4.1 写出 ω,k,f,T,λ 单位。

答：ω（rad/s），k (rad/m) ，f (Hz) ，T (s)，λ（m）

4.2 激光器输出波长为 $6.328\times10^{-7}m$，计算它的f,T,k。

答：$f=\dfrac{c}{\lambda}=\dfrac{3\times10^{8}}{6.328\times10^{-7}}=4.741\times10^{14}\,Hz$，$T=\dfrac{1}{f}=2.11\times10^{-15}\,s$，

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{6.328\times10^{-7}}=9.9292\times10^{6}\ rad/m$$

4.3 已知均匀平面电磁波，在均匀媒质中传播，其电场强度的表示式为$\mathbf{E}=\mathbf{y}_0E_y=\mathbf{y}_0 10cos(\omega t-kz+30°)\ mV/m$，工作频率$f=150MHz$，媒质的参数为$\mu_r=1$，$\varepsilon_r=4$，$\sigma=0$，试求：

(1) 相位常数k、相速v_p、波长λ和波阻抗η。

(2) $t=0$、$z=1.5m$ 处，$\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$、$\mathbf{S}(t)$、$\langle\mathbf{S}\rangle$各为多少？

(3) 在 $z=0$ 处，E 第一次出现最大值（绝对值）的时刻 t 等于多少？

解：$k=\omega\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_0}=2\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\dfrac{2\times2\pi\times150\times10^{6}}{3\times10^{8}}=2\pi \qquad \left(m^{-1}\right)$

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=1m$$

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\omega\sqrt{4\varepsilon_0\mu_0}}=\frac{c}{2}=1.5\times10^{8}\,m/s$$

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}=\frac{\eta_0}{2}=60\pi$$

$$\mathbf{E}(t)=\mathbf{y}_0 10\cos\left(\omega t-kz+30^\circ\right)=\mathbf{y}_0 10\cos\left(-540^\circ+30^\circ\right)=\mathbf{y}_0=-8.66\mathbf{y}_0 \quad \text{mV/m}$$

$$\mathbf{H}(t)=-\mathbf{x}_0\frac{10}{\eta}\cos\left(\omega t-kz+30^\circ\right)=-\mathbf{x}_0\frac{10}{188.5}\cos\left(-540^\circ+30^\circ\right)=\mathbf{x}_0 0.046 \quad \text{mA/m}$$

$$\mathbf{S}(t)=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{H}(t)=\mathbf{z}_0\frac{10^2}{\eta}\cos^2\left(\omega t-kz+30^\circ\right)=\mathbf{z}_0 0.398 \quad \mu\text{w/m}^2$$

$$\left\langle\mathbf{S}(t)\right\rangle=\mathbf{z}_0\frac{10^2}{2\eta}=\frac{100}{2\times188.5}=\mathbf{z}_0 0.265 \quad \mu\text{w/m}^2$$

$\omega t+30^\circ=180^\circ$ 或 $\omega t+\dfrac{\pi}{6}=\pi$

$\mathbf{E}$ 达到最大，$t=\dfrac{5\pi/6}{2\pi\times150\times10^{6}}=2.78\times10^{-9}\,s$

4.4 自由空间电磁波有 f_0、λ_0、k_0、v_0。当它进入介质，其介电常数为 $4\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$，求介质中电磁波的 f、λ、k 及v。

答： $f = f_0$， $\lambda = 0.5\lambda_0$， $k = 2k_0$， $v = 0.5v_0$。

4.5 $\overline{E} = E_0 e^{jkz}\hat{x}_0$， $\overline{H} = H_0 e^{jkz}\hat{y}_0$ 满足自由空间麦克斯韦方程，问题如下：

1）用E_0, ε_0, μ_0表示 H_0和k 。
2）这个解是不是均匀平面波？波沿什么方向传播？并求出波速 v 与时间平均坡印廷矢量<S>。

答：1) $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$， $H_0 = -E_0\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$

2）这个解是均匀平面波，波沿-z 方向传播，波速 $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$，

$$<\overline{S}> = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\overline{E}\times\overline{H}^*\} = \frac{1}{2}E_0 e^{jkz}H_0^* e^{-jkz}(\hat{x}_0\times\hat{y}_0) = \frac{1}{2}E_0 H_0 \hat{z}_0$$

4.6 商用调幅广播电台覆盖地域最低信号场强为 25mV/m。与之相联系的最小功率密度是多少？最小磁场是多大？

答：最小功率密度为 $<S>_{\min} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2 = 8.293\times10^{-7}\mathrm{W/m^3}$

最小磁场为：$\mathrm{H} = 6.6345\times10^{-5}\mathrm{A/m}$

4.7 自由空间平面电磁波的平均能流密度为 0.26 微瓦/米^2，平面波沿z方向传播，其工作频率f = 150 兆赫，电场强度的表示式为$E = E_m cos\,(\omega t - kz + 60°)$。试求在$z$ = 10 米处，t = 0.1 微秒时的E、H、S等于多少

解：$<S> = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\} = \mathbf{z}_0\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|E_0|^2$ =0.26 微瓦/米^2，可得 $|E_0| = 0.014V/m$

$\omega = 2\pi f = 3\pi\times10^8 rad/s$， $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \pi$， 在 z = 10 米处，t = 0.1 微秒时

$E = E_m cos\,(\omega t - kz + 60°) = 0.014\cos(3\pi\times10^8\times0.1\times10^{-6} - \pi\times10 + 60^\circ) = 0.007V/m$

$H = E/\eta_0 = 1.86\times10^{-5}A/m$,S=0.13 微瓦/米^2.

4.8 求下列场的极化性质。

(a) $\mathbf{E}=(j\mathbf{x}_0+\boldsymbol{y}_0)e^{-jkz}$　　(b) $\mathbf{E}=[(1+j)\mathbf{y}_0+(1-j)\mathbf{z}_0]e^{-jkx}$

(c) $\mathbf{E}=[(2+j)\mathbf{x}_0+(3-j)\mathbf{z}_0]e^{-jky}$　　(d) $\mathbf{E}=(j\mathbf{x}_0+j2\mathbf{y}_0)e^{jkz}$

解：

(a) a = b = 1，$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$　　顺着 z 方向看，右旋

(b) a = b = $\sqrt{2}$，$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$　　顺着 x 方向看，右旋

(c) $a \neq b$，$\varphi = \pi/4$　　顺 y 方向看，椭圆极化

(d) $a \neq b$，$\varphi = 0$ 线极化

4.9 设有一椭圆极化波为：$\overline{E} = \hat{x}_0 E_{xm}\cos(\omega t - kz) + \hat{y}_0 E_{ym}\cos(\omega t - kz + \pi/2)$，试将其分解为旋向相反、振幅不等的两个圆极化波。

答：

$$\begin{aligned}
\overline{E} &= [\hat{x}_0 \frac{E_{xm}+E_{ym}}{2}\cos(\omega t - kz) + \hat{y}_0 \frac{E_{xm}+E_{ym}}{2}\cos(\omega t - kz + \pi/2)] \\
&\quad + [\hat{x}_0 \frac{E_{xm}-E_{ym}}{2}\cos(\omega t - kz) - \hat{y}_0 \frac{E_{xm}-E_{ym}}{2}\cos(\omega t - kz + \pi/2)] \\
&= \frac{E_{xm}+E_{ym}}{2}[\hat{x}_0\cos(\omega t - kz) + \hat{y}_0\cos(\omega t - kz + \pi/2)] \\
&\quad + \frac{E_{xm}-E_{ym}}{2}[\hat{x}_0\cos(\omega t - kz) + \hat{y}_0\cos(\omega t - kz - \pi/2)]
\end{aligned}$$

4.10 一线极化波电场的两个分量为 $E_x = 6\cos(\omega t - kz - 30^\circ)$ ，$E_y = 8\cos(\omega t - kz - 30^\circ)$，试将它分解成振幅相等，旋向相反的两个圆极化波。

答：

$$\begin{aligned}
\overline{E} &= \hat{x}_0 6\cos(\omega t - kz - 30^\circ) + \hat{y}_0 8\cos(\omega t - kz - 30^\circ) \\
&= 10[\hat{x}_0 \sin\phi\cos(\omega t - kz - 30^\circ) + \hat{y}_0 \cos\phi\cos(\omega t - kz - 30^\circ)] \\
&= 5\hat{x}_0[\sin(\phi + \omega t - kz - 30^\circ) + \sin(\phi - \omega t + kz + 30^\circ)] \\
&\quad + 5\hat{y}_0[\cos(\phi + \omega t - kz - 30^\circ) + \cos(\phi - \omega t + kz + 30^\circ)] \\
&= 5[\hat{x}_0\cos(\omega t - kz - 120^\circ + \phi) + \hat{y}_0\cos(\omega t - kz - 30^\circ + \phi)] \\
&\quad + 5[\hat{x}_0\cos(\omega t - kz + 60^\circ - \phi) + \hat{y}_0\cos(\omega t - kz - 30^\circ - \phi)]
\end{aligned}$$

4.11 自由空间沿z方向传播的均匀平面波$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 e^{-jkz}$，式中$\mathbf{E}_0=\mathbf{E}_r+j\mathbf{E}_i$，且$E_r=2E_i=b$，b为实常数，$\mathbf{E}_r$在x方向，$\mathbf{E}_i$与x轴夹角为 60°，试求电场强度和磁场强度瞬时值，并说明波的极化。

解：$\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 e^{-jkz} = (E_r + jE_i)e^{-jkz} = [(b + j\frac{b}{2}\cos 60^\circ)\hat{x}_0 + j\frac{b}{2}\sin 60^\circ\,\hat{y}_0]e^{-jkz}$

$$= b[(1+\frac{j}{4})\hat{x}_0 + \frac{j\sqrt{3}}{4}\hat{y}_0]e^{-jkz}$$

$$= b[\frac{\sqrt{17}}{4}\hat{x}_0 e^{-jkz+j\phi} + \frac{\sqrt{3}}{4}\hat{y}_0 e^{-jkz+j\frac{\pi}{2}}]，\quad 其中 \tan\phi = 0.25$$

$$\mathrm{H} = \frac{1}{-j\omega\mu_0}\nabla\times\mathrm{E} = \frac{kb}{\omega\mu_0}[\frac{\sqrt{17}}{4}\hat{y}_0 e^{-jkz+j\phi} - \frac{\sqrt{3}}{4}\hat{x}_0 e^{-jkz+j\frac{\pi}{2}}]$$

$$\overline{E}(t) = \frac{\sqrt{17}b}{4}\hat{x}_0\cos(\omega t - kz + \phi) + \frac{\sqrt{3}b}{4}\hat{y}_0\cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})$$

$$\overline{H}(t)=\frac{kb}{\omega\mu_0}[\frac{\sqrt{17}}{4}\hat{y}_0\cos(\omega t-kz+\phi)-\frac{\sqrt{3}}{4}\hat{x}_0\cos(\omega t-kz+\frac{\pi}{2})]$$

因为 $\phi_b-\phi_a=\frac{\pi}{2}-a\tan 0.25$，所以，是椭圆极化波，且为左旋极化。

4.12 均匀平面波的频率为 10MHz。设地球的 $\mu=\mu_0,\varepsilon=4\varepsilon_0,\sigma=10^{-4}S/m$。求地球的衰减常数与趋肤深度。

答：$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=0.045<<1$

则衰减常数为：$k_i=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=9.425\times10^{-2}$ N/m

趋肤深度：$d_p=\frac{1}{k_i}=106.1008$ m

4.13 用上例数据，设地球表面电场强度为 1V/m，求地球表面功率密度。

答：$<S>=\mathrm{Re}\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\}=\mathrm{Re}\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\varepsilon_0(1-j\frac{\sigma}{4\omega\varepsilon_0})}{\mu_0}}\}\approx\frac{1}{377}$ w/m²

4.14 一平面电磁波从空气垂直地向海面传播，已知海水的参数为ε_r=80，σ=1/米欧，μ_r=1，平面电磁波在海平面处的场强表示式为：$E=\mathbf{x_0}1000e^{-k_iz}e^{j(\omega t-k_rz)}$（伏/米）工作波长为 300 米。试求电场强度的振幅为 1 微伏/米时离海面的距离，并写出这个位置上的**E**，**H**之表示式。

解：工作频率为 $f=\frac{3\times10^8}{300}=10^6$（赫兹）

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\frac{1}{2\pi\times10^6\times8.85\times10^{-12}}=18\times10^3>>100$$

由此可知，海水对该频率具有良导体性质。

相移常数为：

$$k_r=\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}=\sqrt{\frac{2\pi\times10^6\times4\pi\times10^{-7}\times1}{2}}=2\text{（弧度/米）}$$

衰减常数：

$$k_i=\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}=k_r=2\text{（奈贝/米）}$$

复数波阻抗为：

$$\eta=\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{2\pi\times10^6\times4\pi\times10^{-7}}{1}}e^{j\frac{\pi}{4}}=2.82e^{j\frac{\pi}{4}}\text{欧}$$

在海水中传播的 E 的表示式为：

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{x_0} 1000 e^{-k_i z} e^{j(\omega t - k_r z)} \\ &= \mathbf{x_0} 1000 e^{-2z} e^{j(\omega t - 2z)}\end{aligned}$$

由该表示式可求得场强振幅为 1 微伏/米时的距离，

$$10^{-6} = 1000 e^{-k_i z} = 1000 e^{-2z}, e^{-2z} = 10^{-9}$$

$$\ln e^{-2z} = \ln 10^{-9}, \quad 2z = 9 \times \ln 10$$

解之得：$z = 10.35$（米）
距海水 10.35 米处 E、H 之表示式为：

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{x_0} 1000 e^{-2z} e^{j(\omega t - 2z)} \\ &= \mathbf{x_0} 1000 e^{-20.7} e^{j\left(\omega t - 1180^\circ\right)} \\ &= \mathbf{x_0} 10^3 e^{-20.7} e^{j\left(\omega t - 100^\circ\right)}\end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{y_0} \frac{H}{|\eta|} = 350 e^{-20.7} e^{j\left(\omega t - 145^\circ\right)}$$

4.15 设平面波在均匀媒质（参数为 μ， ε ）中传播，电场和磁场为

$\overline{E} = \hat{x} E_0 \sin kz$， $\overline{H} = \hat{y} j \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \cos kz$，试证其能速为：$v_e = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 。

答：$\overline{E}(t) = \hat{x} \dfrac{1}{2} E_0 [\sin(kz + \omega t) - \sin(\omega t - kz)]$

$$\overline{H}(t) = \hat{y} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 [\sin(kz + \omega t) + \sin(\omega t - kz)]$$

$$\overline{S}(t) = \overline{E}(t) \times \overline{H}(t) = \hat{z} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 [\sin^2(kz + \omega t) - \sin^2(\omega t - kz)]$$

以上表示有同时沿正、负 z 方向上的波在传播，取其中任一方向上传播的波做计算，如：

$\overline{S}^+(t) = \hat{z} \dfrac{1}{8} \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \cos 2(\omega t - kz)$，可以得出能速为：$v_e = \dfrac{z}{t} = \dfrac{2k}{2\omega} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

4.16 电各向异性介质中，**E**、**D**、**H**、**B**、**S**、**k** 六个矢量，哪四个共平面？说明其理由。

答：**E**、**D**、**S**、**k** 四个共平面。因为：$\overline{B} \cdot \overline{D} = 0, \overline{H} \cdot \overline{S} = 0, \overline{H} \cdot \overline{k} = 0$，对于寻常波，E 与 D 在同方向，对于非寻常波，E 与 D 不在同一方向上，但在与 H（B）垂直的平面内。
4.17 试求单轴晶体内，寻常波和非寻常波的传播方向之间的夹角，并求其最大值。

答：假定单轴晶体描述为：$\overline{\overline{\varepsilon}} = diag\left[\varepsilon_\perp, \varepsilon_\perp, \varepsilon_{//}\right]$

不考虑同交界面同传播方向的波入射在单轴晶体上，只考虑晶体内部可能存在的波，则：
对于寻常波，E 和 D 在 x-y 平面内；对于非寻常波，H 和 B 在 x-y 平面内。
两种波可以构成的角度为 180 度。

4.18 平面波从空气垂直入射至铁氧体，设入射电场 $\overline{E}^i(z)=\hat{x}E_0e^{-jkz}$ ，并沿z轴在铁氧体上加一直流饱和磁场$\mathbf{H_0}$，试求空气中的反射波和铁氧体中的透射波。(图略)

答：可以知道，在铁氧体中的透射波为纵向传播的波（θ=0）

入射磁场为：$\overline{H}^i(z)=\hat{y}\dfrac{k}{\omega\mu}E_0e^{-jkz}$

设反射波为：

$\overline{E}^r(z)=(a\hat{x}+b\hat{y})e^{jkz}$，$\overline{H}^r(z)=(-\hat{y}\dfrac{ak}{\omega\mu}+\hat{x}\dfrac{bk}{\omega\mu})e^{jkz}$

透射波为：

$$\overline{E}^t(z)=(\hat{x}+j\hat{y})E^+e^{-jk^+z}+(\hat{x}-j\hat{y})E^-e^{-jk^-z}$$

$$\overline{H}^t(z)=\frac{1}{\omega}\overline{\overline{\mu}}^{-1}\cdot(\nabla\times\overline{E}^t)$$

在交界面处，切向电场与切向磁场连续，则：

$$\overline{E}^i(0)+\overline{E}^r(0)=\overline{E}^t(0)$$

$$\overline{H}^i(0)+\overline{H}^r(0)=\overline{H}^t(0)$$

得到：

$$E_0+a=E^++E^-$$

$$b=j(E^+-E^-)$$

$$\frac{k}{\omega\mu}E_0-\frac{ak}{\omega\mu}=\frac{E^+k^+}{\omega(\mu_{11}+\mu_{12})}+\frac{E^-k^-}{\omega(\mu_{11}-\mu_{12})}$$

$$\frac{bk}{\omega\mu}=-j\frac{E^+k^+}{\omega(\mu_{11}+\mu_{12})}+j\frac{E^-k^-}{\omega(\mu_{11}-\mu_{12})}$$

求解这四个方程可以得到：

$$a=[\frac{k(\mu_{11}+\mu_{12})}{k(\mu_{11}+\mu_{12})+\mu k^+}+\frac{k(\mu_{11}-\mu_{12})}{k(\mu_{11}-\mu_{12})+\mu k^-}-1]E_0;$$

$$b=j[\frac{k(\mu_{11}+\mu_{12})}{k(\mu_{11}+\mu_{12})+\mu k^+}-\frac{k(\mu_{11}-\mu_{12})}{k(\mu_{11}-\mu_{12})+\mu k^-}]E_0;$$

$$E^+=\frac{k(\mu_{11}+\mu_{12})}{k(\mu_{11}+\mu_{12})+\mu k^+}E_0;\quad E^-=\frac{k(\mu_{11}-\mu_{12})}{k(\mu_{11}-\mu_{12})+\mu k^-}E_0$$

4.19 导电单轴媒质电参量：$\varepsilon = diag[\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon_z]$，$\sigma = diag[\sigma, \sigma, \sigma_z]$,试求其中寻常波与非寻常波的色散关系。当$\sigma_z / \sigma << 1$时，说明任何极化经过具有这种性质媒质时将成为线极化波。

答： 复介电常数为：$\varepsilon = diag\left[\varepsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega}, \varepsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega}, \varepsilon_z + i\dfrac{\sigma_z}{\omega}\right]$

对于寻常波：$k_o{}^2 = \omega^2 \mu(\varepsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega})$

对于非寻常波：
$$k_e{}^2 = \frac{\omega^2 \mu(\varepsilon_z + i\dfrac{\sigma_z}{\omega})}{\sin^2\theta + \dfrac{\varepsilon_z + i\dfrac{\sigma_z}{\omega}}{\varepsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega}}\cos^2\theta}$$

取$\theta = 90^\circ$,则$k_e{}^2 = \omega^2 \mu(\varepsilon_z + i\dfrac{\sigma_z}{\omega})$

而假定该材料是低损耗介质，那么，$k_o \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}(1 + i\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\omega})$，$k_e \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon_z}(1 + i\dfrac{\sigma_z}{2\omega\varepsilon_z})$。

那么对于寻常波和非寻常波，在介质中传播时，受到的衰减是不一样的。

$\dfrac{k_{ei}}{k_{oi}} \approx \dfrac{\sigma_z}{\sigma}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_z}}$ <<1， 所以，非寻常波比寻常波受到更小的衰减。 那么任意极化的波经过该介质后，将成为线极化波。

4.20 设某海域海水低频时可以用$\varepsilon=81\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$，$\sigma=4S/m$介质表示，平面波波矢**k**与*x*轴夹角为 30°，给出波沿*x*方向传播的传输线模型（给出等效传输线的特征参数）。

解：$k = \omega\sqrt{\mu\tilde{\varepsilon}} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon\left(1 - j\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = \omega\sqrt{81\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{1 - j\dfrac{10^{-4}}{\omega 81\varepsilon_0}} = 9k_0\sqrt{1 - j\dfrac{10^{-4}}{81\omega\varepsilon_0}}$

$$k_z = k\cos 30^\circ$$

$$Z = \begin{cases} \omega\mu / k_z & TE \\ k_z / \omega\tilde{\varepsilon} & TM \end{cases}$$