

第四章

离散时间信号与系统的频域分析

§ 4.0 引言

§ 4.1 离散时间LTI系统的特征函数

§ 4.2 离散时间傅里叶级数(DFS)

§ 4.3 离散时间傅里叶变换(DTFT)

§ 4.4 离散时间周期信号的傅里叶变换

§ 4.5 离散时间傅里叶变换的性质

§ 4.6 对偶性

§ 4.7 离散时间LTI系统的频域分析

本章讨论离散时间信号和系统的重要数学工具：
频域分析方法。

本章讨论的基本思路与前一章是一样的，即基于
离散时间复指数信号 z^n 是一切离散时间LTI系统的
特征函数这一事实。

§ 4.0 引言

§ 4.1 离散时间LTI系统的特征函数

§ 4.2 离散时间傅里叶级数(DFS)

§ 4.3 离散时间傅里叶变换(DTFT)

§ 4.4 离散时间周期信号的傅里叶变换

§ 4.5 离散时间傅里叶变换的性质

§ 4.6 对偶性

§ 4.7 离散时间LTI系统的频域分析

§ 4.1 离散时间LTI系统的特征函数



与连续时间LTI系统相似，离散时间复指数信号 z^n 是所有离散时间LTI系统的特征函数。

设离散时间LTI系统，其单位脉冲响应为 $h[n]$ ，系统的输入信号为 $x[n]=z^n$ ，其中 $z=re^{j\omega}$ 为一复数。可以通过卷积和求得系统的响应 $y[n]$

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} \\ &= z^n \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} = H(z) \cdot z^n \end{aligned}$$

§ 4.1 离散时间LTI系统的特征函数



式中 $H(z)$ 为 z^n 的特征值，仅与复数变量 z 有关，表征了系统对复指信号的响应特性

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

若一个离散时间LTI系统的输入可表示为复指数信号的线性组合：

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n$$

输出

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

即在系数域上，系统对输入信号的响应可描述为

$$\{a_k\} \rightarrow \{a_k H(z_k)\}$$

与连续时间LTI系统分析思路相同，我们将研究如何用复指数信号来表示一般信号。在本章中，仅考虑 $z=e^{j\omega}$ 情况下 $e^{j\omega n}$ 形式的复指数信号：离散时间的傅里叶变换。

§ 4.0 引言

§ 4.1 离散时间LTI系统的特征函数

§ 4.2 离散时间傅里叶级数(DFS)

§ 4.3 离散时间傅里叶变换(DTFT)

§ 4.4 离散时间周期信号的傅里叶变换

§ 4.5 离散时间傅里叶变换的性质

§ 4.6 对偶性

§ 4.7 离散时间LTI系统的频域分析

一个基波周期为 N 的周期信号 $x[n]$ 应满足：

$$x[n] = x[n \pm mN], \text{ 其中 } m \text{ 为任意整数。}$$

一个周期为 N 的成谐波关系的复指数信号集合为：

$$\phi_k[n] = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, k = 0, \pm 1, k \pm 2 \dots$$

$\phi_k[n]$ 满足以下性质：

- 周期性 $\phi_k[n] = \phi_k[n + N]$
- 有限独立性 $\phi_k[n] = \phi_{k+N}[n]$
- 正交性
$$\sum_{n=0}^{N-1} \phi_k[n] \phi_l^*[n] = \begin{cases} N, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

§ 4.2 离散时间傅里叶级数

用 $\phi_k[n]$ 的线性组合来表示基波周期为 N 的任一周期信号：
离散周期信号的傅里叶级数表示。

由于 $\phi_k[n]$ 仅在 k 的 N 个相继值的区间上的信号是独立的， $\phi_k[n]$ 的线性组合形式的离散时间傅里叶级数就有如下形式：

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N}) \cdot n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

离散时间的傅里叶级数是一个有限项的级数。

§ 4.2 离散时间傅里叶级数

系数 a_k 的确定:

在上式两边各乘以 $\phi_l^*[n]$ ，然后对变量 n 在相继的 N 项上求和，得：

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \phi_l^*[n] = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] \phi_l^*[n]$$

变换上式右侧求和次序，有

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \phi_l^*[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \left(\sum_{n=\langle N \rangle} \phi_k[n] \phi_l^*[n] \right)$$

又已知 $\phi_k[n]$ 具有正交性

$$\sum_{n=0}^{N-1} \phi_k[n] \phi_l^*[n] = \begin{cases} N, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

§ 4.2 离散时间傅里叶级数

可得

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \phi_l^*[n] = a_l N$$

从而有

$$a_l = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \phi_l^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jl(\frac{2\pi}{N})n}$$

或记为

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \phi_k^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

§ 4.2 离散时间傅里叶级数

离散时间信号及其傅里叶级数：

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k$$

其中：

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

由于上面两个方程都是有限项的级数，因此只要离散时间信号 $x[n]$ 本身的取值是有界的，则其傅里叶级数一定收敛。即离散傅里叶级数不存在收敛问题，同时也不存在吉布斯现象。

§ 4.2 离散时间傅里叶级数

考查 a_{k+N} 有

$$a_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j(k+N)(\frac{2\pi}{N})n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = a_k$$

这表明离散时间傅里叶级数的系数 a_k 是以 N 为周期的。

用极坐标表示 a_k 为

$$a_k = |a_k| e^{j\theta_k}$$

其中 $|a_k|$ 称为幅度频谱系数， θ_k 称为相位频谱系数。

§ 4.2 离散时间傅里叶级数

考查离散时间傅里叶级数，有

$$\left\{ \begin{array}{l} x[0] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \\ x[1] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot k} \\ x[2] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j2 \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k} \\ \vdots \\ x[N-1] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(N-1) \frac{2\pi}{N} \cdot k} \end{array} \right.$$

对应于 N 个未知系数 a_k 的线性方程组。

不难证明，以上 N 个方程是线性独立的，因此可以利用已知的 $x[n]$ 值求得系数 a_k 的唯一解。

即对任何有界的离散时间周期信号，其离散时间傅里叶系数 a_k 总是存在且惟一的。

【例4.1】求信号 $x_2[n]=\cos\omega_0 n$ 和 $x_1[n]=\sin\omega_0 n$ 的傅里叶系数

已知仅当 $2\pi/\omega_0$ 为有理数情况下，两信号是周期的。

因此，当 $2\pi/\omega_0$ 是一个整数 N 的情况下，即 $\omega_0=2\pi/N$ 时，两信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是周期的，其基波周期为 N 。

用欧拉公式，将两信号展为两个复指数信号之和，即：

$$x_1[n] = \frac{1}{2j} e^{j(\frac{2\pi}{N})n} - \frac{1}{2j} e^{-j(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$x_2[n] = \frac{1}{2} e^{j(\frac{2\pi}{N})n} + \frac{1}{2} e^{-j(\frac{2\pi}{N})n}$$

可直接得到一周内系数为

$$x_1[n]: a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_k = 0, \quad k \neq \pm 1$$

$$x_2[n]: a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{-1} = \frac{1}{2}, \quad a_k = 0, \quad k \neq \pm 1$$

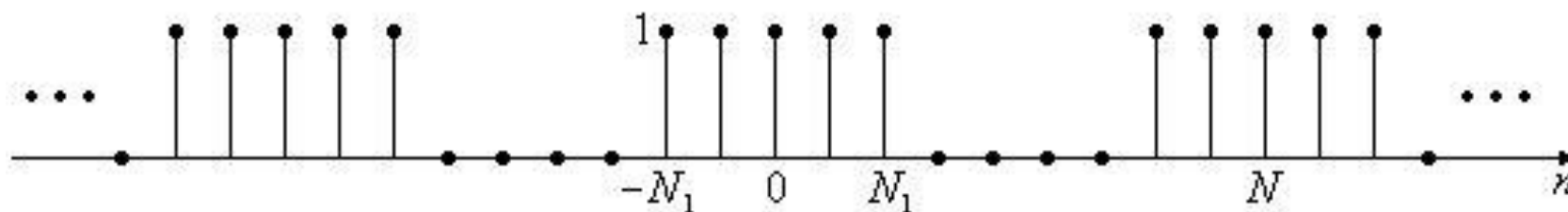
所以，有：

$$x_1[n]: a_{rN+1} = \frac{1}{2j}, \quad a_{rN-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_{rN+k} = 0, \quad k \neq \pm 1$$

$$x_2[n]: a_{rN+1} = \frac{1}{2}, \quad a_{rN-1} = \frac{1}{2}, \quad a_{rN+k} = 0, \quad k \neq \pm 1$$

式中 r 为任意整数。

【例4.2】求离散时间周期方波的傅里叶级数，基波周期为 N 。



由于在 $-N_1 \leq n \leq N_1$ 内， $x[n]=1$ ，

所以

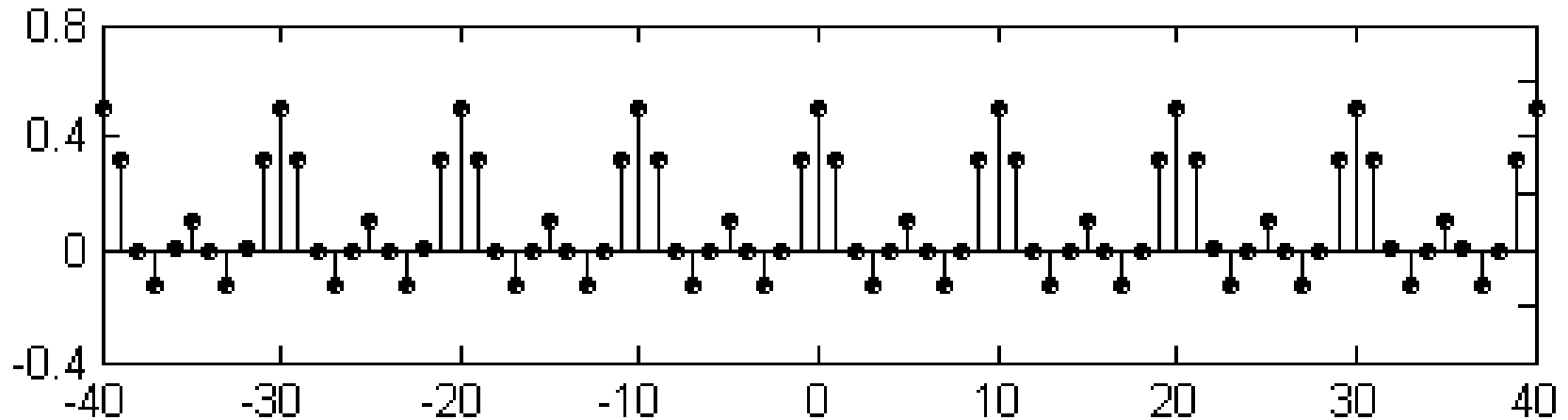
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = \frac{1}{N} \frac{e^{j(\frac{2\pi}{N})kN_1} - e^{-j(\frac{2\pi}{N})(N_1+1)k}}{1 - e^{-j(\frac{2\pi}{N})k}}$$

化简得

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin[\frac{2\pi}{N}(N_1 + \frac{1}{2})k]}{\sin(\pi k / N)} = \frac{1}{N} \frac{\sin[(2N_1 + 1)\omega / 2]}{\sin \omega / 2} \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

当 $k=0, \pm N, \pm 2N, \dots$ 时, $a_k = (2N_1 + 1)/N$

$N_1=2$



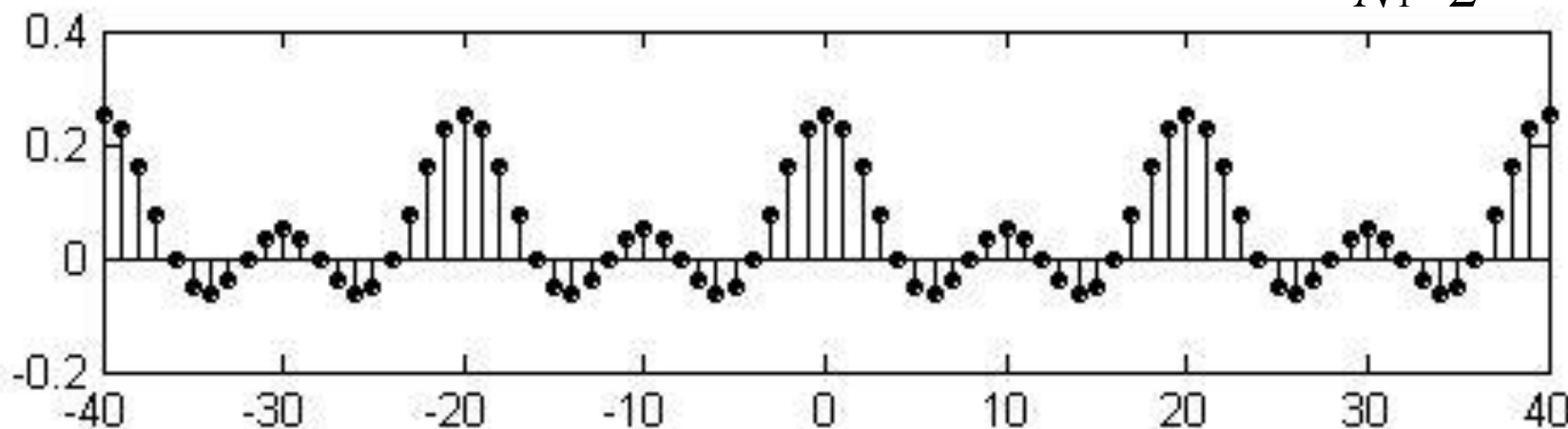
(a) $N=10$

化简得

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin[\frac{2\pi}{N}(N_1 + \frac{1}{2})k]}{\sin(\pi k / N)} = \frac{1}{N} \frac{\sin[(2N_1 + 1)\omega / 2]}{\sin \omega / 2} \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

当 $k=0, \pm N, \pm 2N, \dots$ 时, $a_k = (2N_1 + 1)/N$

$N_1=2$



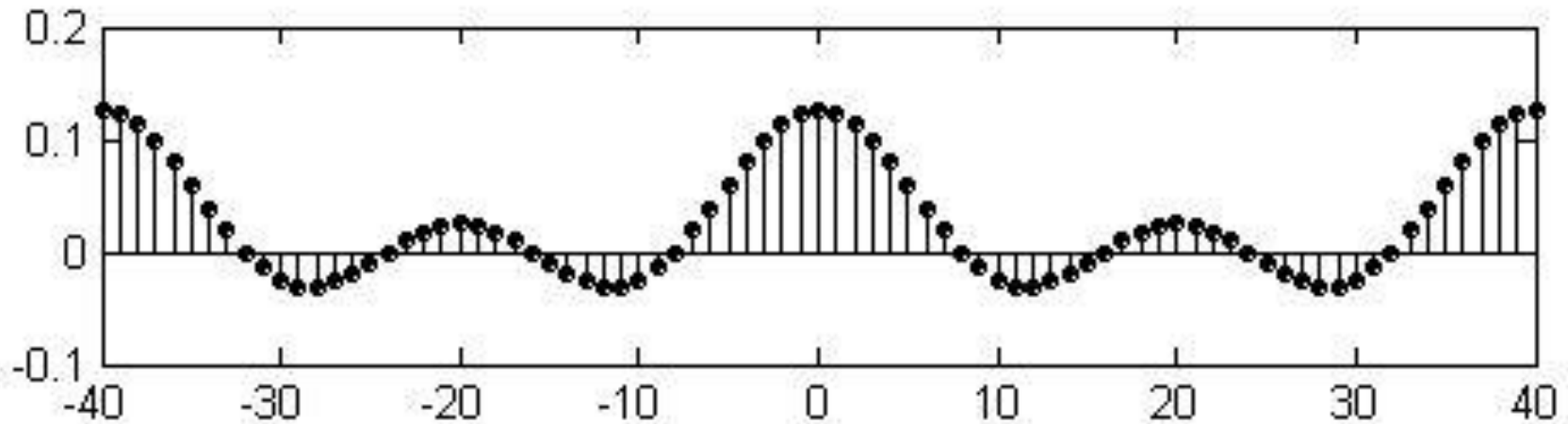
(b) $N=20$

化简得

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin[\frac{2\pi}{N}(N_1 + \frac{1}{2})k]}{\sin(\pi k / N)} = \frac{1}{N} \frac{\sin[(2N_1 + 1)\omega / 2]}{\sin \omega / 2} \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

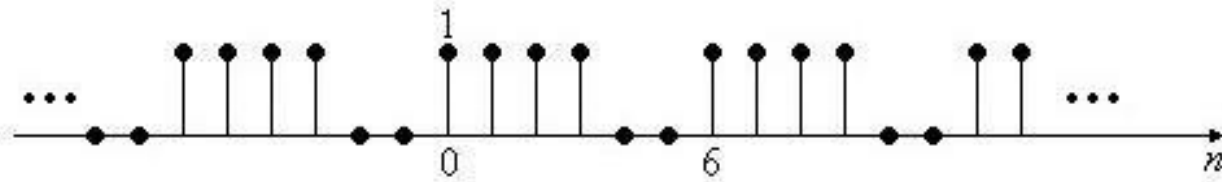
当 $k=0, \pm N, \pm 2N, \dots$ 时, $a_k = (2N_1 + 1)/N$

$N_1=2$



(c) $N=40$

【例4.18】序列 $x[n]$ 如图所示，试求其离散傅里叶系数 a_k



```
N = 6;                % 周期
xn = [1, 1, 1, 1, 0, 0]; % 信号
w = zeros(N,N);
for n = 0 : N-1
    for k = 0 : N-1
        w(n+1,k+1) = exp(-1i * k * n * 2 * pi / N);
    end
end
a = xn * w / N;
```


应该注意的是，在Matlab中，数组的第一维的标号是1，因此上述代码中的 $a(1)$ 实际上是离散傅里叶系数中的 a_0 ，而 $a(2)$ 是 a_1 ，依此类推。结果如下：

$$\begin{array}{lll} a_0 = 0.667, & a_1 = -0.2887i, & a_2 = 0.1667 \\ a_3 = 0, & a_4 = 0.1667, & a_5 = 0.2887i \end{array}$$

§ 4.0 引言

§ 4.1 离散时间LTI系统的特征函数

§ 4.2 离散时间傅里叶级数(DFS)

§ 4.3 离散时间傅里叶变换(DTFT)

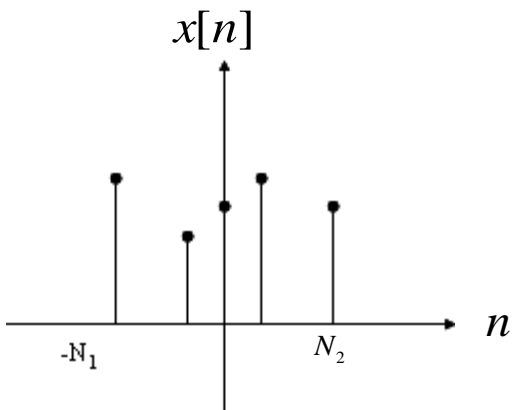
§ 4.4 离散时间周期信号的傅里叶变换

§ 4.5 离散时间傅里叶变换的性质

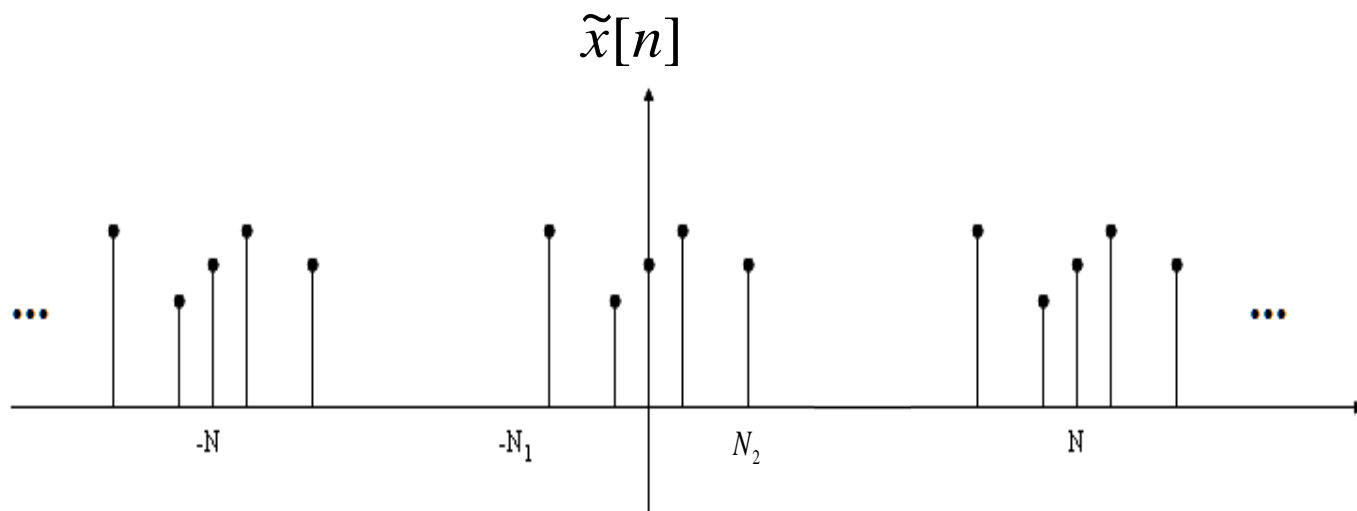
§ 4.6 对偶性

§ 4.7 离散时间LTI系统的频域分析

§ 4.3.1 离散时间傅里叶变换的导出



有限时长信号 $x[n]$



由 $x[n]$ 周期延拓得到的周期信号 $\tilde{x}[n]$

§ 4.3.1 离散时间傅里叶变换的导出



考虑某一离散时间信号 $x[n]$ ，它具有有限持续期：
 $-N_1 \leq n \leq N_2$ 以外， $x[n] = 0$ 。

周期延拓构造一个周期信号 $\tilde{x}[n]$ ，
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时，有：
$$x[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}[n]$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

§ 4.3.1 离散时间傅里叶变换的导出



定义一函数：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

由于 $e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n}$

所以该函数是周期信号，基波周期为 2π 。

从而有

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) = \frac{1}{N} X(e^{jk\frac{2\pi}{N}})$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

§ 4.3.1 离散时间傅里叶变换的导出



注意到下列关系： $\omega_0 = 2\pi / N$ ，或 $\frac{1}{N} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

$$\text{故 } \tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0$$

因为 $N \rightarrow \infty$ 时， $\omega_0 \rightarrow 0$ ，且 $x[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}[n] = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \tilde{x}[n]$

可得

$$\begin{aligned} x[n] &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \cdot d\omega \end{aligned}$$

§ 4.3.1 离散时间傅里叶变换的导出



综合上述，就得到离散时间傅里叶变换的两个公式

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \cdot d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

符号表示

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

频谱 $X(e^{j\omega})$ 表示为极坐标形式：

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

其中， $|X(e^{j\omega})|$ 称为幅度频谱， $\theta(\omega)$ 称为相位频谱。

§ 4.3.1 离散时间傅里叶变换的导出



离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶变换相比具有许多类似之处，而两者的主要区别在于：

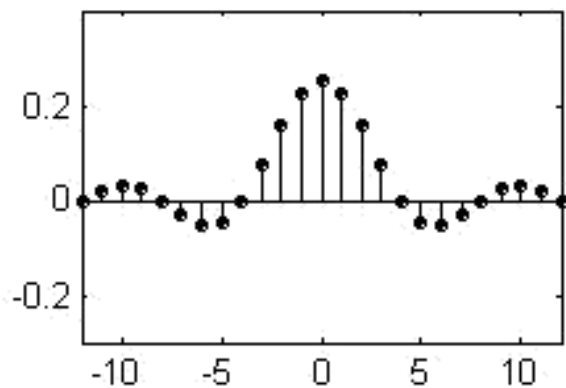
- (1) 离散时间信号的频谱 $X(e^{j\omega})$ 是周期为 2π 的周期函数；
- (2) 离散时间信号傅里叶表达式中积分区间的长度为 2π 。

注意：在角频率上相差 2π 的复指数信号 $e^{j\omega n}$ 是完全一样的。

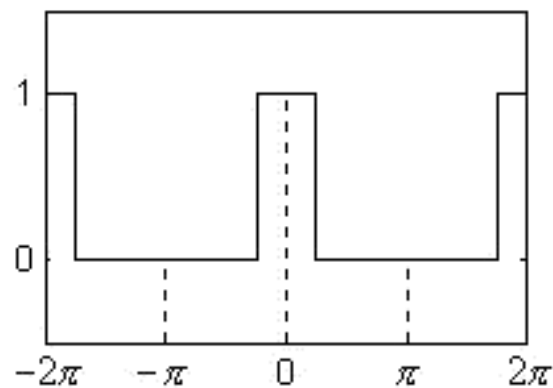
位于 π 的偶数倍附近的频率的复指数信号属于低频信号，且 π 偶数倍所对应的复指数信号为最低频信号（常数信号）；

位于 π 的奇数倍附近的频率的复指数信号属于高频信号，且 π 奇数倍所对应的复指数信号为最高频信号。

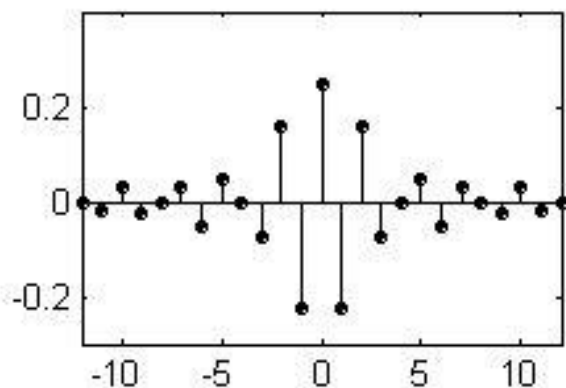
§ 4.3.1 离散时间傅里叶变换的导出



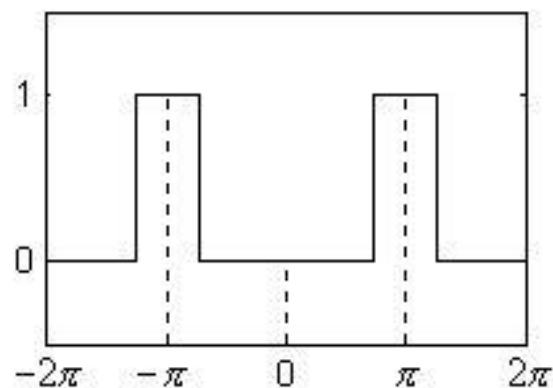
(a) 信号 $x_1[n] = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$



(b) $x_1[n]$ 的频谱



(c) 信号 $x_2[n] = (-1)^n x_1[n]$



(d) $x_2[n]$ 的频谱

§ 4.3.2 离散时间傅里叶变换的收敛



如果 $x[n]$ 绝对可和, 即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$

或者, 如果 $x[n]$ 的能量有限, 即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$

那么 $x[n]$ 的傅里叶变换就一定存在。

绝对可和的信号一定平方可和; 但平方可和的信号不一定绝对可和。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \leq \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \right]^2$$

例如信号 $x[n] = \sin \omega_0 n / (\pi n)$ 能量有限, 却并不绝对可和。

§ 4.3.3 典型离散非周期信号傅里叶变换对



单位脉冲信号 $\delta[n]$

其傅里叶变换对为

$$\delta[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1$$

表明单位脉冲信号包含了所有频率的分量，且这些频率分量具有相同的幅度与相位

因此，离散时间LTI系统对于 $\delta[n]$ 的响应，即单位脉冲响应 $h[n]$ ，反映了系统对于所有频率信号的响应特征，从而反应了系统本身的特性，因此， $h[n]$ 能够完全表征LTI系统。

§ 4.3.3 典型离散非周期信号傅里叶变换对



单边指数衰减信号

$$x[n] = a^n u[n], |a| < 1$$

其频谱为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

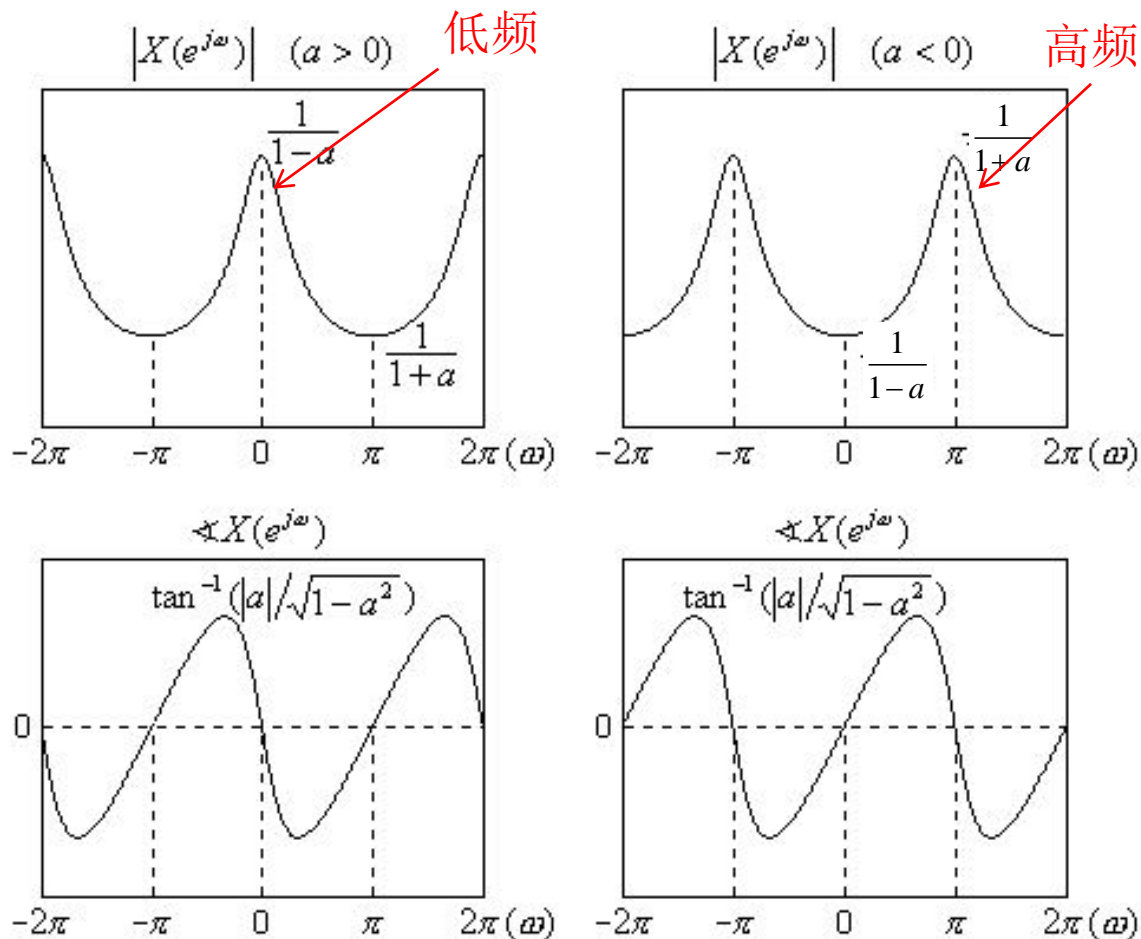


图4-5 单边指数衰减信号的幅度谱与相位谱

§ 4.3.3 典型离散非周期信号傅里叶变换对



双边指数衰减信号 $x[n] = a^{|n|}$, $|a| < 1$

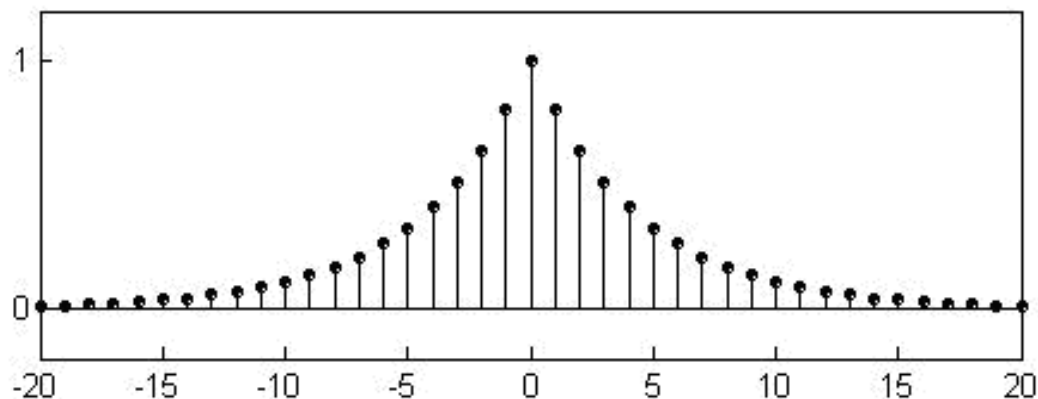
$x[n]$ 可以分解为 $x[n] = a^{-n}u[-n-1] + a^n u[n]$

从而可以求得其傅里叶变换为

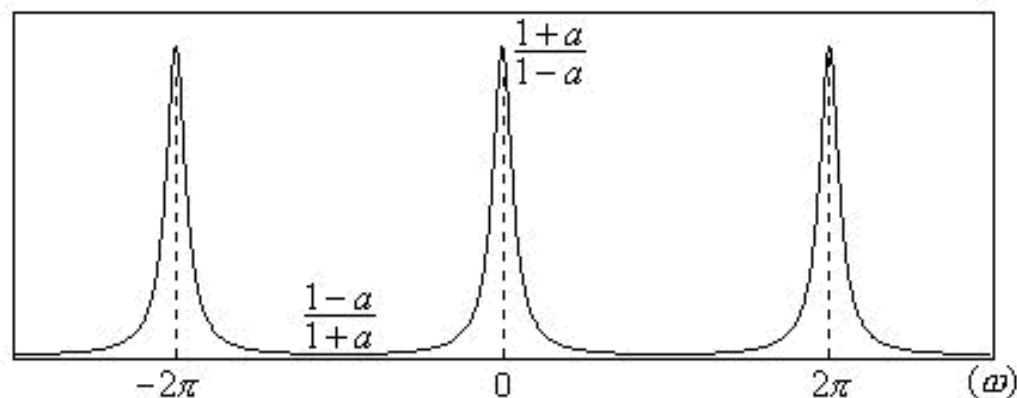
$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^n \\ &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2} \end{aligned}$$

由于 $x[n]$ 实偶对称, 因此 $X(e^{j\omega})$ 是关于频率 ω 的实偶函数。

§ 4.3.3 典型离散非周期信号傅里叶变换对



(a) $x[n] = a^{|n|}$



(b) $X(e^{j\omega})$ ($0 < a < 1$)

§ 4.3.3 典型离散非周期信号傅里叶变换对



矩形脉冲信号

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

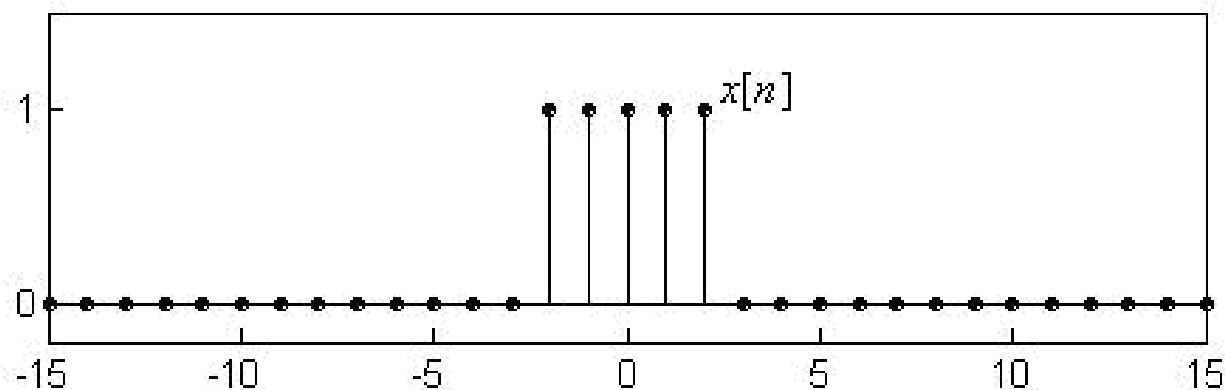
其离散时间傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin(N_1 + \frac{1}{2})\omega}{\sin(\omega/2)}$$

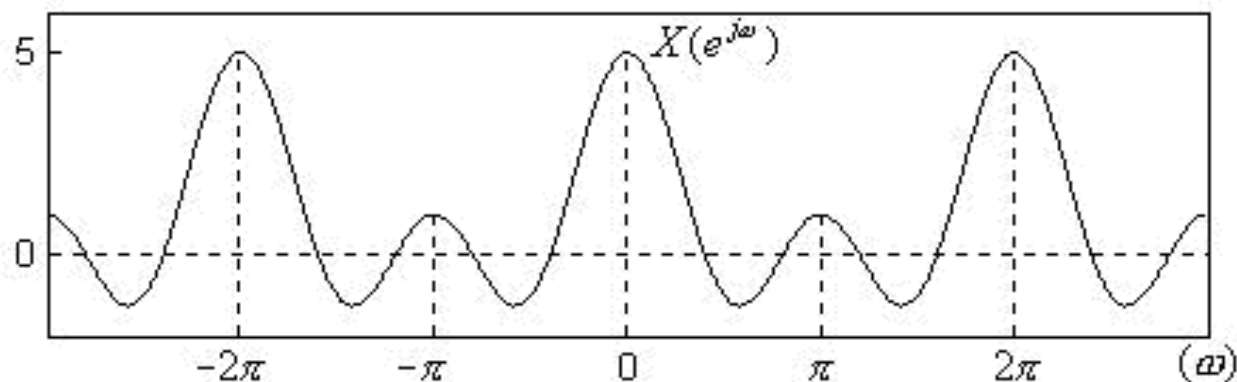
如一个离散时间周期信号（周期为 N ），某一个周期上信号的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ ，则其傅里叶级数系数 a_k 为该频谱的抽样，即

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N} \cdot k}$$

§ 4.3.3 典型离散非周期信号傅里叶变换对



(a) $N_1 = 2$ 的矩形脉冲序列



(b) $N_1 = 2$ 的矩形脉冲序列的频谱

§ 4.3.3 典型离散非周期信号傅里叶变换对



常数信号

考察频谱为以 2π 为周期的冲激串 $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$

可以求出其所对应的原信号为 $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}$

即常数信号 $x[n]=1/(2\pi)$ 的离散时间傅里叶变换为

$$\frac{1}{2\pi} \xleftrightarrow{F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$$

由此可得，常数信号 $x[n]=1$ 的离散时间傅里叶变换为

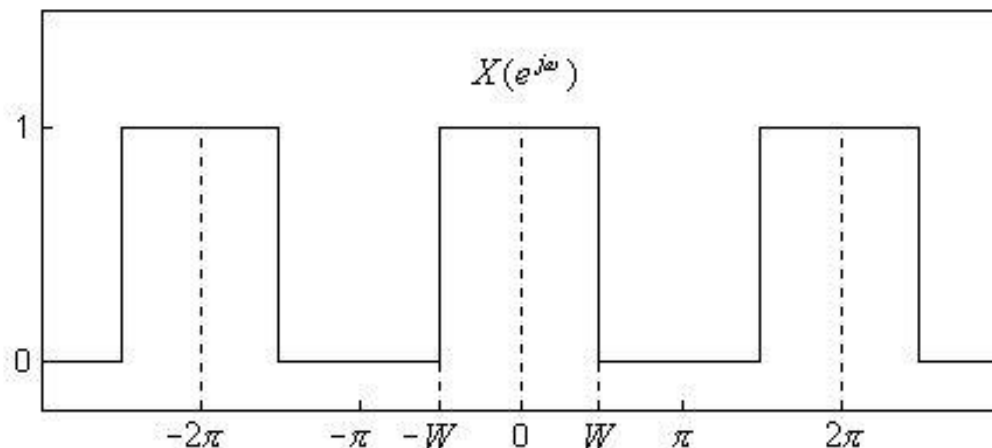
$$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$$

§ 4.3.3 典型离散非周期信号傅里叶变换对



矩形窗函数频谱

考察如图所示频谱的傅里叶反变换



可以求得该频谱所对应的原信号为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

§ 4.3.3 典型离散非周期信号傅里叶变换对



根据离散时间傅里叶变换的定义，其 $X(e^{j\omega})$ 还可以表示为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin Wn}{\pi n} e^{j\omega n}$$

因为 $X(e^{j\omega})$ 的周期为 2π ，其基波角频率 $\omega_0 = 2\pi / 2\pi = 1$ ，上式可以改写为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin Wn}{\pi n} e^{jn\omega_0\omega}$$

即为周期函数 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶级数形式。

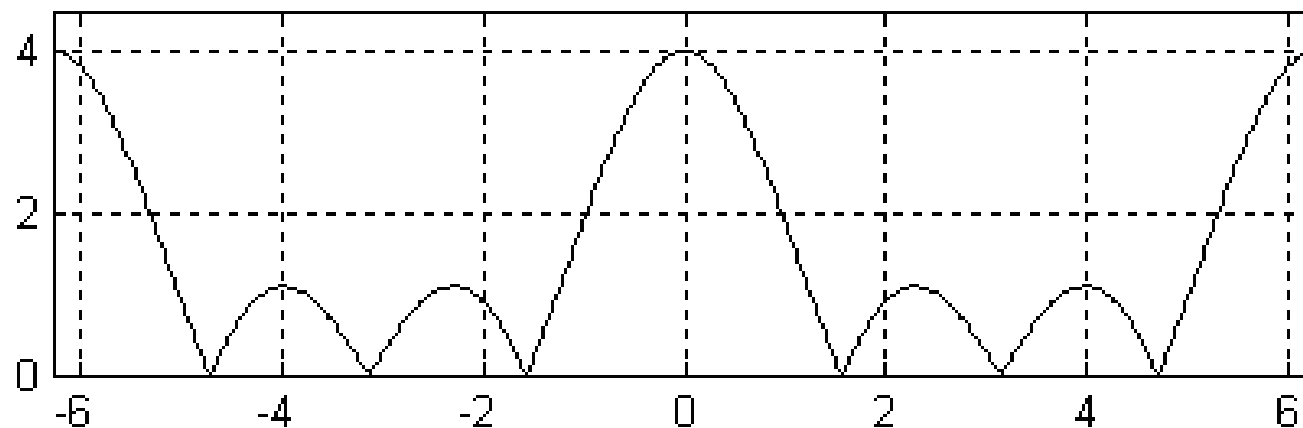
【例4.19】 计算并显示4点矩形序列 $x[n]=u[n]-u[n-4]$ 的幅度谱与相位谱。

$$\text{解: } x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n}$$

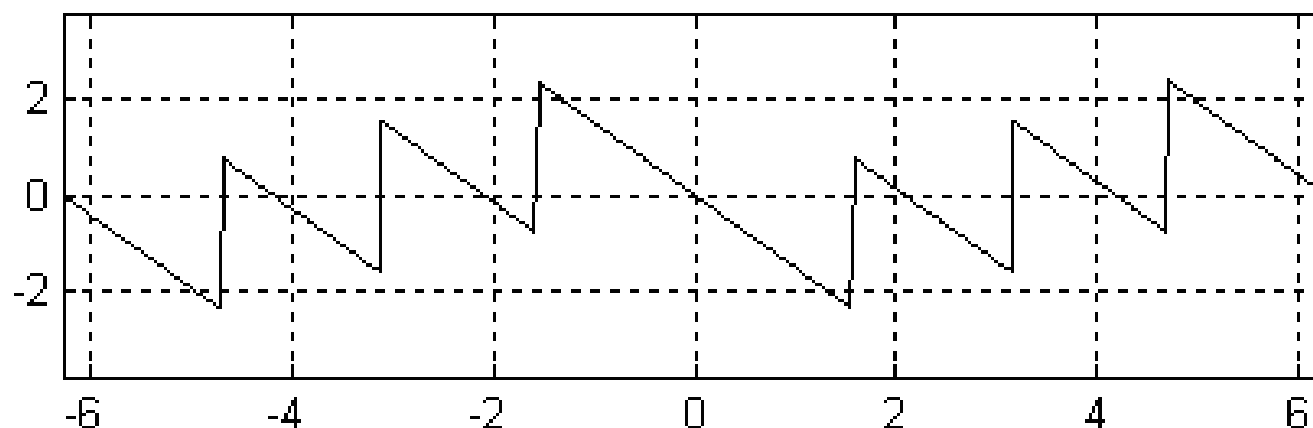
% 计算并显示矩形序列频谱的Matlab代码

```
xn = [1,1,1,1];           %产生矩形序列
Omiga = -2*pi:pi/128:2*pi; %设置频率采样点
for k1 = 0:1:3
    for k2 = 0:1:512
        w(k1+1,k2+1) = exp(-i*k1*Omiga(k2+1));
    end
end
end
```

```
spectrum = xn*w; %计算频谱
subplot(2,1,1);plot(Omiga,abs(spectrum),'k'); %显示幅度谱
grid on;axis([-2*pi,2*pi,0,4.5]);
subplot(2,1,2);plot(Omiga,angle(spectrum),'k'); %显示相位谱
grid on;axis([-2*pi,2*pi,-1.2*pi,1.2*pi]);
```



(a) $x[n]$ 的幅度谱



(b) $x[n]$ 的相位谱

§ 4.0 引言

§ 4.1 离散时间LTI系统的特征函数

§ 4.2 离散时间傅里叶级数(DFS)

§ 4.3 离散时间傅里叶变换(DTFT)

§ 4.4 离散时间周期信号的傅里叶变换

§ 4.5 离散时间傅里叶变换的性质

§ 4.6 对偶性

§ 4.7 离散时间LTI系统的频域分析

§ 4.4 离散时间周期信号的傅里叶变换

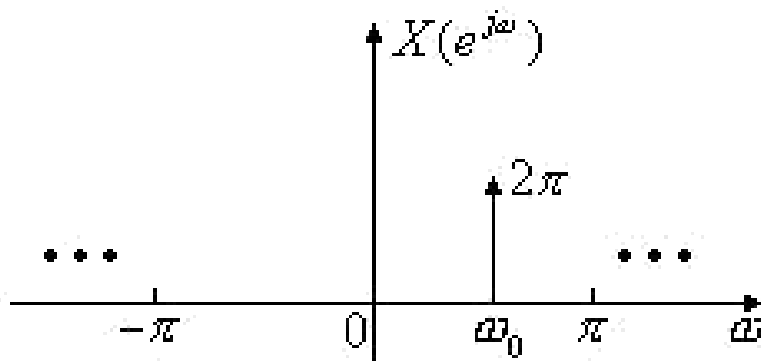


图4.9 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ 的频谱, $\omega_0 < \pi$

考查频谱:
$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

因此
$$x[n] = \int_0^{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} \cdot d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

$$e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

§ 4.4 离散时间周期信号的傅里叶变换



离散时间周期信号 $x[n]$ ，周期为 N ：

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 \cdot n}, \quad \text{其中 } \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

周期序列 $x[n]$ 的傅里叶变换

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \\ &= 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}(k + l \cdot N)), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \end{aligned}$$

k 的取值范围选为 $[0, N-1]$ ，则整数 $(k + l \cdot N)$ 的取值范围为整个整数域 $[-\infty, +\infty]$ 。

§ 4.4 离散时间周期信号的傅里叶变换



因此 $(k + l \cdot N)$ 将作为一个整数变量，结合 a_k 的周期为 N ，上式可化简为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$

周期序列 $x[n]$ 的傅里叶变换：

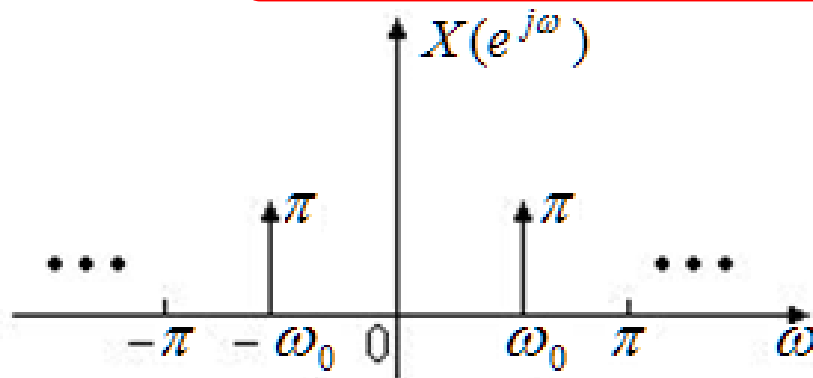
$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N}) \cdot n} \xleftrightarrow{F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} \cdot k)$$

【例4.3】考虑信号 $x[n] = \cos \omega_0 n$, $-\pi < \omega_0 < \pi$

由于 $x[n] = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi \cdot l)$$

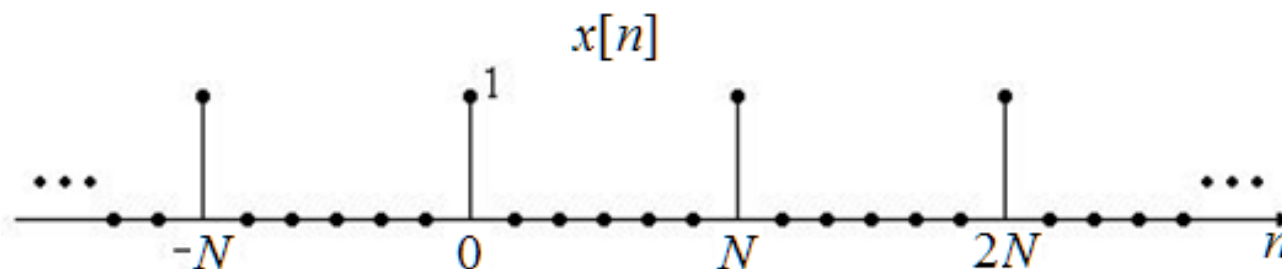
可等价表示为 $X(e^{j\omega}) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$ $-\pi < \omega < \pi$



$x[n] = \cos \omega_0 n$ 的离散时间傅里叶变换

【例4.4】求如下离散时间冲激串的傅里叶变换。

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$$

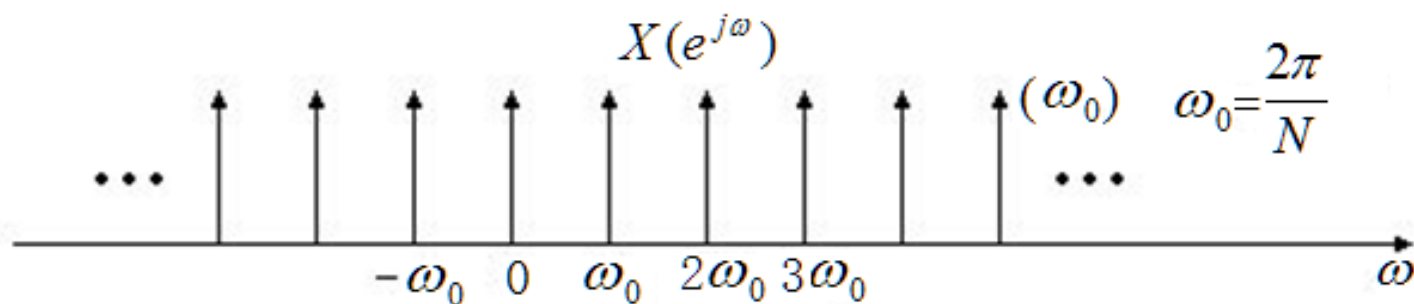


离散时间冲激串信号是一个周期为 N 的周期序列，将其表示为离散时间傅里叶级数时，可求得其傅里叶级数系数为：

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N}) \cdot n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N}) \cdot n} = \frac{1}{N}$$

因此，可求出其离散时间傅里叶变换为：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$



§ 4.0 引言

§ 4.1 离散时间LTI系统的特征函数

§ 4.2 离散时间傅里叶级数(DFS)

§ 4.3 离散时间傅里叶变换(DTFT)

§ 4.4 离散时间周期信号的傅里叶变换

§ 4.5 离散时间傅里叶变换的性质

§ 4.6 对偶性

§ 4.7 离散时间LTI系统的频域分析

§ 4.5.1 离散时间傅里叶变换的周期性



离散时间信号 $x[n]$ 的傅里叶变换或频谱 $X(e^{j\omega})$ 是关于角频率变量 ω 的周期函数，一般情况下周期为 2π 。

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

这与连续时间傅里叶变换有着重要区别，一般来说，连续时间傅里叶变换是非周期的。

§ 4.5.2 线性性质



若

$$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$$

$$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$$

则

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{F} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

该性质也适用于离散傅里叶级数。

§ 4.5.3 时域平移与频域平移性质



若 $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

则 $x[n - n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

和 $e^{j\omega_0 n} \cdot x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$

该性质也适用于傅里叶级数。

因为 $\cos \omega_0 n = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}$

所以调制信号 $x[n] \cdot \cos \omega_0 n$ 的频谱可表示为：

$$x[n] \cos \omega_0 n \xleftrightarrow{F} \frac{X(e^{j(\omega - \omega_0)}) + X(e^{j(\omega + \omega_0)})}{2}$$

§ 4.5.4 共轭与共轭对称性



若 $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

则 $x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$

若 $x[n]$ 是实值序列，即 $x[n] = x^*[n]$

则 $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

$X(e^{j\omega})$ 的实部 $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ 是 ω 的偶函数，

$X(e^{j\omega})$ 的虚部 $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$ 是 ω 的奇函数；

$X(e^{j\omega})$ 的幅度谱是 ω 的偶函数，相位谱是奇函数。

§ 4.5.4 共轭与共轭对称性



如果把 $x[n]$ 分解成偶部 $x_e[n]$ 与奇部 $x_o[n]$ ，如 $x[n]$ 为实值函数，则进一步可得到：

$$x_e[n] \xleftrightarrow{F} \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x_o[n] \xleftrightarrow{F} j \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

该性质也适用于傅里叶级数情况，即

如果 $x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$

则 $x^*[n] \xleftrightarrow{FS} a_{-k}^* = a_{N-k}^* = a_{-(N+k)}^*$

当 $x[n]$ 为实值，傅里叶级数的系数同样存在共轭对称性。

§ 4.5.5 时域差分与累加



若 $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

则有 $x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{F} (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$

以及 $y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$

求解步骤:

若 $(1 - e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$

则 $Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$

该性质也可用于傅里叶级数。

【例4.5】利用累加性质来导出单位阶跃 $x[n]=u[n]$ 的傅里叶变换。

已知 $\delta[n] \xleftrightarrow{F} 1$

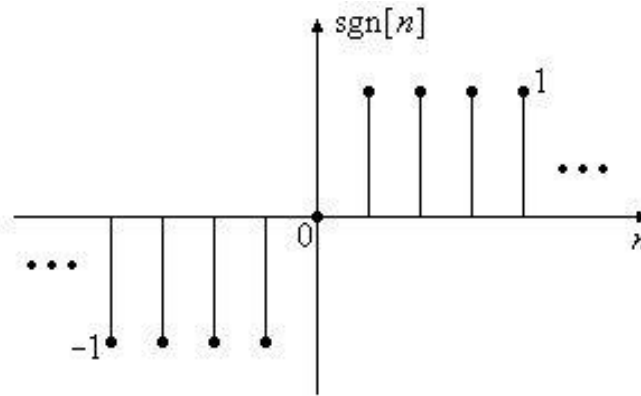
和 $u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$

利用累加性质，可得

$$u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

【例4.6】求离散时间符号序列的离散时间傅里叶变换。

$$\text{sgn}[n] = \begin{cases} 1, n > 0 \\ 0, n = 0 \\ -1, n < 0 \end{cases}$$



将单位阶跃序列 $u[n]$ 分解为偶部和奇部，

即： $u[n] = u_e[n] + u_o[n]$

$$u_e[n] = \frac{u[n] + u[-n]}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[n]$$

$$u_o[n] = \frac{u[n] - u[-n]}{2} = \frac{1}{2}\text{sgn}[n]$$

$$u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) - j \frac{\sin \omega}{2(1 - \cos \omega)}$$

上式的虚部为 $-j \frac{\sin \omega}{2(1 - \cos \omega)}$

因此符号序列 $\text{sgn}[n]$ 的傅里叶变换对为

$$\text{sgn}[n] \xleftrightarrow{F} \frac{-j \sin \omega}{1 - \cos \omega}$$

同样，有：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \delta[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

因为：

$$\delta[n] \xleftrightarrow{F} 1$$

得：

$$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

定义内插

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{当 } n \text{ 为 } k \text{ 的整倍数} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 不为 } k \text{ 的整倍数} \end{cases}$$

$x_{(k)}[n]$ 是在 $x[n]$ 的每相邻两点信号间插 $(k-1)$ 个零值而得到的。

$x_{(k)}[n]$ 的傅里叶变换:

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[rk]e^{-j\omega rk}$$

上式利用了 $x_{(k)}[n]$ 的定义式: 除非 n 是 k 的某一倍数, 也即 $n=rk$, 否则 $x_{(k)}[n]$ 都等于0。

§ 4.5.6 时域扩展



由于 $x_{(k)}[rk] = x[r]$ ，上式可变成：

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]e^{-j(k\omega) \cdot r} = X(e^{jk\omega})$$

也可写为： $x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jk\omega})$

作为一个特例，当 $k = -1$ 时，有

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$$

时域和频域的相反关系：当 k 增加时， $x_{(k)}[n]$ 在时域上拉开，而其变换则在频域上压缩。

该性质也适用于傅里叶级数的情况。

%离散时间信号的插零对频谱的影响

```
n = -20:20;
```

```
x1 = [zeros(1,18),1,1,1,1,1,zeros(1,18)];
```

```
x2 = [zeros(1,16),1,0,1,0,1,0,10,1,zeros(1,16)];
```

```
x3 = [zeros(1,14),1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,zeros(1,14)];
```

```
w = -2*pi:0.01:2*pi;
```

```
xw1 = exp(j*2*w)+exp(j*w)+1+exp(-j*w)+exp(-j*2*w);
```

```
xw2 = exp(j*4*w)+exp(j*2*w)+1+ exp(-j*2*w)+exp(-j*4*w);
```

```
xw3 = exp(j*6*w)+exp(j*3*w)+1+ exp(-j*3*w)+exp(-j*6*w);
```

```
subplot(3,2,1);stem(n,x1,'filled','k');axis([-20,20,-0.5,1.5]);
```

```
subplot(3,2,3);stem(n,x2,'filled','k');axis([-20,20,-0.5,1.5]);
```

```
subplot(3,2,5);stem(n,x3,'filled','k');axis([-20,20,-0.5,1.5]);
```

```
subplot(3,2,2);plot(w,real(xw1),'k');axis([-2*pi,2*pi,-2,6]);
```

```
subplot(3,2,4);plot(w,real(xw2),'k');axis([-2*pi,2*pi,-2,6]);
```

```
subplot(3,2,6);plot(w,real(xw3),'k');axis([-2*pi,2*pi,-2,6]);
```

%设定信号x[n]

%插零产生信号x[n/2]

%插零产生信号x[n/3]

%设定频率抽样点

%计算x[n]的频谱

%计算x[n/2]的频谱

%计算x[n/3]的频谱

%显示信号x[n]

%显示信号x[n/2]

%显示信号x[n/3]

%显示信号x[n]的频谱

%显示信号x[n/2]的频谱

%显示信号x[n/3]的频谱

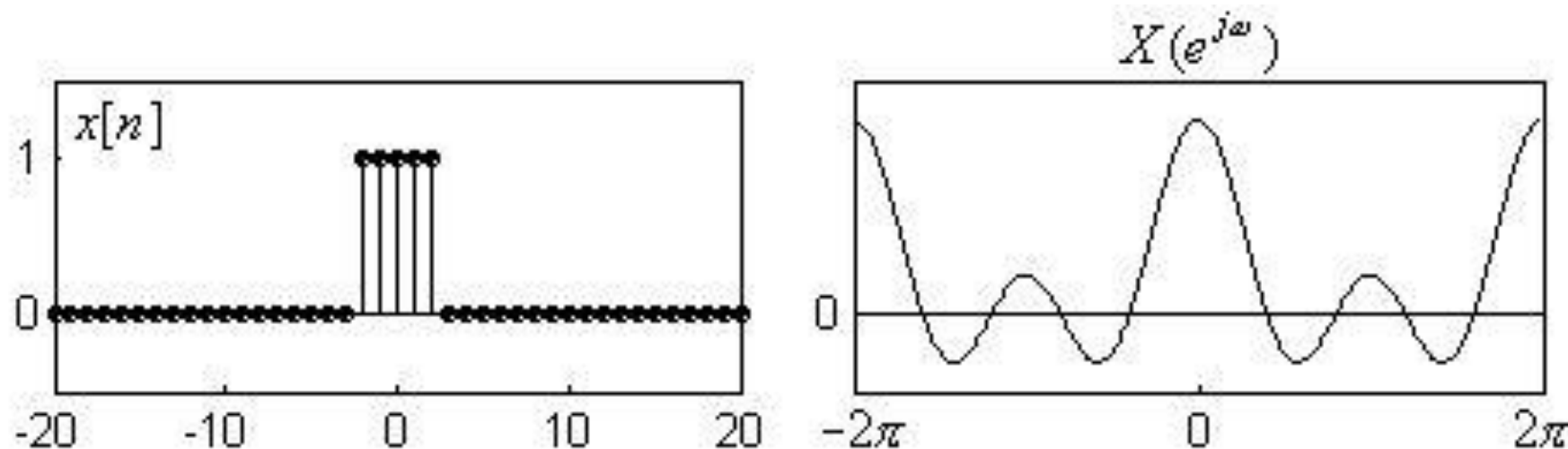


图4-13 离散时间情况下时域与频域的相反关系：当 k 增加时， $x_{(k)}[n]$ 在时域上拉开，而其傅里叶变换则在频域上压缩

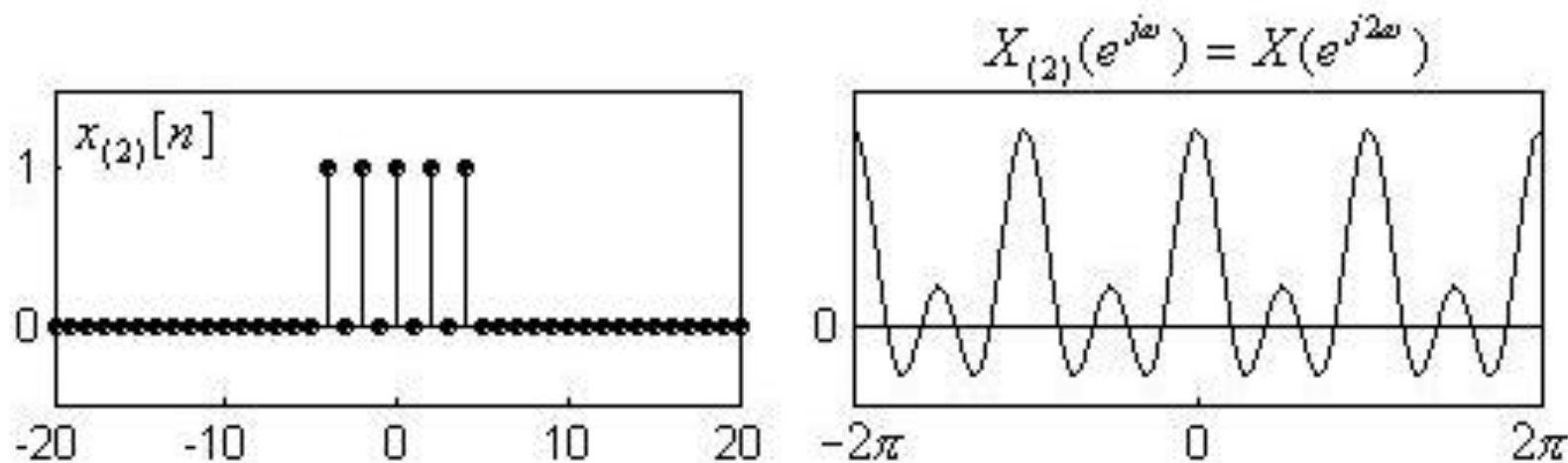


图4-13 离散时间情况下时域与频域的相反关系：当 k 增加时， $x_{(k)}[n]$ 在时域上拉开，而其傅里叶变换则在频域上压缩

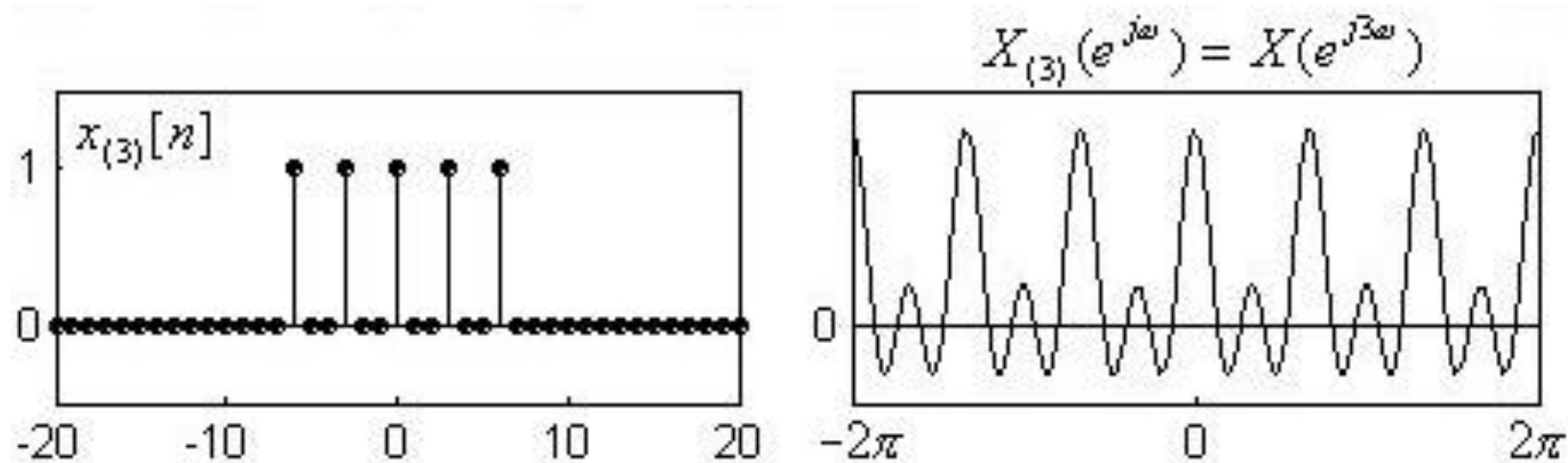


图4-13 离散时间情况下时域与频域的相反关系：当 k 增加时， $x_{(k)}[n]$ 在时域上拉开，而其傅里叶变换则在频域上压缩

若某一序列 $x[n]$ 的傅里叶变换对为：

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

上式两边对 ω 求微分，有：

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n}$$

$$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]e^{-j\omega n}$$

表示为 $nx[n]$ 的傅里叶变换，即： $nx[n] \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

例4.7

【例4.7】求下式的傅里叶变换。

$$x[n] = (n+1) \cdot a^n u[n] \quad |a| < 1$$

因为 $a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

根据频域微分特性，有：
$$\begin{aligned} n \cdot a^n \cdot u[n] &\xleftrightarrow{F} j \frac{d}{d\omega} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \\ &= \frac{ae^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})^2} \end{aligned}$$

因此：

$$(n+1)a^n \cdot u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{ae^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})^2} + \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})} = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$$

用同样的方法，有：
$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$$

§ 4.5.8 时域卷积和性质



离散时间的时域卷积性质

$$\text{若 } x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$\text{和 } h[n] \xleftrightarrow{F} H(e^{j\omega})$$

$$\text{则 } x[n] * h[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

这一特性的证明过程与连续时间傅里叶变换卷积特征的证明完全相似，即依据以下两个特性：

- 1、离散时间信号可以表示为复指数信号 $e^{j\omega n}$ 的线性组合，即傅里叶变换的表示方式；
- 2、复指数信号 $e^{j\omega n}$ 是LTI系统的特征函数。

§ 4.5.8 时域卷积和性质



傅里叶级数的卷积性质在形式上稍微有所不同。周期卷积特性：

设两周期都为 N 的周期信号为 $x[n]$ 和 $h[n]$

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k \quad h[n] \xleftrightarrow{FS} b_k$$

则
$$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]h[n-r] \xleftrightarrow{FS} Na_k b_k$$

$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]h[n-r]$ 称为周期卷积和，表示为：

$$x[n] \circledast h[n] = \sum_{r=\langle N \rangle} x[r]h[n-r]$$

§ 4.5.9 调制性质



若 $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ 和 $y[n] \xleftrightarrow{F} Y(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} \text{则 } x[n]y[n] &\xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) \cdot d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes Y(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

对于傅里叶级数，有

若 $x[n] \xleftrightarrow{F_s} a_k$ $y[n] \xleftrightarrow{F_s} b_k$

其中 $x[n]$ 、 $y[n]$ 都以 N 为周期

$$\text{则 } x[n]y[n] \xleftrightarrow{F_s} c_k = a_k \otimes b_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$$

§ 4.5.10 帕斯瓦尔定理



若 $x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

$$\text{则 } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \cdot d\omega$$

$|X(e^{j\omega})|^2$ 称为 $x[n]$ 的能量密度谱，它表明了信号的能量在频域上的分布情况。

对于周期信号而言，其帕斯瓦尔定理的形式为

若 $x[n] \xleftrightarrow{F_s} a_k$

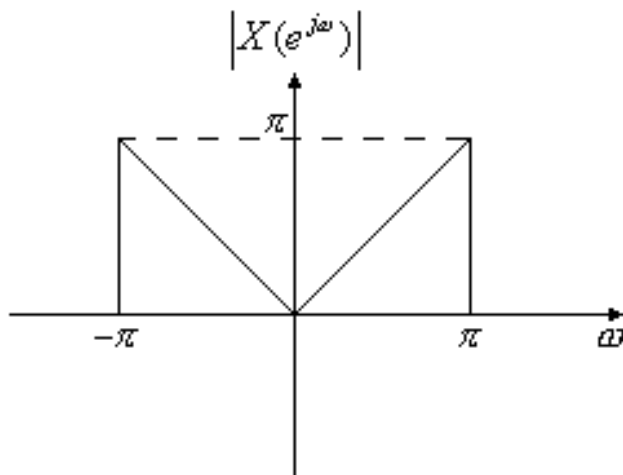
$$\text{则 } \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

$|a_k|^2$ 称为周期信号的功率谱。

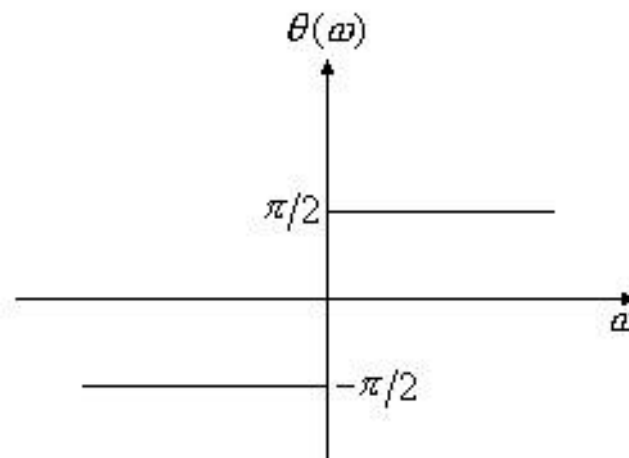
【例4.8】考虑序列 $x[n]$ ，其傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

如图所示。请判断 $x[n]$ 是否是周期、实信号、奇信号和有限能量的。



$x[n]$ 的幅度谱



$x[n]$ 的相位谱

(1) 在时域上的周期性就意味着其傅里叶变换是离散谱，仅在各个谐波频率上可能出现冲激，其余地方均为零。现在 $X(e^{j\omega})$ 不是这样，所以 $x[n]$ 不是周期的。

(2) 根据傅里叶变换的对称性知道，一个实值序列傅里叶变换的幅度谱是 ω 的偶函数，相位谱是 ω 的奇函数。对于所给的 $|X(e^{j\omega})|$ 和 $\theta(\omega)$ 来看，因此 $x[n]$ 是实序列。

(3) 若 $x[n]$ 是奇函数。那么 $X(e^{j\omega})$ 必为虚且奇。因为

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} = j\omega \quad |\omega| < \pi$$

因此 $x[n]$ 是奇函数

(4) 根据帕斯瓦尔定理，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

由图可知， $|X(e^{j\omega})|^2$ 在 $-\pi$ 到 π 上积分一定为一个有限量，所以 $x[n]$ 是有限能量的。

1、已知某一周期信号 $x[n]$ 的傅立叶级数系数 a_k 满足以下条件： $a_k = -a_{k-4}$ ，且 $x[2n+1] = (-1)^n$ ，周期 $N=8$ 。求 $x[n]$ 。

2、计算下列信号的傅立叶变换：

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta(n-4k)u[n]$$

3、下列信号是离散时间信号的傅立叶变换，求原信号 $x[n]$ ：

$$X(e^{j\omega}) = \cos^2 \omega + j \sin \omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}k\right)$$

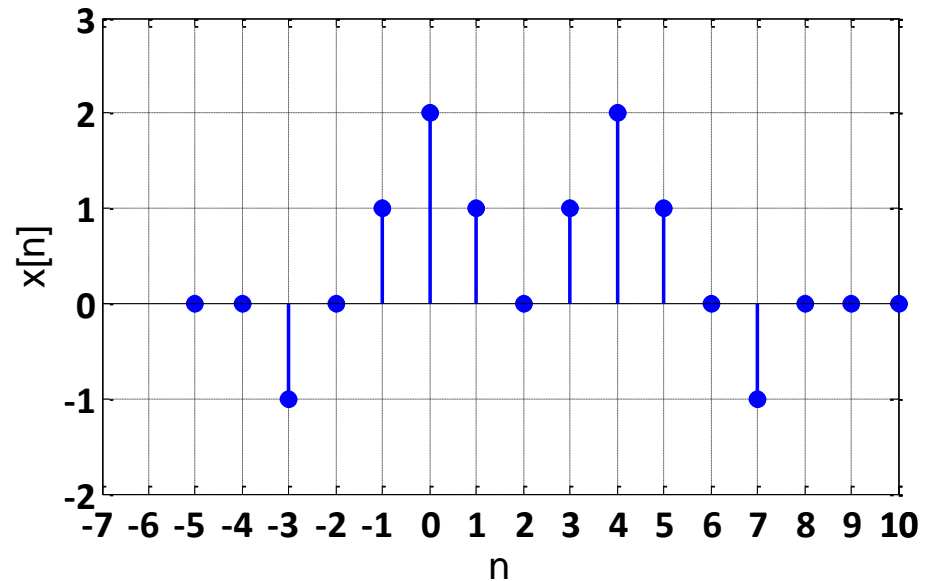
4、离散时间信号 $x[n]$ 如下图所示，其频谱为 $X(e^{j\omega})$ ，求：

① $X(e^{j\pi})$

② $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$

③ 傅立叶变换为 $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ 的信号

④ $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$



习题4-15

4.15

- (1) 设 $x[n]$ 和 $y[n]$ 都是以 N 为周期的，它们的傅里叶级数系数分别为 a_k 和 b_k ，试证明离散时间傅里叶级数的调制性质

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{Fs} c_k \quad \text{其中: } c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} = \sum_{l=\langle N \rangle} b_l a_{k-l}$$

- (2) 利用调制性质，求下列信号的傅里叶级数表示，其中 $x[n]$ 的傅里叶级数系数为 a_k ：

① $x[n] \cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$; ② $x[n] \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN]$

- (3) 如果 $x[n] = \cos\frac{\pi n}{3}$ ， $y[n]$ 的周期为 12，且 $y[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 3 \\ 0 & 4 \leq |n| \leq 6 \end{cases}$ 求信号 $x[n]y[n]$ 的傅里叶级数的系数。

- (4) 利用 (1) 的结果证明 $\sum_{n=\langle N \rangle} x[n]y[n] = N \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{-l}$

习题4-15

- (1) 设 $x[n]$ 和 $y[n]$ 都是以 N 为周期的，它们的傅里叶级数系数分别为 a_k 和 b_k ，试证明离散时间傅里叶级数的调制性质

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{Fs} c_k \quad \text{其中: } c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} = \sum_{l=\langle N \rangle} b_l a_{k-l}$$

证明:

(1)

$$\begin{aligned} x[n]y[n] &= \sum_{l=\langle N \rangle} a_l e^{jl\frac{2\pi}{N}n} \cdot \sum_{m=\langle N \rangle} b_m e^{jm\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{l=\langle N \rangle} \sum_{m=\langle N \rangle} a_l b_m e^{j(l+m)\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \sum_{l=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad m+l=k \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} \left(\sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} \right) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \end{aligned}$$

所以

$$c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$$

习题4-15

(2) 利用调制性质，求下列信号的傅里叶级数表示，其中 $x[n]$ 的傅里叶级数系数为 a_k ：

① $x[n] \cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$; ② $x[n] \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN]$

(2)

$$\textcircled{1} \cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right) = \frac{1}{2} \left(e^{j3\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j3\frac{2\pi}{N}n} \right) \quad b_3 = \frac{1}{2} \quad b_{-3} = \frac{1}{2}$$

$$c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} b_l a_{k-l} = \frac{1}{2} (a_{k-3} + a_{k+3})$$

$$\textcircled{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] \xleftrightarrow{Fs} b_k = \frac{1}{N}$$

$$c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} = \frac{1}{N} \sum_{l=\langle N \rangle} a_l$$

(3) 如果 $x[n] = \cos \frac{\pi n}{3}$, $y[n]$ 的周期为 12, 且 $y[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 3 \\ 0 & 4 \leq |n| \leq 6 \end{cases}$ 求信号 $x[n]y[n]$ 的傅里叶级数的系数。

$$(3) \quad x[n] = \cos \frac{\pi n}{3} = \frac{1}{2} \left(e^{j2\frac{2\pi}{12}n} + e^{-j2\frac{2\pi}{12}n} \right) \Rightarrow a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$$

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} y[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{12} \left(1 + 2 \cos \frac{k\pi}{6} + 2 \cos \frac{k\pi}{3} + 2 \cos \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$b_k = \frac{1}{12} \frac{\sin \frac{7k\pi}{12}}{\sin \frac{k\pi}{12}} \quad b_0 = \frac{7}{12}$$

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} = a_2 b_{k-2} + a_{-2} b_{k+2} = \frac{1}{2} (b_{k-2} + b_{k+2}) \\ &= \frac{1}{12} \left(1 - 2 \cos \frac{k\pi}{2} - \cos \frac{k\pi}{3} + \cos \frac{k\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} = a_2 b_{k-2} + a_{-2} b_{k+2} = \frac{1}{2} (b_{k-2} + b_{k+2}) \\ &= \frac{1}{24} \left[\frac{\sin \frac{7(k-2)\pi}{12}}{\sin \frac{(k-2)\pi}{12}} + \frac{\sin \frac{7(k+2)\pi}{12}}{\sin \frac{(k+2)\pi}{12}} \right] \end{aligned}$$

(4) 利用 (1) 的结果证明 $\sum_{n=\langle N \rangle} x[n]y[n] = N \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{-l}$

(4) 证明

由 (1) 得 $\sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]y[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$

令 $k=0$

$$\sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{-l} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]y[n] \Rightarrow \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]y[n] = N \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{-l}$$

§ 4.0 引言

§ 4.1 离散时间LTI系统的特征函数

§ 4.2 离散时间傅里叶级数(DFS)

§ 4.3 离散时间傅里叶变换(DTFT)

§ 4.4 离散时间周期信号的傅里叶变换

§ 4.5 离散时间傅里叶变换的性质

§ 4.6 对偶性

§ 4.7 离散时间LTI系统的频域分析

§ 4.6.1 离散时间傅里叶级数的对偶性



考虑 $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot n}$

有 $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot n}$, 即 $a[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot n}$

将 k 与 n 对换, 则有 $a[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[k] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot n}$

再把 k 换成 $-k$, 可得 $a[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} x[-k] e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot n}$

上式为 $a[n]$ 傅里叶级数形式, 其系数为 $\frac{1}{N} x[-k]$

§ 4.6.1 离散时间傅里叶级数的对偶性



得到如下对偶关系

$$\begin{array}{l} \text{若} \quad x[n] \xleftrightarrow{FS} a[k] \\ \text{则} \quad a[n] \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{N} x[-k] \end{array}$$

该性质意味着：离散时间傅里叶级数的性质都有其对应的一个对偶关系存在。

例如，以下几对性质就是对偶的：

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{FS} a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n_0} \quad \text{和} \quad e^{jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \cdot x[n] \xleftrightarrow{FS} a_{k-m}$$

$$\sum_{l=\langle N \rangle} x[l]y[n-l] \xleftrightarrow{FS} N a_k b_k \quad \text{和} \quad x[n]y[n] \xleftrightarrow{FS} \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$$

【例4.9】求周期 $N=9$ 的如下周期信号的傅里叶级数系数 a_k

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{\sin(5\pi n / 9)}{\sin(\pi n / 9)} & n \neq 9 \text{的倍数} \\ \frac{5}{9} & n = 9 \text{的倍数} \end{cases}$$

注意到一个周期矩形方波的傅里叶级数系数在形式与上式很相像。根据对偶性可求得的傅里叶级数 a_k 的系数 $x[n]$ 。

令 $g[n]$ 是一个周期为 $N=9$ 的周期方波，即

$$g[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & 2 < |n| \leq 4 \end{cases}$$

$g[n]$ 的傅里叶级数系数 $b_k = b[k]$

$$b[k] = b_k = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{\sin[5\pi k / 9]}{\sin[\pi k / 9]}, & n \neq 9 \text{的倍数} \\ \frac{5}{9}, & n = 9 \text{的倍数} \end{cases}$$

比较 $b[k]$ 与例题所给 $x[n]$ ，根据对偶性，有

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{9} g[k] = \begin{cases} \frac{1}{9}, & |k| \leq 2 \\ 0, & 2 < |k| \leq 4 \end{cases}$$

§ 4.6.2 DTFT和连续时间傅氏级数的对偶性



将连续时间傅里叶级数公式和离散时间傅里叶变换公式进行比较：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} \cdot d\omega$$
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

和

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$
$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$$

$X(e^{j\omega})$: 基波频率 $\omega_0 = 2\pi/2\pi = 1$, k 次谐波频率 $k\omega_0 = k$ 。

因此有
$$X(e^{jt}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jkt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\omega_0 t}$$

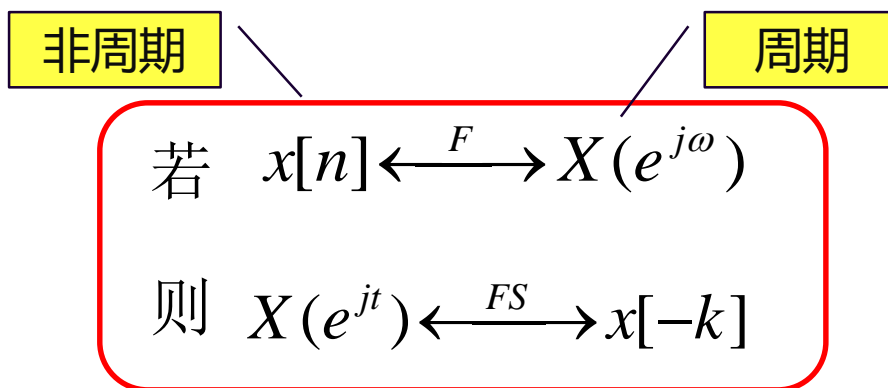
§ 4.6.2 DTFT和连续时间傅氏级数的对偶性



上式中将 k 换成 $-k$ ，可得

$$X(e^{jt}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]e^{jk\omega_0 t}, \omega_0 = 1$$

上式为周期为 2π 的 $X(e^{jt})$ 信号的傅里叶级数形式，其系数为 $x[-k]$ 。于是得到如下对偶关系：



§ 4.6.2 DTFT和连续时间傅氏级数的对偶性



可以将离散时间傅里叶变换与连续时间傅里叶级数之间的许多性质对偶起来。例如，下面的性质是对偶的：

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)}) \cdot d\theta = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes Y(e^{j\omega})$$

$$\text{和 } x(t) \otimes y(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \xleftrightarrow{FS} T a_k b_k$$

用同样的方法，也可得到如下对偶性质：

周期

若 $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$

非周期

则 $a[n] = a_n \xleftrightarrow{F} x(-\omega)$

式中 $x(t)$ 为 2π 周期的。将 $x(t)$ 的傅里叶系数作为一离散时间信号 $a[n]$ ，其傅里叶变换为 $x(-\omega)$ 。

【例4.10】利用离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶级数之间的对偶性来求下面序列的离散时间傅里叶变换：

$$x[n] = \frac{1}{2} \text{Sa}^2\left[\frac{\pi}{2}n\right]$$

为了利用对偶性，必须找一个 $T=2\pi$ 周期的连续时间信号 $g(t)$ ，使其傅里叶系数 $a_k = x[n]$

设 $g(t)$ 是一个周期为 2π 的周期三角脉冲信号，如图所示。

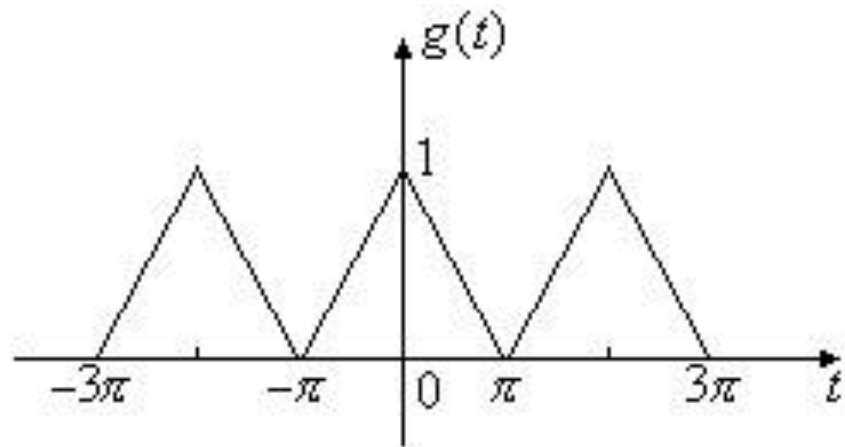


图4-15 周期三角脉冲信号

$g(t)$ 的傅里叶级数系数是

$$a_k = \frac{1}{2} S a^2 \left[\frac{\pi}{2} k \right]$$

由对偶性, 可得

$$a[n] = a_n \xleftrightarrow{F} g(-\omega)$$

也就是

$$x[n] = \frac{1}{2} S a^2 \left[\frac{\pi}{2} n \right] \xleftrightarrow{F} g(-\omega) = g(\omega)$$

因此,

$$x[n] = \frac{1}{2} S a^2 \left[\frac{\pi}{2} n \right] \text{ 的频谱如图4-16所示。}$$

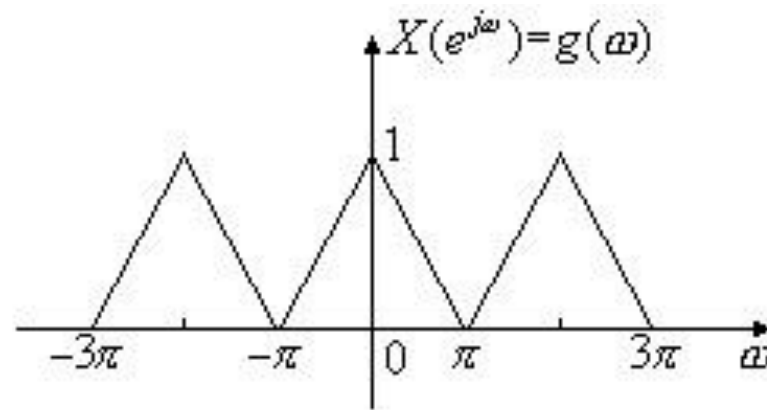


图4-16

§ 4.0 引言

§ 4.1 离散时间LTI系统的特征函数

§ 4.2 离散时间傅里叶级数(DFS)

§ 4.3 离散时间傅里叶变换(DTFT)

§ 4.4 离散时间周期信号的傅里叶变换

§ 4.5 离散时间傅里叶变换的性质

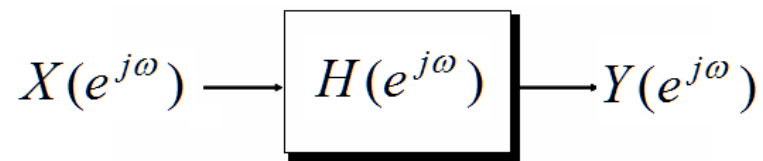
§ 4.6 对偶性

§ 4.7 离散时间LTI系统的频域分析

§ 4.7.1 离散时间LTI系统的频率响应



根据离散傅里叶变换的时域卷积性质，离散时间LTI系统可表示为



其中 $h[n] \xleftrightarrow{F} H(e^{j\omega})$

$H(e^{j\omega})$ 称为离散时间LTI系统频率响应。

输出信号 $y[n]$ 的频谱 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$

离散LTI系统的频率响应另一种定义可表示为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

§ 4.7.1 离散时间LTI系统的频率响应



通常将系统的频率响应表示为极坐标形式：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

其中 $H(e^{j\omega})$ 的模 $|H(e^{j\omega})|$ 称为系统的幅频特性，相位 $\theta(\omega)$ 称为系统的相频特性。

一般来说，频域分析法适用于稳定的离散LTI系统。一个稳定的离散LTI系统，它的单位脉冲响应就一定满足绝对可加：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

也就是说，稳定系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 满足离散时间傅里叶变换收敛条件。

【例4.11】试求差分器的频率响应 $H(e^{j\omega})$

$$\text{差分器: } y[n] = x[n] - x[n-1]$$

根据差分性质, 有 $Y(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$

$$\text{差分器的频率响应: } H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 - e^{-j\omega}$$

$$\text{差分器的冲激响应是 } h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

【例4.12】试求累加器的频率响应 $H(e^{j\omega})$

累加器：
$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$$

$$y[n] = x[n] * u[n]$$

即累加器的冲激响应 $h[n] = u[n]$

累加器的频率响应为
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

【例4.13】求延时器的频率响应 $H(e^{j\omega})$

延时器： $y[n] = x[n - n_0]$ ， n_0 为实整数

根据时域平移性质，有 $Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

延时器的频率响应就是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = e^{-j\omega n_0}$$

离散延时器的冲激响应为 $h[n] = \delta[n - n_0]$

【例4.20】系统的差分方程为

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

试画出该系统的幅度响应。

解：差分方程的系数矢量为 $b = [1, 1]$ ， $a = [1, -5/6, 1/6]$

在频率区间 $[0, \pi]$ 内选取512个频率抽样点以计算系统的频率响应。

%计算并显示系统频响的Matlab代码

b = [1,1]; %设置差分方程的系数矢量

a = [1,-5/6,1/6]; %设置差分方程的系数矢量

[H,w] = freqz(b,a,512); %计算频率响应

plot(w,abs(H),'k'); %显示幅度响应

axis([0,pi,0,1.2*max(abs(H))]);

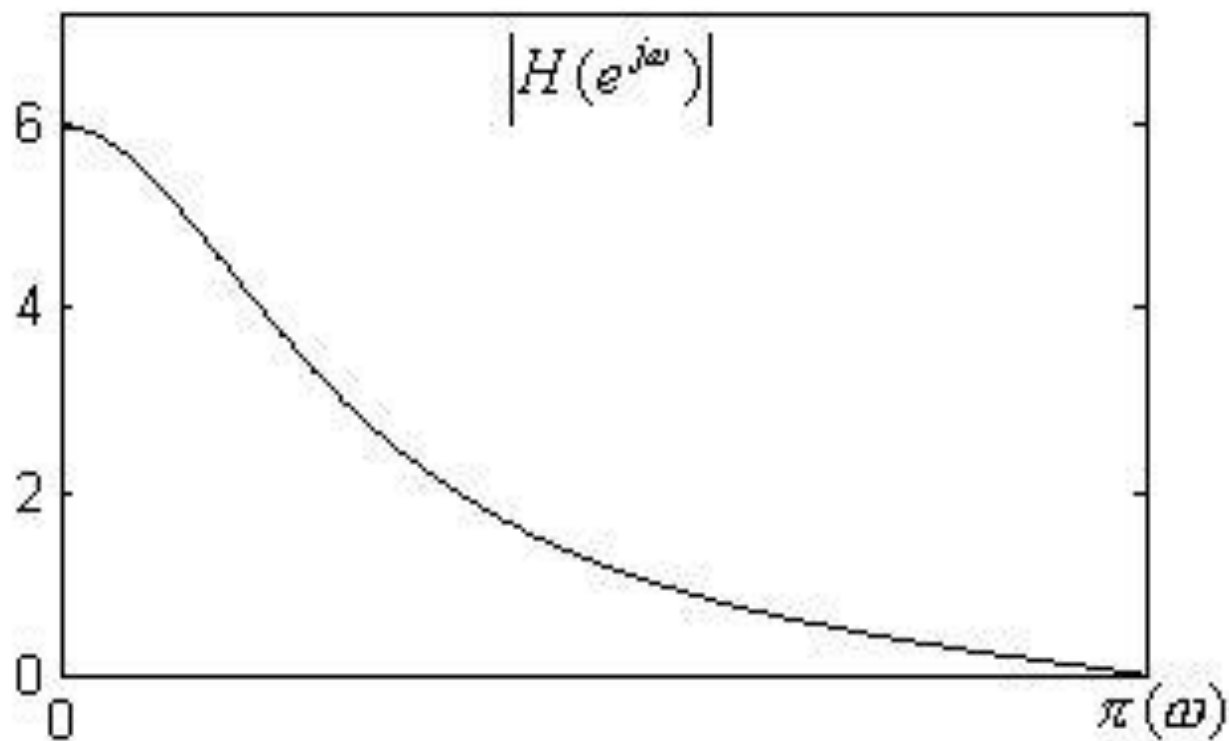


图4-23 系统的幅度响应

与连续时间情况相同，在频域上也可以求解离散时间LTI系统的零状态响应。其一般思路是：通过卷积性质求得输出序列 $y[n]$ 的频谱，然后对该频谱作反变换求得时域解 $y[n]$ 。

【例4.14】考虑一LTI系统，其单位脉冲响应为

$$h[n] = a^n u[n] \quad , \quad |a| < 1$$

输入是 $x[n] = \beta^n u[n], | \beta | < 1$

求系统的零状态响应。

系统的频率响应为 $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

输入信号频谱 $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}}$

输出信号 $y[n]$ （零状态响应）的频谱为：

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})}$$

(1) $a \neq b$ 时, $Y(e^{j\omega})$ 的部分分式展开为

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

其中

$$A = Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - ae^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega} = \frac{1}{a}} = \frac{a}{a - \beta}$$

$$B = Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \beta e^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega} = \frac{1}{\beta}} = -\frac{\beta}{a - \beta}$$

求得 $y[n]$ 为

$$y[n] = Aa^n u[n] + B\beta^n u[n] = \frac{a}{a - \beta} a^n u[n] - \frac{\beta}{a - \beta} \beta^n u[n]$$

(2) $a=b$ 时

$$y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$$

可得 $y[n]$ 为

$$y[n] = (n + 1)a^n u[n]$$

【例4.15】已知某一因果LTI系统对输入信号

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

的零状态响应为

$$y[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

试求该系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 和单位脉冲响应 $h[n]$ 。

分别求出 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的频谱为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})}$$

系统的频率响应为 $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

系统的单位脉冲响应为 $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

【例4.16】已知某一离散LTI系统，其 $h[n]$ 为实值序列，频率响应为 $H(e^{j\omega})$ ，求系统对 $\cos\omega_0 n$ 的响应。

将频响 $H(e^{j\omega})$ 表示为极坐标形式

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

因为 $h[n]$ 为实数，根据共轭对称性，有

$$|H(e^{-j\omega})| = |H(e^{j\omega})|$$

和 $\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$

将 $\cos\omega_0 n$ 表示为复指数形式：
$$\cos\omega_0 n = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

系统的输出为

$$y[n] = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} |H(e^{j\omega_0})| e^{j\theta(\omega_0)} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n} |H(e^{-j\omega_0})| e^{j\theta(-\omega_0)}$$

上式可写成

$$\begin{aligned} y[n] &= |H(e^{j\omega_0})| \frac{e^{j(\omega_0 n + \theta(\omega_0))} + e^{-j(\omega_0 n + \theta(\omega_0))}}{2} \\ &= |H(e^{j\omega_0})| \cos[\omega_0 n + \theta(\omega_0)] \end{aligned}$$

推广：

$$A \cos[\omega_0 n + \theta_0] \rightarrow A |H(e^{j\omega_0})| \cos[\omega_0 n + \theta_0 + \theta(\omega_0)]$$

$$A \sin[\omega_0 n + \theta_0] \rightarrow A |H(e^{j\omega_0})| \sin[\omega_0 n + \theta_0 + \theta(\omega_0)]$$

线性常数差分方程的一般形式为

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

两边求傅里叶变换，可得

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

方程所表征系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}}$$

【例4.17】考虑一因果LTI系统，其差分方程为

$$y[n] - \frac{1}{6} y[n-1] - \frac{1}{6} y[n-2] = x[n]$$

试求：（1）系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 和单位脉冲响应 $h[n]$ 。

（2） $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ ，求系统的零状态响应。

解：（1）频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6} e^{-j\omega} - \frac{1}{6} e^{-2j\omega}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega})(1 + \frac{1}{3} e^{-j\omega})}$$

将 $H(e^{j\omega})$ 按部分分式展开

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} + \frac{B}{(1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega})}$$

式中

$$A = H(e^{j\omega}) \cdot (1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{3}{5}$$

$$B = H(e^{j\omega}) \cdot (1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega}=-3} = \frac{2}{5}$$

单位脉冲响应

$$h[n] = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] + \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{3} \right)^n u[n]$$

(2) 输入信号的频谱为
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

输出信号的频谱为
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

部分分式展开
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B_{12}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2} + \frac{B_2}{1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

将 $e^{j\omega}$ 用 z 替换，则式中

$$B_{11} = -2 \frac{d}{dz} \left(Y(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2 \right) \Big|_{z=2} = \frac{6}{25}$$

$$B_{12} = \left(Y(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2 \right) \Big|_{z=2} = \frac{3}{5}$$

$$B_2 = \left(Y(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}z\right) \right) \Big|_{z=-3} = \frac{4}{25}$$

$$Y(z) = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{2}z} + \frac{B_{12}}{\left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2} + \frac{B_2}{1 + \frac{1}{3}z}$$

系统的零状态响应为

$$y[n] = \left(\frac{6}{25} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{5} (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{25} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) u[n]$$

§ 4.7.4 离散时间信号的滤波与理想滤波器



连续时间信号滤波器的概念同样适用于离散时间信号。

一个离散时间理想低通滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

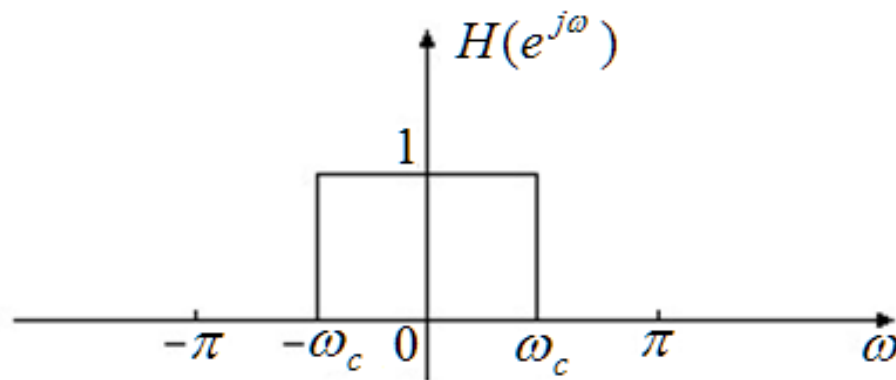


图4.18 离散时间理想低通滤波器的频率响应

§ 4.7.4 离散时间信号的滤波与理想滤波器

离散时间理想低通滤波器的单位脉冲响应为

$$h[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

当 $n < 0$ 时, $h[n] \neq 0$, 因此, 离散时间理想低通滤波器是非因果的, 在时域中, 物理上是无法实现的。

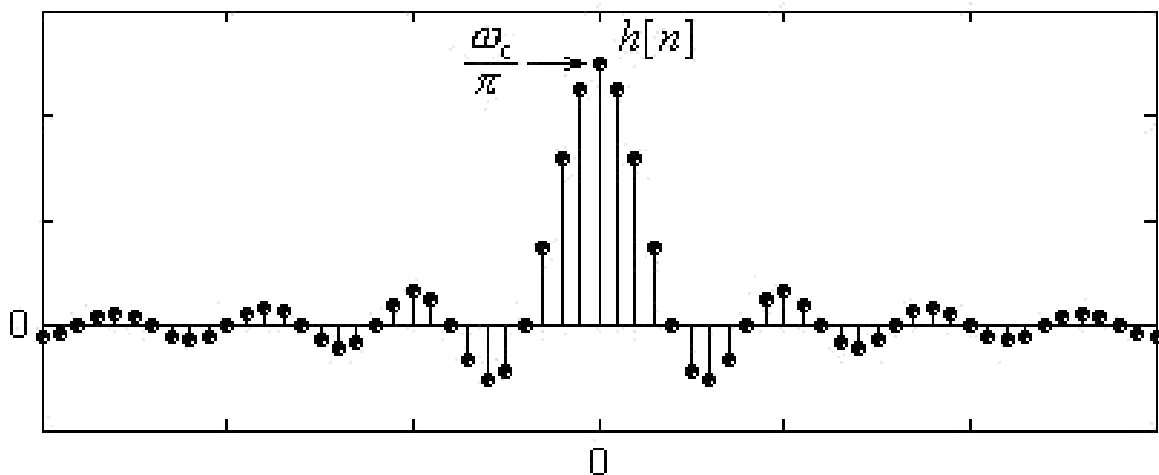


图4-19 离散时间理想低通滤波器的单位脉冲响应 ($\omega_c = \frac{\pi}{4}$)

§ 4.7.4 离散时间信号的滤波与理想滤波器

离散时间理想低通滤波器的单位阶跃响应为

$$s[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m]$$

可以看出， $s[n]$ 也有比最后稳态值大的超量，并且呈现出称为振铃的振荡行为。

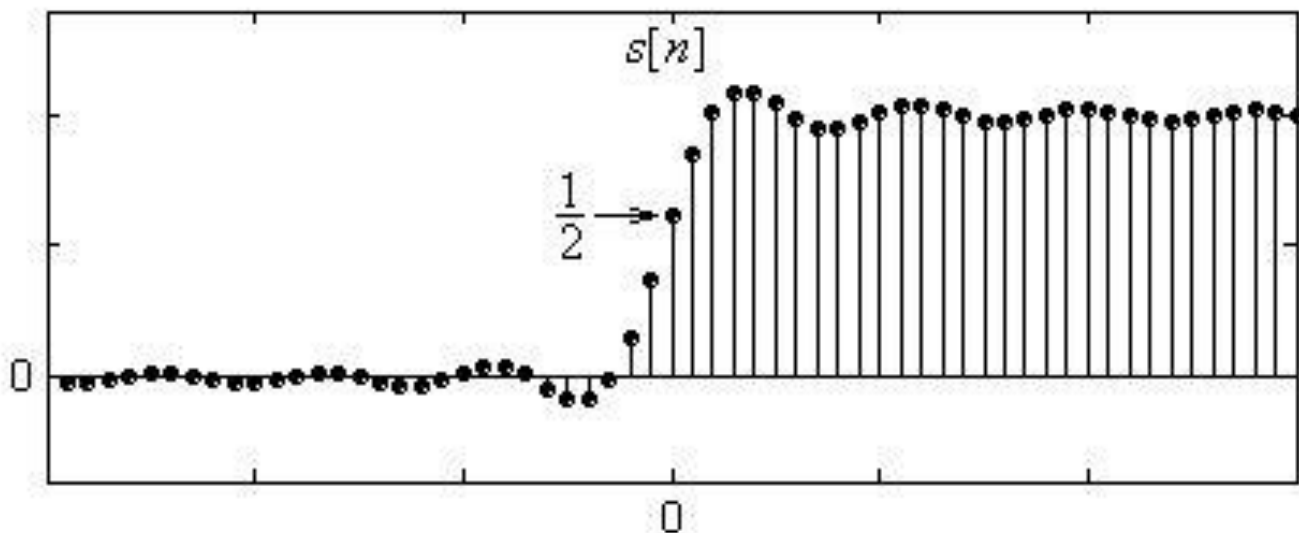


图4-20 离散时间理想低通滤波器的单位阶跃响应

```
%基于卷积和运算求离散时间理想递推滤波器的单位阶跃响应
n = -80:80;
hn = 0.25*sinc(n/4);           %离散时间连续递推滤波器的单位冲激响应
xn = [zeros(1,80),ones(1,81)]; %设定u[n], 观察范围-80~80
sn = conv(xn,hn);               %卷积和运算:  $s[n] = x[n]*h[n]$ 
s_n = [-160:-161+length(sn)]; %设定s[n]的时域范围
stem(s_n,sn,'filled','k');      %显示单位阶跃响应s[n]
axis([-30,30,-0.4,1.4]);
```

4.1(1)(3)

4.2(1)(5)

4.3(1),

4.5(1)(4)(11),

4.6(2)(6)(8),

4.8,

4.10(1),

4.13(1)(3), 注意题(1)更正为:

$$x_1[n] = x[1-n] + x[-1-n]$$

4.14,

4.17,

4.18,

4.19,

4.20(a)(c)(d),

4.21

4.23(1)(3)

4.25,

4.26,

4.27,

4.28,

4.32,

4.33(1)(3),

4.34.