量子信息基础

第四章：量子信息论

金潮渊
浙江大学信息与电子工程学院

浙江大学

C4-3 量子信源和无噪声编码

课程回顾

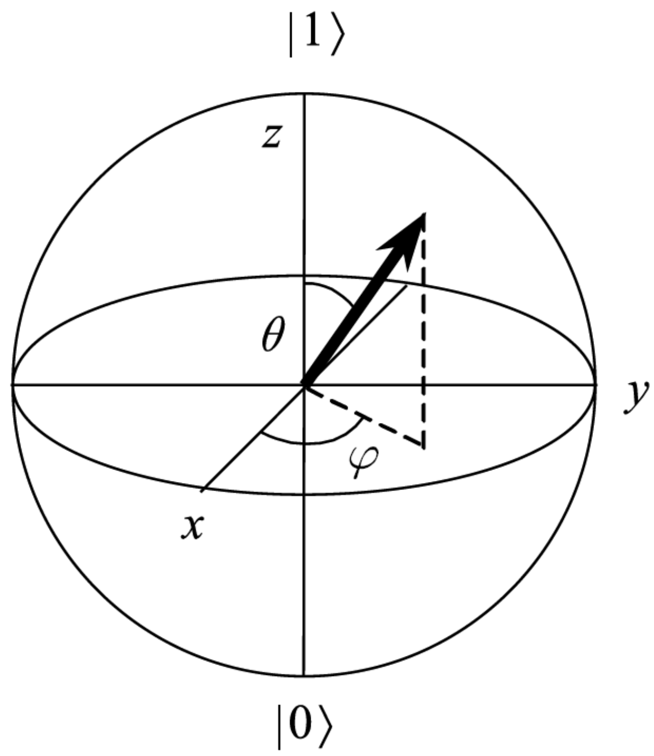
香农熵和冯诺依曼熵：

- 量子计算机的逻辑运算依赖于量子比特（quantum bits，qubits）。量子比特不是1或者0，而是1态和0态的量子叠加 $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$。
- 经典计算机要擦除一个经典比特，其所消耗的最小能量是 $k_B T\ln 2$，对应于信息熵的概念。
- 经典比特的信息不确定度可以用香农熵来描述

$$S(p_1, p_2, \cdots p_n) \equiv -\sum_x p_x \log p_x$$

- 量子比特的信息不确定度定义在量子态的纯度上，引入密度矩阵和冯诺依曼熵的概念

$$S(\rho) \equiv -\sum tr(\rho \log \rho)$$



二进制典型序列(1)

- 香农通过玻尔兹曼的热力学熵来类比信息熵。统计物理中粒子系综的最概然分布即对应于信息论经典系综的编码典型序列。

- 假设有一个二进制的序列

$$\ldots\ldots 01001011101100010011000 \ldots\ldots$$

其中1出现的概率为p，0出现的概率为$1-p$。假设有一个足够长，长度为n的序列中有np个1，和$n(1-p)$个0。如果序列中各字符均以先验的概率出现，这种序列称之为典型序列。

- 长度为n的典型序列的个数为

$$C_n^{np}=\frac{n!}{(np)!\,\big(n(1-p)\big)!}$$

二进制典型序列(2)

- 通过引入Stirling公式 $\log n! \approx n\log n - n$，可以推出

$$\log\left(C_n^{np}\right) = \log\left(\frac{n!}{(np)!\left(n(1-p)\right)!}\right) \approx n\log n - n - (np\log(np) - np) - \left(n(1-p)\log\left(n(1-p)\right) - n(1-p)\right)$$

$$= n(-p\log p - (1-p)\log(1-p)) \equiv nS(p)$$

其中 $S(p) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$ 即为二进制的香农熵。

- 典型序列的数目在量级上等于 $C_n^{np} = 2^{nS(p)}$。因此，为了基本传递 n 个二进制字符所传递的信息，只需要 一个长度近似为$nS(p)$的二进制典型序列。这便是香农得到的结果。

经典系综

- 推广到一般场景，多个字符的情况。设有经典系综

$$X:\{x=(x_1,x_2,\dots\dots,x_n),p(x)\}$$

其中 $p(x)$ 是出现字符 x 的先验概率。在一个总长为 n 个字符的典型序列中，x 发生的概率为 $np(x)$ 次。按照之前的推导方式，可以得到典型序列的数目在量级上为

$$\frac{n!}{\prod_x (np(x))!}\approx 2^{nS(x)}$$

这里 $$S(X)\equiv\sum_x -p(x)\log p(x)$$ 即为系综的香农熵。

- 因此，一个有 n 位字符序列的信息可以压缩为 $nS(X)$位。或者从统计意义上讲，系综 X 中所用的每一个字符 x 载荷着 $S(X)$位的信息。

无噪声编码(1)

- 统计物理最概然分布之外的非平衡分布方式即对应于信息论中的非典型序列。下面我们证明对于信息序列的字符数目$n \to \infty$的情况，非典型序列出现的几率可以忽略。

- 考虑一般情况下n个字符的信息 $X\colon\{x = (x_1, x_2, \dots\dots, x_n), p(x)\}$

  以先验概率产生 $$P(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\dots\dots p(x_n)$$

  当$n \to \infty$时，$$\log P(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \log p(x_i) \xRightarrow{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} np(x_j)\log p(x_j)$$

  其中x_k是属于有限集合 $\{1, K\}$ 的所有可能字符种类。

- 对于单个典型序列 $$\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log p(x_i)\right\} = \sum_{j=1}^{k} p(x_j)\log p(x_j) = S(X)$$

无噪声编码(2)

- 对于足够长但是有限的序列 $\left|-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log p(x_i) - S(X)\right| < \delta$

  当$n\to\infty$时，典型序列出现的总概率无限趋近于1

$$\sum_{\text{全体典型序列}} P(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = 1 - \varepsilon(n)$$

  当信息序列的字符数目$n\to\infty$时，信息序列呈现的非典型序列的概率为0。对每一种典型序列指定一个编码方案即可包含所有信息，而不必对所有序列都进行编码，如此所带来的误差为

$$\varepsilon(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

- 如果想把信息序列中每位字符的信息压缩到$S(X)-\delta$，其中δ为任一给定小量，则当$n\to\infty$时也无法达到足够小的$\varepsilon(n)$，所以最佳编码只可能渐进地将每个字符压缩到$S(X)$位。此即香农无噪声编码定理。

量子信源(1)

- 我们可以将上面的概念推广到量子信源的场景。考虑一个信息源，制备n个字符的信息，其中每个字符都是从一个量子系综中选取

$$\text{经典情况：} X=\{x,p(x)\}$$
$$\text{量子情况：} X=\{\rho_x,p_x\}$$

对于量子情况。字符（量子态）出现的概率完全由密度矩阵所描述

$$\rho=\sum_x p_x\rho_x$$

- 考虑到

$$\rho\equiv\sum_x p_x|\Psi_x\rangle\langle\Psi_x|\Rightarrow f(\rho)=\sum_x f(p_x)|\Psi_x\rangle\langle\Psi_x|$$

因此引入冯诺依曼熵

$$S(X)\equiv-\sum_x tr(p_x\log p_x)$$

量子信源(2)

- 在信号状态都是纯态的情况，冯诺依曼熵$S(X)$就是量子信源不可压缩信息内容的量度，正如同香农熵是经典信源不可压缩信息内容的量度一样。
- 冯诺依曼熵量化了量子系综每个字符的量子信息内容，即将信息可靠编码所需要的每个字符的最少比特数；同时量化了系综的经典内容，即按比特计算的每人字符的最大信息数。
- 特别重要地，冯诺依曼熵可以量化一个双粒子纯态的纠缠，因此量子信息理论紧密关联于冯诺依曼熵的解释和使用。
- 但要注意，量子信息理论告诉我们，不可能理想地区分非正交的量子纯态，因此冯诺依曼熵和香农熵只是表面上的相似。考虑到非正交量子纯态间存在关联，如果我们把状态的随机组合看作经典系统时，其对应的香浓熵将大于冯诺依曼熵。

纠缠态

- 如果一个多粒子体系的波函数无法写作单个粒子波函数的乘积形式，这种量子态被称之为纠缠态。比如以EPRB实验中的一对光子的波函数为例（正关联）

$$\left|\Phi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_1, 0_2\right\rangle \pm \left|1_1, 1_2\right\rangle\right)$$

或者（负关联）

$$\left|\Psi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_1, 1_2\right\rangle \pm \left|1_1, 0_2\right\rangle\right)$$

- 纠缠态又被称为贝尔态。当我们测量一对正关联的纠缠粒子时，我们得到（0,0）和（1,1）的几率都是50%，但不会得到（0,1）或者（1,0）的测量结果。我们测量一对负关联的纠缠粒子时，我们得到（0,1）和（1,0）的几率都是50%，但不会得到（0,0）或者（1,1）的测量结果。

子系统

- 如果我们在关联体系中只关注其中的某一个粒子。例如在负关联波函数中的粒子1

$$\left|\Phi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_1, 0_2\right\rangle \pm \left|1_1, 1_2\right\rangle\right)$$

对粒子1的测量可以返回$|\leftrightarrow\rangle$和$|\updownarrow\rangle$的偏振态，但是明显的，粒子1并不是$|\leftrightarrow\rangle$和$|\updownarrow\rangle$偏振态的线性叠加。

- 这种情况我们称粒子1为二粒子体系的子系统，子系统可以用混态密度矩阵来描述

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- 问题：粒子2的密度矩阵是什么样的？怎样区别量子纠缠和经典几率？

量子信源(2)

- 如果我们将纠缠态作为编码压缩和解压缩的对象。我们假设对应的量子态由希尔伯特空间的密度矩阵 ρ 来描述。对量子信源做压缩率为 R 的编码压缩操作 C^n 和解压缩操作 D^n。

$$\boxed{\rho} \xrightarrow{C^n} \boxed{\rho'} \xrightarrow{D^n} \boxed{\rho''}$$

n 量子比特　　$nS(X)$ 量子比特　　n 量子比特

其中，C^n 为压缩操作，把 n 维希尔伯特空间的状态映射到 2^{nR} 维的压缩空间状态。D^n 为解压缩操作，把压缩后的空间状态恢复到原来的空间状态。

量子典型子空间定理

- 对应于经典系综的典型序列 $x=(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$，量子系综的典型序列定为
$$X=\{|\varphi_x\rangle,p_x\}\Rightarrow(|\varphi_1\rangle,|\varphi_2\rangle,\ldots\ldots|\varphi_n\rangle)$$
其张成的子空间上的投影算符记为
$$P(X)=\sum_i|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\otimes|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|\otimes\cdots\cdots\otimes|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

- 与经典系综对比可以得到
$$\mathrm{tr}\big(P(X)\rho^{\otimes n}\big)=\sum_i P(\varphi_1)P(\varphi_2)\cdots\cdots P(\varphi_n)=\sum_i P(\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots,\varphi_n)\geq 1-\varepsilon(n)$$

舒马赫无噪声信道编码定理

- 考虑一个由n个字符组成的长信息，每个字符均随机地从纯态系综中选出

$$X = \{|\varphi_x\rangle, p_x\}$$

并且 $|\varphi_x\rangle$ 之间不必相互正交，比如每个 $|\varphi_x\rangle$ 都是单光子的极化态。于是每个字符由密度矩阵描述

$$\rho = \sum_x p_x |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x|$$

而整条信息的密度矩阵为

$$\rho^n = \rho \otimes \rho \otimes \cdots \otimes \rho$$

- 如果 $R > S(X)$ ，则存在对该量子光源压缩率为R的可靠编码压缩方案；反之，如果$R < S(X)$，则压缩率为R的任何压缩方案都是不可靠的。此即量子信源的无噪声信道编码定理，一般称作舒马赫无噪声信道编码定理。

参考文献

- 量子信源和无噪声编码的内容主要参考：
  - 张永德，量子信息物理原理，科学出版社。第13-1小节的内容。
  - Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information (10th anniversary edition), Cambridge University Press (2016)。第11章。

第四章小结

- 量子力学认为：全同粒子具有不可区分性，因此双粒子哈密顿量具有交换不变性。
- 等概率原理：处于统计平衡状态的孤立系统，其所有可能出现的微观态出现的概率是相等的。
- 热力学概率最大的分子分布方式，即最概然分布，为粒子均匀地分布于它所占据的空间内，即系统熵处于极大值的状态。
- 经典比特的信息不确定度可以用香农熵来描述；量子比特的信息不确定度定义在量子态的纯度上，引入密度矩阵和冯诺依曼熵的概念。
- 在信号状态都是纯态的情况，冯诺依曼熵就是量子信源不可压缩信息内容的量度，正如同香农熵是经典信源不可压缩信息内容的量度一样。
- 如果 $R > S(X)$，则存在对该量子光源压缩率为R的可靠编码压缩方案；反之，如果$R < S(X)$，则压缩率为R的任何压缩方案都是不可靠的。此即量子信源的无噪声信道编码定理，一般称作舒马赫无噪声信道编码定理。