专业：电子科学与技术
姓名：
学号：
日期：

浙江大学实验报告

课程名称：　数字信号处理　指导老师：______ 成绩：__________________

实验名称：DFT/FFT 的应用之一 — 确定性信号谱分析　实验类型：　验证　同组学生姓名：__

一、实验目的和要求

谱分析即求信号的频谱。本实验采用 DFT/FFT 技术对周期性信号进行谱分析。通过实验，了解用 X(k) 近似地表示频谱 $X(e^{j\omega})$带来的栅栏效应、混叠现象和频谱泄漏，了解如何正确地选择参数（抽样间隔 T、抽样点数 N）。

二、实验内容和步骤

2-1 考虑下列序列 $x(n) = cos(0.24\pi n) + cos(0.36\pi n)$

求出它基于有限个样本的频谱。

a）当 $0 \le n \le 9$ 时，分别确定并画出 x(n) 的基于 N=10 点 DFT 和 N=100 点的 DFT。

b）当 $0 \le n \le 99$ 时，确定并画出 x(n) 的基于 N=100 点的 DFT。

比较（a）、（b）基于 N=100 的 DFT 的异同，说明补零（高密度频谱）和采集更多数据（高分辨率频谱）之间的区别。

2-2 谱分析参数可以从下表中任选一组（也可自定）。对各组参数时的序列，计算：一个正弦周期是否对应整数个抽样间隔？观察区间是否对应整数个正弦周期？

信号频率 *f*（赫兹）	**谱分析参数**	**抽样间隔 T**（秒）	**截断长度 N**（抽样个数）
50	第一组参数	0.000625	32
50	第二组参数	0.005	32
50	第三组参数	0.0046875	32
50	第四组参数	0.004	32
50	第五组参数	0.0025	16

2-3 对以上几个正弦序列，依次进行以下过程。

2-3-1 观察并记录一个正弦序列的图形（时域）、频谱（幅度谱、频谱实部、频谱虚部）形状、幅度谱的第一个峰的坐标（U，V）。

2-3-2　分析抽样间隔 T、截断长度 N（抽样个数）对谱分析结果的影响；

2-3-3　思考 X(k)与 $X(e^{j\omega})$的关系；

2-3-4　讨论用 X(k)近似表示 $X(e^{j\omega})$时的栅栏效应、混叠现象、频谱泄漏。

2-4　**(选做)**

阅读课外教材或通过查资料，编写一个用 FFT 计算 STFT（短时傅里叶变换）的程序，通过一个例子展示实验结果，并对比 FFT 和 STFT 对系统分析方面各自的特点。

三、主要仪器设备

MATLAB 编程。

四、操作方法和实验步骤

（参见“二、实验内容和步骤”）

五、实验数据记录和处理

MATLAB 代码如下：

```
clc;clear;
% x(n)=cos(0.24πn)+cos(0.36πn)
N = 10;
n = 1:1:N;
x = [cos(0.24*pi.*n) + cos(0.36*pi.*n),zeros(1,100-N)];
X = fft(x,N);       %10 点 DFT
figure(1)
subplot(3,1,1);stem(1:1:N,x(1:N),'.');title('N=10,x[n]');
subplot(3,1,2);stem(-pi:2*pi/length(X):pi-2*pi/length(X),abs(X),'.');xlim([-pi pi]);title('10 点 DFT,|X(k)|');
subplot(3,1,3);stem(-pi:2*pi/length(X):pi-2*pi/length(X),angle(X),'.');xlim([-pi pi]);title('10 点 DFT,angle(X(k))');
X = fft(x);     %100 点 DFT
figure(2)
subplot(3,1,1);stem(1:1:N,x(1:N),'.');title('N=10,x[n]');
subplot(3,1,2);stem(-pi:2*pi/length(X):pi-2*pi/length(X),abs(X),'.');xlim([-pi pi]);title('100 点 DFT,|X(k)|');
subplot(3,1,3);stem(-pi:2*pi/length(X):pi-2*pi/length(X),angle(X),'.');xlim([-pi pi]);title('100 点 DFT,angle(X(k))');

N = 100;
n = 1:1:N;
x = [cos(0.24*pi.*n) + cos(0.36*pi.*n),zeros(1,100-N)];
X = fft(x,N);    %100 点 DFT
figure(3)
```

```
subplot(3,1,1);stem(1:1:N,x(1:N),'.');title('N=100,x[n]');
subplot(3,1,2);stem(-pi:2*pi/N:pi-2*pi/N,abs(X),'.');xlim([-pi pi]);title('100 点
DFT,|X(k)|');
subplot(3,1,3);stem(-pi:2*pi/N:pi-2*pi/N,angle(X),'.');xlim([-pi pi]);title('100 点
DFT,angle(X(k))');

T = 0.000625;N = 32; %第一组谱分析参数
%T = 0.005;N = 32;    %第二组谱分析参数
%T = 0.0046875;N = 32;%第三组谱分析参数
%T = 0.004;N = 32;    %第四组谱分析参数
%T = 0.0025;N = 16;   %第五组谱分析参数
t = 0:0.001:N*T; xt = sin(2*pi*50*t);  %原始信号
n = 0:N-1; xn = sin(2*pi*50*n*T); %抽样结果
X = fft(xn,N);

figure(4); % 时域图像
subplot(2,1,1); plot(t,xt); xlim([0 N*T]);
xlabel('t'); ylabel('x(t)'); title('原信号');
subplot(2,1,2); stem(n,xn,'.');xlim([0 N]);
xlabel('n'); ylabel('x(n)'); title('抽样结果');

figure(5); % 序列频谱
subplot(4,1,1); stem(n,abs(X),'.'); xlim([0 N]);
xlabel('k'); ylabel('|X|'); title('幅度谱');
max_value = max(abs(X)); % 最大值
max_index = find(abs(X)==max_value); % 寻找最大值的索引
index = max_index(1); % 取第一个最大值的索引
format = sprintf('(%d, %.2f)',(index-1),max_value);
text((index-1),max_value,format);
subplot(4,1,2); stem(n,real(X),'.'); xlim([0 N]);
xlabel('k'); ylabel('Re\{X\}'); title('频谱实部');
subplot(4,1,3); stem(n,imag(X),'.'); xlim([0 N]);
xlabel('k'); ylabel('Im\{X\}'); title('频谱虚部');
subplot(4,1,4); stem(n,angle(X),'.'); xlim([0 N]);
xlabel('k'); ylabel('angle(X)'); title('频谱相位');
```

六、实验结果与分析

6-1 实验前预习有关概念，并根据上列参数来推测相应频谱的形状、谱峰所在频率（U）和谱峰的数值（V）、混叠现象和频谱泄漏的有无。

原始信号和抽样信号分别为：

$$x(t) = \sin(2\pi f t),x[n] = \sin[2\pi f n T]$$

$x[n]$的 DTFT 为：

$$X(e^{j\omega}) = j\pi[\delta(\omega + 2\pi fT) - \delta(\omega - 2\pi fT)]$$

可见 DTFT 序列的实部恒为 0，虚部在$\omega = \pm 2\pi fT$处存在冲激信号。$x[n]$的 DFT 为：

$$X(k) = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = \frac{jN}{2}[\delta(k + fTN) - \delta(k - fTN)]$$

可见 DFT 序列的实部恒为 0。当fTN为整数时，虚部在$k = fTN$和$k = N - fTN$处分别存在冲激信号，幅值为$N/2$。当fTN不为整数时，fTN对应的谱峰在频谱图上不可见，频谱上在最接近fTN和$N - fTN$的整数k上出现峰值，且不一定相等。

根据采样定理，当$f_s \ge 2f_m$时，不会发生频域混叠。由于有限长序列$x[n]$的N点 DFT 变换$X(k)$可以看作是$x[n]$的周期延拓序列$x([n])_N$的 DFS 序列的主值，若观察区间为正弦周期的整数倍，则不会发生混叠和泄漏；若观察区间不为正弦周期的整数倍，即对时域进行非周期截断，此时周期延拓序列不是标准的正弦序列，时域上存在跳变的高频分量，不满足采样定理，频域上出现混叠和泄漏。

根据上述分析，在各组谱分析参数条件下，频谱的特征如表 1 所示。

表 1 频谱特征推测

参数	$f_s(Hz)$	fTN	峰值数	谱峰频率(U)	谱峰值(V)	有无混叠	有无频谱泄漏
第一组	1600	1	2	$k = 1$、31	16、-16	无	无
第二组	200	8	2	$k = 8$、24	16、-16	无	无
第三组	213.3	7.5	4	$k_1 = 7$、25 $k_2 = 8$、24	10.25	有	有
第四组	250	6.4	4	$k_1 = 6$、26 $k_2 = 7$、25	11.97	有	有
第五组	400	2	2	$k = 2$、30	8	无	无

6-2 观察实验结果（数据及图形）的特征，做必要的记录。并用基本理论、基本概念来解释各种现象。

6-2-1 $x[n] = cos(0.24\pi n) + cos(0.36\pi n)$的有限样本频谱

当$0 \le n \le 9$时，$x[n]$基于 N=10 点 DFT 和 N=100 点的 DFT 分别如图 1、图 2 所示

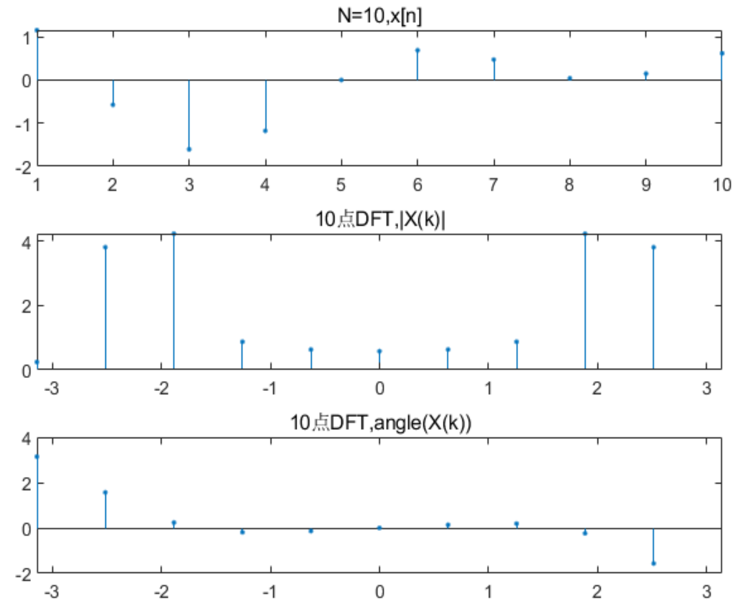

图 2 N=10，10 点 DFT

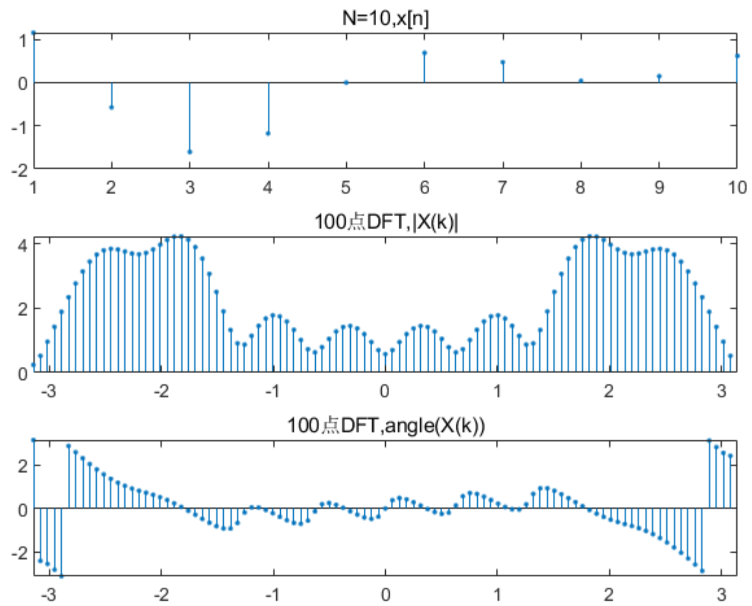

图 1 N=10，100 点 DFT

当$0 \le n \le 99$时，$x[n]$基于 N=100 点的 DFT 如图 3 所示

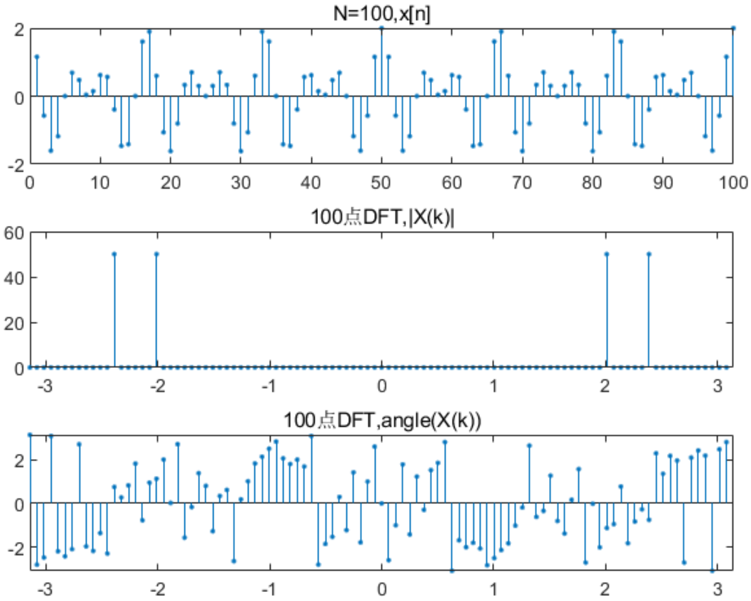

图 3 N=100，100 点 DFT

补零（高密度频谱）和采集更多数据（高分辨率频谱）之间的区别：通过补零的方式来增加 N，将得到 DTFT 频谱上的更多采样点，即频域采样率增加。补零后再进行 DFT 可以得到高密度谱，但不能得到高分辨率谱，因为补零并没有任何新的信息附加到这个信号上。要想得到高分辨率谱，需要通过提高采样点数 N 获得更多的数据。分析对比图 2 和图 3 可以看到，N=100 时的 DFT 频谱上可以清晰看到对应$\omega = \pm 0.24\pi$和$\omega = \pm 0.36\pi$的四个尖峰，即频率的分辨率高，但 N=10 时的 DFT 频谱上两个尖峰就不可见，即使进行 100 点 DFT，也只是增加了$[-\pi, \pi]$之间的 DTFT 频谱的插值数，即提高谱密度。

6-2-2-1 对各组参数时的序列，计算：一个正弦周期是否对应整数个抽样间隔？观察区间是否对应整数个正弦周期？

正弦周期$T_0 = \frac{1}{f} = 0.02s$，在采样间隔$T$、采样区间长度$N$条件下，一个正弦周期的抽样间隔数$m_1 = \frac{T_0}{T}$，区间内对应的正弦周期数$m_2 = \frac{NT}{T_0}$，得到表 2。

表 2

组号	m_1	m_1是否为整数	m_2	m_2是否为整数
1	32	是	1	是
2	4	是	8	是
3	4.27	否	7.5	否
4	5	是	6.4	否
5	8	是	2	是

6-2-2-2 观察并记录正弦序列的图形（时域）、频谱（幅度谱、频谱实部、频谱虚部）形状、幅度谱的第一

个峰的坐标（U，V），并用基本理论、基本概念来解释各种现象。

（1）第一组参数

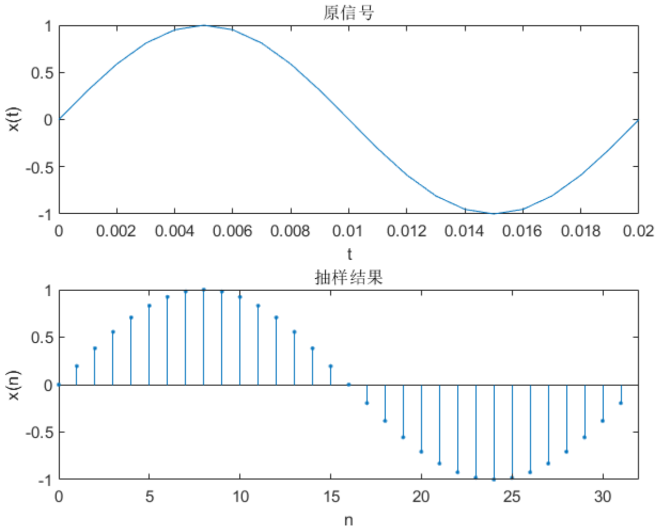

图 5 第一组参数时域图

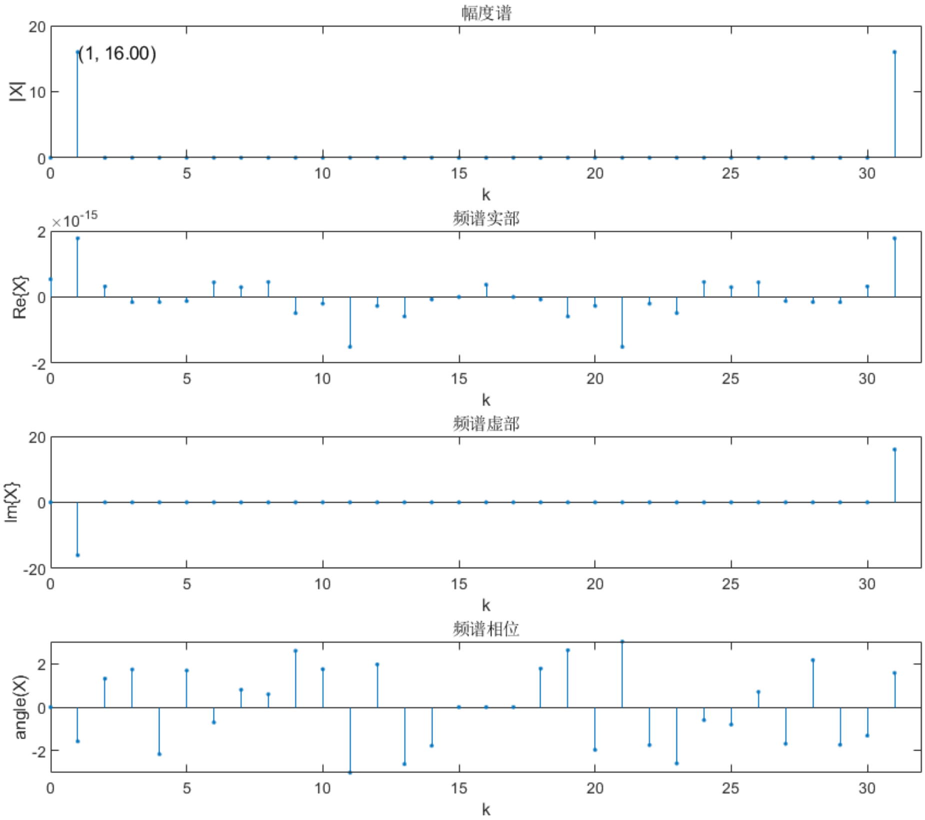

图 4 第一组参数频谱图

分析：第一组参数中，一个正弦周期对应 32 个抽样间隔，观察区间对应 1 个正弦周期，与计算值一致。DFT 幅度谱在$k=1$和$k=31$两处存在峰值 16，第一个峰值的坐标为（1，16）。由于时域为实奇序列，其 DFT 频谱为虚奇序列，实部为 0，虚部奇对称，且在$k=1$、$k=31$两处存在峰值，分别为-16 和+16。由于

观察区间为整数个正弦周期，此时频谱没有明显的混叠和泄漏。

（2）第二组参数

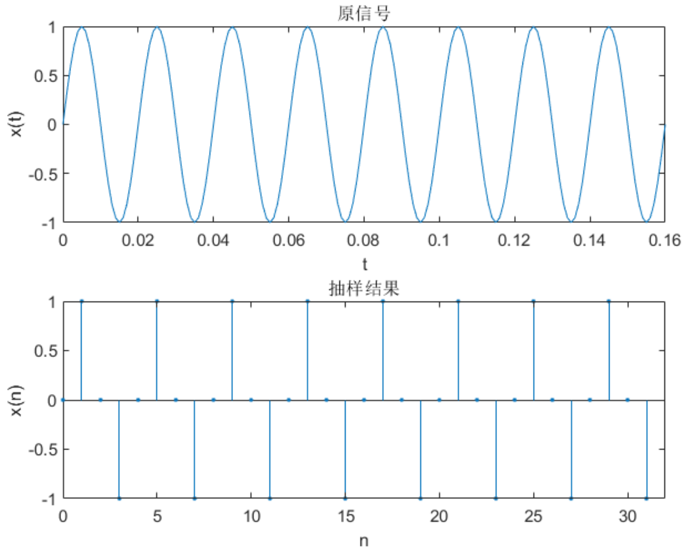

图 7 第二组参数时域图

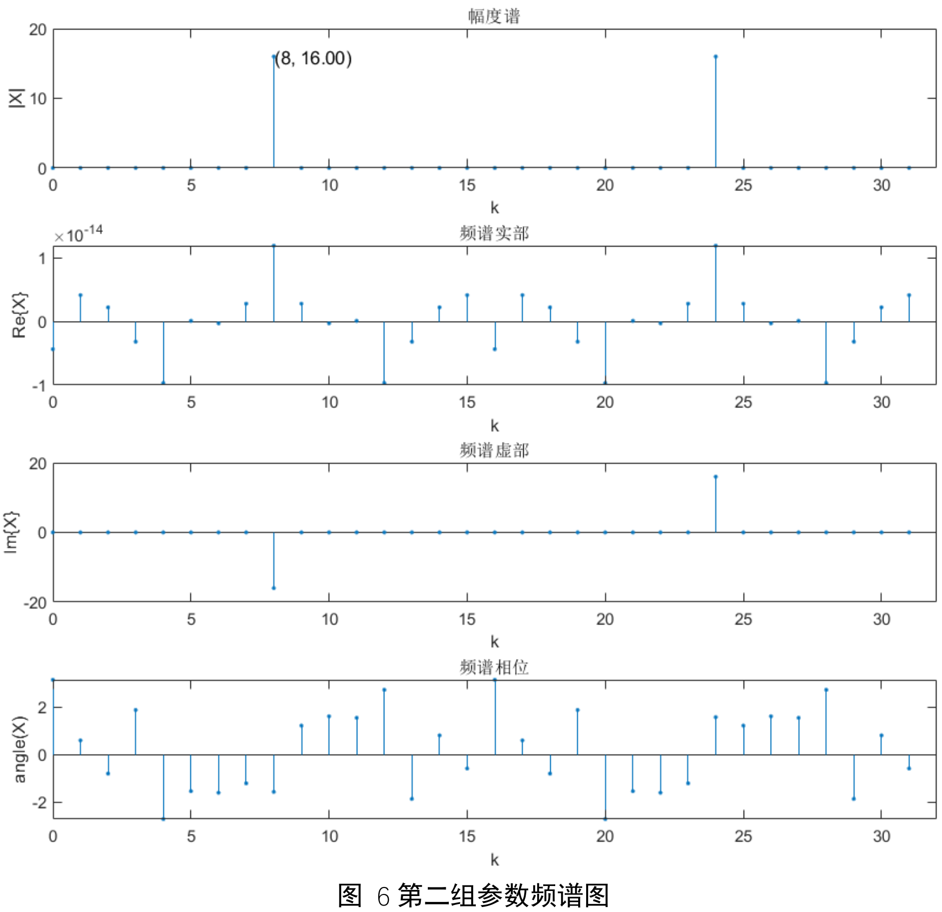

图 6 第二组参数频谱图

分析：第二组参数中，一个正弦周期对应 4 个抽样间隔，观察区间对应 8 个正弦周期，与计算值一致。DFT 幅度谱在$k = 8$和$k = 24$两处存在峰值 16，第一个峰值的坐标为（8，16）。由于时域为实奇序列，其 DFT 频谱为虚奇序列，实部为 0，虚部奇对称，且在$k = 8$、$k = 24$两处存在峰值，分别为-16 和+16。由于观察

区间为整数个正弦周期，此时频谱没有明显的混叠和泄漏。

（3）第三组参数

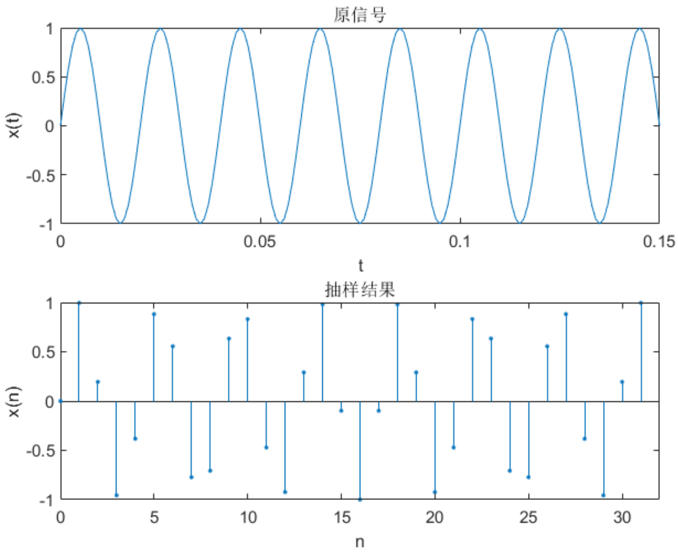

图 9 第三组参数时域图

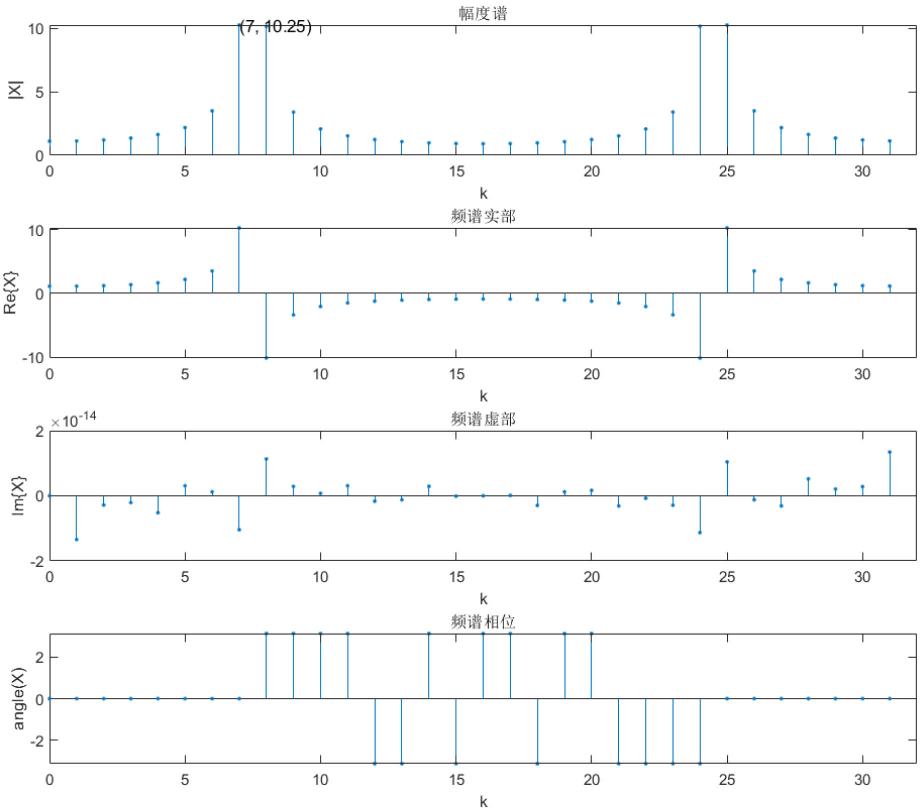

图 8 第三组参数频谱图

分析：第三组参数中，一个正弦周期未对应整数个抽样间隔，观察区间也未对应整数个正弦周期。此时抽样序列为实偶序列，DFT 频谱为实偶序列。幅度谱在$k = 7$、25和$k = 8$、24四处存在峰值，第一个峰值坐标为（7，10.25），与预测相符。可以看到，由于抽样点未能完整表现原始信号整个周期内的特征，存在的

跳变导致高频分量的产生，此时频谱发生明显的混叠和泄漏，不同的频率值下都有频率分量，与原信号频谱差异较大。

（4）第四组参数

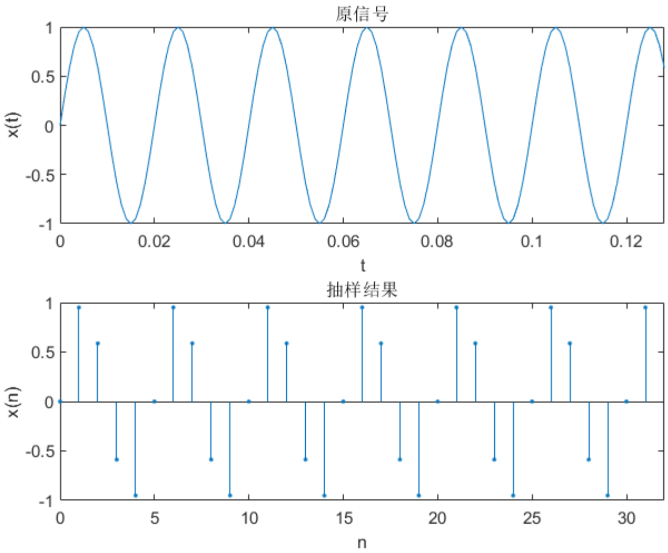

图 11 第四组参数时域图

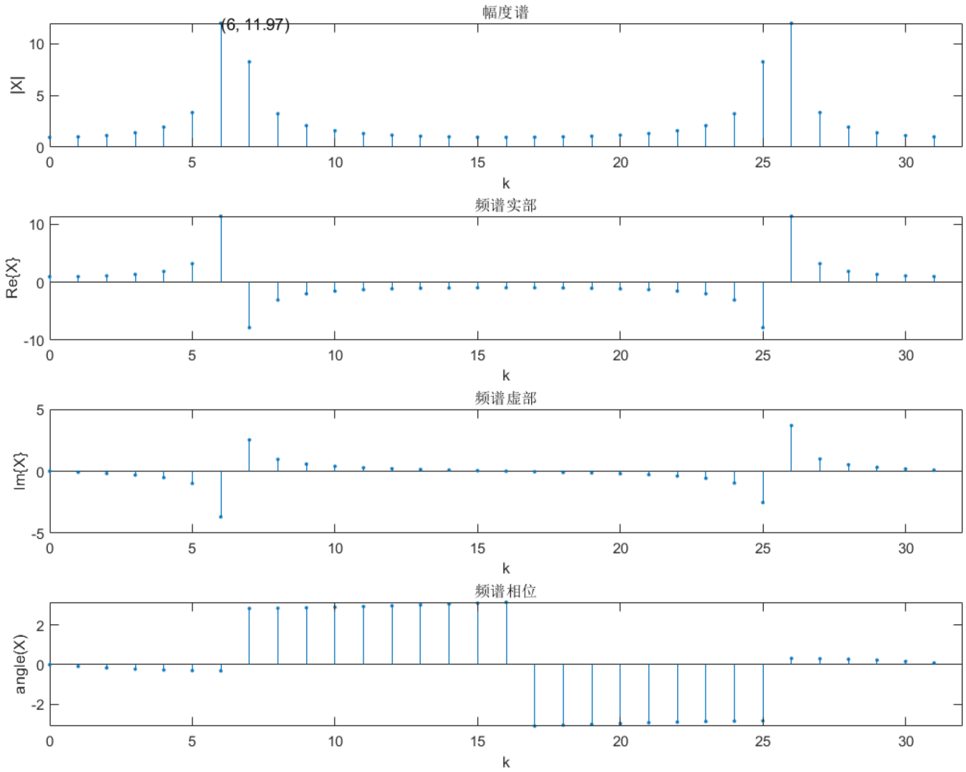

图 10 第四组参数频谱图

分析：在第四组参数中，一个正弦周期对应 5 个抽样间隔，但观察区间未对应整数个正弦周期。幅度谱在$k=6$、$k=26$和$k=7$、$k=25$四处存在峰值，符合预期。幅度谱第一个峰值的坐标为(6,11.97)。由于时域信号为实序列，其 DFT 所得频谱虚、实部分别为奇、偶对称，且在$k=6$、$k=26$和$k=7$、$k=25$四处

也取得峰值，虚实部符号恰好相反。由于观察区间未对应整数个正弦周期，跳变依旧存在，频谱发生了混叠和泄漏，与原信号频谱差异较大。

（5）第五组参数

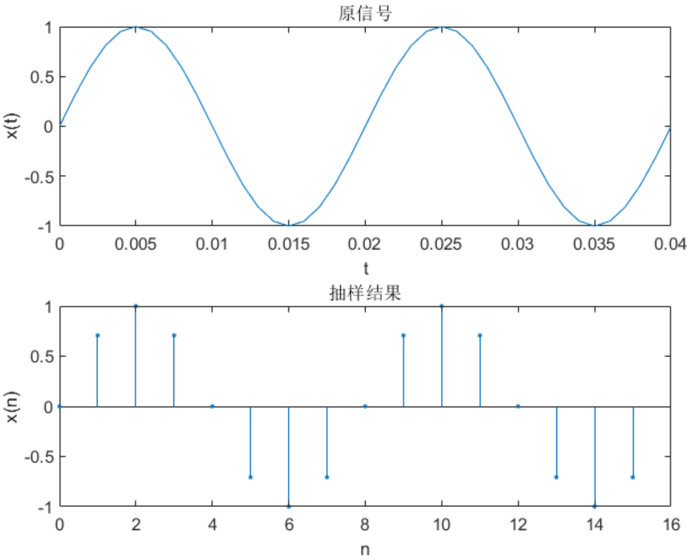

图 13 第五组参数时域图

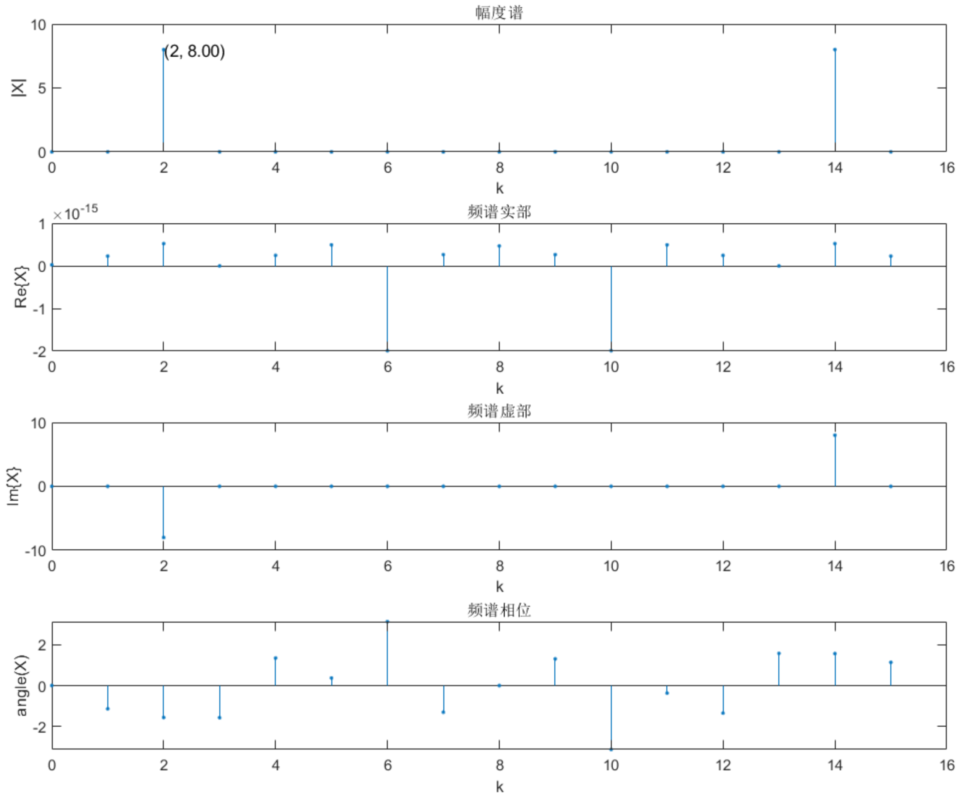

图 12 第五组参数频谱图

分析：在第五组参数中，一个正弦周期对应 8 个抽样间隔，观察区间对应 2 个正弦周期，与计算值一致。幅度谱在$k=2$及$k=14$两处存在峰值，峰值均为 8，其余处的值为 0，此时幅度谱第一个峰值的坐标为

(2,8)。由于时域为实奇序列，其 DFT 频谱为虚奇序列，实部为 0，虚部为奇对称，且在$k = 2$及$k = 14$两处存在峰值，分别为-8 和+8，符合预期结果。由于观察区间为整数个正弦周期，此时频谱没有明显的混叠和泄漏。

6-2-2-3 分析抽样间隔 T、截断长度 N（抽样个数）对谱分析结果的影响。

由奈奎斯特采样定理，当$f_s = \frac{1}{T} \geq 2f_m$，频谱不会发生混叠。根据理论分析和实验结果，只有当序列的观察区间内含有整数个信号周期，即$NT = mT_0$，其中T_0为信号周期，才能得到正确的 DFT 频谱图；如果在信号的非整数周期点进行截断，会产生跳变的高频分量，导致频谱图出现频谱泄漏和混叠现象。对比第三组和第四组参数实验结果可知，当非整周期部分占整体信号的比例逐渐减少时，频谱泄漏也会逐渐减弱，频率幅值偏差逐渐减小。

当提高抽样点数N时，能够得到高分辨率谱，有助于抑制栅栏效应，可以看到信号频域中的更多信息，但不会改善频谱中频率即幅值的准确性。

6-2-2-4 思考$X(k)$和$X\left(e^{j\omega}\right)$的关系。

$X(k) = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|\omega = \frac{2\pi k}{N}$，即$X(k)$是对$X(e^{j\omega})$在$[0,2\pi]$之间的均匀采样。当$N$增大时，DFT 在区间内的划分越来越密，当$N \to +\infty$时，$\omega$从离散的值变为整个实数区间，DFT 谱变为 DTFT 谱。当N取有限值时，由于栅栏效应，DFT 的结果仅能反映出有限个离散频率采样点代表的频域特性，此时可以通过补零的方式得到高密度谱，或增大N值得到高分辨率谱。

6-2-2-5 讨论用$X(k)$近似表示$X\left(e^{j\omega}\right)$时的栅栏效应、混叠现象、频谱泄漏。

当用$X(k)$近似表示$X(e^{j\omega})$时，栅栏效应始终存在，但可以增加抽样个数N来抑制栅栏效应。对于混叠现象，在进行时域取样的过程中，若信号不满足带限的条件，或取样频率不满足采样定理，即会产生混叠。对于非带限信号，需要对信号进行滤波处理，从而减轻混叠产生的偏差。此外，若在加窗处理时进行了非周期阶段等操作导致时域信号存在跳变，则得到的频谱可能会存在高频分量，从而导致混叠和频谱泄漏。

七、总结

此次实验使用了 DFT 对信号谱进行了分析，复习并掌握了频域混叠、频谱泄漏等概念，区分了高密度谱和高分辨率谱之间的区别，理解了抽样间隔、截断长度对频谱的影响。