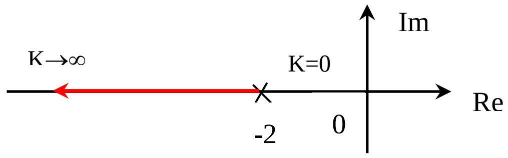
第七周作业参考答案

第五章 根轨迹分析法　习题五 P.202-205

5-1；5-2；5-3；　5-4（1）、（2）；　5-5；　5-6；　5-7。

5-1 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为：$G(s)=\dfrac{K}{s+2}$，试用相角条件检查下列各点是否在根轨迹上：(-1，j0)，(－3，j0)，(-2, j1)，(-5, j0)。并求出相应的 K 值。

解：闭环传递函数：$\phi(s)=\dfrac{K}{s+2+K}$



闭环特征方程：$s+2+K=0$

闭环特征根：$s=-2-K$

当 K＝0 时，特征根 s=－2

当 K>0 时，特征根为负实数 $s=-2-K$，即特征根位于小于-2 的负实轴上(-∞ -2)。

所以根轨迹为：(-∞ -2)。根轨迹图如图所示。

从图易知：(-3, j0)， (-5, j0)在根轨迹上，(-1, j0)，(-2, j1) 不在根轨迹上。

用相角条件检查：

1）对（-1, j0)：$-\angle(-1-(-2)=-\angle 1=-0^\circ \neq (1+2n)\pi$;不满足相角条件

2）对（-2, j1)：$-\angle(-2+j-(-2)=-\angle -2+j2=-135^\circ \neq (1+2n)\pi$;不满足相角条件

3）对（-3, j0)：$-\angle(-3-(-2)=-\angle -1=-\pi$; 满足相角条件

4）对(-5, j0)：$-\angle(-5-(-2)=-\angle -3=-\pi$; 满足相角条件

5-2 系统的开环传递函数为：$G_1(s)H(s)=\dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+4)}$,试证明 $s_1=-1+j\sqrt{3}$ 点在根轨迹上，并求出相应的 K 值和系统的开环放大系数 K^*。

解：1)由题意可得该系统有三个开环极点，分别为-1，-2 和-4，

要证明 $s_1=-1+j\sqrt{3}$ 点在根轨迹上，只要证明该点满足根轨迹的相位条件，因为根轨迹的幅度条件总可以找到一个 K 值来满足。

又因为 s_1 点到三个开环极点-1，-2，-4 的角度分别为：90°，60°，30° 。加起来刚好为：180°，即满足根轨迹的相位条件，也就是说 s_1 点在根轨迹上。　　　　证毕

2)然后由幅度条件：$|G_1(s_1)H(s_1)|=1$　解得 K=12

3)根据开环放大系数的定义有：

$$G_1(s)H(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+4)}=\frac{K^*}{(s+1)(0.5s+1)(0.25s+1)} \qquad 即 \quad K^*=\frac{K}{8}=1.5$$

5-3 设单位反馈控制系统的开环传递函数为：$G(s)=\dfrac{K(3s+1)}{s(2s+1)}$，试用解析法绘出开环增益 K 从零增加到无穷时的闭环根轨迹图。

解：闭环传递函数：$\varphi(s)=\dfrac{K(3s+1)}{s(2s+1)+K(3s+1)}$

闭环特征方程：$2s^2+(1+3K)s+K=0$

闭环特征根：$s_{1,2}=\dfrac{-(1+3K)\pm\sqrt{(1+3K)^2-8K}}{4}=\dfrac{-(1+3K)\pm\sqrt{9K^2-2K+1}}{4}$

当 K＝0 时，特征根 $s_1=0, s_2=-\dfrac{1}{2}$

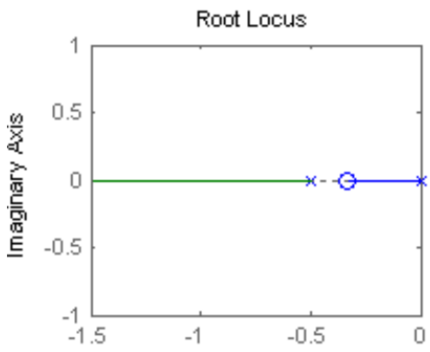
当 K>0 时，特征根为负实数 $s_{1,2}=\dfrac{-(1+3K)\pm\sqrt{(3K-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}}}{4}$

$$\lim_{K\to\infty} s_1=\lim_{K\to\infty}\frac{-(1+3K)+\sqrt{(3K-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}}}{4}=\lim_{K\to\infty}\frac{-(1+3K)+(3K-\frac{1}{3})}{4}=-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{K\to\infty} s_2=\lim_{K\to\infty}\frac{-(1+3K)-\sqrt{(3K-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}}}{4}=\lim_{K\to\infty}\frac{-(1+3K)-(3K-\frac{1}{3})}{4}=-\infty$$

所以根轨迹为：(-∞ -1/2)和[-1/3 0]。

根轨迹图如图所示。（图上横坐标－1.5 只是表示这个图截取到－1.5，不是根轨迹终止到－1.5）



5-4 已知单位负反馈控制系统的前向通道传递函数为:

$$(1)\quad G(s)=\frac{K}{s(s+1)^2} \qquad\qquad (2)\quad G(s)=\frac{K(s+4)}{s(s^2+4s+29)}$$

试概略画出闭环系统根轨迹图。

Solution: (a) $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+1)^2}$

(1) Open-loop poles: n=3, p1=0, p2=p3= -1

Open-loop zeros: w=0

(2) Real axis root locus: [0, -1], [-1, -∞]

(3) Asymptotes of root locus: $\gamma=\dfrac{(1+2n)\pi}{3}=\pm\dfrac{\pi}{3},\pi$

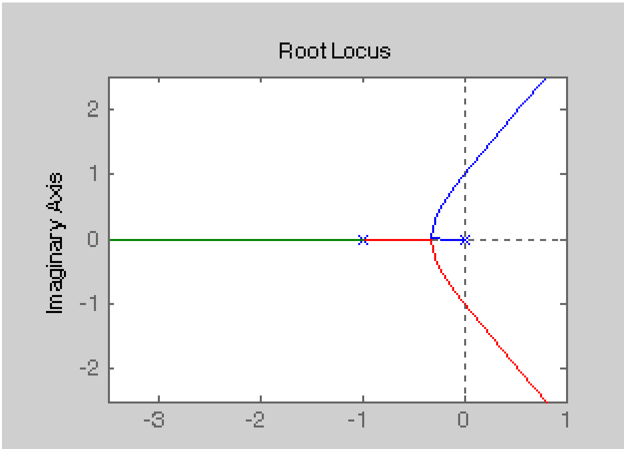
$$\sigma_0=\frac{\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Re}(p_i)}{3}=-\frac{2}{3}$$

(4) Breakaway point on the real axis: $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{d+1}=0\Rightarrow d=-\dfrac{1}{3}$

(5) Imaginary-axis crossing point:

$$1+G(jw)H(jw)=1+\frac{K}{jw(jw+1)^2}=0\Rightarrow\begin{cases}w^3=w\\K=2w^2\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}w=\pm1\\K=2\end{matrix}$$

According above rules, the root-locus can be sketched. And when 0<K<2, the system is stable.



(b) $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s^2+4s+29)}$

(1) Open-loop poles: n=3, p1=0, p2= -2+j5, p3= -2-j5

Open-loop zeros: w=1, z= -4

(2) Real axis root locus: [0, -4]

(3) Asymptotes of root locus: $\gamma=\dfrac{(1+2n)\pi}{3-1}=\pm\dfrac{\pi}{2}$

$$\sigma_0=\frac{\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Re}(p_i)-z}{3-1}=0$$

So, the asymptotes of root locus are the imaginary axis.

(4) Breakaway point on the real axis: none

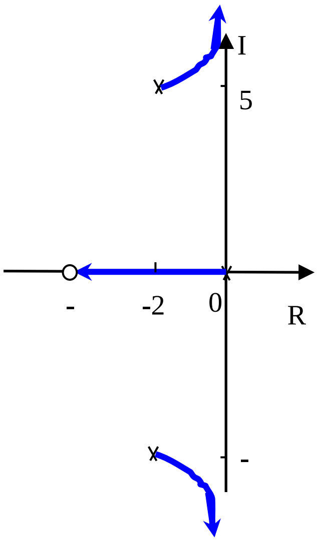
(5) Angles of complex poles p2= -2+j5 and p3= -2-j5

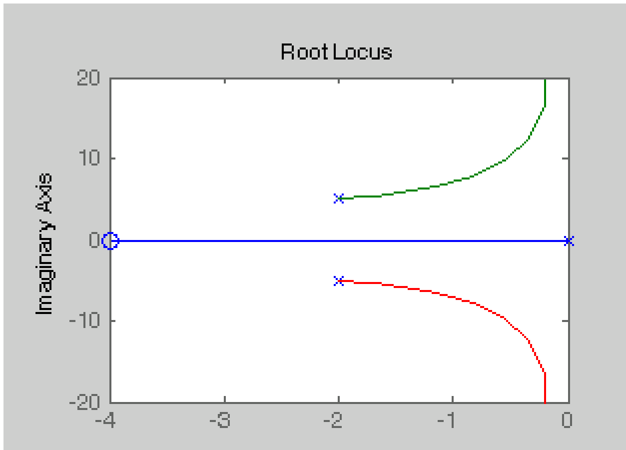
$$\phi_2 = \pi + arctg\frac{5}{2} - 90^\circ - (180^\circ - arctg\frac{5}{2}) = 180^\circ + 68.2^\circ - 90^\circ - 111.8^\circ = 46.4^\circ$$

$$\phi_3 = \pi - (-arctg\frac{5}{2}) - 90^\circ + (-180^\circ + arctg\frac{5}{2}) = 68.2^\circ - 90^\circ + 68.2^\circ = -46.4^\circ$$

(6) Imaginary-axis crossing point: none

When K>0, the system is stable.





5-5 已知开环传递函数为$G(s)H(s) = \dfrac{K}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$，请概略画出闭环系统根轨迹图。

解

① 系统开环有限零点：z_1= -2，系统的开环有限极点为：$p_{1,2} = -2 + j\sqrt{5}, p_{3,4} = -2 - j\sqrt{5}$

② 实轴上的根轨迹区间为：[-∞, -2]

③ 根轨迹渐近线有 n-m=3 条，根轨迹渐近线与实轴的交点为：$\sigma_a = \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{4} p_i - z_1\right) = -2$，与实轴的交角为：$\varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} = \dfrac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60°,180°$

④ 根轨迹的分离点方程：$\dfrac{1}{d+2-j\sqrt{5}} + \dfrac{1}{d+2-j\sqrt{5}} + \dfrac{1}{d+2+j\sqrt{5}} + \dfrac{1}{d+2+j\sqrt{5}} = \dfrac{1}{d+2}$，用试探法求得分离点为：$d \approx -3.3$，分离角为：$\dfrac{(2k+1)\pi}{l} = \pm\dfrac{\pi}{2}$

⑤ 根轨迹的起始角：

$$\theta_{p_1}=(2k+1)\pi+(\angle(p_1-z_1)-\sum_{\substack{j=1\\j\neq 4}}^{5}\angle(p_1-p_j)=180°+90°-(\theta_{p_1}+90°+90°)\qquad \theta_{p_1}=45°$$

$$\theta_{p_2}=225°$$

$$\theta_{p_3}=-45°$$

$$\theta_{p_4}=-225°$$

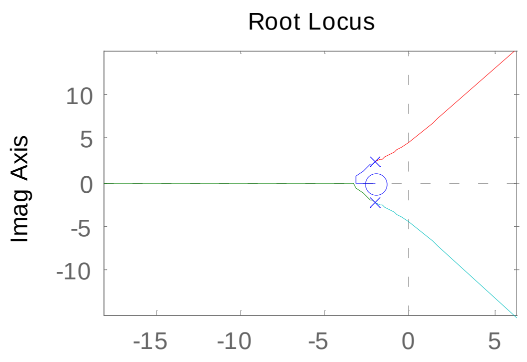
⑥ 根轨迹与虚轴的交点：系统闭环特征方程为

$$D(s)=s^4+8s^3+34s^2+(72+K^*)s+81+2K^*=0$$

将 $s=j\omega$ 代入，并使 $\mathrm{Re}[D(j\omega)]=0,\mathrm{Im}[D(j\omega)]=0$，得

$$\begin{cases}\omega=\pm 4.5826\\ K^*=96\end{cases}$$

系统的闭环根轨迹图如图所示：



5-6 设单位负反馈系统的开环传递函数为：$G(s)=\dfrac{K}{s(0.01s+1)(0.02s+1)}$，要求

(1) 画出准确根轨迹（至少校验三点）；

(2) 确定系统的临界稳定开环增益 Kc；

(3) 确定与系统的临界阻尼比相应的开环增益 K。

解：

将开环传递函数化成标准形式：$G_1(s)=\dfrac{K^*}{s(s+100)(s+50)}\qquad K=\dfrac{K^*}{5000}$

① 系统无开环有限零点，系统的开环有限极点为：$p_1=0, p_2=-100, p_3=-50$

② 实轴上的根轨迹区间为：$[-\infty, -100], [-50, 0]$

③ 根轨迹渐近线有 n-m=3 条，根轨迹渐近线与实轴的交点为：$\sigma_a=\dfrac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3}p_i\right)=-50$，与实轴的交角为：$\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60°,180°$

④ 根轨迹的分离点方程：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+100}+\dfrac{1}{d+50}=0$，$d\approx -21.1$，分离角为：$\dfrac{(2k+1)\pi}{l}=\pm\dfrac{\pi}{2}$

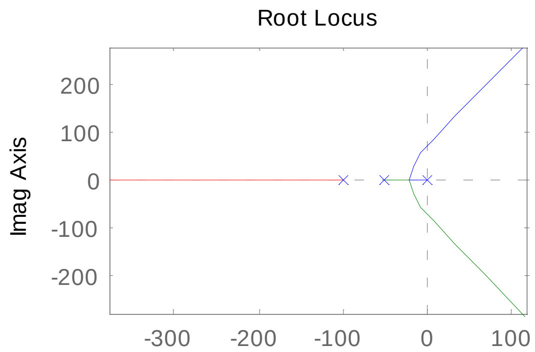
⑤ 根轨迹与虚轴的交点：系统闭环特征方程为

$$D(s)=s^3+150s^2+5000s+K^*=0$$

将 $s=j\omega$ 代入，并使 $\mathrm{Re}[D(j\omega)]=0, \mathrm{Im}[D(j\omega)]=0$，得

$$\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{5000}=70.71 \\ K^*=750000\end{cases}$$ K=150

系统的闭环根轨迹图如图所示：



（2）系统的临界稳定开环增益为 K=150

（3）临界阻尼情况为系统出现两个相等的负实根，即根轨迹的分离点，因此，分离点上的开环增益就是与系统的临界阻尼比相应的开环增益 K

分离点 d=-21.1，代入闭环特征方程中求解 K*=48112.431，K=9.62

5-7 已知系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K_0}{(1+0.5s)(1+0.2s)(1+0.125)^2}$。试：(1)绘制闭环系统的根轨迹图($K_0$>0)； (2) 确定闭环系统稳定 K_0值范围。

解：

Rearranging
$$G(s)H(s)=\frac{K_0}{(1+0.5s)(1+0.2s)(1+0.125s)^2}=\frac{640K_0}{(s+2)(s+5)(s+8)^2}$$
$$=\frac{K}{(s+2)(s+5)(s+8)^2}$$

(1) Open-loop poles: n=4, p1= -2, p2= -5, p3=p4= -8

Open-loop zeros: w=0

(2) Real axis root locus: [-2, -5]

(3) Asymptotes of root locus: $\gamma=\dfrac{(1+2n)\pi}{4}=\pm\dfrac{\pi}{4},\pm\dfrac{3\pi}{4}$

$$\sigma_0=\frac{\sum_{i=1}^{4}(p_i)}{4}=\frac{-2-5-8-8}{4}=-5.75$$

(4) Breakaway point on the real axis:

$$\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+5}+\frac{2}{d+8}=0\Rightarrow\begin{cases}d_1=-6.17(\text{abandoned})\\ d_2=-3.1\end{cases}$$

(5) Imaginary-axis crossing point: two methods can be used. Here we use Routh's method.

$$1+G(s)H(s)=(s+2)(s+5)(s+8)^2+K=s^4+23s^3+186s^2+608s+640+K=0$$

Routh's array:

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 186 & 640+K \\
s^3 & 23 & 608 & \\
s^2 & \dfrac{186\times 23-608}{23}=159.6 & 640+K & \\
s & \dfrac{159.6\times 608-(640+K)\times 23}{159.6} & &
\end{array}$$

An undamped oscillation may exist if the s^{-1} row in the array equals zero, i.e.

$$159.6\times 608-23(640+K)=0\Rightarrow K\approx 3578\Rightarrow K_0\approx 5.6$$

When K=3578, the auxiliary equation obtained from the s^{-2} row is

$159.6s^2+640+K=0\Rightarrow s^2=-26.4$, and the roots are $s_{1,2}=\pm j5.1$

Therefore, if $-1<K_0<5.6$, the system is stable.