**1.** 设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是时齐的 **Markov** 链，状态空间 $I = \{1,2,3,4\}$，一步转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

。已知 $P(X_0 = 1) = 1/4$，$P(X_0 = 2) = 3/4$。计算 **(1)** $P(X_2 = 2)$；  **(2)** $P(X_1 = 2, X_3 = 2, X_4 = 4)$；  **(3)** $P(X_0 = 1 \mid X_1 = 1)$；

**(4)** 令 $T_4 = \min\{n \geq 0 : X_n = 4\}$，求 $P(T_4 < \infty)$。

$$(1)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{16}=\frac{9}{64}$$

$$(2)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{16}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{1024}$$

$$(3)=\frac{P(X_0=1,X_1=1)}{P(X_1=1)}=\frac{4}{7}$$

$$(4)\ h_2=\tfrac{1}{4}(h_2+h_3+1),\qquad h_3=\tfrac{1}{2}(h_2+1)$$

得 $h_2=\frac{3}{5}$

$$\therefore\ P(T_4<\infty)=\frac{3}{4}h_2=\frac{9}{20}$$

**2.** 设 $\{X_n;n\ge 0\}$ 是时齐的 **Markov** 链，状态空间 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$，一步转移概率

为：$p_{12}=p_{13}=p_{43}=p_{45}=p_{54}=p_{56}=p_{65}=p_{63}=\frac{1}{2}, p_{21}=\frac{1}{3}, p_{23}=\frac{2}{3}, p_{32}=1$；

初始分布为 $P(X_0=1)=P(X_0=6)=1/2$。

**(1)**求出所有的互达等价类，并指出哪些是闭的；
**(2)**求出各状态的周期和常返性；
**(3)**计算所有正常返态的平均回转时；

**(4)**计算 $\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=2)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=5)$。

（1）互达等价类有：{1，2，3}，{4，5，6}

其中{1，2，3}闭

（2）1，2，3正常返，非周期

4，5，6暂留，周期为2

（3）$\{X_n\}$限制在{1，2，3}上得到一个新的 Markov 链，其平稳分布满足：

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1;\quad \pi_1=\frac{1}{3}\pi_2;\quad \pi_2=\frac{1}{2}\pi_1+\pi_3$$

解得$\pi_1=\dfrac{2}{13}, \pi_2=\dfrac{6}{13}, \pi_1=\dfrac{5}{13},$

$$\therefore \mu_1=\frac{13}{2},\quad \mu_2=\frac{13}{6},\quad \mu_3=\frac{13}{5}$$

（4）$\lim P(X_n=2)=\dfrac{6}{13}, \lim P(X_n=5)=0$

3．甲乙两人玩游戏，每局甲赢一元的概率为 0.4，输一元的概率为 0.3，平局的概率为 0.3，假设一开始甲有 1 元，乙有 2 元，游戏直到某人输光为止，$X_n$ 为第 n 局后甲拥有的钱数，则$\{X_n; n \ge 1\}$是一个时齐的 Markov 链，状态空间$I=\{0,1,2,3\}$，求（1）一步转移矩阵 $P$；

（2）$P(X_2=1)$；(3) $P(X_2=1, X_4=2)$；(4) 甲输的概率。

3. (1) $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $P(X_2=1)=p_{11}p_{11}+p_{12}p_{21}=0.3\times0.3+0.4\times0.3=0.21$

(3) $P(X_2=1,X_4=2)=P(X_2=1)(p_{11}p_{12}+p_{12}p_{22})=0.0504$

(4) $$\begin{aligned} h_1 &= 0.3h_0+0.3h_1+0.4h_2 \\ h_2 &= 0.3h_1+0.3h_2+0.4h_3 \\ h_0 &= 1, h_3=0 \Rightarrow h_1=\frac{21}{37} \end{aligned}$$

**4．设$\{X_n; n \ge 0\}$是时齐的 Markov 链，状态空间$I=\{1,2,3,4,5,6\}$，一步转移概率为：**

$p_{11}=p_{54}=p_{62}=0.4$，$p_{12}=p_{56}=p_{65}=0.6$，$p_{21}=p_{34}=p_{43}=1$。**(1)求出所有的互达等价类，并指出哪些是闭的；(2)求出各状态的周期和常返性；(3)计算所有正常返态的平均回转时；(4)计算$\lim\limits_{n\to\infty} p_{12}^{(n)}$和$\lim\limits_{n\to\infty} p_{55}^{(n)}$。**

**4．(1)互达等价类：**$\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}$，**其中**$\{1,2\},\{3,4\}$**是闭的**

**(2) 1，2，3，4 正常返，5，6 暂留，1，2 非周期，3，4，5，6 周期为 2**

**(3)** $0.6\pi_1=\pi_2$，$\pi_1+\pi_2=1$，$\pi_3=\pi_4$，$\pi_3+\pi_4=1$

**得**$(\pi_1,\pi_2)=(\frac{5}{8},\frac{3}{8})$，$(\pi_3,\pi_4)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，**所以** $(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)=(\frac{8}{5},\frac{8}{3},2,2)$

**(4)** $\lim\limits_{n\to\infty} p_{12}^{(n)}=\pi_2=\frac{3}{8}$，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{55}^{(n)}=0$