浙江工业大学 2014 /2015 学年

第 二 学期试卷

课程 电磁场与电磁波 姓名：

班级

题序	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总评
计分											

命题：

一． 简答题

1．求标量函数 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+x+y+z$ 的梯度及该梯度的散度和旋度。[9 分]

A. $\nabla u(x,y,z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}\overline{e_x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\overline{e_y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\overline{e_z}=(2x+1)\overline{e_x}+(2y+1)\overline{e_y}+(2z+1)\overline{e_z}$

$\nabla\bullet\nabla u(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2+2+2=6$

$\nabla\times\nabla u(x,y,z)=0$

2. 无限大接地的金属平板正上方 h 处有一个点电荷 q，求该点电荷受到的库伦力。[5 分]

A. 点电荷受到的库伦力是由平板上的感应电荷相互作用产生，感应电荷的作用可以用正下方 h 处有一个镜像点电荷 $-q$ 来代替，因此受到的库伦力为：

$$F=-\frac{q^2}{4\pi(2h)^2}=-\frac{q^2}{16\pi h^2}\text{。}$$

3. 在时变电磁场中是如何引入动态为 $\bar{A}$ 和 φ 的？$\bar{A}$ 和 φ 不惟一的原因何在？[6 分]

A. 根据 **Maxcell** 方程，$\nabla\cdot\overline{B}=0$，因此 $\overline{B}$ 总可以用一个矢量位函数的旋度来表示，即 $\overline{B}=\nabla\times\overline{A}$。

由于 $\nabla\times\overline{E}=-\dfrac{\partial\overline{B}}{\partial t}$，因此有：$\nabla\times(\overline{E}+\dfrac{\partial\overline{A}}{\partial t})=0$，因此 $\overline{E}+\dfrac{\partial\overline{A}}{\partial t}$ 总可以用一个标量函数的梯度来表示，即 $\overline{E}+\dfrac{\partial\overline{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$，这表示 φ 的引入，$\overline{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\overline{A}}{\partial t}$。

$\bar{A}$ 和 φ 不惟一的原因只规定了 $\bar{A}$ 的旋度而没有定义散度。

二、 根据高斯定理和斯托克斯定理由积分形式的 Maxwell 方程推出微分形式的 Maxwell 方程，并由 Maxwell 方程推出电荷守恒定律 $\nabla\bullet\bar{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$。[12 分]

A. 积分形式 **Maxwell** 方程

$$\oint_{\Sigma}\bar{D}\bullet d\bar{S}=Q_f=\iiint_V\rho_f dV \qquad \textbf{(1a)}$$

$$\oint_C\bar{E}\bullet d\bar{l}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\iint_S\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\bullet d\bar{S} \qquad \textbf{(2a)}$$

$$\oint_{\Sigma}\bar{B}\bullet d\bar{S}=0 \qquad \textbf{(3a)}$$

$$\oint_C\bar{H}\bullet d\bar{l}=I_f+I_D=\iint_S(\bar{J}_f+\frac{\partial\bar{D}}{\partial t})\bullet d\bar{S} \qquad \textbf{(4a)}$$

由高斯定理：

$$\iiint_V\nabla\bullet\bar{D}dV=\oint_{\Sigma}\bar{D}\bullet d\bar{S}=Q_f=\iiint_V\rho_f dV$$

由于 V 具有任意性，可得：

$$\nabla\bullet\bar{D}=\rho_f \qquad \textbf{(1b)}$$

由斯托克斯定理：

$$\iint_S\nabla\times\bar{E}\bullet d\bar{S}=\oint_C\bar{E}\bullet d\bar{l}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\iint_S\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\bullet d\bar{S}$$

以 C 为周界的曲面 S 具有任意性，可得：

$$\nabla\times\bar{E}=-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \qquad \textbf{(2b)}$$

同理：

$$\nabla\bullet\bar{B}=0 \qquad \textbf{(3 b)}$$

$$\nabla\times\bar{H}=\bar{J}+\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \qquad \textbf{(4b)}$$

由 Maxcell 方程 $\nabla\times\bar{H}=\bar{J}+\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$ 两边取散度得：

$$\nabla\bullet\nabla\times\bar{H}=\nabla\bullet\bar{J}+\nabla\bullet\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}=\nabla\bullet\bar{J}+\frac{\partial\nabla\bullet\bar{D}}{\partial t}$$

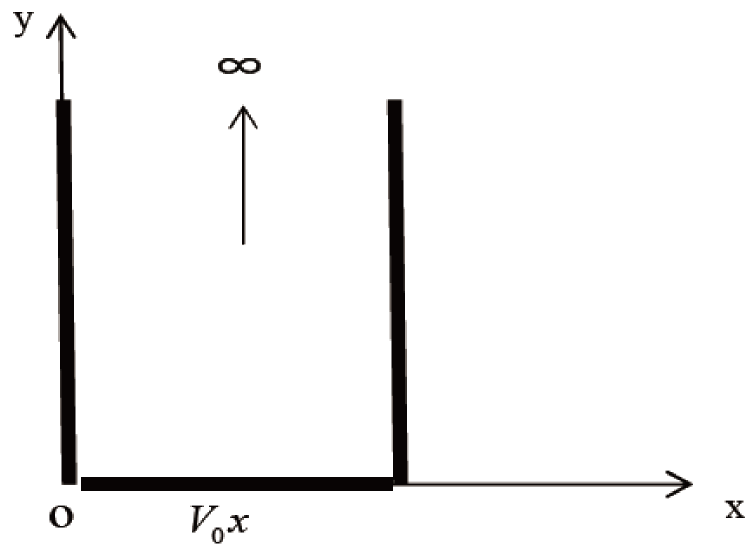
由 Maxcell 方程 $\nabla\bullet\bar{D}=\rho$，以及旋度的散度总为 0，即 $\nabla\bullet\nabla\times\bar{H}=0$，得：

$\nabla\bullet\bar{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$。

三． 有如图所示的 **U** 型半无限大导体槽，底面非导体保持电位 V_0x，两个导体侧面保持中性无面电荷分布但可能有电位。

（**1**） 求 **U** 型导体槽内的电位分布 [13 分]

（**2**） 求 **U** 型导体槽内的电场 [4 分]



A. （1）由题意可知有：$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}=0 \\ u(x,y)\big|_{y=0}=V_0 x \\ u(x,y)\big|_{y\to\infty}=0 \end{cases}$

假设$u(x,y)=X(x)Y(\mathrm{y})$，由分离变量法可得：

$$\frac{1}{\mathrm{X}}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{\mathrm{dy}^2}=-\lambda^2 \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2\mathrm{X}=0 \\ \dfrac{d^2\mathrm{Y}}{dy^2}-\lambda^2 Y=0 \end{matrix}$$

由边界条件：$\dfrac{dX}{dx}\Big|_{x=0}=\dfrac{dX}{dx}\Big|_{x=a}=0 \Rightarrow X_m(x)=A_m\cos\dfrac{m\pi}{a}x,\ \ m=0,1,2,3\cdots\cdots$

进而由边界条件：$Y(y)\big|_{y\to\infty}=0 \Rightarrow Y_m(y)=B_m\exp(-\dfrac{m\pi}{a}y)$

因此，$u(x,y)=\sum\limits_{m=0,1,2,3\cdots}u_m(x,y)=\sum\limits_{m=0,1,2,3\cdots}X_m(x)Y_m(\mathrm{y})=\sum\limits_{m=0,1,2,3\cdots}A_m B_m\cos\dfrac{m\pi}{a}x\exp(-\dfrac{m\pi}{a}y)$

由$u(x,y)\big|_{y=0}=V_0 x$得：

$$V_0 x=\sum_{m=0,1,2,3\cdots}A_m B_m\cos\frac{m\pi}{a}x$$

$$\Rightarrow A_0 B_0=\frac{V_0 a}{2},\ \ A_m B_m=\frac{4V_0}{(2m+1)\pi}$$

故得：$u(x,y)=\dfrac{V_0 a}{2}+\dfrac{4V_0}{\pi}\sum\limits_{m=1,2,3\cdots}\dfrac{1}{(2m+1)}\cos\dfrac{(2m+1)\pi}{a}x\exp[-\dfrac{(2m+1)\pi}{a}y]$

（2）$\vec{E}=-\nabla\varphi=-\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\overline{e_x}-\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\overline{e_y}$

$$=-\frac{4V_0}{a}\sum_{m=1,2,3\cdots}\sin\frac{(2m+1)\pi}{a}x\exp[-\frac{(2m+1)\pi}{a}y]\overline{e_x}-\frac{4V_0}{a}\sum_{m=1,2,3\cdots}\cos\frac{(2m+1)\pi}{a}x\exp[-\frac{(2m+1)\pi}{a}y]\overline{e_y}$$

三. 已知空气中一水平极化的均匀平面波电场强度表达式为

$\overline{E}=(2\overline{e_x}+2j\overline{e_y})e^{-j30z}\text{V/m}$

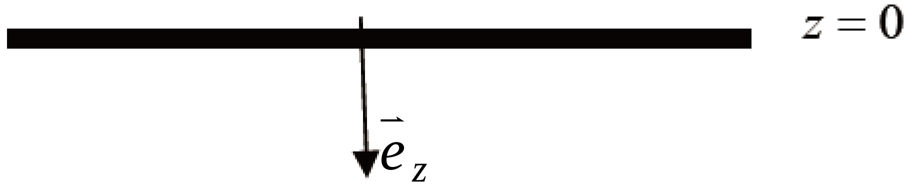
（1）讨论该均匀平面波的极化特性。 [4 分]

（2）该电磁波的频率和波长是多少？[8 分]

（3）求与该电磁波相伴的磁场强度的瞬时值？[8 分]

（4）该电磁波能否在矩形波导中传输？为什么？[4 分]

（5）如果该电磁波垂直入射到一无限大的理想导体平面上（$z=0$），求反射波的波印廷矢量的平均值和导体平面上的电流密度的瞬时值？ [16 分]



A. （**1**）由于 $E_{\text{xm}}=E_{\text{ym}}=2$，$\varphi_y-\varphi_x=\dfrac{\pi}{2}$，因此为左旋圆极化波。

（**2**）由题意知，该电磁波沿 $\overline{e_z}$ 方向传输，波数 $k=30\text{rad/m}$，

因此角频率 $\omega=\dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=9\times10^{9}(\text{rad/s})$，

频率 $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=1.43\times10^{9}(\text{Hz})=1.43\text{GHz}$，波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=0.23\text{m}$。

（**3**）相伴的磁场强度

$$\overline{H}=\frac{\overline{e_z}\times\overline{E}}{\eta_0}=\frac{\overline{e_z}\times(2\overline{e_x}+2j\overline{e_y})e^{-j30z}}{\eta_0}=10^{-3}\times(5.3\overline{e_y}-5.3j\overline{e_x})e^{-j30z}(\text{A/m})$$

因此，瞬时值为：

$$\overline{H(z,t)}=\text{Re}[10^{-3}\times(5.3\overline{e_y}-5.3j\overline{e_x})e^{-j30z}e^{j9\times10^9t}]$$

$$=5.3\times10^{-3}\cos(9\times10^{9}t-30z)\overline{e_y}-5.3\times10^{-3}\cos(9\times10^{9}t-30z+\frac{\pi}{2})\overline{e_x}$$

（**4**）不能，因为该电磁波 E_z, H_z 均为 **0**，是 **TEM** 波，不能在单导线的波导中传输。

（**5**）沿 $\overline{e_z}$ 方向垂直入射波的反射波传播方向为 $-\overline{e_z}$，角频率不变。因此假定反射波为 $\overline{E}_r=(x\overline{e_x}+y\overline{e_y})e^{j30z}\text{V/m}$，利用边界条件求出 x,y。由边界处切向电场连续的边界条件得，空气靠近理想导体表明的切向电场为 **0**，

即 $\overline{e_z}\times\overline{E}\big|_{z=0}=0\Rightarrow\overline{e_z}\times[(2\overline{e_x}+2j\overline{e_y})+(x\overline{e_x}+y\overline{e_y})]=0\Rightarrow x=-2, y=-2j$

因此，反射波的电场强度为 $\overline{E}_r=(-2\overline{e_x}-2j\overline{e_y})e^{j30z}\text{V/m}$

对应反射波的磁场强度为：

$$\overline{H}_r = \frac{1}{\eta_0}(-\overline{e_z}) \times \overline{E}_r = \frac{1}{\eta_0}(2\overline{e_y} - 2j\overline{e_x})e^{j30z} = 10^{-3} \times (5.3\overline{e_y} - 5.3j\overline{e_x})e^{j30z}$$

因此，反射波的波印廷矢量的平均值

$$\overline{\overline{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\overline{E}_r^{\,*} \times \overline{H}_r]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[(-2\overline{e_x} + 2j\overline{e_y})e^{-j30z} \times 10^{-3} \times (5.3\overline{e_y} - 5.3j\overline{e_x})e^{j30z}]$$

$$= -1.06 \times 10^{-2}\overline{e_z}$$

根据边界条件，平板上的传导电流为：

$$\overline{J_s} = (-\overline{e_z}) \times (\overline{H}_i + \overline{H}_r)\big|_{z=0}$$

$$= (-\overline{e_z}) \times [10^{-3} \times (5.3\overline{e_y} - 5.3j\overline{e_x})e^{-j30z} + 10^{-3} \times (5.3\overline{e_y} - 5.3j\overline{e_x})e^{j30z}]\big|_{z=0}$$

$$= 1.06 \times 10^{-2}(\overline{e_x} + j\overline{e_y})$$

其瞬时值为：

$$\overline{J_s} = \mathrm{Re}[1.06 \times 10^{-2}(\overline{e_x} + j\overline{e_y})e^{j9\times10^9 t}]$$

$$= \overline{e_x}1.06 \times 10^{-2}\cos(9\times10^9 t) - \overline{e_y}1.06 \times 10^{-2}\sin(9\times10^9 t)$$

四、 空气中某一矩形波导尺寸为 $a \times b = 3\mathrm{mm} \times 2\mathrm{mm}$，讨论该矩形波导单模传输的电磁波频率范围。[14 分]

A.

矩形波导的相位常数

$$\beta = \sqrt{(\frac{\omega}{c})^2 - (\frac{m\pi}{a})^2 - (\frac{n\pi}{b})^2}$$

对于传输的模式 m 和 n 的取值，要求满足 $(\frac{\omega}{c})^2 > (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2$

对于截止模式 m 和 n 的取值，有 $(\frac{\omega}{c})^2 < (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2$

对于波导尺寸为 $a \times b = 3\mathrm{mm} \times 2\mathrm{mm}$ 的矩形波导，基模 $m = 1$ 和 $n = 0$

第一个高次模模式为 $m = 0$ 和 $n = 1$，因此有单模传输的角频率取值范围为：

$(\frac{\pi}{b})^2 > (\frac{\omega}{c})^2 > (\frac{\pi}{a})^2$，即：

$$\frac{\pi}{b}\mathrm{c} > \omega > \frac{\pi}{a}\mathrm{c}$$

$$\frac{\pi}{b}\mathrm{c} > 2\pi f > \frac{\pi}{a}\mathrm{c}$$

因此单模传输的频率范围为：

$5 \times 10^{10}Hz < f < 7.5 \times 10^{10}Hz$，即：

$50GHz < f < 75GHz$