$$

где: $\mathbf{r}_s$ –радиус-вектор Солнца [км],

$\mathbf{r}$ –радиус-вектор КА [км],

μ_s – гравитационный параметр Солнца = 132712517951.

Для определения вектора Земля-Солнце с погрешностью 0.1…1% можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$\lambda_{\odot} = \Omega + \omega + M + 6892'' \sin M + 72'' \sin 2M$$

$$|\mathbf{r}_{\odot}| = (149.619 - 2.499 \cos M - 0.021 \cos 2M) \cdot 10^6$$

$$\mathbf{r}_s = |\mathbf{r}_{\odot}| \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda_{\odot} \\ \sin \lambda_{\odot} \cos \varepsilon \\ \sin \lambda_{\odot} \sin \varepsilon \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon = 23.43929111°$ – наклонение плоскости эклиптики, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перицентра. $\Omega + \omega = 282.940°$ и $M = (357.5226 + 35999.049T)°$ – средняя аномалия. Т – модифицированная Юлианская дата.

$$T = (JD - 2451545.0)/36525.0$$

Упрощенная модель магнитного поля Земли

В простейшем случае магнитное поле Земли можно представить в виде диплоя. Для этого используются параметры модели DGRF, постоянные которых обновляются каждые 5 лет. На текущий момент самые последние данные модели зафиксированы на начало 2020 года.

Согласно упрощенной модели, вектор магнитной индукции Земли в проекции на оси гринвической СК зависит от текущего положения КА в этой СК и определяется соотношением:

$$\mathbf{B}_g(\mathbf{r}_g) = -\nabla\mathbf{V} = \frac{3(\mathbf{m}, \mathbf{r}_g)\mathbf{r}_g - |\mathbf{r}_g|^2 m}{|\mathbf{r}_g|^5}$$

Где,

$$\mathbf{m} = a^3 \begin{bmatrix} -1450.9 \\ 4652.5 \\ -29404.8 \end{bmatrix}, \text{a = 6371.2;}$$

Каждый из компонент вычисляемого вектора имеет размерность нТл, поэтому при расчете управления его необходимо переводить в Тл.

В системе координат J2000 будем иметь:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}_{J2k}^{\text{гр}} \mathbf{B}_g(\mathbf{r}_g)$$

Задание 1. Построение и поддержание солнечной ориентации с использованием магнитных исполнительных органов

Для решения задачи потребуется осуществить решение уравнений орбитального движения (12) методом Ругне-Кутта 4-го порядка и уравнения (5) и (11) или (10), в зависимости от варианта задания.

Последовательность действий при решении задания следующая:

1. Моделируется орбитальное и вращательное движение КА, определяются вектора **B** магнитной индукции Земли и $\mathbf{r}_s$ вектора направления на Солнце в инерциальной СК J2000.
2. Имея кватернион текущей ориентации (или матрицу, в зависимости от задания) определяем проекцию этих векторов на связные с КА оси (по аналогии с приложением Б).
3. Определяем вектор потребного управляющего момента из соотношения:
$$\boldsymbol{M}_{\text{тр}} = K_w(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{тек}})$$
где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор текущей угловой скорости вращения КА, K_w – коэффициент пропорциональности, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{тек}}$ определяется из соотношения:
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{тек}} = [-\omega_{\text{тр}} e_y \quad \omega_{\text{тр}} e_x \quad 0]^T$$
Где $e_i, i = x, y, z$ – компоненты вектора $\mathbf{r}_s$ в связанной с КА системе координат, $\omega_{\text{тр}}$ – величина требуемой при наведении угловой скорости.
4. Рассчитываем величины «полезной» и «вредной» составляющей момента по соотношениям:
$$M_p = \left|\boldsymbol{M}_{\text{тр}} \times \mathrm{B}_{\text{ск}}\right|, M_v = \left|\left(\boldsymbol{M}_{\text{тр}}, \mathrm{B}_{\text{ск}}\right)\right|,$$
5. Формируем управляющие сигналы на магнитные исполнительные органы (направление включения):
$$\mathbf{L} = k\frac{\boldsymbol{M}_{\text{тр}} \times \mathrm{B}_{\text{ск}}}{(\mathrm{B}_{\text{ск}}, \mathrm{B}_{\text{ск}})}; \;\; \mathrm{L}_{mi} = L_{max} \cdot \begin{cases} sign(L_i), \text{если } |L_i| \geq L_0 \text{ и } \dfrac{M_p}{M_v} > \xi \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases}$$

При моделировании движения величина механического момента моделируется исходя из соотношения:

$$\mathbf{M}_{\text{упр}} = \mathbf{L}_{mi} \times \mathrm{B}_{\text{ск}}$$

При моделировании учитывать гравитационный возмущающий момент, согласно выражениям из приложения Б. Варианты орбит указаны в приложении С.

Номер варианта	**Значения**
1	$\Lambda(0) = [0.707 \quad 0 \quad -0.707 \quad 0]^T$, или $A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\omega}(0) = [0.0014 \quad -0.02 \quad 0.001]^T$ [рад/с] $J_x = 5$, $J_y = 7$, $J_z = 4$ $\xi = 1.35$, $L_{max} = 1$, $K_w = 2$, $L_0 = 0.1$, $k = 5$ Орбита 1
2	$\Lambda(0) = [0.866 \quad 0 \quad 0 \quad -0.5]^T$, или $A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\omega}(0) = [0.007 \quad -0.004 \quad 0.08]^T$ [рад/с] $J_x = 10$, $J_y = 15$, $J_z = 18$ $\xi = 1.3$, $L_{max} = 4$, $K_w = 2$, $L_0 = 0.3$, $k = 5$ Орбита 2
3	$\Lambda(0) = [0.866 \quad 0 \quad 0 \quad -0.5]^T$, или $A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\omega}(0) = [0.007 \quad -0.004 \quad 0.08]^T$ [рад/с] $J_x = 10$, $J_y = 15$, $J_z = 18$ $\xi = 1.3$, $L_{max} = 5$, $K_w = 2$, $L_0 = 0.3$, $k = 5$ Орбита 3
4	$\Lambda(0) = [0.707 \quad 0 \quad 0 \quad -0.707]^T$, или $A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\omega}(0) = [0.00 \quad 0.00 \quad 0.0001]^T$ [рад/с] $J_x = 50$, $J_y = 80$, $J_z = 40$ $\xi = 1.2$, $L_{max} = 60$, $K_w = 4$, $L_0 = 1$, $k = 5$ Орбита 4

5	$\Lambda(0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, или $A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\omega}(0) = [0.00 \quad 0.00 \quad 0.0001]^T$ [рад/с] $\mathrm{Jx} = 70, \mathrm{Jy} = 60, \mathrm{Jz} = 50$ $\xi = 1.4, \mathrm{Lmax} = 120, \mathrm{Kw} = 2, \mathrm{L0} = 5, \mathrm{k} = 3$ Орбита 5
6	$\Lambda(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$, или $A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\omega}(0) = [0.00 \quad 0.00 \quad 0.0001]^T$ [рад/с] $J_x = 10$, $J_y = 20$, $J_z = 40$ $\xi = 1.45$, $L_{max} = 10$, $K_w=4$, $L_0 = 0.2$, $k = 5$ Орбита 6

Варианты орбит представлены в приложении С.

Задание 2. Исследование работы системы ориентации и стабилизации КА на этапе переориентации с использованием двигателей-маховиков

Рассмотрим задачу переориентации с последующей стабилизацией КА в инерциальном пространстве при использовании в качестве управляющих органов ДМ и в качестве измерительного прибора – датчика угловых скоростей.

Для решения задачи требуется реализовать программное обеспечение позволяющее моделировать следующую последовательность действий:

1. Осуществляется интегрирование уравнений (8) и (11) методом Ругне-Кутта 4-го порядка с заданным шагом h с учетом возмущений. Решаются уравнения (12).
2. Линейный, асимптотически устойчивый закон управления ДМ можно представить в виде:
$$-\dot{\mathbf{h}} = -k_p sign(\mathrm{d}\Lambda_0)\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}_{1:3} - k_d\boldsymbol{\omega},$$
где $\mathrm{d}\boldsymbol{\Lambda}_{1:3} = [\mathrm{d}\Lambda_1 \quad d\Lambda_2 \quad \mathrm{d}\Lambda_3]^T$ – вектор из элементов кватерниона dL (см п.4). В случае использования в качестве представления ориентации КА

матрицы направляющих косинусов, член $sign(\Lambda_0)\Lambda_{1:3}$ заменяется на вектор $[\varphi_x \quad \varphi_y \quad \varphi_z]^T$

Следует также ввести две нелинейности типа «насыщение» для $\overline{\Omega}$, и $-\dot{h}_i$ следующего вида.

$$\begin{cases} |-\dot{h}_i| \geq \mathrm{h}_{max}, & -\dot{h}_i = \mathrm{h}_{max} sign(-\dot{h}_i) \\ |\Omega_i| \geq \Omega_{max}, & -\dot{h}_i = 0 \end{cases}, \qquad i = x, y, z$$

Первая нелинейность характеризует существование предельного ускорения ДМ. Вторая – существование предельной скорости вращения ДМ.

В течение последующих 100 мс рассчитанные значения $\bar{\sigma}$ и $\bar{L}$ остаются постоянными. Для анализа результатов, каждые 100 мс счета программы требуется выводить в файл (или на график) следующие величины: Λ, $\bar{\omega}$, $\overline{\Omega}$, $\bar{r}_{j2000}$. Моделирование необходимо провести с учетом влияния гравитационного возмещающего момента (приложение Б)

На борту КА полезно иметь универсальный способ задания программных разворотов, который может использоваться для решения широкого спектра различных задач. К такому способу относится задание табличной функции кватерниона ориентации. Дальнейшая интерполяция на борту КА закладываемой с Земли табличной функции требуемой ориентации может осуществляться различными способами. Рассмотрим два наиболее часто встречающихся:

1) сферическая линейная интерполяция кватерниона,
2) интерполяция параметров ориентации с использованием кубического сплайна.

У обоих способов есть свои преимущества и недостатки, поэтому их применение требуется рассматривать применительно к конкретной задаче.

К преимуществам сферической линейной интерполяции кватерниона относится её простота реализации и работа непосредственно в рамках кватернионов без пересчёта в другие кинематические параметры. К недостаткам относится представление линейным способом перехода между двумя последовательными ориентациями (т.е с постоянной скоростью), что может потребовать существенно неравномерного распределения узловых точек табличной функции и увеличения их количества относительно другого способа интерполяции для обеспечения требуемой точности.

К преимуществами интерполяции кубическим сплайном относится более высокая точность расчёта программы разворота и удобное определение требуемой программной скорости разворота (непосредственно из соотношений кубической функции сплайна). К недостаткам относится более сложная реализация и вычислительная нагрузка на БЦВМ.

Счисление программы ориентации КА по заданной последовательности кватернионов является задачей интерполяции, то есть задачей о восстановлении непрерывной функции скалярного аргумента на отрезке по ее значениям на концах этого отрезка.

Среди видов кватернионной интерполяции наибольшее распространение получили:

1) простая линейная интерполяция;
2) сферическая линейная интерполяция;
3) сферическая квадратичная интерполяция;
4) прецессионная интерполяция.

Сферическая линейная интерполяция более сложна по отношению к простой линейной интерполяции, поскольку использует трансцендентные функции. Однако этот тип интерполяции обеспечивает поворот твердого тела из одной фиксированной позиции в другую с постоянной угловой скоростью. Кроме того, этот поворот может быть осуществлен не только по кратчайшему угловому расстоянию, но и иными способами. Например, он может выполняться в противоположном угловом направлении или с включением в интервал интерполирования одного или нескольких полных оборотов. Квадратичная и прецессионные интерполяции еще более сложные и не дают очевидных преимуществ перед сферической линейной интерполяцией применительно к большинству возможных вариаций программ ориентации космических аппаратов.

Пусть задан отрезок времени, характеризуемый безразмерным параметром $\tau \in [0; 1]$. Обозначим кватернионы $q(0) = q_0$ и $q(1) = q_1$. Требуется найти q(τ) при условии, что вектор угловой скорости КА $\bar{\omega}$ на интервале $[0; 1]$ является постоянным.

Для рассматриваемой задачи должно соблюдаться равенство:

$$q_0 = \exp\frac{\omega \cdot 0}{2} Q \,, \qquad q_1 = \exp\frac{\omega \cdot 1}{2} Q \,. \tag{16}$$

Где ω – кватернион угловой скорости, имеющий вид $\omega = [0 \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]$; Q – кватернион ориентации КА.

Из формулы (16) можно вычислить кватернионы Q и ω согласно соотношениям:

$$Q = q_0 \,, \qquad \exp\frac{\omega}{2} = \Delta q \,, \qquad \omega = 2 \ln \Delta \mathrm{q} \,. \tag{17}$$

Где $\Delta \mathrm{q}$ является кватернионным произведением, т.е. $\Delta \mathrm{q} = q_1 \otimes {q_0}^{-1}$. Тогда получим:

$$q(\tau) = \Delta q^{\tau} \otimes q_0 \tag{18}$$

Где $\Delta q^{\tau} = |\Delta q^{\tau}| \times [\cos(\tau \cdot \theta) \quad e_x \sin(\tau \cdot \theta) \quad e_y \sin(\tau \cdot \theta) \quad e_z \sin(\tau \cdot \theta)]$;

θ – угол, образованный дугой поворота, который вычисляется по формуле $\theta = \arg \Delta q + 2\pi n$; $e_i = \frac{\Delta q_i}{|\Delta q| \sin \theta}$.

Введем следующие допущения, позволяющие упростить данные соотношения:

1. Все используемые кватернионы являются нормированными;
2. Разворот может осуществляться только в пределах одного оборота.

Тогда соотношения сферической линейной интерполяции можно упростить и записать следующим в виде.

$$q(\tau) = \frac{\sin\big(\theta \cdot (1-\tau)\big)}{\sin\theta} q_0 + \frac{\sin(\theta \cdot \tau)}{\sin\theta} q_1 \qquad (19)$$

Где $\theta = \arccos\left(q_{0_0} q_{1_0} + q_{0_x} q_{1_x} + q_{0_y} q_{1_y} + q_{0_z} q_{1_z}\right) + 2\pi n$.

При $n = 0$ получим обычную линейную интерполяцию, при которой КА совершает разворот из ориентации q_0 в ориентацию q_1 по кратчайшей дуге. При $n = -1$ получим интерполяцию, при которой КА будет вращаться вокруг той же оси, что и в случае кратчайшего перемещения, но разворот будет выполнен в противоположном направлении. Это свойство интерполяции очень удобно использовать для таких переориентаций КА, когда существуют ограничения на засветку приборов и разворот по кратчайшей дуге становится невозможным. Тогда, назначая $n = -1$, получим неоптимальный по длительности разворот, но позволяющий легко и изящно решить задачу переориентации с такого рода ограничениями.

3. Учитывая вышесказанное, требуемый кватернион Q = $q(\tau)$ ориентации в текущий момент времени $\tau = \frac{t}{t_k}$ будем определять из соотношения (19), в котором $q_0 = \Lambda(0)$, а q_1 – требуемый в конечный момент времени кватернион.
4. Кватернион рассогласования в текущий момент времени dL (см. п2) будет определяться из соотношения $dL = \tilde{Q} \otimes \Lambda$ или в матричной постановке задачи: поставим в соответствие кватерниону dL матрица A_T, тогда матрица характеризующая рассогласование (из которой требуется определить углы $\varphi_i, i = x, y, z$) будет определяться из соотношения $dA = A_T^T A$.

Номер варианта	**Значения**
1	$\Lambda(0) = [0.632866 \quad -0.1826981 \quad 0.3653963 \quad -0.657713]^T$, или $A(0) = \begin{bmatrix} -0.132203033235 & 0.698974798902 & 0.702820452535 \\ -0.966003954060 & 0.068068924482 & -0.24940525707 \\ -0.22216822172 & -0.71189946763 & 0.66621350124 \end{bmatrix}$ $\bar{\omega}(0) = [10^{-5} \quad 10^{-6} \quad -10^{-5}]^T$ [рад/с] $\Omega_{max} = 628$ 1/с $h_{max} = 0.01$ Нм $J_x = 1$, $J_y = 2$, $J_z = 1$ $t_k = 300$, $q_1 = [0.7071 \quad 0 \quad 0.7071 \quad 0]^T$ Орбита 1
2	$\Lambda(0) = [0.3626884 \quad 0.6019084 \quad 0.1543355 \quad -0.694509]^T$, или $A(0) = \begin{bmatrix} -0.0123256150069 & 0.689573214576 & -0.724111083297 \\ -0.31798943139 & -0.689274981505 & -0.650985960979 \\ -0.948014135304 & 0.222235869312 & 0.227772732462 \end{bmatrix}$ $\bar{\omega}(0) = [-2 \cdot 10^{-5} \quad 0 \quad -10^{-4}]^T$ [рад/с] $\Omega_{max} = 628$ 1/с $h_{max} = 0.008$ Нм $J_x = 0.1$, $J_y = 0.3$, $J_z = 0.5$ $t_k = 400$, $q_1 = [0.866 \quad 0 \quad -0.5 \quad 0]^T$ Орбита 2
3	$\Lambda(0) = [0.866 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0]^T$, или $A(0) = \begin{bmatrix} -0.941750890758804 & 0 & 0.336311254279425 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.336311254279425 & 0 & -0.94175089075880 \end{bmatrix}$ $\bar{\omega}(0) = [3 \cdot 10^{-5} \quad 0 \quad 0]^T$ [рад/с] $\Omega_{max} = 628$ 1/с $h_{max} = 0.005$ Нм $J_x = 0.7$, $J_y = 1$, $J_z = 1$ $t_k = 400$, $q_1 = [0.5 \quad 0 \quad -0.866 \quad 0]^T$
4	$\Lambda(0) = [0.866 \quad 0 \quad 0 \quad -0.5]^T$, или $A(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.866 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.866 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

	$\overline{\omega}(0) = [3 \cdot 10^{-5} \quad -3 \cdot 10^{-4} \quad 0]^T$ [рад/с] $\Omega_{max} = 628$ 1/с $\mathrm{h}_{max} = 0.01$ Нм $I_{дм} = 1.6 \cdot 10^{-4}$ кг м^2 $J_x = 1$, $J_y = 0.3$, $J_z = 1$ $t_k = 450, q_1 = [0 \quad 0.7071 \quad -0.7071 \quad 0]^T$ Орбита 3
5	$\Lambda(0) = [0.866 \quad 0 \quad 0 \quad -0.5]^T$, или $A(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.866 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.866 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ $\overline{\omega}(0) = [3 \cdot 10^{-5} \quad -3 \cdot 10^{-4} \quad 0]^T$ [рад/с] $\Omega_{max} = 628$ 1/с $\mathrm{h}_{max} = 0.15$ Нм $I_{дм} = 1.6 \cdot 10^{-2}$ кг м^2 $J_x = 10$, $J_y = 20$, $J_z = 15$ $t_k = 450, q_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ Орбита 4

Варианты орбит указаны в приложении С.

Приложение А

Пусть имеется кватернион ориентации $\mathbf{Q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ перехода от инерциальной СК к ССК, тогда матрица перехода от ИСК к ССК будет имеет следующий вид:

$$= \begin{pmatrix} 2q_0^2+2q_1^2-1 & 2q_1q_2+2q_0q_3 & 2q_1q_3-2q_0q_2 \\ 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0^2+2q_2^2-1 & 2q_2q_3+2q_0q_1 \\ 2q_1q_3+2q_0q_2 & 2q_2q_3-2q_0q_1 & 2q_0^2+2q_3^2-1 \end{pmatrix}$$

Приложение Б. Определение внешнего возмущающего гравитационного момента

Выражение для гравитационного момента может быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{M}_{возм} = \frac{3\mu}{2R^3}(\boldsymbol{\eta} \times J\boldsymbol{\eta})$$

Где,

μ – гравитационный параметр Земли, $\mu = 3{,}986 \times 10^{14}$ [м^3/с^2].

R – расстояние от центра масс Земли до центра масс КА (м).

$\boldsymbol{\eta}$ – единичный вектор от центра масс Земли до центра масс КА, в проекции на оси ССК КА

J – тензор инерции КА.

Для вычисления проекции вектора $\boldsymbol{\eta}$ на оси ССК КА достаточно выполнить следующие преобразования:

$$\boldsymbol{\eta} = \widetilde{\Lambda}_t \otimes \mathbf{r}^0 \otimes \Lambda_t, \text{ где}$$

Λ_t – текущий кватернион ориентации КА в момент времени t.

$\mathbf{r}^0$ – нормированный вектор из центра Земли в ц.м. КА в инерциальной системе координат в момент времени t.

В случае использования для представление кинематических параметров матрицы **A** из соотношения (10), уравнение для определения $\bar{\eta}_t$ выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\mathbf{r}^0$$

Приложение С

Орбита 1.

Эпоха	r_x, r_y, r_z ,км	V_x, V_y, V_z ,км/х
01.07.2023 00:00:00.000	2060.696511 -2810.414320 5839.101064	2.252111 -6.251270 -3.803595

Орбита 2.

Эпоха	r_x, r_y, r_z ,км	V_x, V_y, V_z ,км/х
09.03.2023 15:00:00.000	6061.998414 3096.257732 -1808.870557	0.931523 1.968195 7.118822

Орбита 3.

Эпоха	r_x, r_y, r_z ,км	V_x, V_y, V_z ,км/х
11.01.2023 10:00:00.000	-3993.337341 3549.426205 5263.537831	-6.156739 -2.574188 -2.935106

Орбита 4.

Эпоха	r_x, r_y, r_z ,км	V_x, V_y, V_z ,км/х
19.11.2023 04:12:10.000	3086.992060 2389.476823 5445.262210	1.213136 6.698180 -3.627022

Орбита 5.

Эпоха	r_x, r_y, r_z ,км	V_x, V_y, V_z ,км/х
01.11.2023 07:02:18.000	5888.016972 -601.636216 2826.618298	1.741567 7.583692 -2.013626

Орбита 6.

Эпоха	r_x, r_y, r_z ,км	V_x, V_y, V_z ,км/х
01.04.2023 00:02:18.000	1214.870802 -3179.170331 5731.711868	0.644824 -6.679899 -3.841769