第四次作业：第三章 21、23，第四章 1、3、4、8、10

21、

蜘蛛和苍蝇在 0 和 1 两个位置上独立地依循马尔可夫链移动，一直到它们相遇时蜘蛛吃掉苍蝇。它们的初始位置分别是 0 和 1，转移矩阵分别为 $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$。如果假定它们相遇后将永远留在相遇的位置，令 X_n 和 Y_n 分别表示 n 时蜘蛛和苍蝇的位置，令 $Z_n = (X_n, Y_n)$.

(1) 说明 $\{Z_n\}$ 是一个时齐马尔可夫链，写出状态空间和一步转移矩阵；

(2) 计算蜘蛛在位置 0 处吃掉苍蝇的概率;

(3) 求蜘蛛遇见苍蝇的平均步数.

解：

(1)

状态空间 $I = \{(0,0)\ \ (1,1)\ \ (0,1)\ \ (1,0)\}$

$Z_n = (0,0) \to Z_{n+1} = (0,0)$

$Z_n = (1,1) \to Z_{n+1} = (1,1)$

$Z_n = (0,1)$:

$P(Z_{n+1} = (0,0)) = 0.5 \times 0.2 = 0.1 \quad P(Z_{n+1} = (1,1)) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$

$P(Z_{n+1} = (0,1)) = 0.5 \times 0.8 = 0.4 \quad P(Z_{n+1} = (1,0)) = 0.5 \times 0.2 = 0.1$

$Z_n = (1,0)$:

$P(Z_{n+1} = (0,0)) = 0.5 \times 0.4 = 0.2 \quad P(Z_{n+1} = (1,1)) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$

$P(Z_{n+1} = (0,1)) = 0.5 \times 0.6 = 0.3 \quad P(Z_{n+1} = (1,0)) = 0.5 \times 0.4$

可以发现，$P\{Z_{n+1} = j | Z_n = i\}, \forall i, j$ 不依赖于 n, 因此 $\{Z_n\}$ 是一时齐马尔可夫链

$$一步转移矩阵\ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(2)

设 h 为从 (0,1) 出发，最终进入 (0,0) 的概率，h_1 为从 (1,0) 出发最终进入 (0,0) 的概率（走一步）

$$\begin{cases} h = 0.4h + 0.1 + 0.1h_1 \\ h_1 = 0.3h + 0.2 + 0.2h_1 \end{cases}$$

$h=\frac{2}{9} \quad h_1=\frac{1}{3} \quad P=\frac{2}{9}$

(3)

设 T_0, T_1 分别是从 (0,1),(1,0) 出发两者相遇的平均步数

$$\begin{cases} T_0 = 0.4T_0 + 0.1T_1 + 1 \\ T_1 = 0.2T_1 + 0.3T_0 + 1 \end{cases}$$

$T_0 = 2 \quad T_1 = 2 \quad T = 2$

23、

一只狼从 1 处开始在状态空间 $I=\{1,2,3,4\}$ 上做随机游动，2 处有一只羊，3 处有一陷阱。狼一旦走到 3 处，就掉进陷阱，无法再走; 狼一旦走到 2 处，就吃掉羊。设 X_n 为走 n 步时狼所处的位置，则 $\{X_n; n \geqslant 0\}$ 是时齐马尔可夫链，一步转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

计算

(1) $P(X_1=4, X_3=2)$;

(2) $P(X_2=1|X_3=3)$;

(3) 狼恰好在第 n 步吃掉羊的概率;

(4) 狼能在掉进陷阱前吃掉羊的概率;

(5) 狼掉进陷阱的平均步数.

解:

(1)

$P(X_1=4, X_3=2) = p_{14}p_{42}^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

(2)

$P(X_2=1|X_3=3) = \frac{P\{X_2=1, X_3=3\}}{P(X_3=3)} = \frac{p_{11}^2 p_{13}}{p_{13}^3} = \frac{1/3 \times 1/3}{7/9} = \frac{1}{7}$

(3)

$P_1 = \frac{1}{3}, P_2 = 0$

恰好在第 n 步吃掉羊，所以前 n-1 步狼都在 1，4 之间游动

$P_{2n+1} = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{6})^n, P_{2n} = 0$

(4)

$$P=\sum_{n=1}^{\infty}P_n=\sum_{k=0}^{\infty}=\frac{1}{3}6^{-k}=\frac{2}{5}\quad (n=2k+1)$$

(5)

设 T_1, T_2, T_4 是从状态 1，2，3 掉进陷阱 3 的平均步数

$$\begin{cases}T_1=\frac{1}{3}T_2+\frac{1}{3}T_4+1\\ T_2=\frac{1}{2}T_1+1\\ T_4=\frac{1}{2}T_1+1\end{cases}$$

$T_1=\frac{5}{2}\quad T=\frac{5}{2}$

1、

设 $\{N(t); t\geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，求：

(1) $P(N(3)-N(1)\geqslant 2)$;

(2) $P(N(3)\geqslant 2|N(1)=1)$;

(3) $P(N(1)=1|N(3)\geqslant 2)$.

解：

(1)

$N(3)-N(1)\sim \pi(2\lambda)$

$P\{N(3)-N(1)\geqslant 2\}=1-P\{N(3)-N(1)=0\}-P\{N(3)-N(1)=1\}=1-e^{-2\lambda}-2\lambda e^{-2\lambda}$

(2)

$P\{N(3)\geqslant 2|N(1)=1\}=P\{N(3)-N(1)\geqslant 1\}=1-e^{-2\lambda}$

(3)

$$P\{N(1)=1|N(3)\geqslant 2\}=\frac{P\{N(1)=1,N(3)-N(1)\geqslant 1\}}{P\{N(3)\geqslant 2\}}=\frac{\lambda e^{-\lambda}(1-e^{-2\lambda})}{1-e^{-3\lambda}-3\lambda e^{-3\lambda}}$$

3、

设 $\{N(t); t\geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，$X(t)=N(t)-tN(1), 0\leqslant t\leqslant 1$, 求 $X(t)$ 的均值函数和自相关函数

解：

$X(t)=N(t)-tN(1)\quad (0\leqslant t\leqslant 1)$

$N(t)\sim \pi(\lambda t)$

$\mu_X(t)=E(X(t))=\lambda t-t\lambda=0$

$$R_X(s,t)=E(X(s)X(t))=E[N(s)N(t)-sN(1)N(t)-tN(1)N(s)+stN^2(1)]$$

$$=Cov_N(s,t)-sCov(1,t)-tCov(1,s)+\lambda st$$

$$=\lambda min\{s,t\}-\lambda st$$

4、

根据某高速公路观察点的记录与数据分析，小车、客车、货车分别按照到达率 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的泊松过程到达，且相互独立。求：

(1) 在 $(0,3]$ 内小车与客车到达数之和至少为 3 辆的概率;

(2) 在 $(5,7]$ 内小车、客车与货车到达数之和至少为 2 辆的概率;

解：

(1)

$$P\{X(3)+Y(3)\geqslant 3\}=1-P\{X(3)+Y(3)\leqslant 2\}$$

$$=1-P\{X(3)+Y(3)\}-P\{X(3)+Y(3)=1\}-P\{X(3)+Y(3)=2\}$$

$$=1-e^{-3(\lambda_1+\lambda_2)}-3(\lambda_1+\lambda_2)e^{-3(\lambda_1+\lambda_2)}+\frac{9}{2}(\lambda_1+\lambda_2)^2e^{-3(\lambda_1+\lambda_2)}$$

(2)

$$P\{X(7)-X(5)+Y(7)-Y(5)+Z(7)-Z(5)\geqslant 2\}$$

$$=1-e^{-2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}-2(2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)e^{-2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}$$

8、

设电话总机在 $(0,t]$ 分钟内接到的呼叫数为 $N(t),\{N(t);t\geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程。求：

(1) 两分钟内接到 3 次呼叫的概率;

(2) 第 2 分钟内接到第 3 次呼叫的概率;

解：

(1)

$$P\{N(2)=3\}=\frac{(2\lambda)^3e^{-2\lambda}}{3!}=\frac{4}{3}\lambda^3e^{-2\lambda}$$

(2)

$$P\{N(1)\leqslant 2,N(2)\geqslant 3\}$$

$$=P\{N(1)=0,N(2)-N(1)\geqslant 3\}+P\{N(1)=1,N(2)-N(1)\geqslant 2\}+P\{N(1)=2,N(2)-N(1)\geqslant 1\}$$

$$=(1+\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2)e^{-\lambda}-(1+2\lambda+2\lambda^2)e^{-2\lambda}$$

10、

某人在钓鱼，他钓到鱼的规律服从强度为 $\lambda = 0.4$(条/h) 的泊松过程，钓鱼时间至少为 2h。如果他到 2h 时已经至少钓到一条鱼，就不钓了；否则，他将一直钓下去直到钓到一条鱼为止。

(1) 求他钓鱼时间 X 的分布函数

(2) 求他钓到鱼数目 Y 的分布律

(3) 求 $E(Y)$

(4) 若他钓了 2.5h 还没结束，求他还需要钓 1h 以上的概率?

解:

(1)

$$P\{X=2\} = P\{N(2)>0\} = 1 - P\{N(2)=0\} = 1 - e^{-0.8}$$

$$P\{X=t\} = P\{N(2)=0\}P\{N(t)-N(2)=1\} = (0.4t-0.8)e^{-0.4t} \quad (t \geqslant 2)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 - e^{-0.4x} & x \geqslant 2 \end{cases}$$

(2)

$$P\{Y=1\} = P\{N(2)=0\} + P\{N(2)=1\} = 1.8e^{-0.8}$$

$$P\{Y=n\} = P\{N(2)=n\} = \frac{0.8^n e^{-0.8}}{n!} \quad (n \geqslant 2)$$

(3)

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1.8e^{-0.8} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0.8^n e^{-0.8}}{(n-1)!} \\ &= 1.8e^{-0.8} + 0.8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.8^n e^{-0.8}}{n!} = 1.8^{-0.8} + 0.8(1-e^{-0.8}) \\ &= 0.8 + e^{-0.8} \end{aligned}$$

(4)

$$P\{N(3.5=0)|N(2.5)=0\} = P\{N(3.5)-N(2.5)=0\} = e^{-0.4}$$