第五周作业参考答案

第三章 连续时间控制系统的时域分析　习题三 P.135-138

3-10；
3-11；
3-12；
3-17；

3-10　已知二阶系统的单位阶跃响应应为：$h(t)=10-12.5e^{-1.2t}\sin(1.6t+53.1^{\circ})$。请求出该系统的百分比超调量 $\sigma\%$，峰值时间 T_p 以及调节时间 T_s。

解：方法一：从已知的系统单位阶跃响应 h(t)易知

$$\frac{10}{\sqrt{1-\zeta^2}}=12.5;\quad \sqrt{1-\zeta^2}=0.8;\quad 故\ \zeta==0.6$$

又，$-\zeta\omega_n=1.2$；代入 $\zeta==0.6$，得 $\omega_n=2$；$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=1.6$

以下即可直接求得系统的超调量 $\sigma\%$、峰值时间 t_p 和调节时间 t_s。

方法二：

（1）因为：超调量 $\sigma\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\cdot 100\%$

而 $\zeta=\cos\beta=\cos 53.1^{\circ}=0.6$

故：　$\sigma\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\cdot 100\%=9.48\%$

(2)因为：$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}$；从已知的 h(t)中 sin(1.6t+53.1)可知：$\omega_d=1.6$

故：其 $t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{3.14}{1.6}=1.9625$ s

(3) 因为：$t_s=\dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}$；从已知的 $\omega_d=1.6=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 中可知：$\omega_n=2$

故：$t_s=\dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}=\dfrac{3.5}{0.6\cdot 2}=2.917$

3-11　已知某控制系统的方块图如图 3-35 所示，求：

(1)　K_c 为多少时，系统产生振荡；

(2)　K_c 为多少时，系统不稳定；

(3)　K_c 为多少时，系统产生 4：1 衰减振荡；

(4)　定值控制系统产生 4：1 衰减振荡时的最大偏差、余差、调节时间、峰值时间；

(5)　随动系统产生 4：1 衰减振荡时的超调量、余差、调节时间、峰值时间。

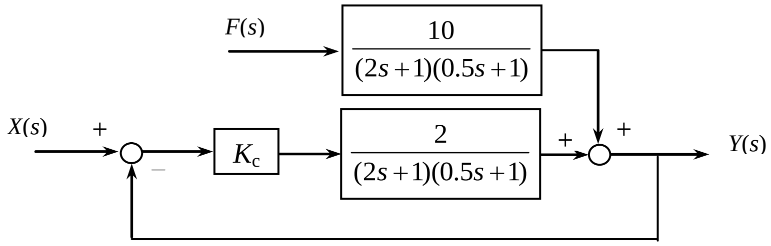

图 3-35　题 3-11 示意图

解：系统的特征方程：$\Delta = s^2 + 2.5s + 1 + 2Kc = 0$

写成标准形式：$\Delta = s^2 + 2.5s + 1 + 2Kc = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2 = 0$

特征根：$s_{1,2} = \dfrac{-2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4\times(1+2Kc)}}{2}$

（1）上式根号中的内容＞＝0，故可得 $Kc \le 0.2812$ 时系统不振荡，所以当 $Kc > 0.2812$时，系统产生振荡。

当 $\zeta < 1$ 系统产生振荡，代入上式，得

$1 + 2Kc = \omega_n{}^2 > 1.25^2$； $Kc > (1.25^2 - 1)/2 = 0.28125$

（2）当根号中的内容＞2.5，即有正的特征根，则系统不稳定（等号临界振荡）

$\sqrt{2.5^2 - 4\times(1+2Kc)} > 2.5 \Rightarrow Kc < -0.5$

（3）当系统产生 4：1 衰减振荡时，因为 $n = e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 4 \Rightarrow \dfrac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln 4 \Rightarrow \zeta = 0.2156$

当 $\zeta = 0.2156 \Rightarrow \omega_n = 5.8$； $Kc = (5.8^2 - 1)/2 = 16.32$

（4）对定值控制系统：$\dfrac{Y(s)}{F(s)} = \dfrac{10}{s^2 + 2.5s + 1 + 2Kc}$，将 Kc＝16.3 代入，并令 F 为单位阶跃函数，输出

$$Y(s) = \frac{10}{s^2 + 2.5s + 33.6} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = 10\{\frac{1}{33.6} - \frac{1}{33.6\sqrt{1-0.216^2}} e^{-0.216\times 5.8t} \sin(5.8\sqrt{1-0.216^2}\, t + \phi\}$$

$$= 0.298 - 0.152 e^{-1.253t} \sin(5.66t + 1.35)$$

因为可求出峰值时间：$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.556$

将峰值时间代入输出表达式求出的值即为定值系统的最大偏差：

$$y(t_p) = 0.298 - 0.152e^{-1.253t_p}\sin(5.66t_p + 1.353) = 0.445$$

由输出表达式可容易地求出系统余差：

$$e(\infty) = -y(\infty) = -0.298$$

系统调节时间：$t_s \approx \dfrac{3}{\zeta\omega_n} = \dfrac{3}{0.216\times 5.8} = 2.4$

（5）对随动控制系统：$\dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{2K_c}{s^2+2.5s+1+2K_c}$；将 Kc＝16.3 代入，并令 X 为单位阶跃函数，输出

$$Y(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{32.6}{s^2+2.5s+33.6}$$

因为ζ和ω_n均相同，故随动系统的峰值时间、调节时间与定值系统的相同：

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.556,\quad t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{0.216\times 5.8} = 2.4$$

超调量：$\sigma = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-0.6933} = 0.5$

因为：$y(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{s\to 0} sY(s) = \lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{32.6}{s^2+2.5s+33.6} = 0.97$

余差：$e(\infty) = 1 - y(\infty) = 0.03$

3-12　已知某一系统的广义对象传递函数是$G(s) = \dfrac{4}{(2s+1)^2}$，控制器是比例作用，比例系数为 K_c，求：

(1)　使衰减比达到 4：1 时的 K_c 值；

(2)　如果采用 K_c＝0.75，问衰减比和振荡频率是多少？

解：（1）系统的开环传递函数：$G_{open}(s) = \dfrac{4Kc}{(2s+1)^2}$

系统的特征方程：$\Delta = s^2 + s + 0.25 + Kc = 0$

写成标准形式：$\Delta = s^2 + s + 0.25 + Kc = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

当系统产生 4：1 衰减振荡时，因为 $n=e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=4\Rightarrow\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\ln 4\Rightarrow\zeta=0.2156$

当 $\zeta=0.216\Rightarrow\omega_n=\frac{1}{2\zeta}=2.32$

$$0.25+Kc=\omega_n^{\ 2}=5.38\Rightarrow Kc=5.128$$

（2）如果采用 Kc＝0.75，则 $\omega_n^{\ 2}=0.25+Kc=1\Rightarrow\omega_n=1\Rightarrow\zeta=0.5$

$$n=e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=e^{3.63}=37.6\text{，}\quad \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=0.866$$

3-17　设二阶控制系统的单位阶跃响应曲线如图 3-40 所示，如果该系统是单位反馈控制系统，试确定其开环传递函数。

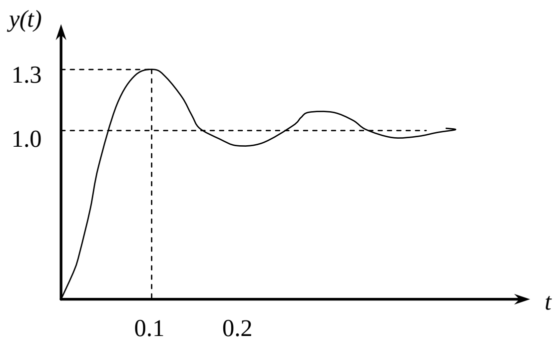

图3-40　题3-17图

解：$\sigma=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}=0.3\Rightarrow\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}=1.204$　　$\xi=0.356$

$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=0.1\Rightarrow\pi=0.1\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$　　$\omega_n=33.6$

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\omega_n\xi)}=\frac{1128}{s(s+24)}=\frac{47.01}{s(0.0417s+1)}$$