



数字信号处理

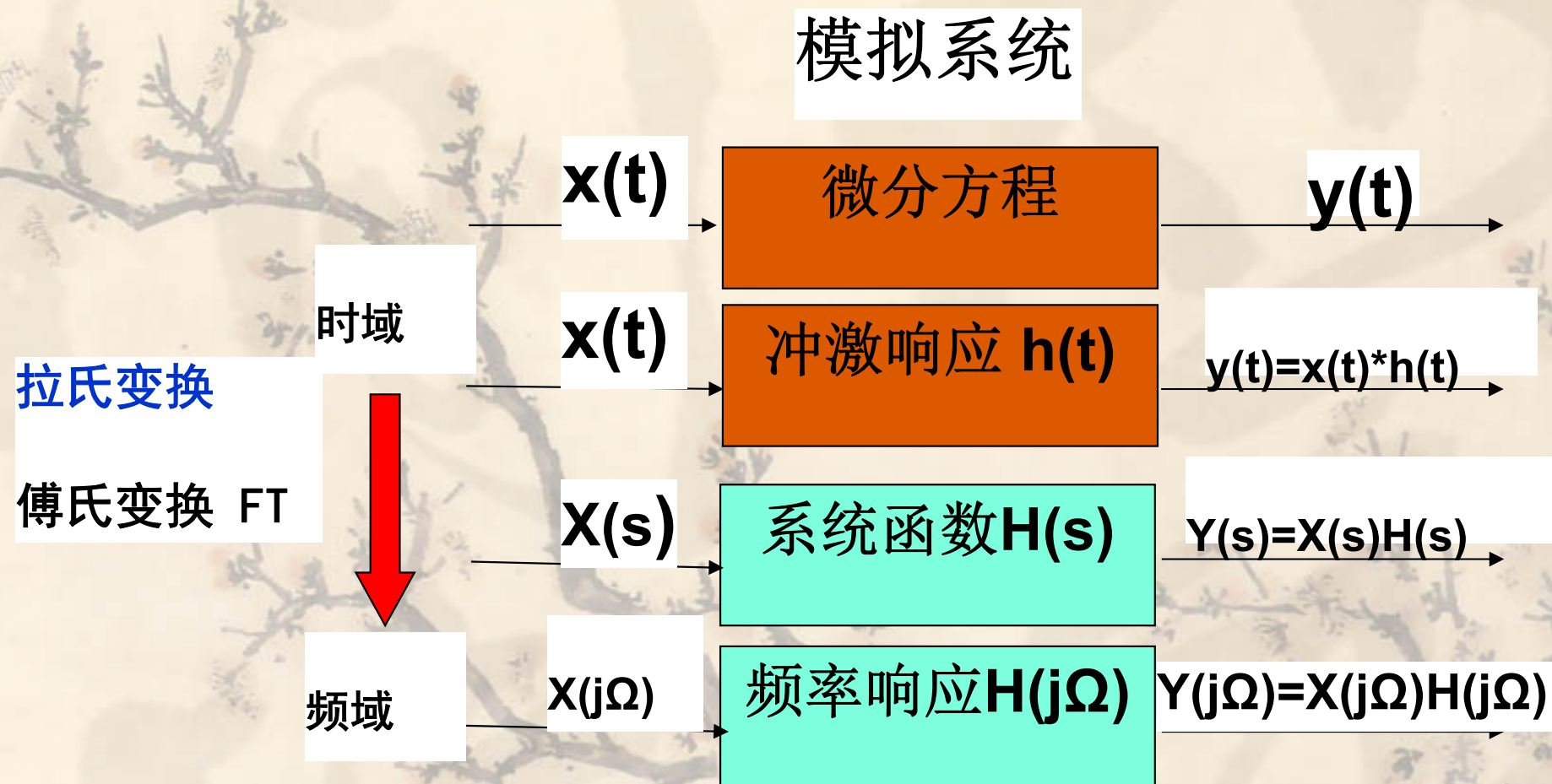
Digital Signal Processing

第 2 章 离散时间信号与离散时间系统

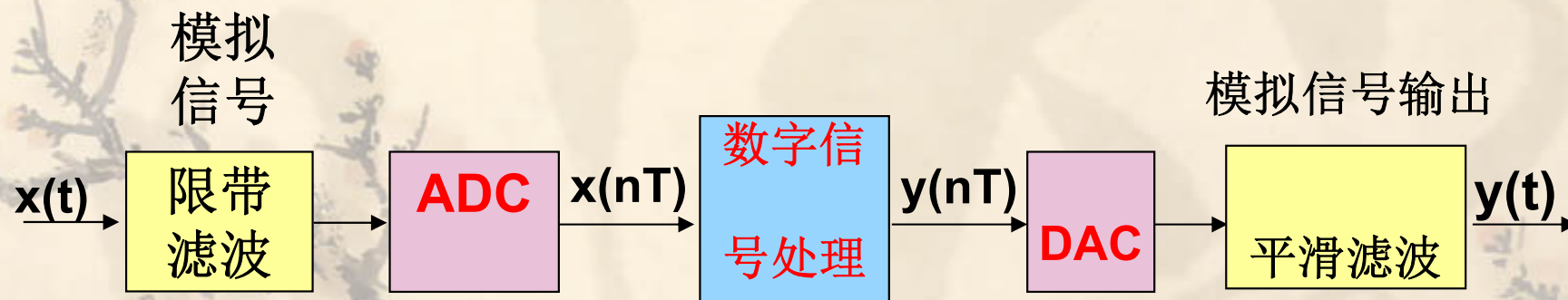
离散时间信号与离散时间系统

- 2.1 取样和内插
- 2.2 离散时间信号
- 2.3 时域离散系统的基本概念
- 2.4 离散系统的差分方程描述及信号流图
- 2.5 离散时间信号的傅氏变换
- 2.6 Z变换的定义及其收敛域
- 2.7 Z反变换
- 2.8 Z变换的性质
- 2.9 一些常用的z变换对
- 2.10 Z变换与拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系
- 2.11 离散系统的频域分析

回顾：模拟系统和模拟信号的变换



2.1 取样和内插



- ❖ **取样 (ADC)**：模拟信号的离散化过程
数字信号处理的第一个问题是将信号离散化（取样）。
- ❖ **内插 (DAC)**：离散信号变为连续信号的过程

2.1.1 取样和取样定理：取样

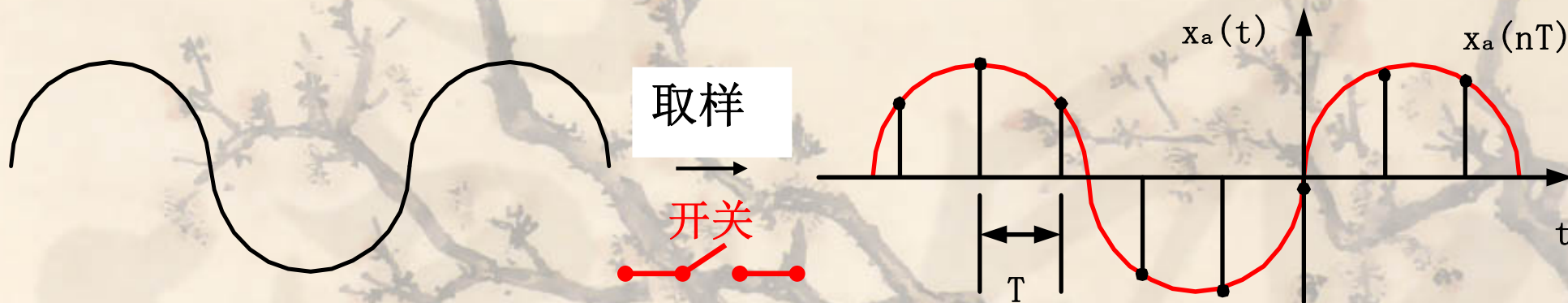
按取样间隔来分

- 均匀取样
- 非均匀取样

❖ **取样**：从连续时间信号中提取离散时间样本的过程，即时间轴上离散化的过程。

■ 常用方法是**等间隔周期**取样，如下图：

$$x(n) = x_a(t) \big|_{t=nT} = x_a(nT)$$



✧ 其中 **T** 为取样周期，它的倒数为取样频率，记为：

取样频率 $\Rightarrow f_s = \frac{1}{T}$

$\Omega_s = 2\pi f_s \leftarrow$ 取样角频率

2.1.1 取样和取样定理： 取样定理

■ 如何从离散样本中恢复连续时间信号？ 取样定理

■ 奈奎斯特取样定理：任一频率有限的连续信号 $x_a(t)$ ，如果其频谱的最高频率分量为 f_m ，则对其进行取样时，只要选择取样率大于或等于 $2f_m$ ，就可以由这个取样序列 $x_a(nT)$ 惟一准确地恢复 $x_a(t)$ 。

■ 重点：

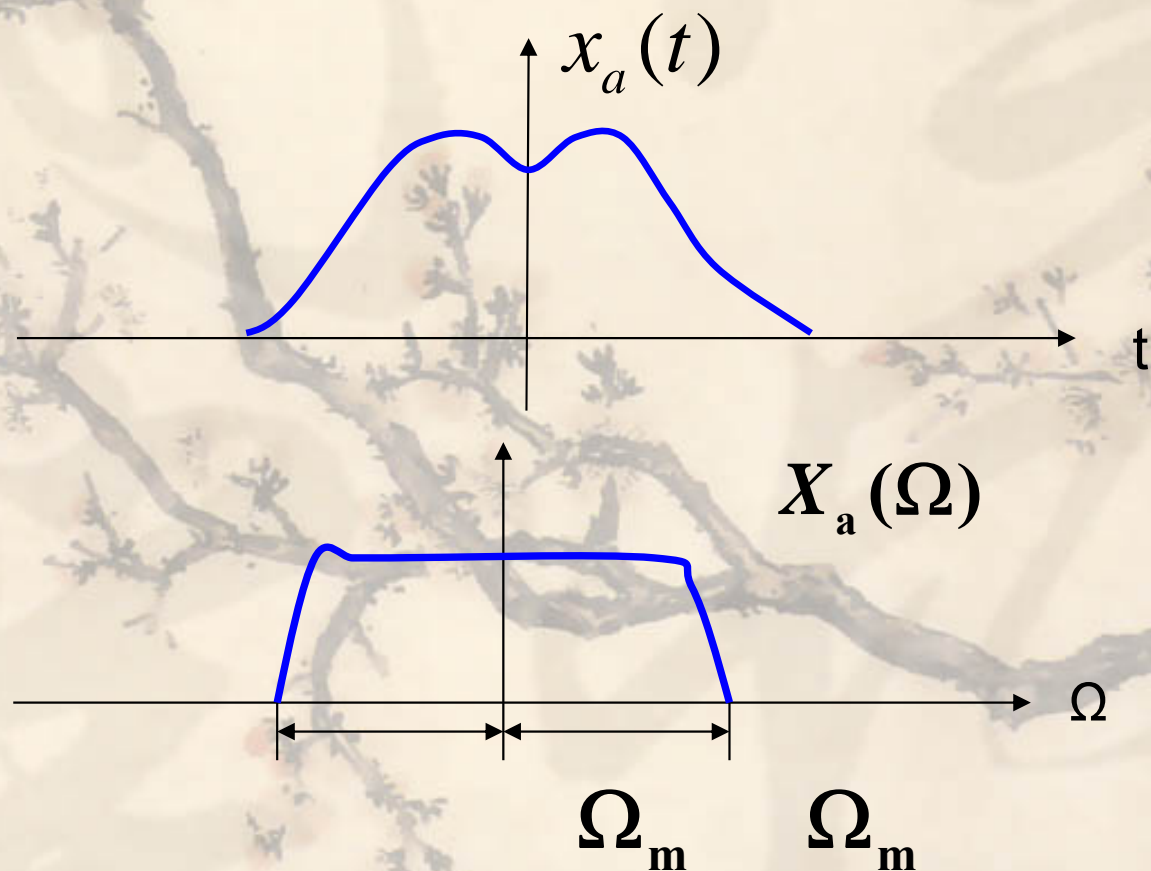
□ 连续函数是带限函数；

□ 取样频率和信号最高频率的关系为：

$$f_s \geq 2 f_m$$

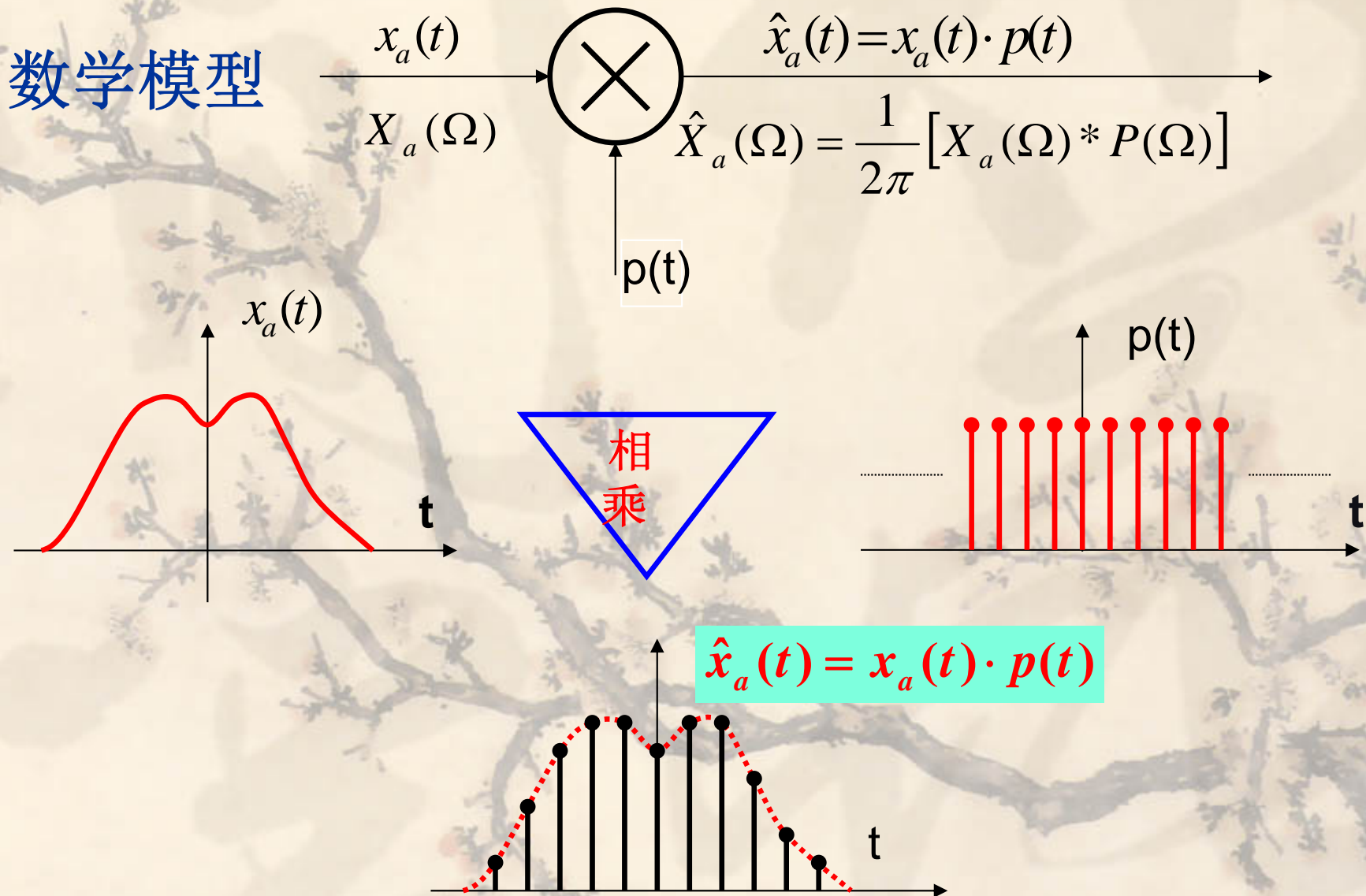
2.1.1 取样和取样定理：时域分析

设一带限函数 $x_a(t)$ ，当 $|\Omega| \geq \Omega_m$ 时，其傅氏变换 $X_a(\Omega) = 0$ ，将 $x_a(t)$ 乘以取样函数 $p(t)$ ，得 $\hat{x}_a(t)$ ：



2.1.1 取样和取样定理：时域分析

数学模型



2.1.1 取样和取样定理：时域分析

■ 取样函数定义为：

$$p(t) = \frac{1}{T} \text{comb}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

----- T : 取样间隔

则：

$$\begin{aligned} \hat{x}_a(t) &= x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t)\delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)\delta(t - nT) \end{aligned}$$

可以看到， $\hat{x}_a(t)$ 是无穷多个等间隔的 δ 函数的加权集合，加权值是在 nT 处的函数值（取样值） $x_a(t)$ 。

2.1.1 取样和取样定理：频域分析

时域相乘 $\xrightarrow{\text{映射}}$ 频域卷积

因此，时域取样 $\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot p(t)$

则映射到频域为： $\hat{X}_a(\Omega) = \frac{1}{2\pi} [X_a(\Omega) * P(\Omega)]$

❖ 因 $p(t)$ 是周期为 T 的函数，可以展开成级数和的形式：

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_m e^{jn\Omega_s t} \quad \text{其中 } \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

2.1.1 取样和取样定理：频域分析

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jnt\Omega_s} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] e^{-jnt\Omega_s} dt$$

在 $|t| \leq T/2$ 的积分区间内，只有一个冲激脉冲 $\delta(t)$ ，其它冲激脉冲在 $\delta(t - nT)$ $n \neq 0$ 时都在积分区间之外，因此：

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jnt\Omega_s} dt = \frac{1}{T} e^{-jn\Omega_s \cdot 0} = \frac{1}{T}$$

$$\therefore p(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt\Omega_s}$$

2.1.1 取样和取样定理：频域分析

$$\because p(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_s t} \quad \text{且} \quad e^{j\Omega_s t} \rightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_s)$$

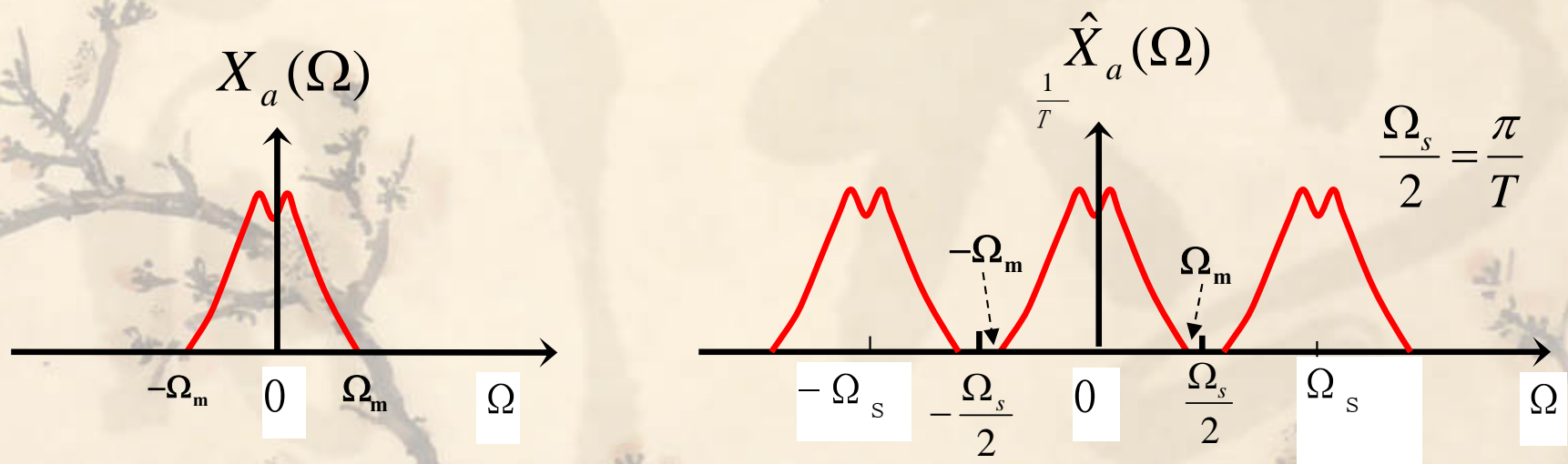


$$P(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_s) \quad \text{其中} \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore \hat{X}_a(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - n\Omega_s)$$

离散信号的频谱和原始信号的频谱相差常数因子 $1/T$,
是原始信号频谱的周期延拓。

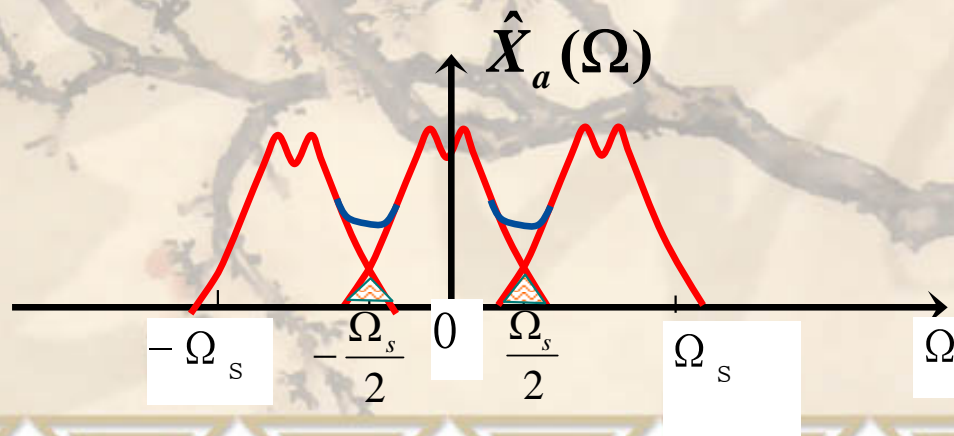
2.1.1 取样和取样定理：频域分析



连续信号的谱和取样信号的谱

$$|\Omega|_{\max} \leq \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

❖ 然而，当 $|\Omega|_{\max} > \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$ 时，出现混迭



2.1.1 取样和取样定理：小结

❖ 若 $x_a(t)$ 是一带限函数

$$X_a(\Omega) = \begin{cases} X_a(\Omega), & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

■ 只要取样频率足够高，当满足以下条件时

$$|\Omega|_{\max} \leq \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

----- (奈奎斯特定理)

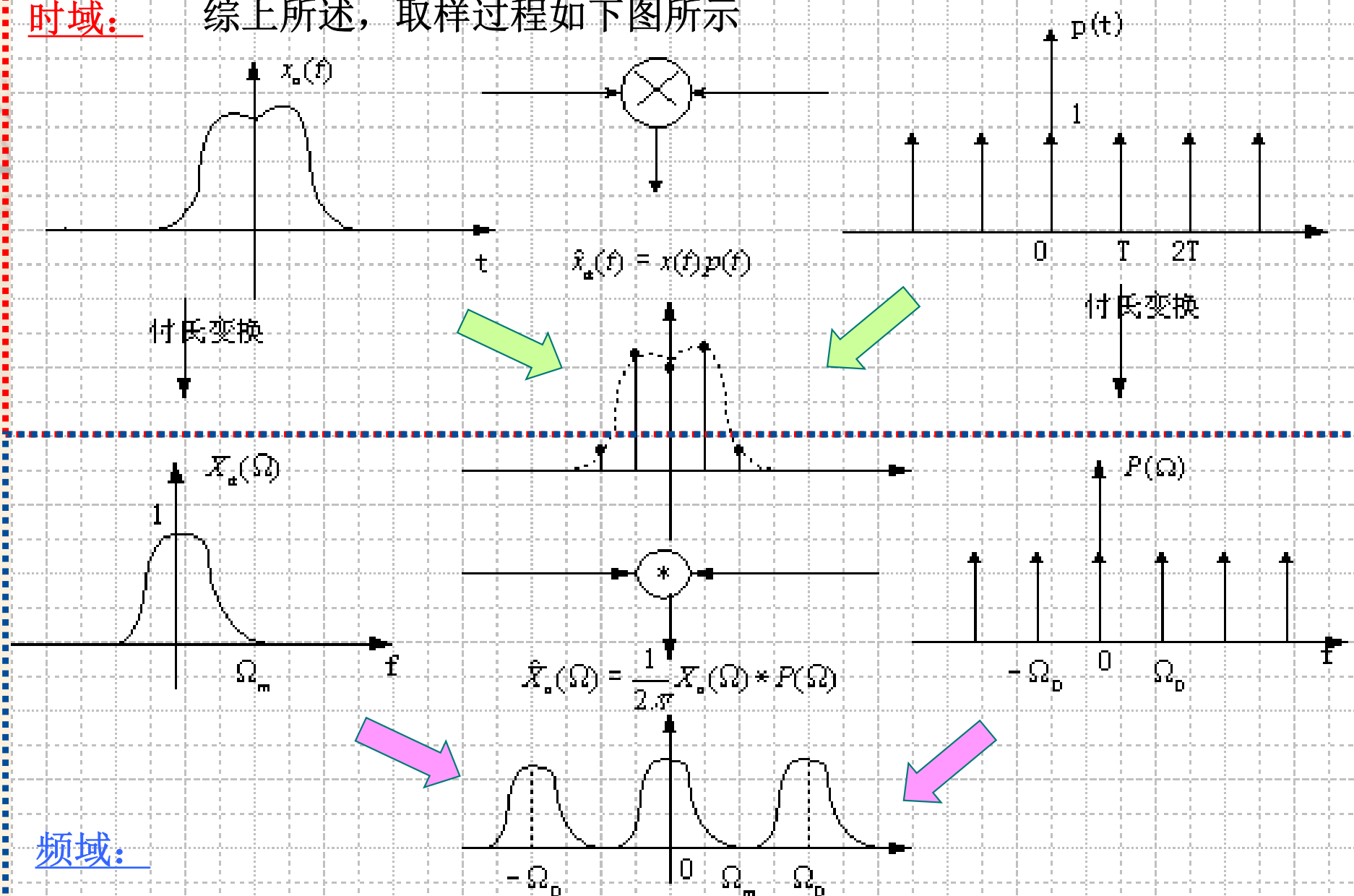
$$f_s \geq 2f_{\max}$$

频谱不发生混迭，可以不失真的恢复

$f_s = 2f_m$ 是最低允许的取样频率，称为“奈奎斯特取样频率”

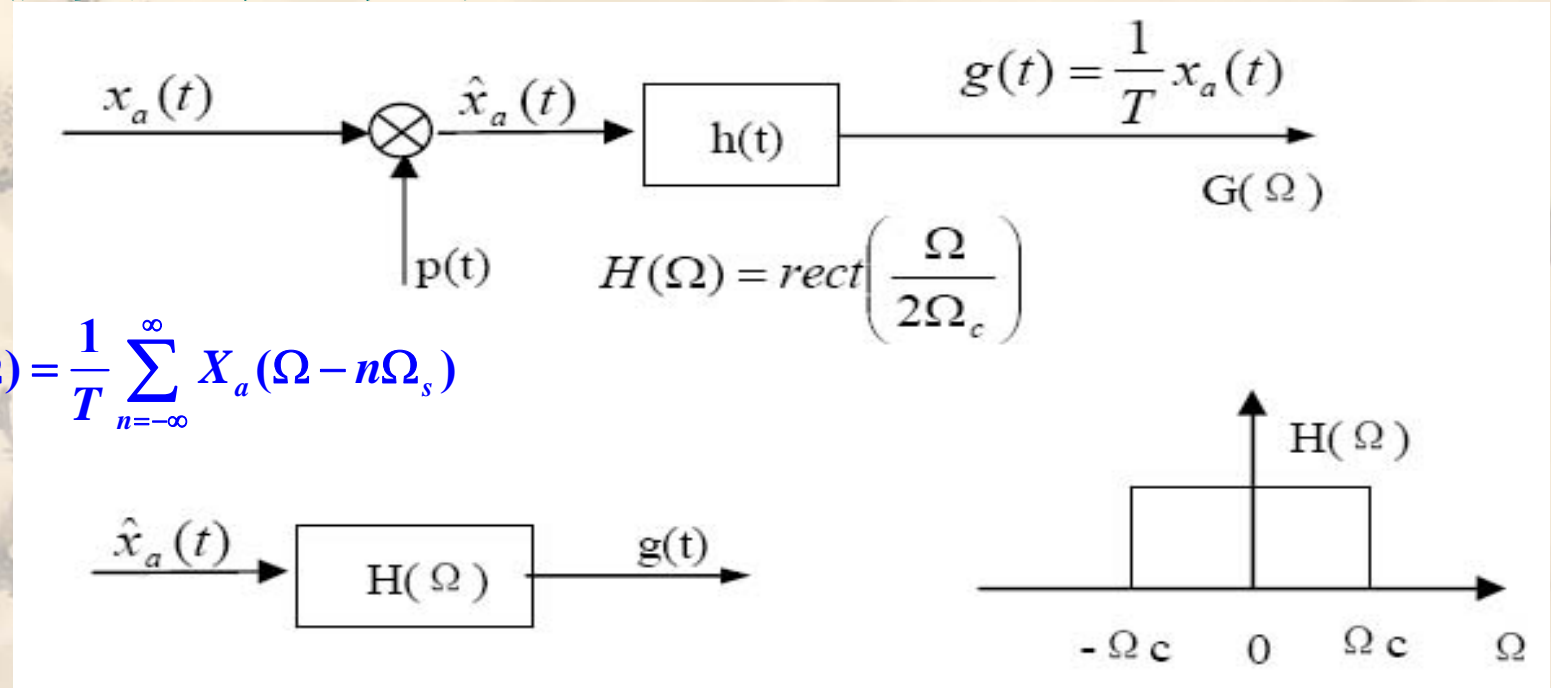
2.1.1 取样和取样定理：小结

时域： 综上所述，取样过程如下图所示



2.1.2 内插：理想的 DAC 变换—频域分析

- ❖ 用大于奈奎斯特取样频率对带限函数 $x_a(t)$ 取样，被取样函数经过理想低通，只要截止频率满足 $\Omega_{\max} \leq \Omega_c \leq \Omega_s - \Omega_{\max}$ ，就可以恢复原来的信号。

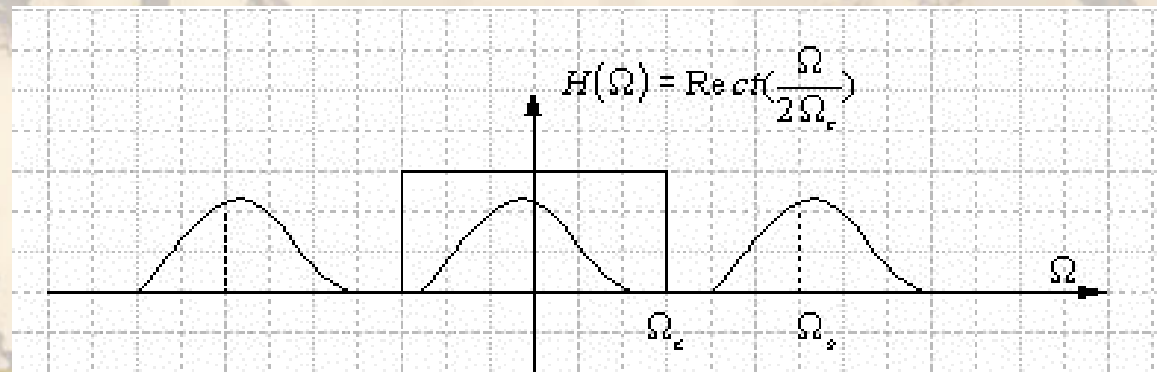


$$\hat{X}_a(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - n\Omega_s)$$

$$G(\Omega) = \hat{X}_a(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

$$= \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - n\Omega_s) \right] \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_c}\right)$$

$$= \frac{1}{T} X_a(\Omega)$$



2.1.2 内插：理想的 DAC 变换—时域分析

- ❖ 把输出 $g(t)$ 看成是 $\hat{x}_a(t)$ 与脉冲响应 $h(t)$ 的卷积

$$g(t) = \hat{x}_a(t) * h(t)$$

其中 $h(t)$ 又称为内插函数。

- ❖ 在上述表达式中，
我们已知：

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT)$$

- ❖ 我们还需要求得 $h(t)$ ？

2.1.2 内插：理想的 DAC 变换—时域分析

❖ 理想滤波器的冲激响应 $h(t)$ 可由其傅氏反变换求得：

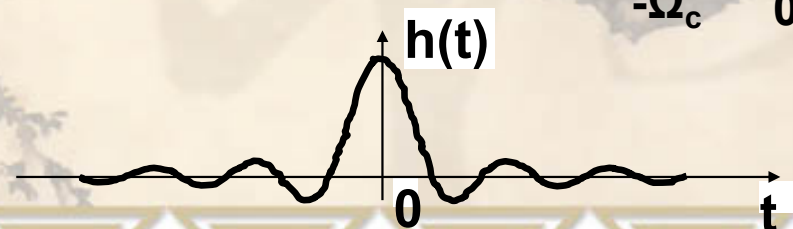
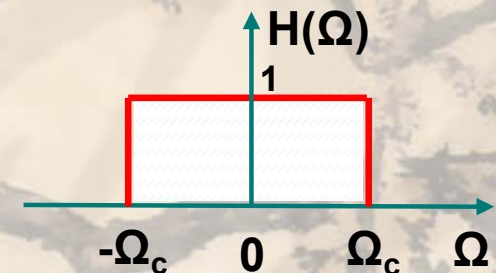
$$h(t) = F^{-1}[\text{rect}(\frac{\Omega}{2\Omega_c})]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\frac{\Omega}{2\Omega_c}) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi jt} (e^{j\Omega_c t} - e^{-j\Omega_c t}) = \frac{1}{\pi t} \sin \Omega_c t$$

$$= 2f_c \frac{\sin 2\pi f_c t}{2\pi f_c t}$$

$$= 2f_c \text{sinc}(2f_c t)$$



2.1.2 内插：理想的 DAC 变换—时域分析

$$\because \hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) \quad h(t) = 2f_c \operatorname{sinc}(2f_c t)$$

所以

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) * 2f_c \operatorname{sinc}(2f_c t) \\ &= 2f_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)[\delta(t-nT) * \operatorname{sinc}(2f_c t)] \\ &= 2f_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\operatorname{sinc}[2f_c(t-nT)] \end{aligned}$$

2.1.2 内插：理想的 DAC 变换—时域分析

■ 因为离散信号的频谱 $\hat{x}_a(\Omega)$ 与原始信号的频谱 $x_a(\Omega)$ 仅差一常数因子 $1/T$ ，因此，恢复后的信号

$$g(t) = 2f_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \text{sinc}[2f_c(t - nT)]$$



$$g(t) = \frac{1}{T} x_a(t)$$



$$G(\Omega) = \hat{X}_a(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

$$= \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - \Omega_s) \right] \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_c}\right)$$

$$= \frac{1}{T} X_a(\Omega)$$

所以，恢复后的信号为：

$$x_a(t) = 2f_c T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \text{sinc}[2f_c(t - nT)]$$

❖ 在 $t=nT$ 点上，加权内插函数正比例于该点 $x(t)$ 的值；

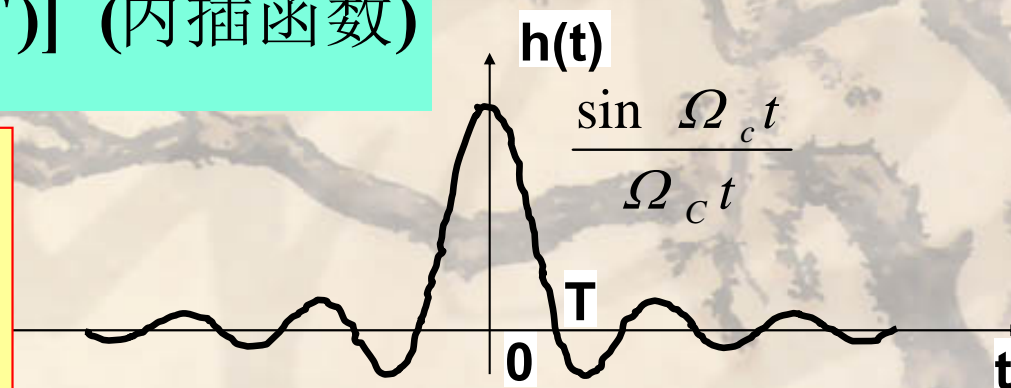
2.1.2 内插：理想的 DAC 变换—时域分析

■如果选取 $2f_c = f_s$ 即取样频率 2 倍于截止频率，则得：

$$\begin{aligned}x_a(t) &= 2f_c T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \operatorname{sinc}[2f_c(t - nT)] \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \operatorname{sinc}[f_s(t - nT)] \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \operatorname{sinc}\left[\frac{t - nT}{T}\right]\end{aligned}$$

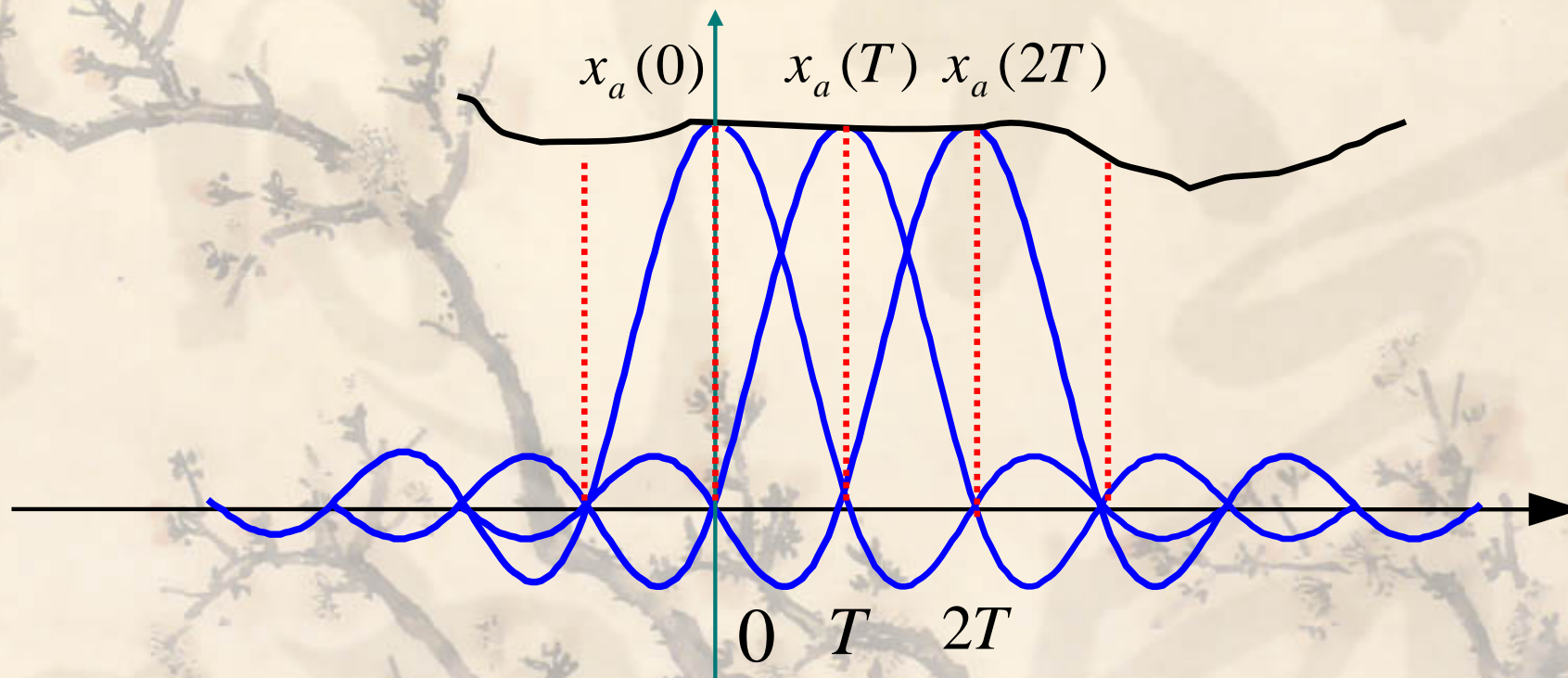
$$\phi_n(t) = \phi(t - nT) = \operatorname{sinc}\left[\frac{1}{T}(t - nT)\right] \quad (\text{内插函数})$$

$\operatorname{Sinc}[(t-nT)/T]$ 函数在取样点 $t=nT$ 上的函数值是 1，其余取样点上的值是零。



2.1.2 内插：理想的 DAC 变换—时域分析

- ❖ 由此可知，若 sinc 插值函数的零点间距等于取样间距（周期），则：



- ❑ 在任一取样点上它们的和等于该点的样值 $x(nT)$;
- ❑ 在其他点处将等于无穷多个 **sinc** 值迭加而成，能完全恢复原来的连续信号;
- ❑ 由于内插函数不同，在取样点间的曲线将不同。

2.1.2 内插：理想的 DAC 变换

❖ 结论：要完全恢复原来的连续信号 $x_a(t)$ ，要满足以下条件：

- 限带信号；

- 无限次的理想取样（ δ 函数）；（ $N \rightarrow \infty$ ）

- 理想低通滤波器，即sinc内插函数（其截止频率满足

$$B \leq f_c \leq \frac{f_s}{2} \text{) 。$$

❖ 但上述后两条在物理上都是不可实现的，因此，原始信号在实际中不能由取样真实的重建，而只能逼近原来的信号。

❖ 例: 有一理想取样系统, 取样角频率为 $\Omega_s = 6\pi$, 取样后经过理想低通滤波器 $H_a(j\Omega)$ 还原, 其中

$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |\Omega| < 3\pi \\ 0 & |\Omega| \geq 3\pi \end{cases}$$

令有两个输入 $x_{a_1}(t) = \cos 2\pi t$, $x_{a_2}(t) = \cos 5\pi t$, 输出信号 $y_{a_1}(t)$, $y_{a_2}(t)$ 有无失真?

解:

$$x_{a_1}(t) = \cos 2\pi t \quad \Omega_{\max_1} = 2\pi < \frac{6\pi}{2} = 3\pi \quad y_{a_1}(t) \text{ 无失真}$$

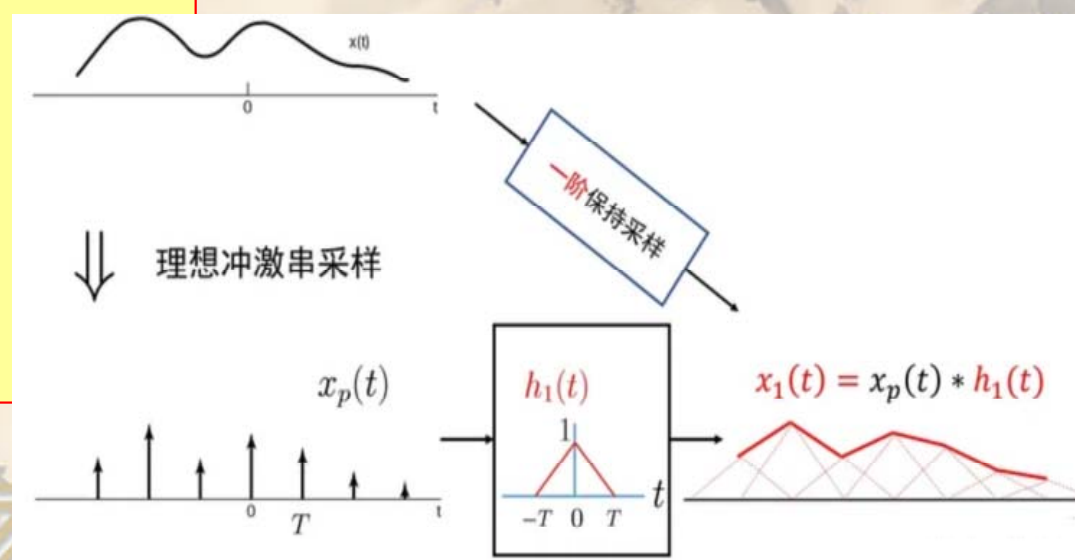
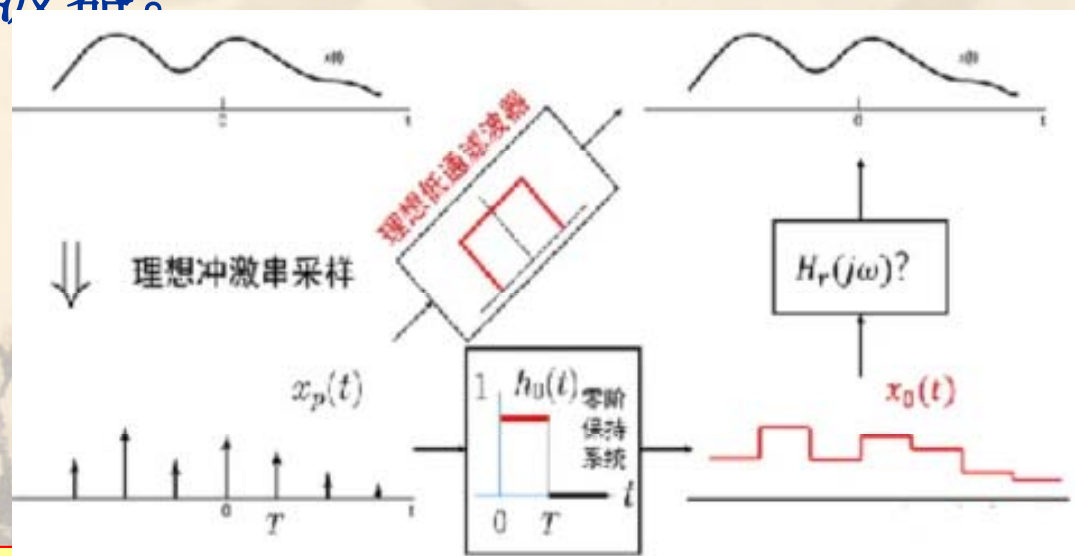
$$x_{a_2}(t) = \cos 5\pi t \quad \Omega_{\max_2} = 5\pi > \frac{6\pi}{2} = 3\pi \quad y_{a_2}(t) \text{ 有失真}$$

2.1.2 内插：实际的 DAC 变换

❖ 实际应用中，用模拟低通滤波器代替理想低通滤波器，即用**有限阶的内插**（实际上是低阶的）代替上述一个无限阶低通滤波器 **sinc** 内插滤波器。

❖ 实现方法有：

- 零阶保持内插 (ZOH)
- 一阶保持内插 (FOH)
- 三次样条内插



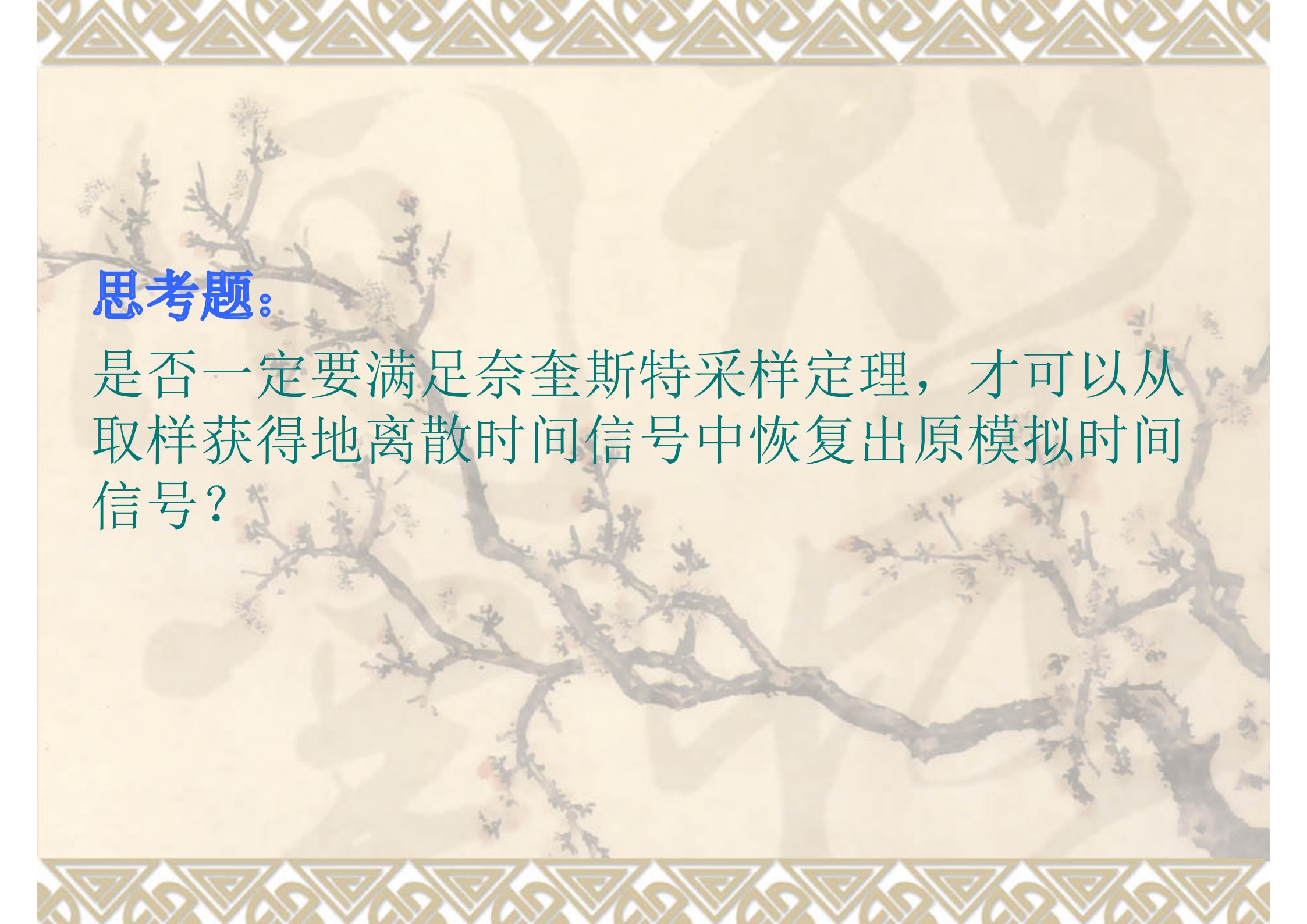
2.1.2 内插：本节小结

❖ 取样定理：

- 连续信号 $x_a(t)$ 频谱的最高频率分量为 f_m ，取样时，选择取样率大于或等于 $2f_m$ ，就可以由取样序列 $x_a(nT)$ 来惟一准确地恢复 $x_a(t)$ 。
- 分析：时域 \Rightarrow 频域 \Rightarrow Nyquist 取样频率

❖ 内插：

- 理想的 D/A 变换：理想低通滤波器，或无穷多个 sinc 值加权之和。
- 实际的 D/A 变换器：ZOH、FOH、三次样条内插



思考题：

是否一定要满足奈奎斯特采样定理，才可以从取样获得地离散时间信号中恢复出原模拟时间信号？

2.2 离散时间信号

❖ 离散时间信号 (序列)

$$x(t) \xrightarrow{\text{取样}} x_a(nT) \xrightarrow{\text{表示}} x(n)$$

(其中 **T** 在取样过程中是重要参数，但在结果中却并不重要。)

★ 由于：

- (1) 信号要进行计算机处理（数字处理），必须要离散化、数字化；
- (2) 数字信号处理时，**nT** 并不重要（特别在非实时处理中），重要的是离散时间序列 **x(n)**。

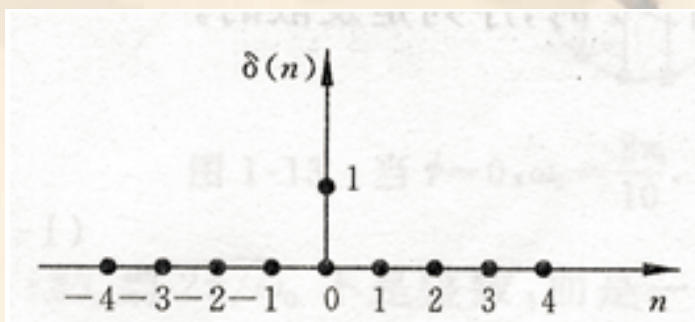
2.2 离散时间信号：常用序列

常用序列

- 单位取样序列
- 单位阶跃序列
- 矩形序列
- 实指数序列
- 正弦序列

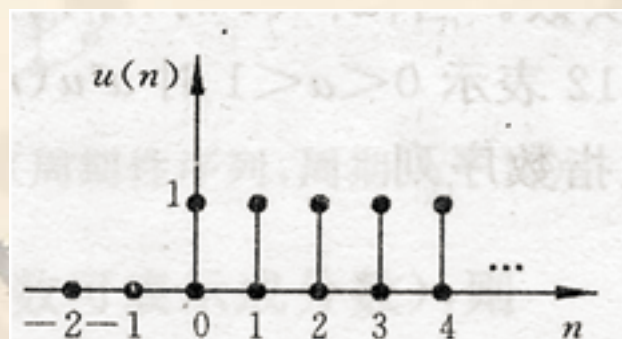
1. 单位取样序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



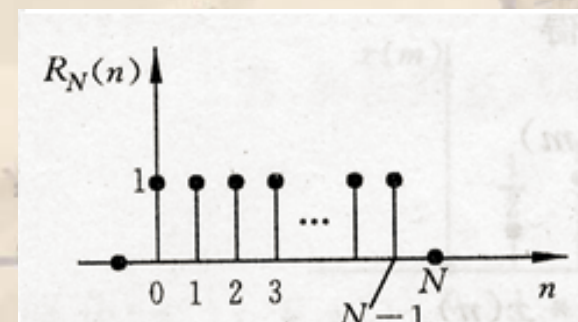
2. 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



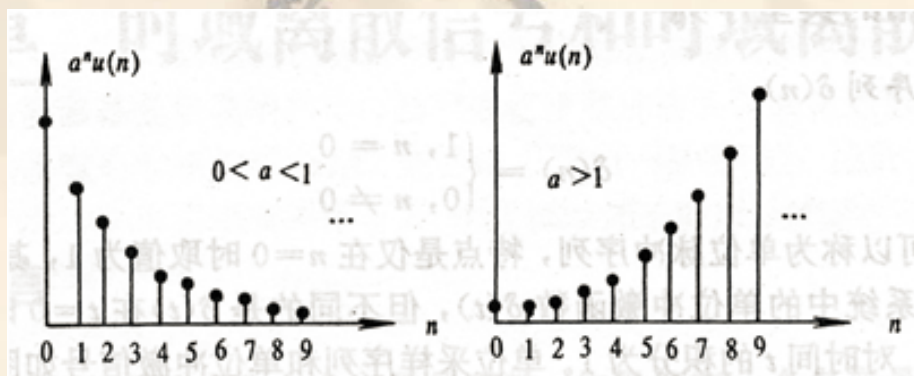
3. 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



4. 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n), \quad a \neq 0$$



复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} = e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$

5. 正弦序列

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi)$$

ω_0 数字角频率 (rad)

Ω 模拟角频率 (rad/s)

物理意义不同!

$$x(t) = A \sin(\Omega_0 t + \phi)$$

补充:

欧拉公式:

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \\ e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \end{cases}$$

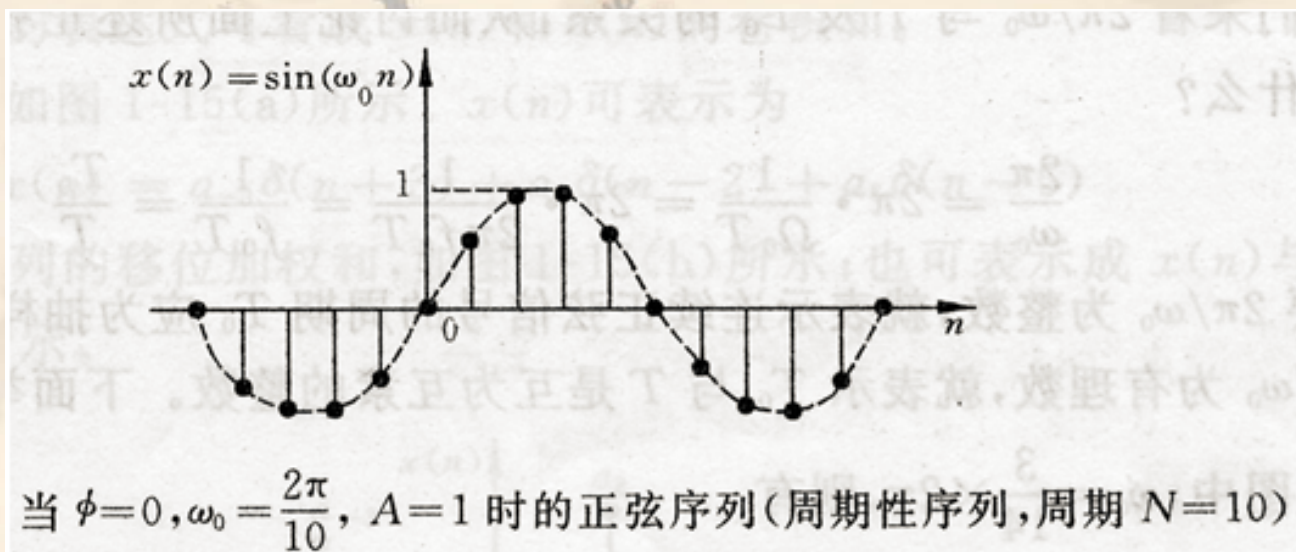
$$\begin{aligned} f(t) &= Ke^{st} = Ke^{(\sigma + j\omega)t} \\ &= Ke^{\sigma t} \cdot e^{+j\omega t} \\ &= Ke^{\sigma t} \cdot (\cos \omega t + j \sin \omega t) \\ &= (Ke^{\sigma t} \cos \omega t) + j(K e^{\sigma t} \sin \omega t) \end{aligned}$$

复指数信号与正余弦
信号之间的关系:

6. 周期序列

$$x(n) = x(n + N), \quad -\infty < n < \infty$$

最小的正整数 N , 周期



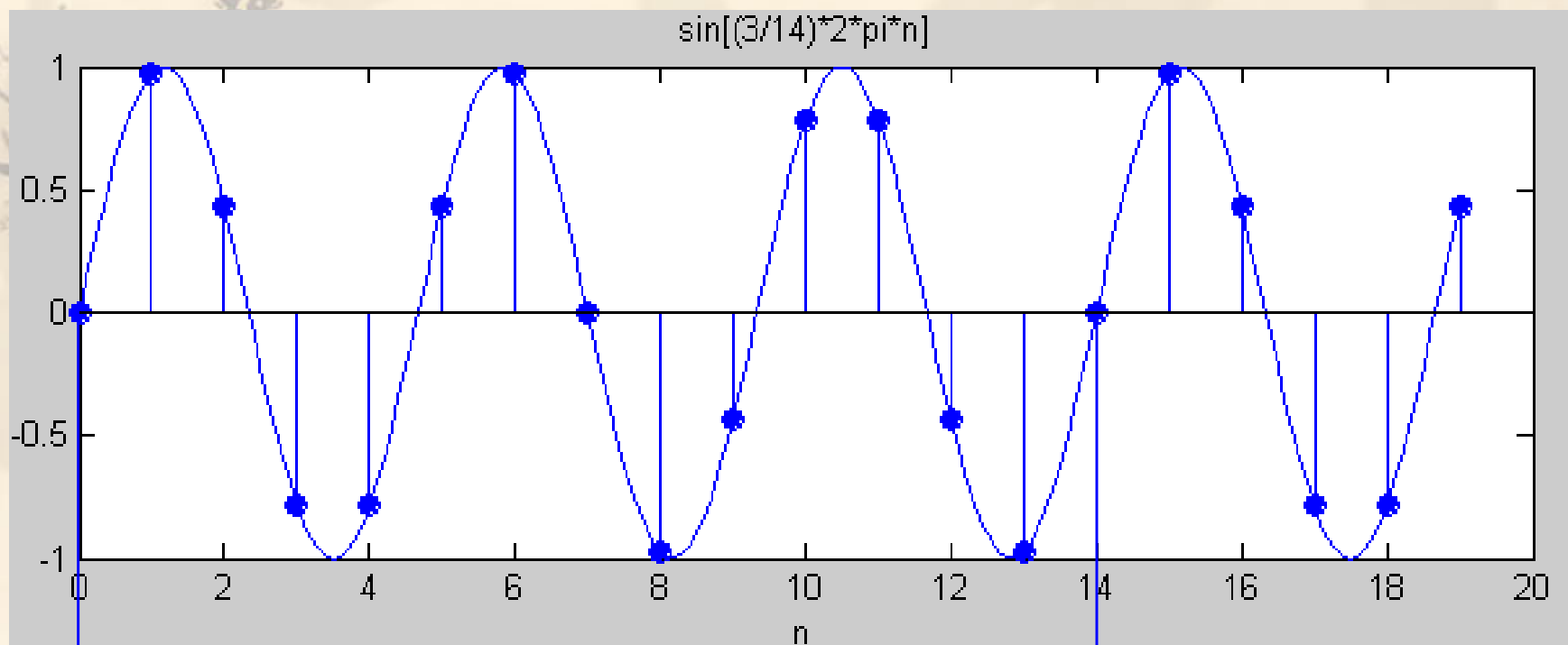
$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi)$$

$$x(n + N) = A \sin(\omega_0 (n + N) + \phi) = A \sin(\omega_0 n + \phi + \omega_0 N) \\ = 2\pi k ?$$

$$N = \frac{2\pi}{\omega_0} k ? \quad \text{是整数?}$$

- 1) 如果 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 是实整数，则是周期序列；
- 2) 如果 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 是有理数（整数或分数），则仍是周期序列
- 3) 如果 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 是无理数（无限不循环小数），则是非周期序列

例1.1.1:



$\phi = 0, \omega_0 = \frac{3}{14} \times 2\pi, A = 1$ 的正弦序列

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{14}{3}, \quad \therefore N = 14$$

N个抽样间隔应等于k个连续正弦信号的周期

14个抽样周期等于3个连续正弦信号的周期。

例1.1.2:

判断下面的序列是否是周期的，若是周期的，确定其周期。

(1) $x(n) = A \cos(\frac{3}{7}\pi n - \frac{\pi}{8})$, A 为常数

(2) $x(n) = e^{j(\frac{1}{8}n - \pi)}$

解: (1) $\omega = \frac{3}{7}\pi, \quad \frac{2\pi}{\omega} = \frac{14}{3},$

这是有理数，因此是周期序列，周期是 $T=14$;

(2) $\omega = \frac{1}{8}, \quad \frac{2\pi}{\omega} = 16\pi,$

这是无理数，因此是非周期序列。

7. 用单位取样序列来表示任意序列

❖ 任意序列

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

❖ 卷积表达式

$$x(n) = x(n) * \delta(n)$$

2.2 离散时间信号：序列的基本运算

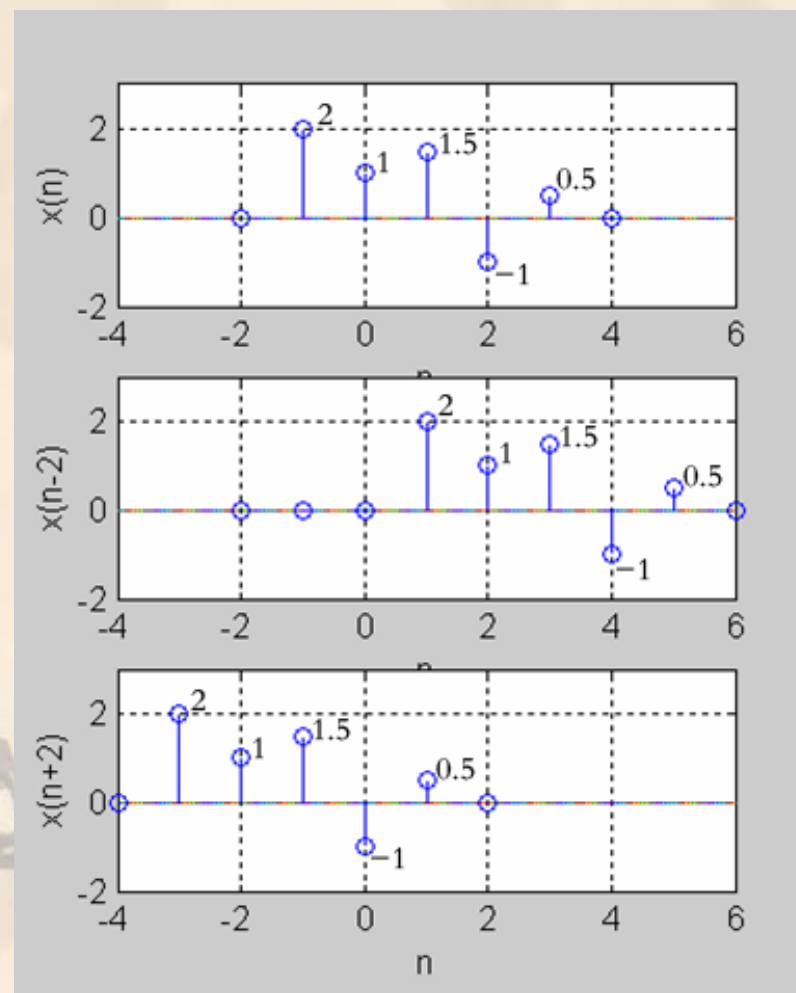
- ❖ 1. 序列的移位
- ❖ 2. 加运算
- ❖ 3. 积运算
- ❖ 4. 标量乘法
- ❖ 5. 序列翻褶
- ❖ 6. 序列累加
- ❖ 7. 差分
- ❖ 8. 时间尺度变换
- ❖ 9. 序列卷积和

1) 序列的移位

序列 $x(n]$ ，当 $m>0$ 时

$x(n-m)$: 延时/右移 m 位

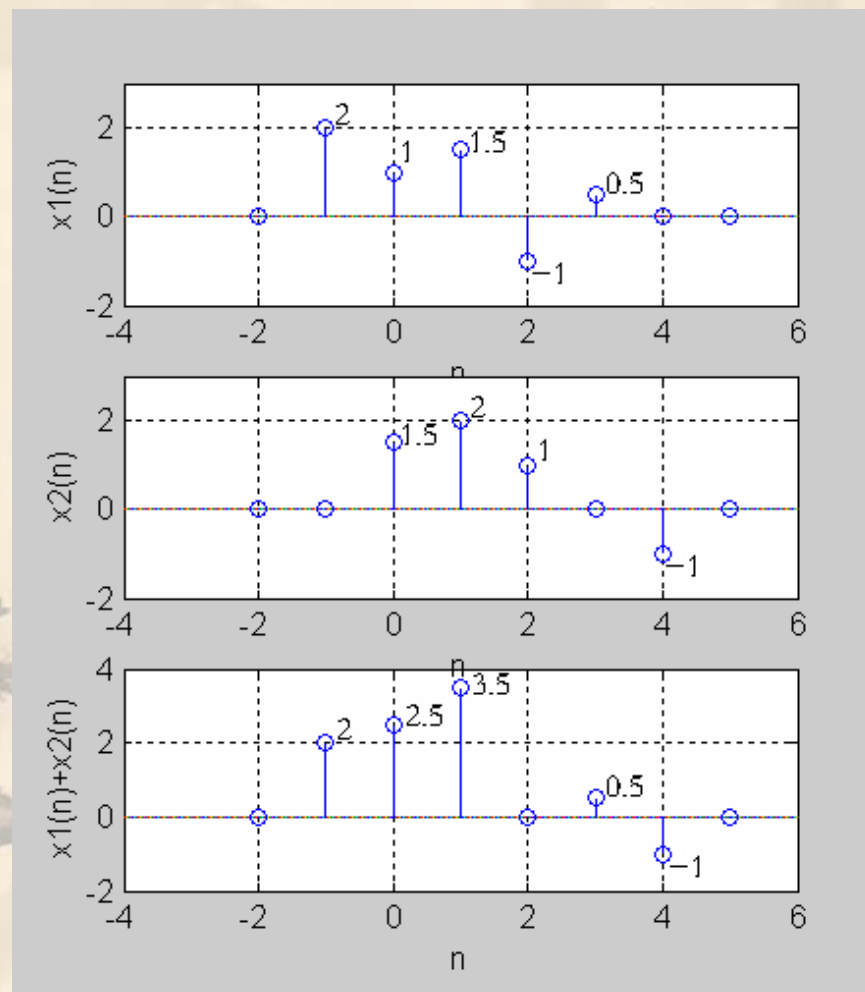
$x(n+m)$: 超前/左移 m 位



2) 加运算

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

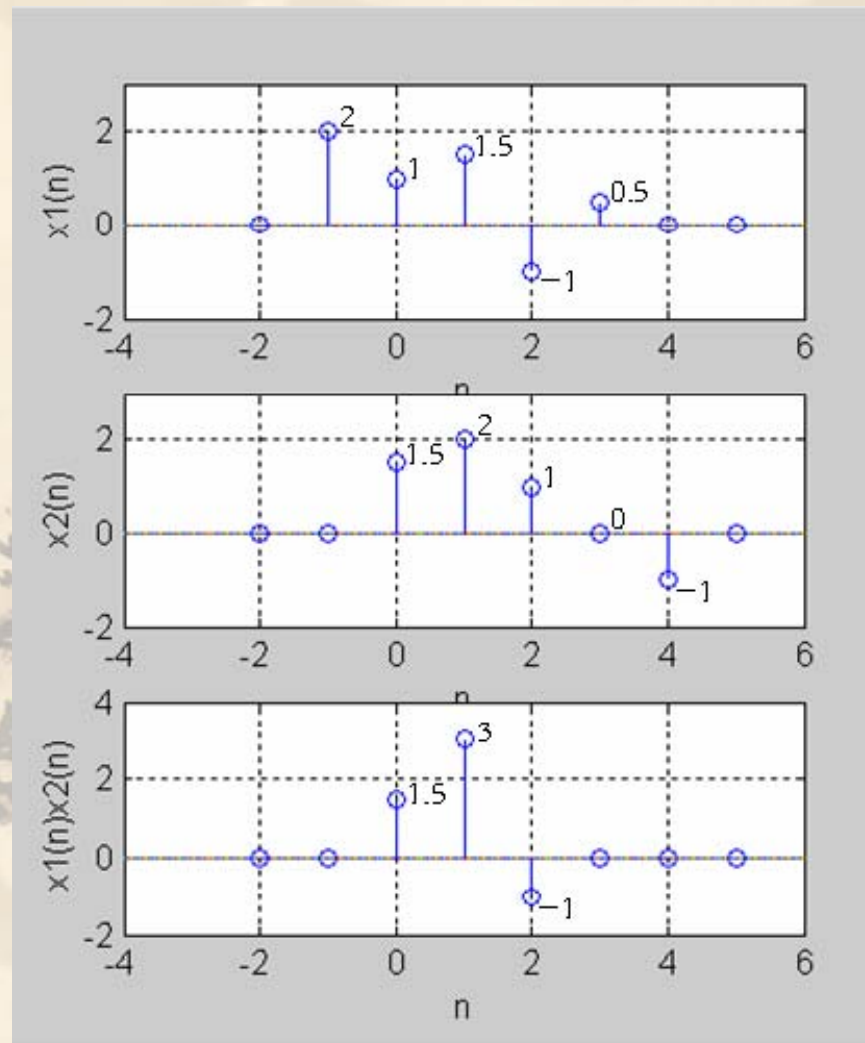
同序列号 n 的序列值
逐项对应相加



3) 积运算

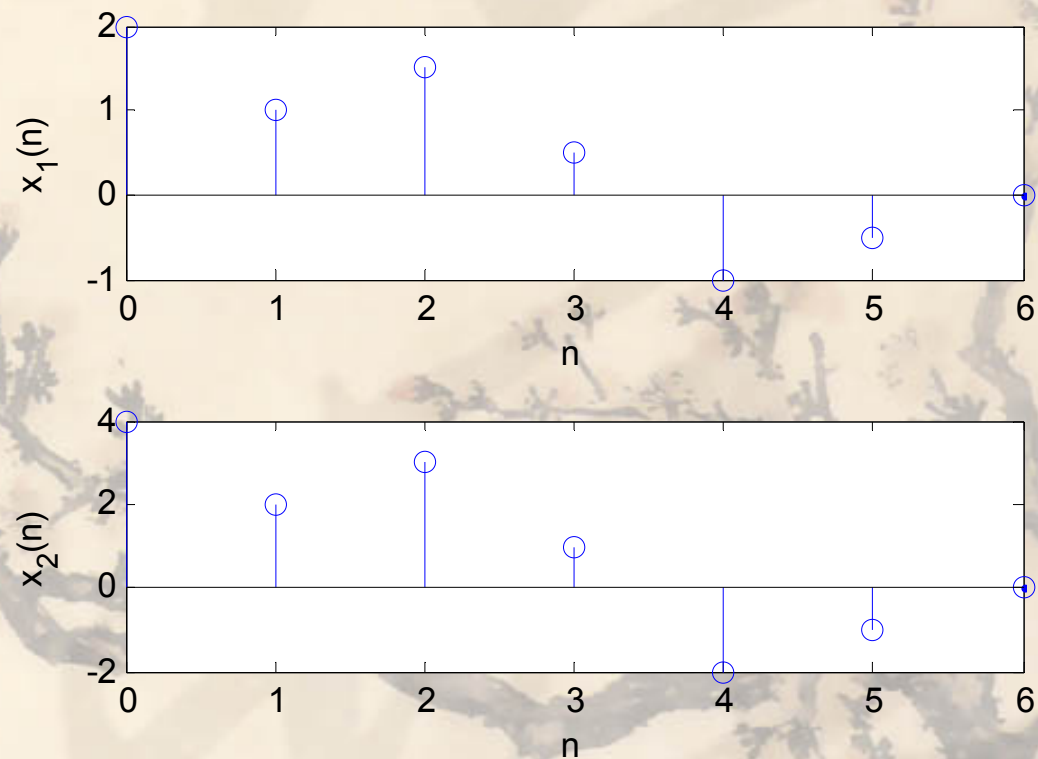
$$x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$

同序号 n 的序列值
逐项对应相乘



4) 标量乘法

$$x_2(n) = ax_1(n)$$



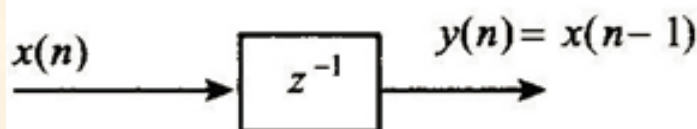
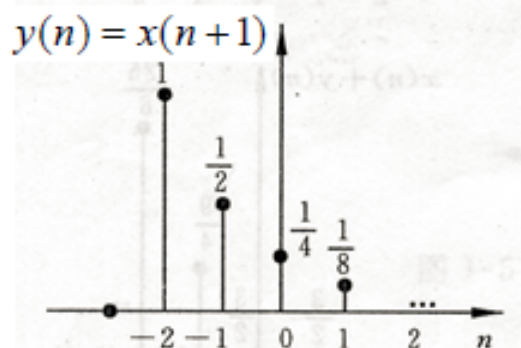
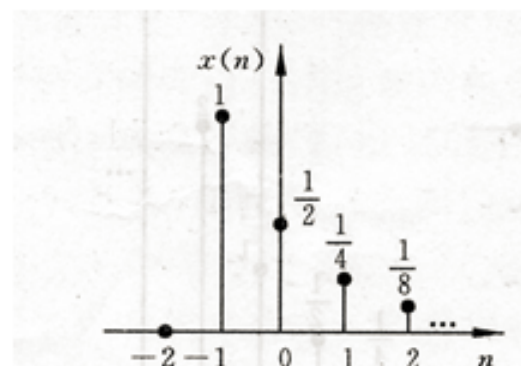
2.2 离散时间信号序列：序列的基本运算

1. 移位（移序）

$$m \geq 0$$

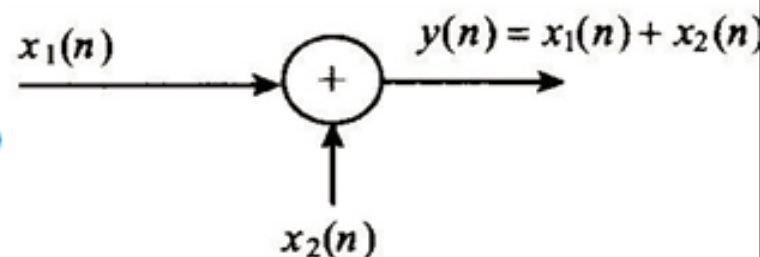
$x(n-m)$ 延迟

$x(n+m)$ 超前



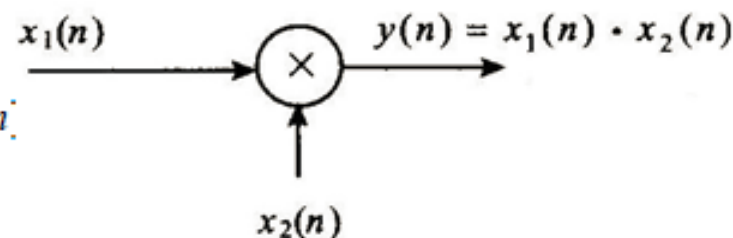
2. 加运算

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$$



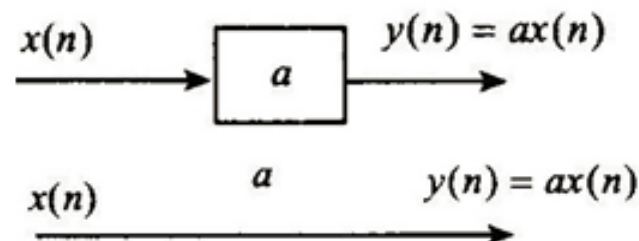
3. 积运算

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$



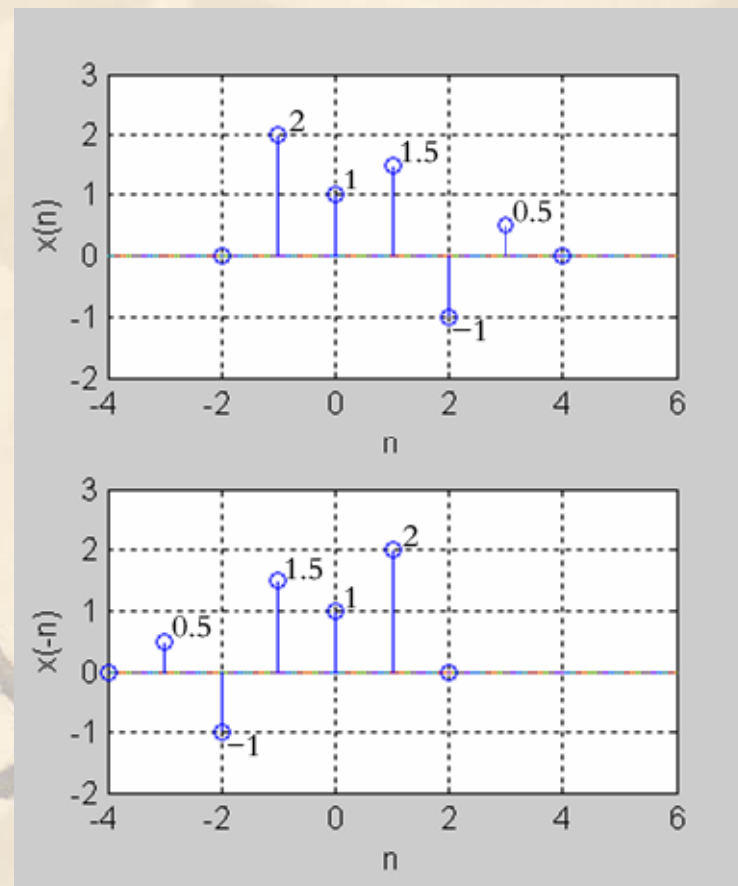
4. 标量乘法

$$y(n) = ax(n)$$



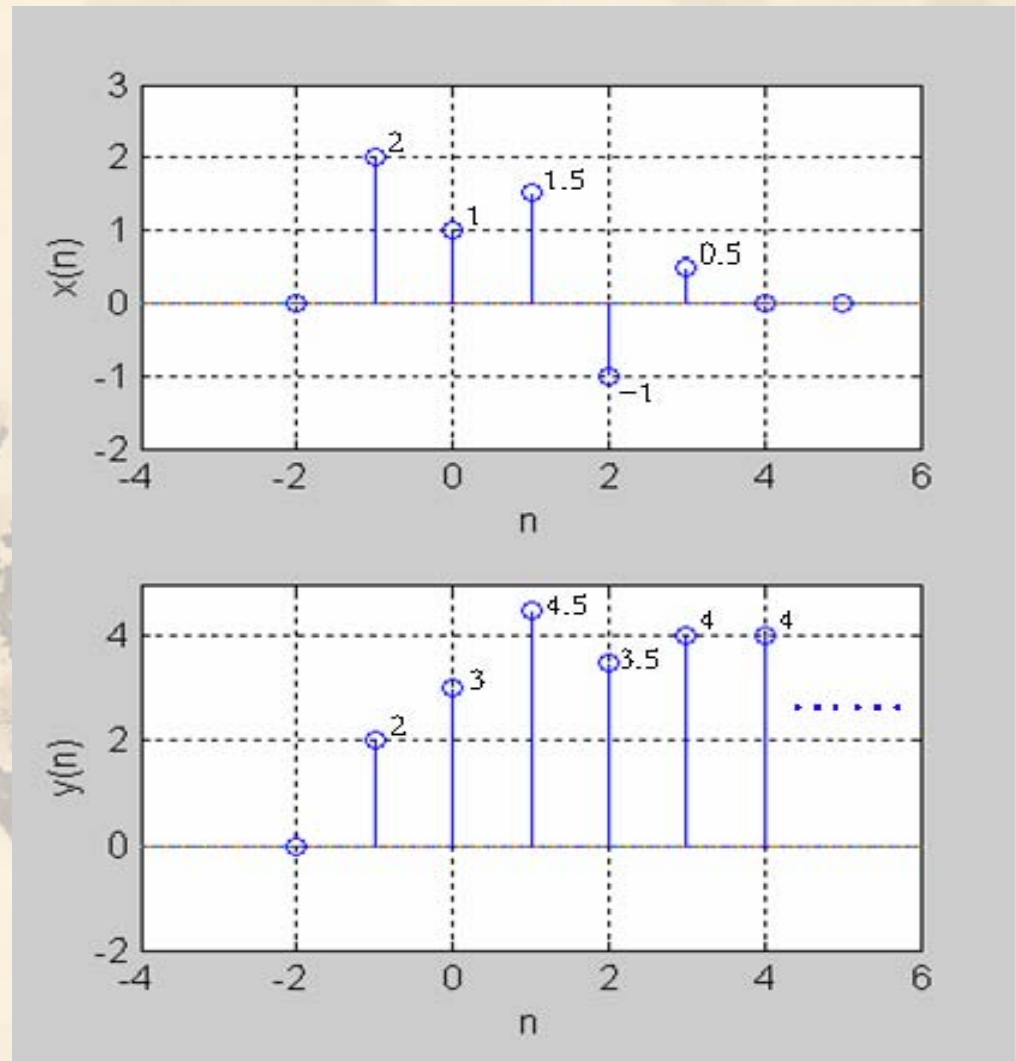
5) 序列翻褶

$x(-n)$ 是以 $n=0$ 的纵轴为
对称轴将序列 $x(n)$
加以翻褶



6) 序列累加

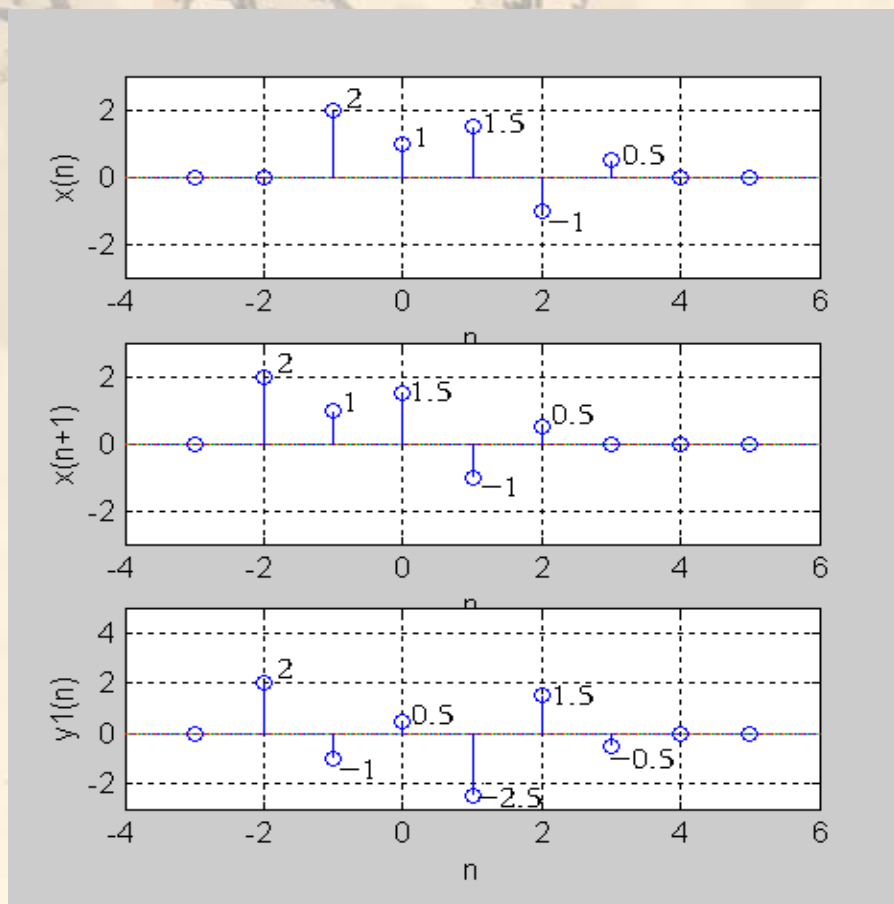
$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^m x(n)$$



7) 差分

前向差分:

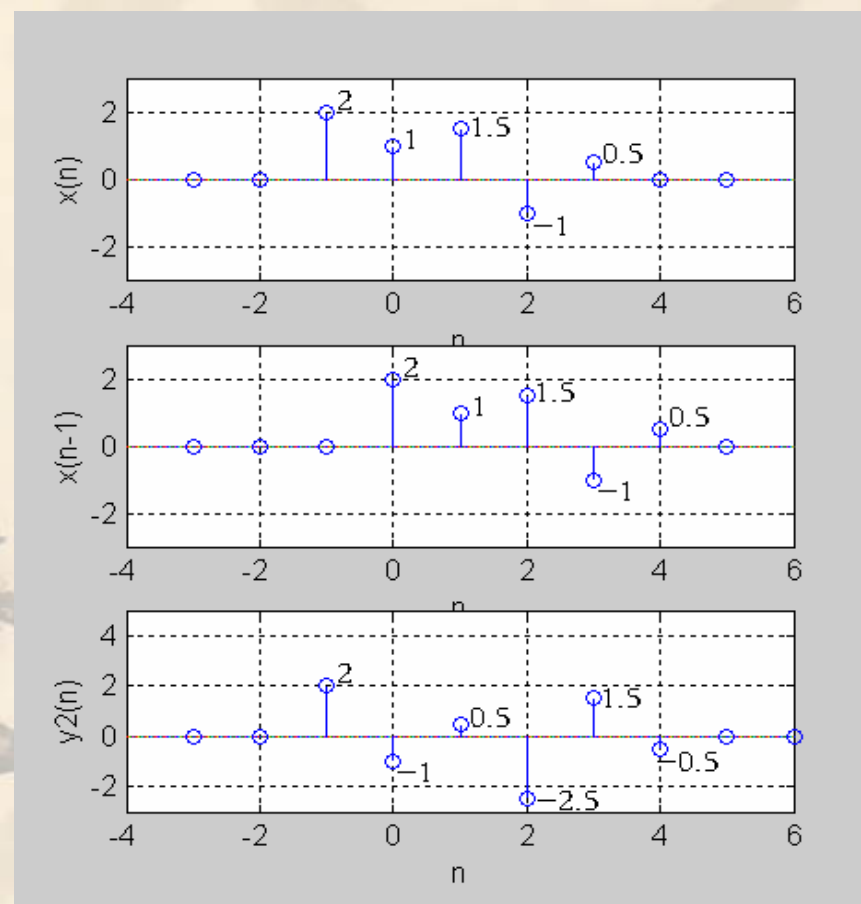
$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$



$$\Delta x(n) = \nabla x(n+1)$$

后向差分:

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$



$$\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

8) 时间尺度变换

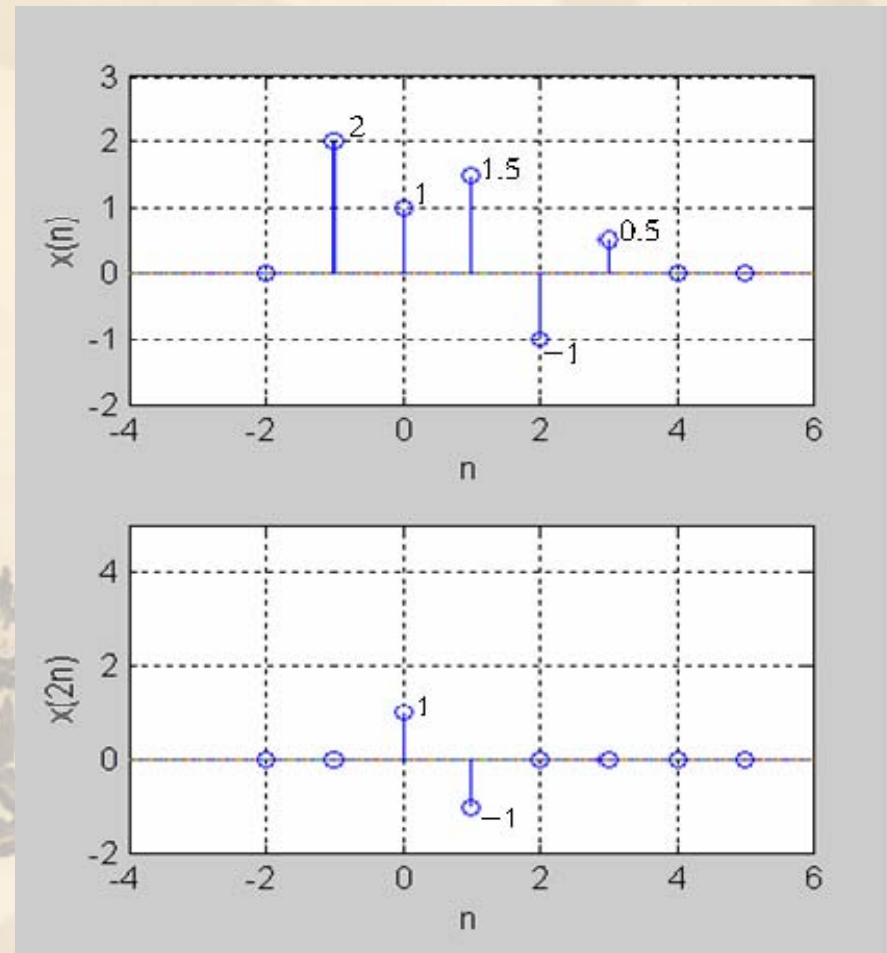
抽取 $x(mn)$

$$x(n) = x_a(t) \big|_{t=nT}$$

$$x(mn) = x_a(t) \big|_{t=mnT}$$

插值

$$x\left(\frac{n}{m}\right)$$



9) 卷积和

设两序列 $x(n)$ 、 $h(n)$ ，则其卷积和定义为：

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

卷积和与两序列的前后次序无关

1) 翻褶: $x(n) \rightarrow x(k) \quad h(n) \rightarrow h(k) \rightarrow h(-k)$

2) 移位: $h(-k) \rightarrow h(n-k)$

3) 相乘: $x(k)h(n-k) \quad -\infty < k < \infty$

4) 相加: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

$-\infty < n < \infty$

9) 卷积和

- 解析法
- 作图法
- 排序法

- (1) 首先将两个序列右对齐;
- (2) 逐个样值对应相乘, 但不进位;
- (3) 最后将同列乘积值相加即可。

例：解析式法

已知 $x[n] = a^n u[n]$ 时， $0 < a < 1$ ， $h[n] = u[n]$ 求系统的输出 $y[n] = x[n] * h[n]$

解：根据卷积和公式，有

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] u[n-k] \end{aligned}$$

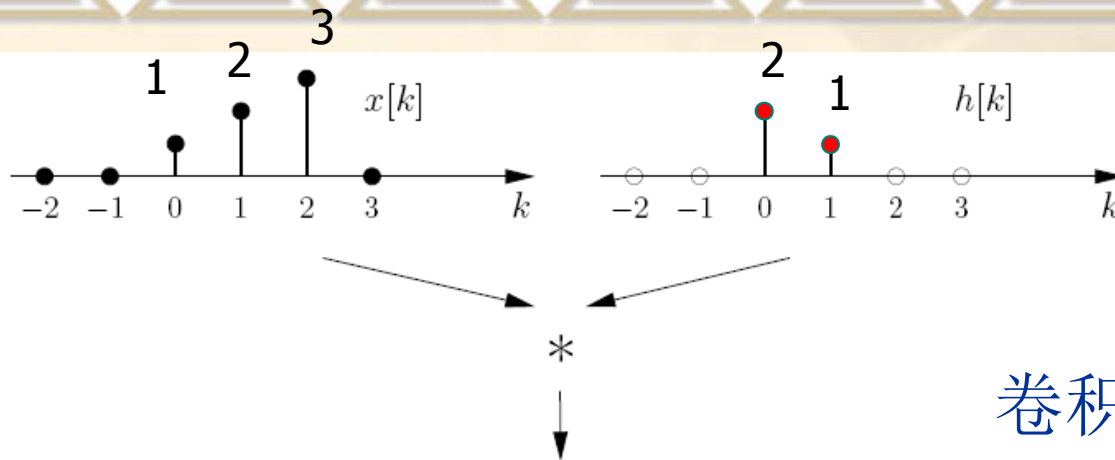
(1) 当 $n < 0$ 时，可得 $y[n] = x[n] * h[n] = 0$

(2) 当 $k \geq 0$ 时， $u[k] = 1$ ； $k > n$ 时， $u[n-k] = 0$ ，所以叠加区间为：

即求和区间应为： $0 \leq k \leq n$ ，故有：

$$y[n] = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n]$$

例：作图法



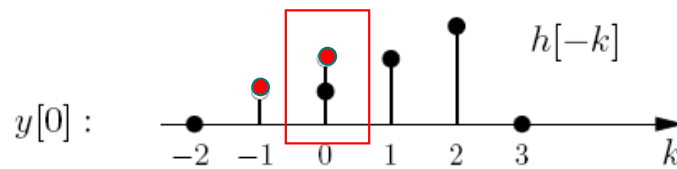
卷积和图示法：

1. 反转： $h[k] \Rightarrow h[-k]$

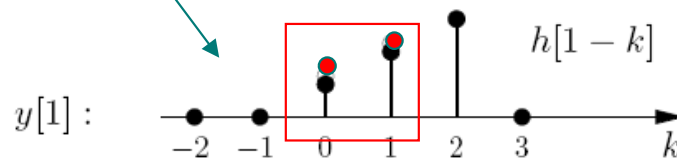
2. 平移： $h[n - k]$

3. 相乘求和： $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k]$

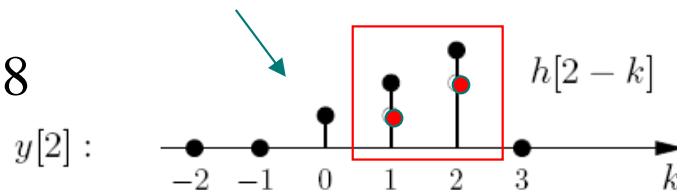
$$y[0] = 1 \times 2 = 2$$



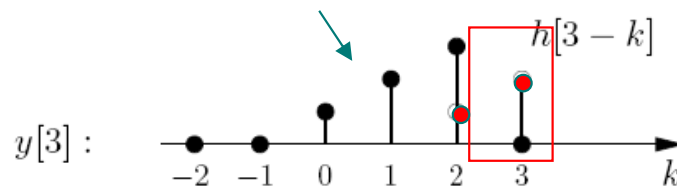
$$y[1] = 2 \times 2 + 1 \times 1 = 5$$



$$y[2] = 3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$$



$$y[3] = 3 \times 1 = 3$$



$$n \geq 4, y[n] = 0$$

结论:

- 1、两个有限长序列卷积后结果还是有限长，长度为 $L=N_1+N_2-1$ 。——“线性卷积”
- 2、 $n-m$ 中的 n 为反折后的序列平移的位置，和 $y(n)$ 对应。
- 3、卷积结果的起始位置为两序列起始位置之和，截止位置为两序列截止位置之和。

例：排序法

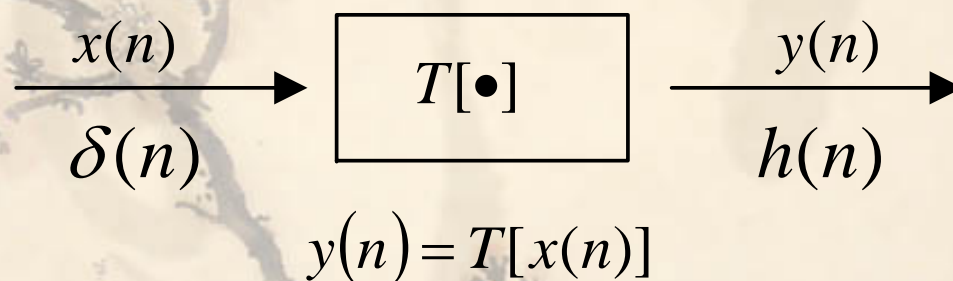
❖ 已知 $x_1(n) = \{4, 3, 2, 1\}$, $x_2(n) = \{3, 2, 1\}$, 求 $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$

$$\begin{array}{rcccccc} x_1(n) : & & 4 & 3 & 2 & 1 & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & n=0 & & & & \\ \times x_2(n) : & & & 3 & 2 & 1 & \\ & & & \uparrow & & & \\ & & & n=0 & & & \\ \hline & & & 4 & 3 & 2 & 1 \\ & & 8 & 6 & 4 & 2 & \\ + & 12 & 9 & 6 & 3 & & \\ \hline y(n) : & 12 & 17 & 16 & 10 & 4 & 1 \\ & \uparrow & & & & & \\ & n=0 & & & & & \\ y(n) = \{12 & 17 & 16 & 10 & 4 & 1\} \\ & \uparrow & & & & & \\ & n=0 & & & & & \end{array}$$

2.3 时间离散系统的基本概念

2.3.1 离散时间系统的定义

离散时间系统是将输入序列（激励） $x(n)$ 变换或映射成输出序列（响应） $y(n)$ 的一种变换或运算，以算子 $T[.]$ 表示。



- ❖ 亦即将一个序列变换成另一个序列的系统。
- ❖ 离散系统可粗略地分为线性和非线性、移变和非移变等系统。我们主要讨论的是线性时不变系统。

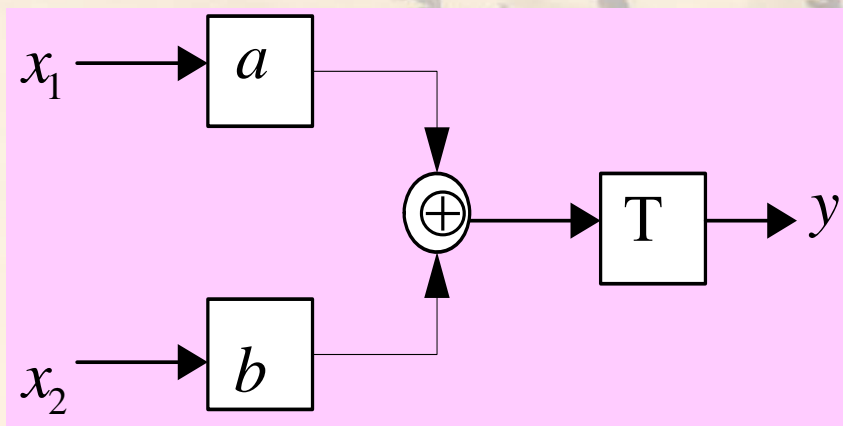
2.3.2 线性时不变系统 (LSI)：线性

❖ 线性：满足齐次叠加原理的系统具有线性特性

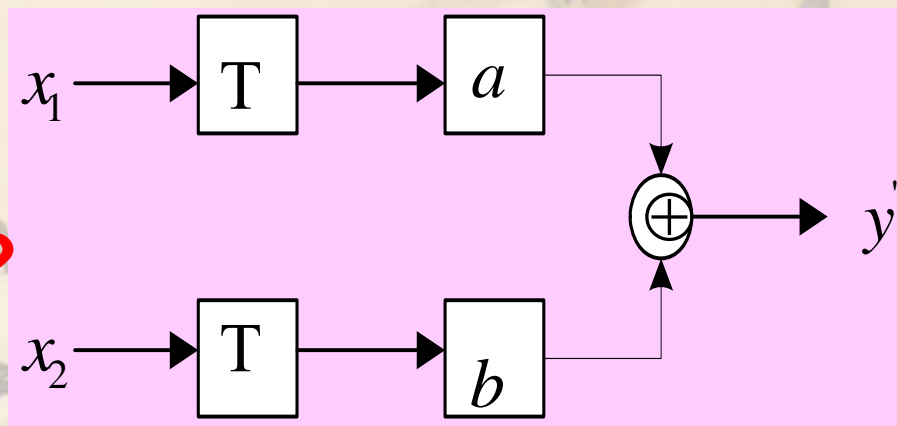
输入 x_1 的输出为 y_1 ，输入 x_2 的输出为 y_2 ，则当输入为两个输入 (x_1, x_2) 之和时，输出为两个输出 (y_1, y_2) 之和。

$$T[ax_1 + bx_2] = aT[x_1] + bT[x_2]$$

(其中 a, b 为任意常数)



$y=y'?$



✧ 判断一个离散系统是否是线性的，可根据定义进行。

2.3.2 线性时不变系统 (LSI)：线性

例：设系统 $T[x(n)] = 7x^2(n-1)$ 判断是不是一个线性系统。

解：因为 $T[ax(n)] = 7a^2x^2(n-1)$

$$aT[x(n)] = 7ax^2(n-1)$$

非线性系统

$$T[ax(n)] \neq aT[x(n)]$$

例： 设 $y[n] = 2x[n] + 3$ ， 试判定该系统是否是线性系统？

解：

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = 2x_2[n] + 3$$

$$\begin{aligned} x_3[n] = x_1[n] + x_2[n] &\rightarrow y_3[n] = 2x_3[n] + 3 \\ &= 2x_1[n] + 2x_2[n] + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1[n] + y_2[n] &= 2x_1[n] + 3 + 2x_2[n] + 3 \\ &= 2x_1[n] + 2x_2[n] + 6 \end{aligned}$$

$$y_3[n] \neq y_1[n] + y_2[n]$$

非线性系统

2.3.2 线性时不变系统(LSI)：线性

例：一个系统用差分方程描述为： $y(n) = x(n) + 0.5x(n-1)$

如下的两个输入信号加到系统的输入端上：

$$x_1(n) = 2u(n); \quad x_2(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)u(n)$$

求出两个信号共同产生的前 **20** 个输出，并画图。

- ❖ 当几个输入同时加到此线性系统，此时系统的响应要用到叠加原理。当系统是线性时，多个输入的情况较易处理：
 - 1) **第一种方法**是分别计算每一个输入的输出，然后把它们的输出加起来得到总的输出信号；
 - 2) **第二种方法**是先把所有的输入加起来，然后求取系统对这个和信号的响应。
 - 3) 两者计算结果相同，但第二种可以节约计算量

2.3.2 线性时不变系统(LSI)：线性

解：首先根据定义先判断出此系统是否为线性系统。当输入为 $ax_1(n)+bx_2(n)$ 时，

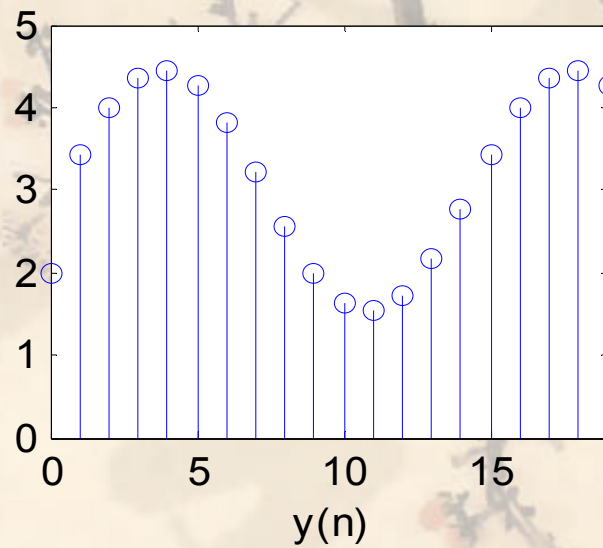
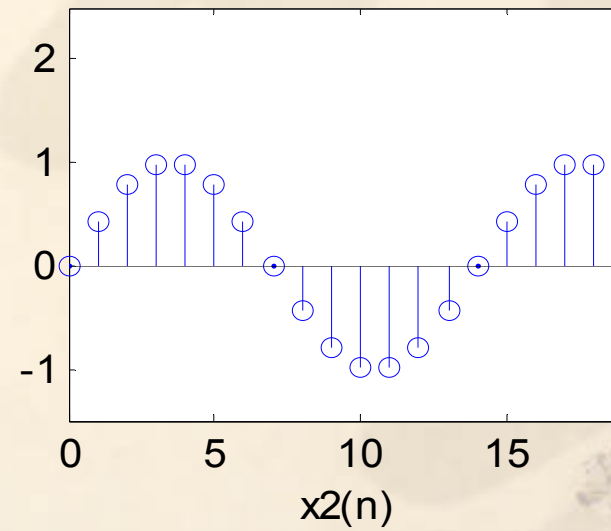
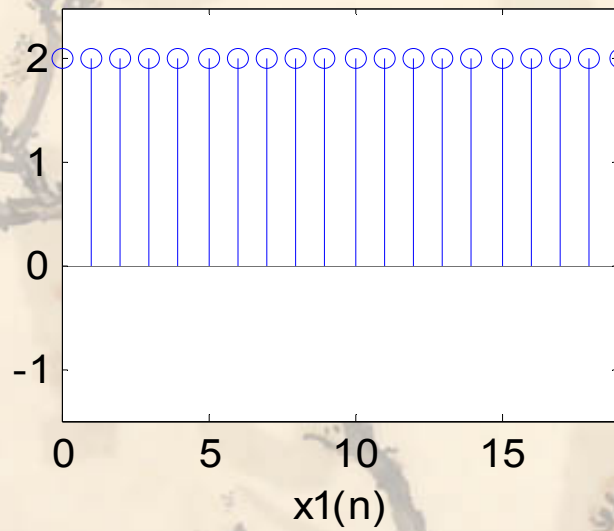
$$\begin{aligned}y(n) &= T(ax_1(n)+bx_2(n)) = ax_1(n)+bx_2(n)+0.5(ax_1(n-1))+bx_2(n-1)) \\ &= ax_1(n)+ 0.5ax_1(n-1)+ bx_2(n)+0.5bx_2(n-1)\end{aligned}$$

$$y'(n) = aT(x_1(n))+bT(x_2(n)) = ax_1(n)+ 0.5ax_1(n-1)+ bx_2(n)+0.5bx_2(n-1)$$

可见， $y(n)=y'(n)$ ，那么系统为线性的。

n	$x_1(n)$	$x_2(n)$	$x(n)=x_1(n)+ x_2(n)$	$y_1(n)$	$y_2(n)$	$y(n)=y_1(n)+ y_2(n)$
0	2	0.000	2.000	2	0.00	2.00
1	2	0.434	2.434	3	0.43	3.43
2	2	0.782	2.782	3	1.00	4.00

2.3.2 线性时不变系统 (LSI): 线性



2.3.2 线性时不变系统：时不变

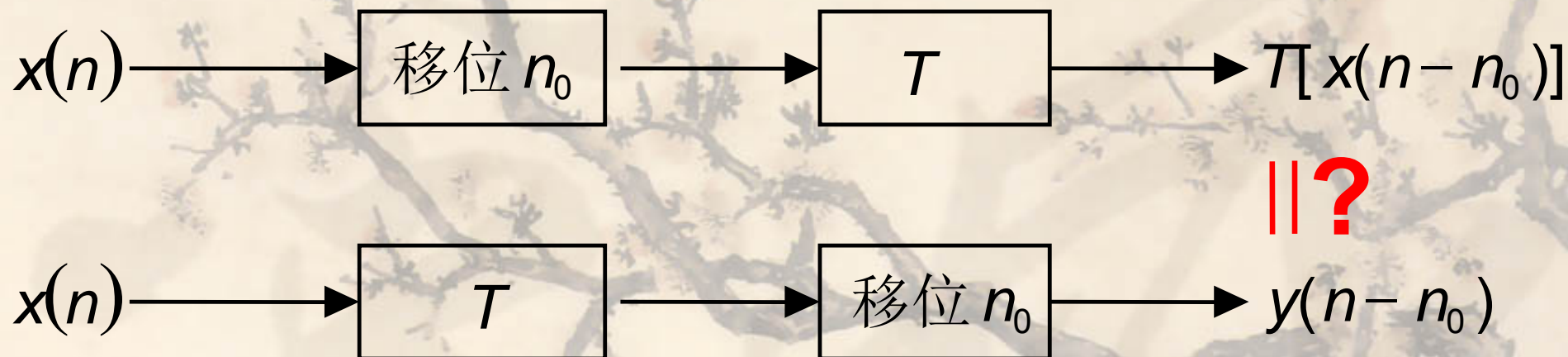
❖ **时不变**：系统参量不随时间而变化的离散系统

若

$$T[x(n)] = y(n)$$

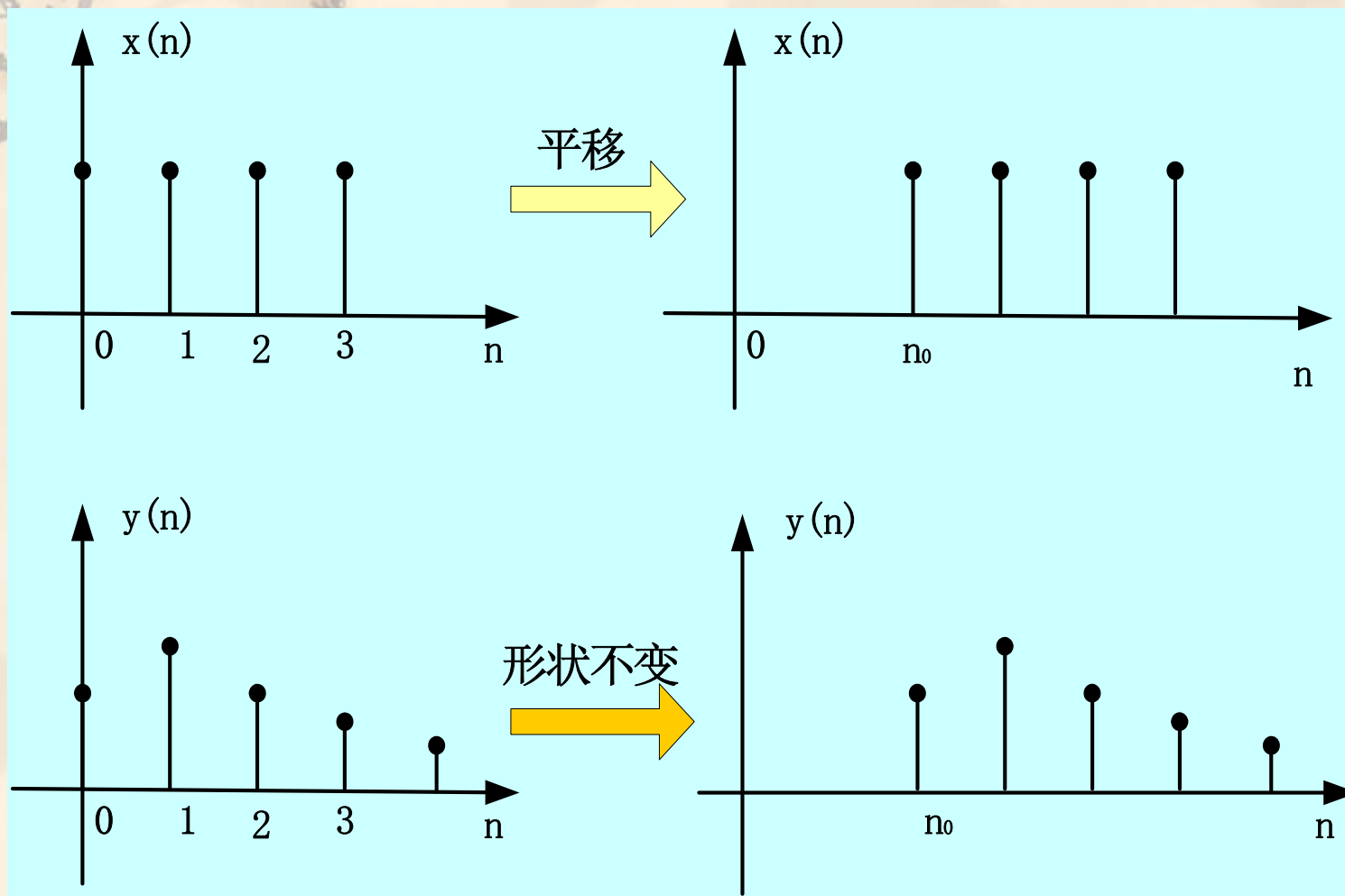
则

$$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$$



2.3.2 线性时不变系统：时不变

❖ 时不变：不管作用时间先后如何，外加信号的响应均相同。



❖ 判断一个系统是否是时不变系统，可根据定义来进行。

例：判断输入输出关系为 $y(n) = T[x(n)] = 2nx(n)$ 系统是否是时不变的。

❖ 解：因 $T[x(n-k)] = 2nx(n-k)$

$$y(n-k) = 2(n-k)x(n-k)$$

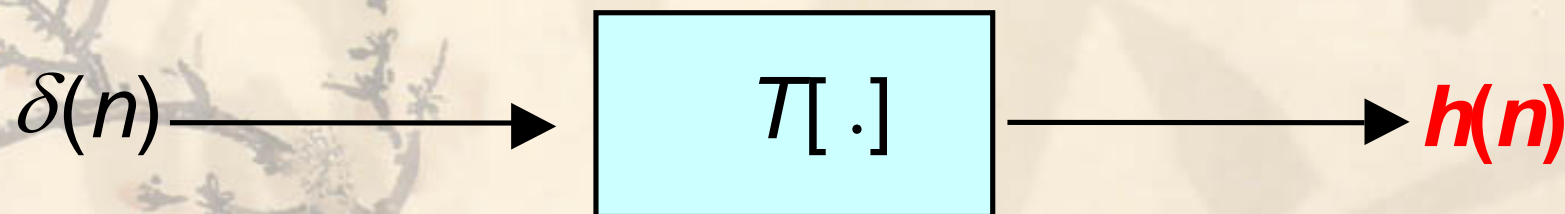
即

$$y(n-k) \neq T[x(n-k)]$$

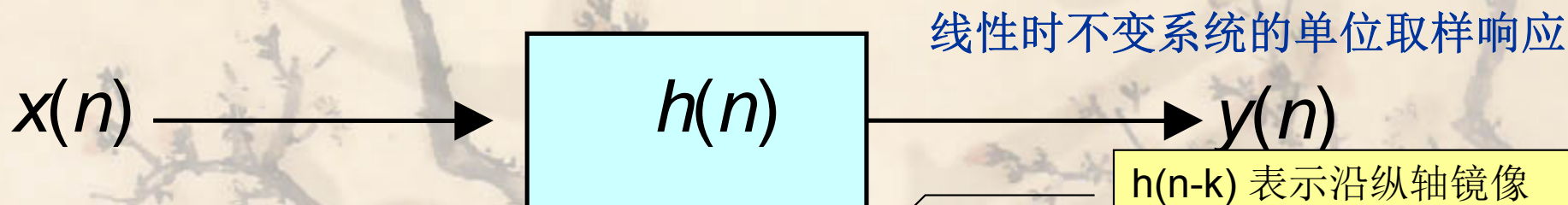
系统是时变的。

2.3.2 线性时不变系统：性质

- ❖ 既满足叠加原理，又具有非移变特性的系统。
- ❖ **LSI**系统输出的时域表示式--- 离散卷积



$$h(n) = T[\delta(n)]$$



$h(n-k)$ 表示沿纵轴镜像 $h(-k)$ ，然后右移 n 位。

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

由此可见，线性时不变系统的输出序列就是输入序列与该系统的单位取样响应序列的离散线性卷积。

2.3.2 线性时不变系统：离散卷积的计算

❖ Matlab 实现

❧ **conv(x,h)** —— Matlab 原有的卷积 (convolution) 函数

- ❖ 若任意序列的长度是无限的，就不能直接用 Matlab 来计算卷积。
- ❖ Matlab 提供了一个内部函数 **conv** 计算两个有限长度序列的离散卷积，conv 函数假定两个序列都从 $n=0$ 开始。
- ❖ 调用如下：

```
>> y = conv(x,h)
```

例：给出以下两个序列的卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$ ：

$x(n)=[3,11,7,0,-1,4,2]$, $-3 \leq n \leq 3$; $h(n)=[2,3,0,-5,2,1]$, $-1 \leq n \leq 4$

解：

```
>> x=[3,11,7,0,-1,4,2];
```

```
>> h=[2,3,0,-5,2,1];
```

```
>> y=conv(x,h)
```

y =

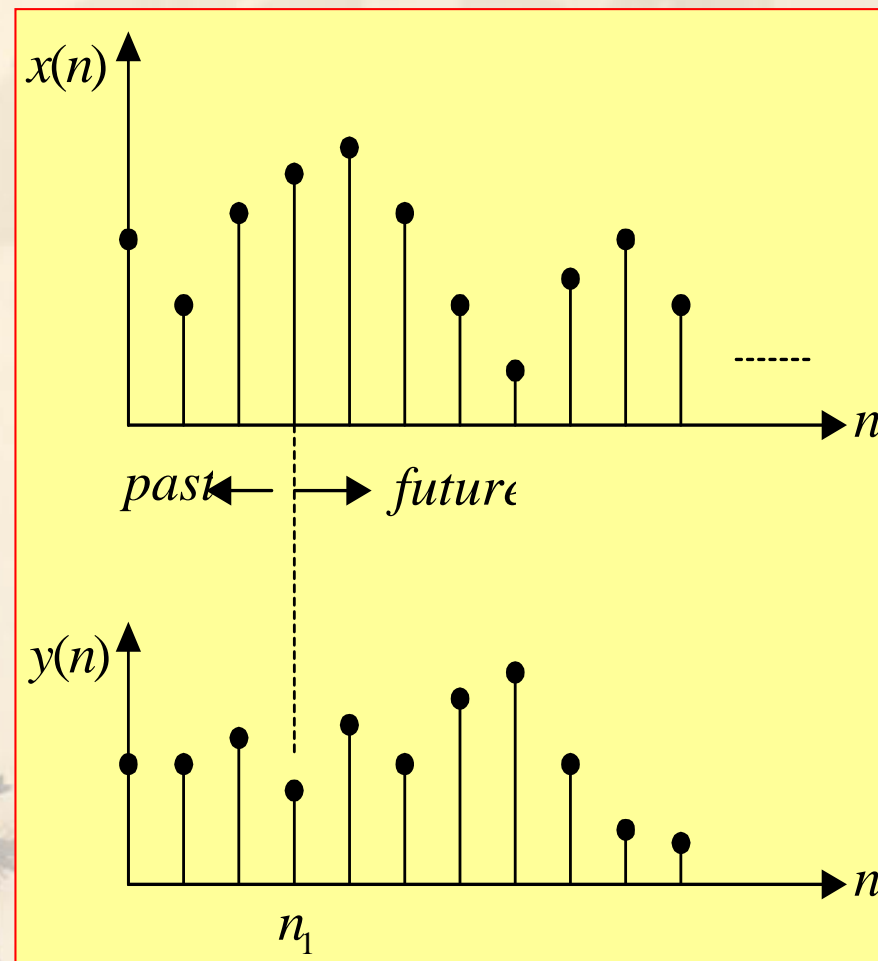
6 31 47 6 -51 41 18 -22 -3 8 2

从中看到，函数 conv 可以得到 $y(n)$ 的正确值，但没有包含任何的时间信息，如何得到？

2.3.3 系统的稳定性和因果性：因果性

因果性定义：某时刻的输出只取决于此时和此时刻之前的输入的系统，即 $n=n_1$ 时的 $y(n)$ 仅取决于 $n \leq n_1$ 的 $x(n)$ ，而不取决于 $x(n)$ 的未来值。

涵义：对于因果系统，如果 $n < n_0$, $x_1(n) = x_2(n)$, 则 $n < n_0$ 时, $y_1(n) = y_2(n)$ 。



LSI 系统是因果系统的充分必要条件：

$$h(n) = 0, \quad n < 0$$

可实现系统，常用来证明系统的因果性(重要，但前提是 **LSI 系统**)。

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + y[n-1]$$

$$y[n] = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x[n-k]$$

判断因果性

例1：系统的单位抽样响应 $h(n)$ 为： $3^n \cdot u(n)$ ，判断系统的因果性。

$\because n < 0$ 时， $u(n)=0$ ， $\therefore n < 0$ 时， $h(n)=0$ ，所以系统为因果系统。

例2：判断系统 $T[x(n)]=x(n-n_0)$ 的因果性。

当 $n_0 < 0$ 时，如 $n_0 = -3$ ，则 $y(n) = T[x(n)] = x(n+3)$ ，此时0时刻的输出由3时刻的输入决定，即当前的输出由以后的输入决定，因此系统为非因果系统。

当 $n_0 > 0$ 时，如 $n_0 = 2$ ，则 $y(n) = T[x(n)] = x(n-2)$ ，此时2时刻的输出由0时刻的输入决定，即当前的输出由以前的输入决定，因此系统为因果系统。

2.3.3 系统的稳定性和因果性：稳定性

- ❖ **稳定性**定义：如果系统所有的输入有界，则输出有界。
即当：

$$|x(n)| < \infty, \quad \forall n$$

则：

$$|y(n)| < \infty, \quad \forall n$$

在以后的讨论中，除非特别说明，所涉及的离散系统都是**线性时不变系统**，一般的实际系统都是**因果、稳定的**。

- **重要结论**：对于 **LSI** 系统，稳定的充分非必要条件是：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

2.3.3 系统的稳定性和因果性

例： 已知某系统的 $h(n) = a^n u(n)$

问： 它是否是因果系统？ 是否是稳定系统？ ？

解： $n < 0 \quad u(n) = 0$

$\therefore n > 0 \quad h(n) = a^n u(n)$

是因果
系统

有界稳定

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) = \begin{cases} |a| < 1 & \frac{1}{1-a} \\ |a| > 1 & \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \end{cases}$$

发散
不稳定

2.3.3 系统的稳定性和因果性

❖ 我们侧重的为：

稳定因果的系统



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

$$h(n)=0, \quad n<0$$

2.4 离散系统的差分方程描述及信号流图

- 模拟系统常用微分方程描述:

如: $y(t) = ax'(t) + bx(t) + c$

- 离散系统则用: 差分方程来描述

如: $y(n) + a_1y(n-1) = b_1x(n-1) + b_2x(n)$

- 分类为: (1) 递归性 (**IIR**, 无限冲激响应)
(2) 非递归性 (**FIR**, 有限冲激响应)

2.4.1 LSI 系统的差分方程：FIR系统

❖ 非递归性（FIR，有限冲激响应）

如果 $a_k = 0$

则
$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i)$$

$n > N, h(n) = 0$ (有限冲激响应)

- 满足上述表达式的系统是非递归或者有限冲激响应（FIR）系统，以后我们要讲的数字滤波器的设计，就是要确定值 a_i 。
- 特点：无反馈参量，是递归系统的特例。

■ 解差分方程的方法：

- （1）经典法（先求齐次解，然后求特解，最后两者之和为完全解）；
- （2）递推法；
- （3） z 变换法
- （4）Matlab

2.4.2 LSI 系统的差分方程：IIR系统

■ 递归性（IIR，无限冲击响应）

✧ 如果系统是线性、时不变、因果的，则：

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

- ✧ 满足上述表达式的系统是递归的或者无限冲激响应（IIR, Infinite Impulse Response）系统。单位冲激响应 $h(n)$ 虽然越来越小，但不会为0,响应长度为无穷。
- ✧ 特点：当前输出值不仅由输入值，也由过去的输出值所决定，即反馈。
- ✧ 此式称为“N 阶常系数线性差分方程”，其含义为：
- ① N 阶：系统的阶次；
 - ② 常系数：指差分方程的系数 a_k 和 b_m 是不随 n 变化的常数。若系数 a_k 和 b_m 是随 n 变化，则称变系数差分方程，它描述的是时变系统；
 - ③ 线性：指 $y(n-k)$ 和 $x(n-m)$ 各项都只有一次幂，且不存在它们的相乘项，否则是非线性系统；
 - ④ 差分： $y(n)$ 和 $y(n-1)$ 之间的运算。

2.4.2 LSI 系统的差分方程：信号流图表示

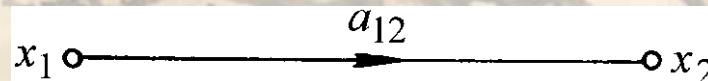
信号流图的基本组成单元有两个：节点和支路。

节点在图中用“O”表示，它表示系统中的变量；两变量间的因果关系用一被称为支路的有向线段来表示。箭头表示信号的传输方向，两变量间的因果关系叫做增益，标明在相应的支路旁。

例如一个线性方程为

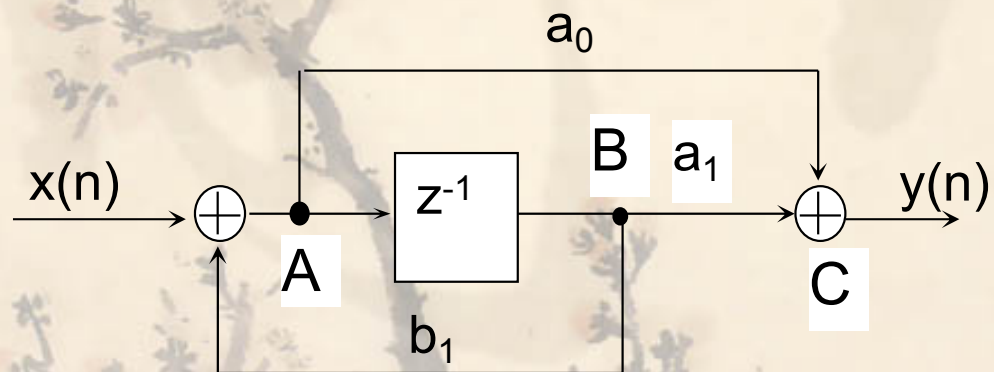
$$x_2 = a_{12} x_1$$

式中 x_1 ——输入变量， x_2 ——输出变量， a_{12} 是这两个量间的增益

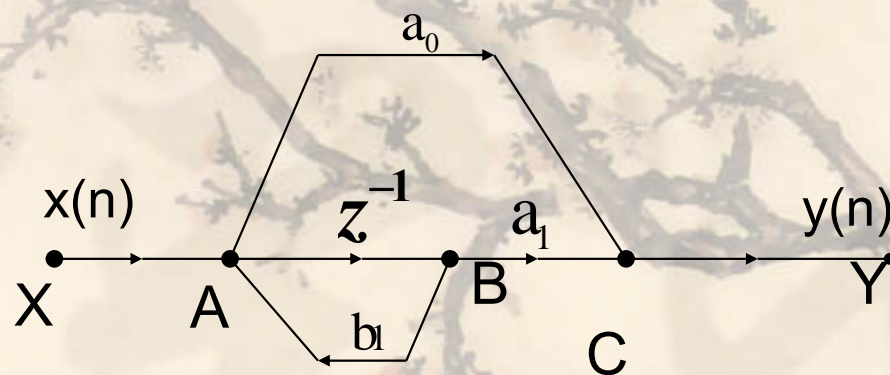


2.4.2 LSI 系统的差分方程：信号流图表示

- 信号流图是表示信号流通的几何图形，由连接节点的有向支路构成的网络，它可以从系统的方框图设计，也可由描述系统的线性代数方程设计。



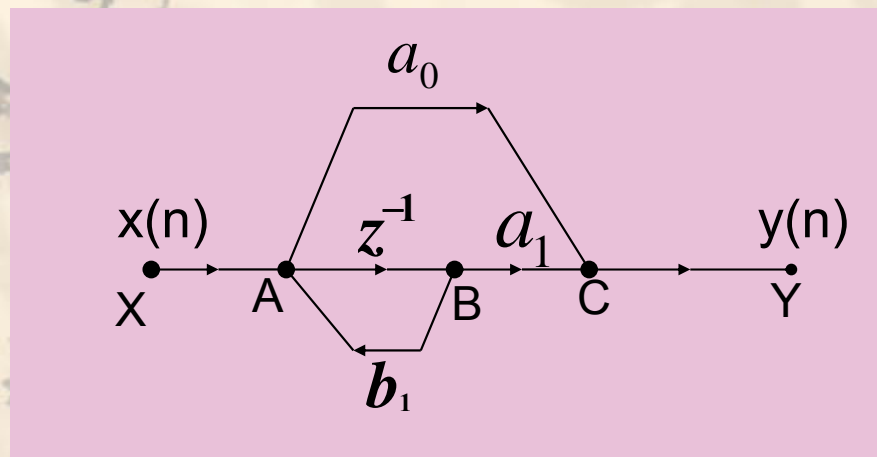
系统的方框图



等效信号流图

❖ 信号流图中有关术语

- 节点：每一节点都对应一个变量，或者代表一个信号，如 X 、 A 、 B 、 C 、 Y 都是节点变量。



❖ 支路：连接两个节点的有向线段。

★ 如 \overrightarrow{BA} 、 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{BC} 等。

★ 支路相当于乘法器，其加权或者乘法器系数叫做支路传输。如支路 \overrightarrow{BC} 的传输为 \mathbf{a}_1 ，即节点变量 \mathbf{B} 乘以 \mathbf{a}_1 后输入到节点 \mathbf{C} 。 z^{-1} 表示在时域内的一个单位延迟，即 $b(n) = a(n - 1)$

2.4.2 LSI 系统的差分方程：信号流图表示

■ 源节点：

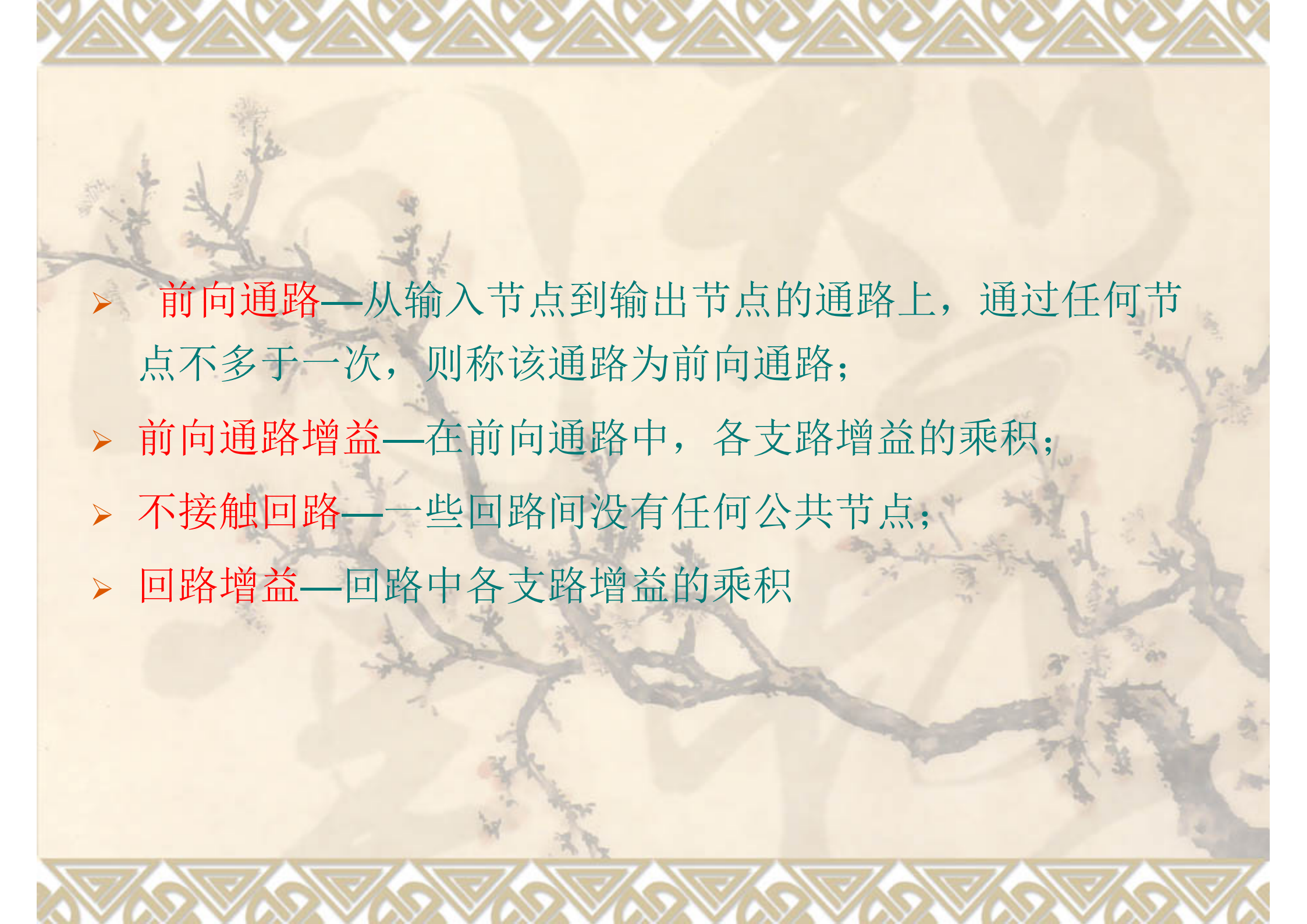
- ⑩ 输入：流入节点的信号；
- ⑩ 输出：流出节点的信号；
- ⑩ 若一个节点只有输出支路与之相连接，则称之为源节点或输入节点，如**X**。

■ 汇点：若一个节点只有输入支路与之相连接，则称之为汇点或输出节点，如**Y**。

■ 混合节点：若一个节点既有输出支路，又有输入支路与之相连接，则称之为混合节点，如**A**、**B**、**C**等。

■ 通路：从某一节点出发沿着支路箭头的方向，连续穿过各相连支路到达另一节点的路径，称为通路。

- ❖ 如果通路与任一节点相遇不多于一次，称为开通路。如： $X \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow Y$, $A \rightarrow C \rightarrow Y$ 。
- ❖ 环路：如果通路的终点就是通路的起点，而且与其余的节点相遇不多于一次，则称为闭通路或回路，也称环路。
- ❖ 不接触回路：互相间没有公共节点的回路。

- 
- **前向通路**—从输入节点到输出节点的通路上，通过任何节点不多于一次，则称该通路为前向通路；
 - **前向通路增益**—在前向通路中，各支路增益的乘积；
 - **不接触回路**—一些回路间没有任何公共节点；
 - **回路增益**—回路中各支路增益的乘积

下面举例说明信号流图绘制的步骤：

设一系统的线性方程组为：

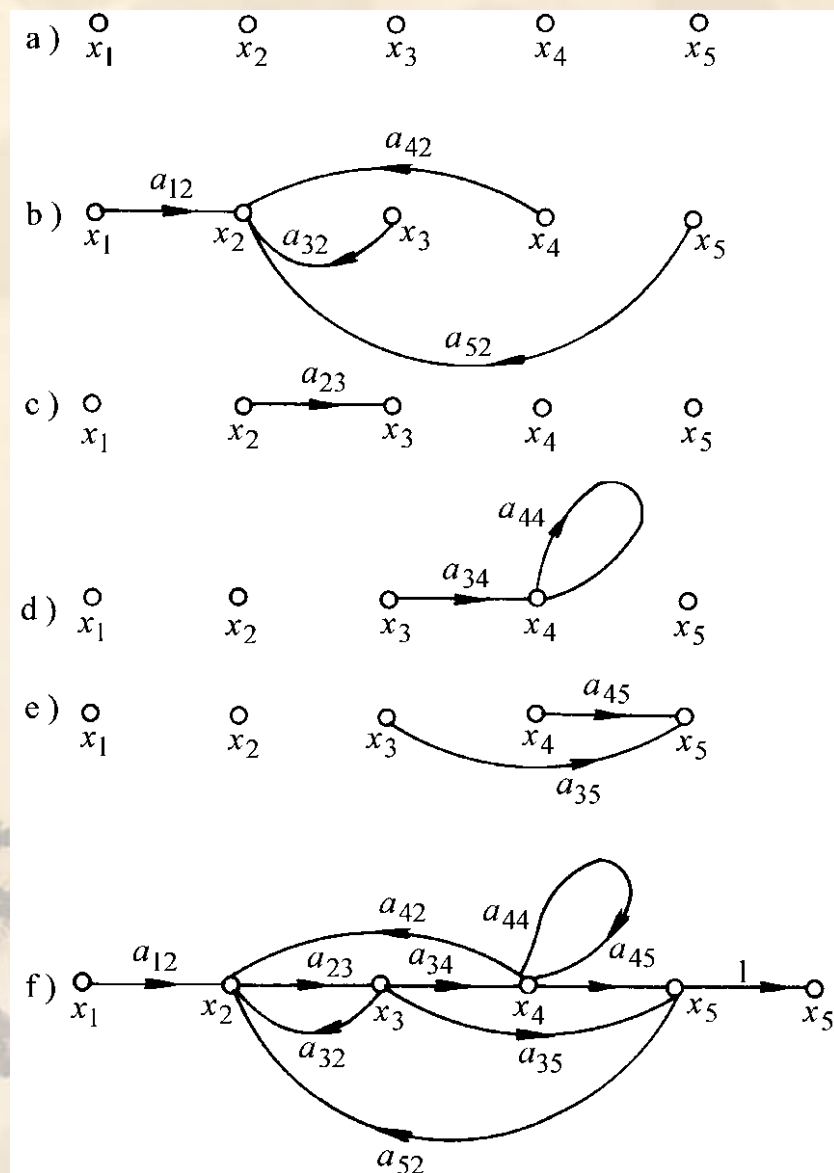
$$x_2 = a_{12}x_1 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 + a_{52}x_5$$

$$x_3 = a_{23}x_2$$

$$x_4 = a_{34}x_3 + a_{44}x_4$$

$$x_5 = a_{35}x_3 + a_{45}x_4$$

式中 x_1 -- 输入量, x_5 -- 输出量



2.4.2 LSI 系统的差分方程：信号流图计算

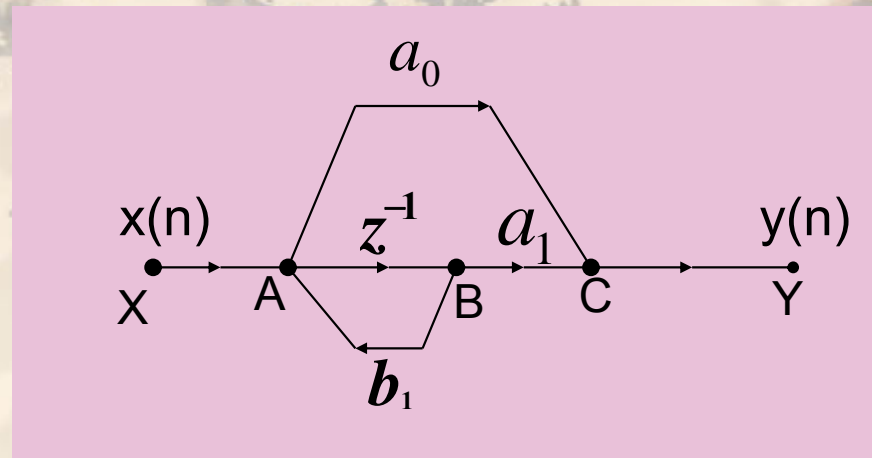
❖ 信号流图计算规则

■ 节点变量的值

节点变量值等于流入该节点的全部信号的迭加，而从该节点流出的信号则不计。

（这一点与基尔霍夫电流定律完全不同！）

■ 列出方程：例如 $c = a_0A + a_1B$



请务必注意！

2.4.2 LSI 系统的差分方程：信号流图化简

- ❖ 信号流图的化简(相当于)→解代数方程组的消去法→利用代数方程组的恒等关系证明流图化简的正确性，即消除一些不必要的支路和节点。

■ 支路的合并

(1) 相加：将并联支路合并成单一支路

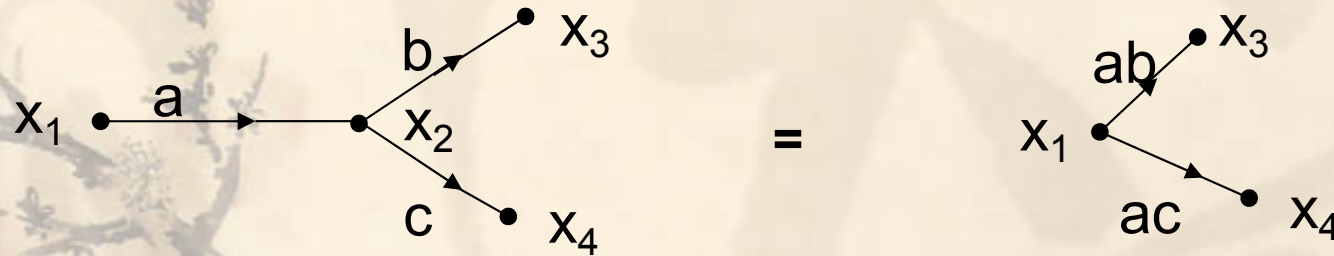


(2) 相乘：将几条串联支路合并成单一支路



2.4.2 LSI 系统的差分方程：信号流图化简

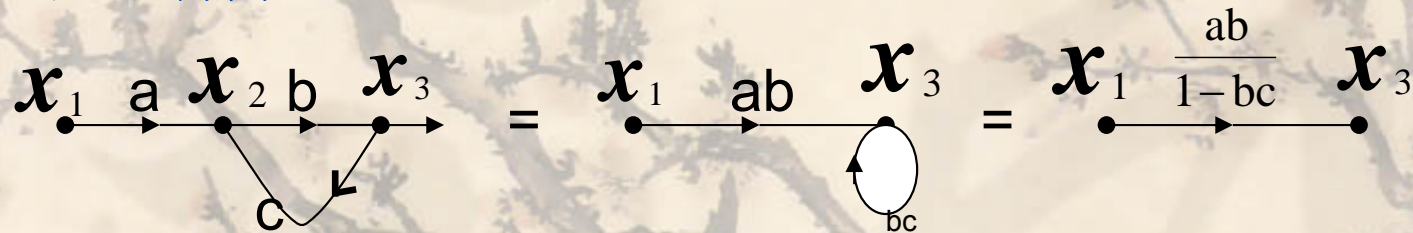
- 支路的吸收：可以消去混合节点



$$x_3 = bx_2 = bax_1$$

$$x_4 = cx_2 = cax_1$$

- 自环的清除



$$x_3 = bx_2$$

$$x_3 = b(ax_1 + cx_3) = abx_1 + bcx_3$$

$$x_2 = ax_1 + cx_3$$

$$(1 - bc)x_3 = abx_1$$

2.4.2 LSI 系统的差分方程：由流图求系统函数

❖ 系统函数：汇点 Y 与源点 X 之间的函数关系，表示为 $H=Y/X$ 。

❖ 方法

① 将信号流图逐步化简 — 类似于消去法

② 利用 Mason (梅森)公式

2.4.2* LSI 系统的差分方程：由流图求系统函数

❖ **Mason** (梅森/梅逊) 公式

$$H = \frac{1}{\Delta} \sum g_i \Delta_i$$

其中 Δ 称为信号流图的特征行列式：

$$\Delta = 1 - \sum_j L_j + \sum_{m,n} L_m L_n - \sum_{p,q,r} L_p L_q L_r + \dots$$

所有不同环路的
增益之和

所有两两互不接触环路的
增益乘积之和

所有三个互不接
触环路的增益乘
积之和

2.4.2 LSI 系统的差分方程：由流图求系统函数

$$H = \frac{1}{\Delta} \sum g_i \Delta_i$$

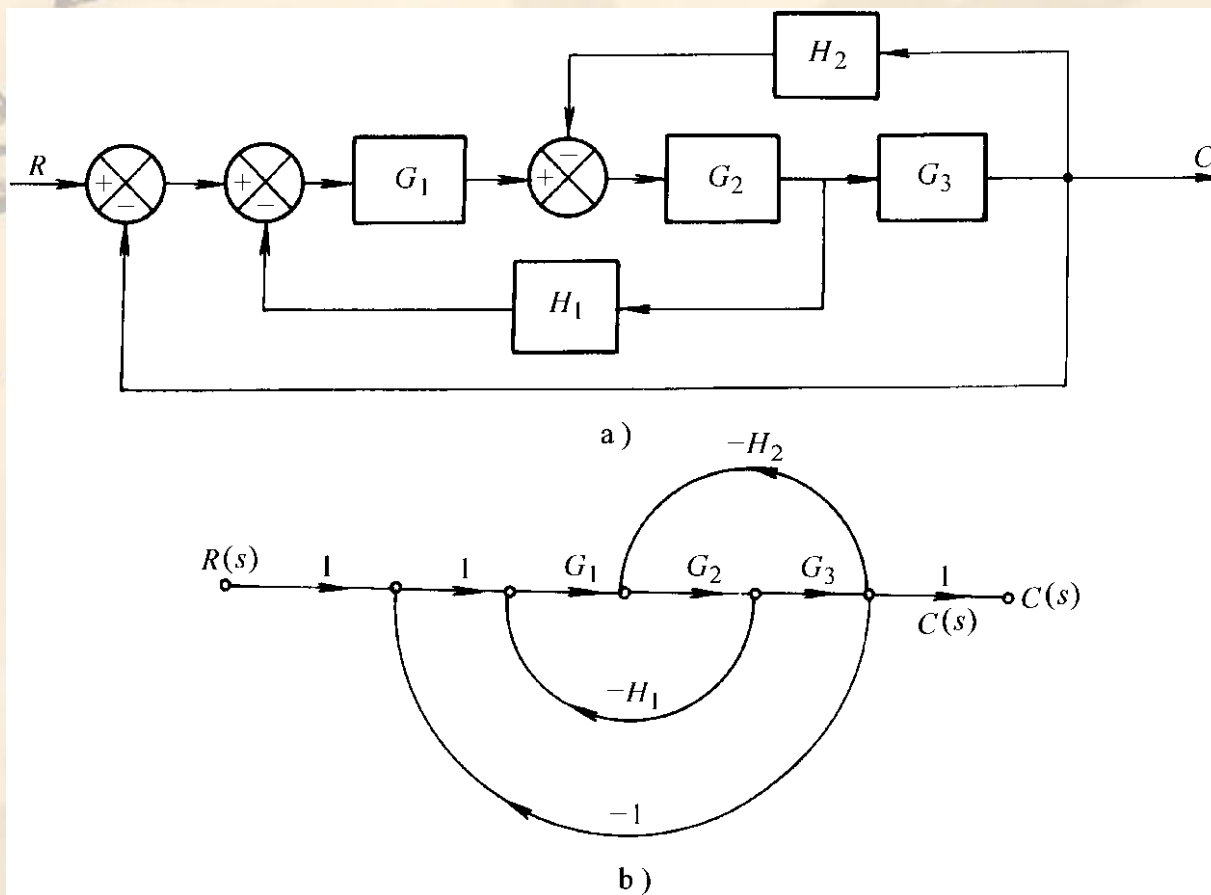
i 表示从源节点到汇节点的第 i 条前向通路的标号；

g_i 表示由源节点到汇节点的第 i 条前向通路的增益；

Δ_i 是第 i 条前向通路特征行列式的余因式，它是除去与第 i 条前向通路相接触的环路外，所余子图的特征行列式。

$$\begin{aligned} \Delta_i = & 1 - (\text{与此通路不接触的全部环路传输之和}) \\ & + (\text{与此通路不接触的所有成对不接触环路传输乘积之和}) \\ & - (\text{与此通路不接触的所有三个不接触环路传输乘积之和}) \\ & + \dots \end{aligned}$$

例: 试用梅森公式求系统的闭环传递函数



a) 多回路控制系统的框图 b) 系统的信号流图

解: $P_1 = G_1 G_2 G_3$

$$\sum L_n = -G_1 G_2 H_1 - G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 G_3$$

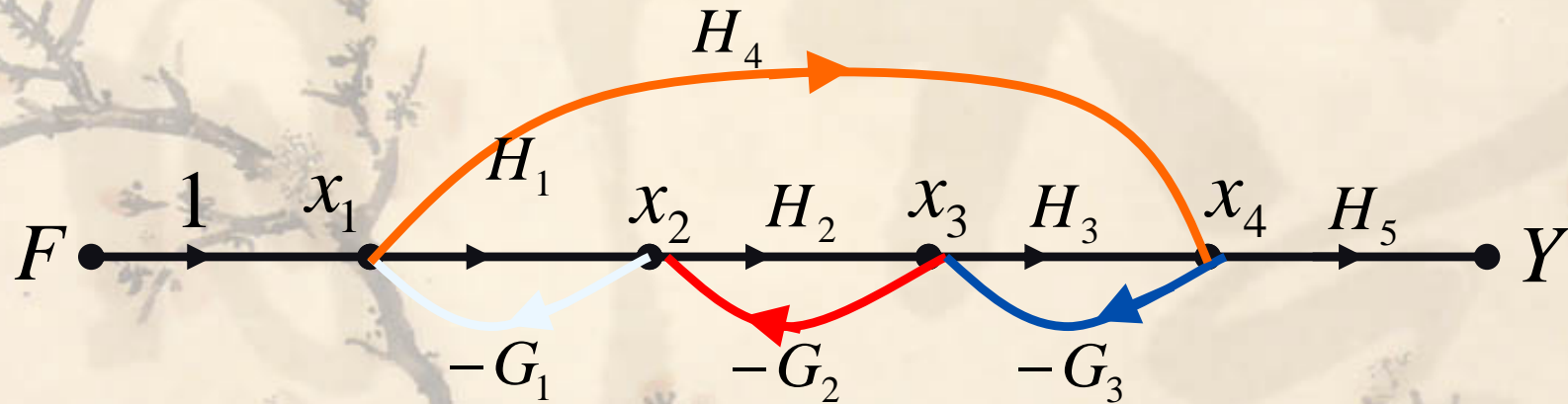
$$\Delta = 1 - \sum L_n = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = T = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}$$

2.4.2 LSI 系统的差分方程：由流图求系统函数

❖ 利用 Mason 公式求系统函数

以下图所示的信号流图为例来进行讨论



解：流图共有 4 个回路，各回路增益为

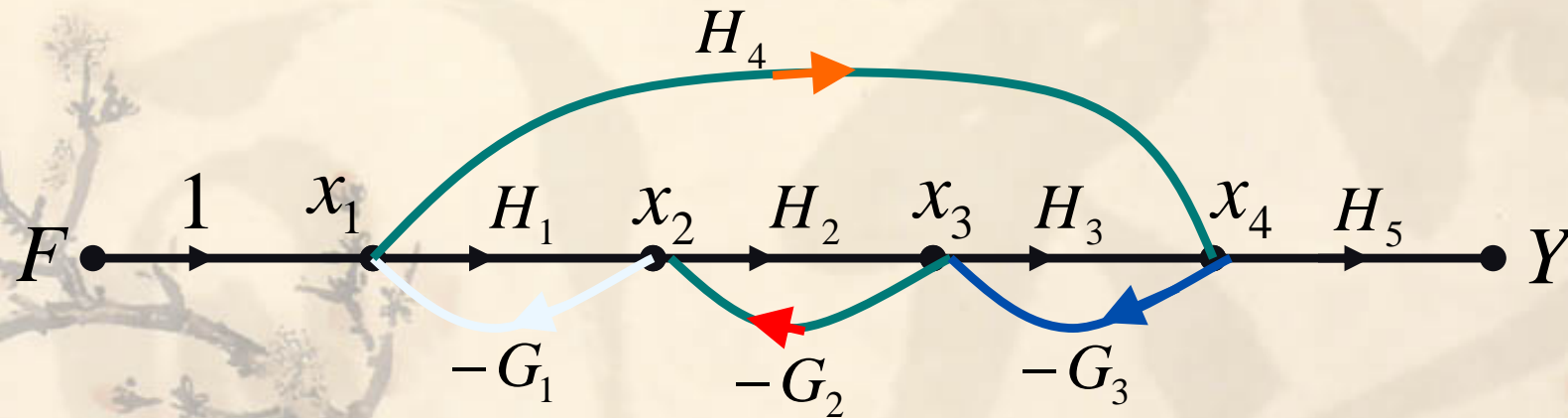
$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1, \quad L_1 = -G_1 H_1$$

$$x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2, \quad L_2 = -G_2 H_2$$

$$x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3, \quad L_3 = -G_3 H_3$$

$$x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1, \quad L_4 = -G_1 G_2 G_3 H_4$$

2.4.2 LSI 系统的差分方程：由流图求系统函数



它只有一对两两互不接触的回路：

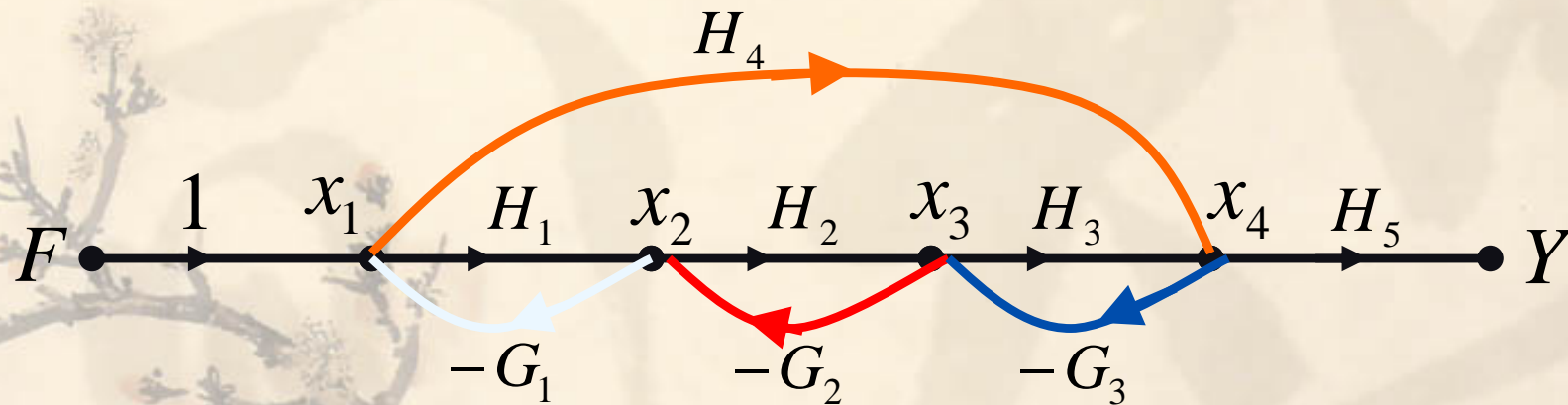
$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \quad \text{与} \quad x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3$$

$$\text{其回路增益乘积为：} L_1 L_3 = G_1 H_1 G_3 H_3$$

没有三个以上的互不接触回路。

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - \sum_j L_j + \sum_{m,n} L_m L_n \\ &= 1 + (G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_4) + G_1 H_1 G_3 H_3 \end{aligned}$$

2.4.2 LSI 系统的差分方程：由流图求系统函数



有两条前向通路，对于前向通路 $F \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow Y$ ，其增益为：

$$g_1 = H_1 H_2 H_3 H_5$$

由于各回路都与该通路相接触，因此， $\Delta_1 = 1$

对于前向通路 $F \rightarrow x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow Y$ ，其增益为： $g_2 = H_4 H_5$

不与 g_2 接触的回路有 $x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$ ，所以

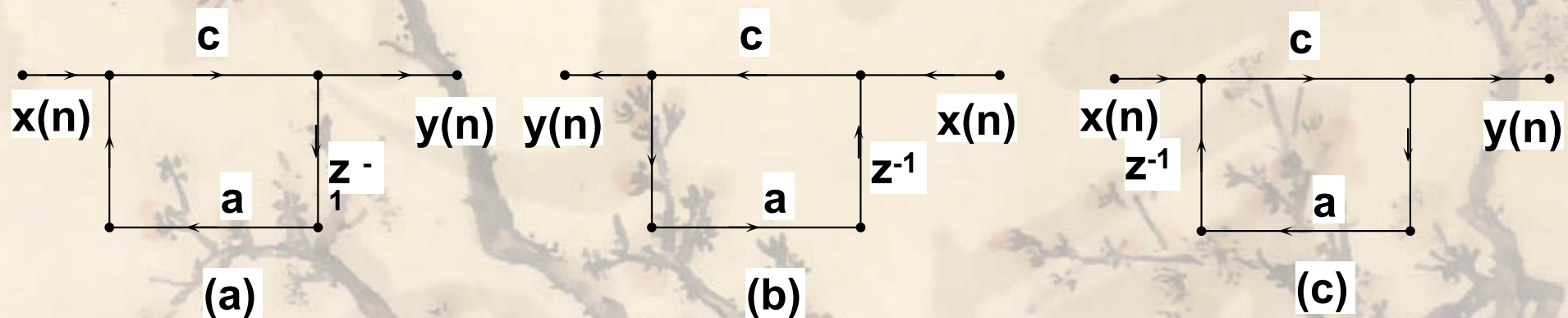
$$\Delta_2 = 1 - \sum_j L_j = 1 + G_2 H_2$$

$$H = \frac{Y}{F} = \frac{1}{\Delta} \sum g_i \Delta_i = \frac{H_1 H_2 H_3 H_5 + (1 + G_2 H_2) H_4 H_5}{1 + (G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_4) + G_1 H_1 G_3 H_3}$$

2.4.2 LSI 系统的差分方程：流图转置定理

❖ 转置定理

- 若将信号流图全部支路的方向反向，且保持全部的支路传输不变，输入变量（源节点变量）和输出变量（汇点变量）交换位置，则当信号流图中只有一个输入和一个输出时，转置后的流图与原流图有相同的系统函数。
- 转置定理是Mason公式的一个推论



$$H(z) = \frac{c}{1 - acz^{-1}}$$

$$H'(z) = \frac{c}{1 - acz^{-1}}$$

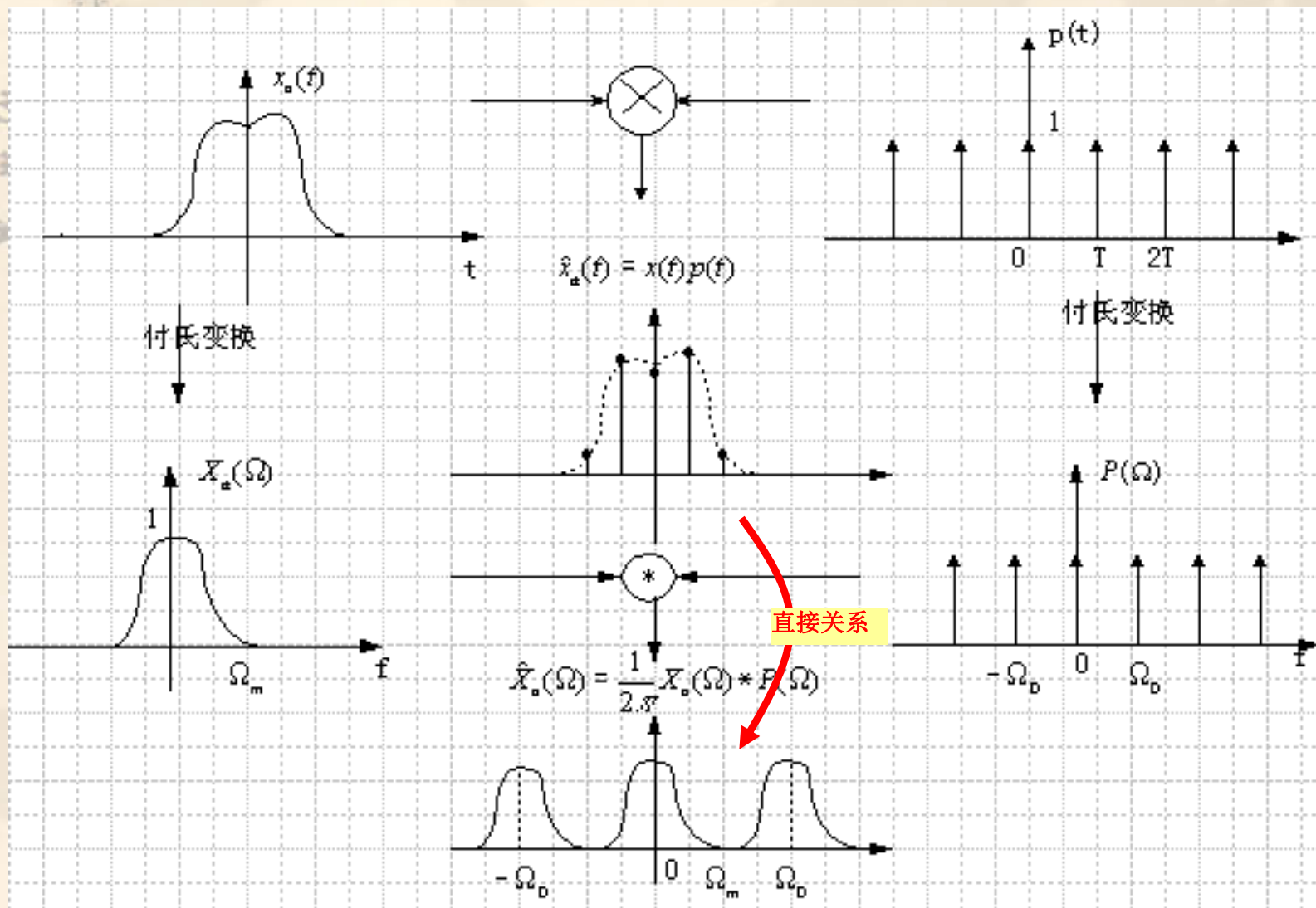
$$H'(z) = \frac{c}{1 - acz^{-1}}$$

即转置后的流图与原流图有相同系统函数。

2.4.2 LSI 系统的差分方程：流图转置定理

- 从另一个角度说明一个系统函数可以有多种实现形式
 - ✧ 系统函数可有多种不同的数学表达式形式。
 - ✧ 不同数学表达式形式可对应不同信号流图结构。
 - ✧ 每种信号流图结构有对应的转置结构。
 - ✧ 每一个系统函数都存在着多种不同的信号流图网络结构，因此每种系统都有多种不同的实现方案。不同的实现方案具有不同的系统性能，要进行综合考虑。
 - ⊕ 主要考虑因素是：
 - ✧ 乘法器尽量少
 - ✧ 延时器尽量少

2.5 离散信号的傅氏变换



离散信号 $\hat{x}_a(t)$ 与 $\hat{X}_a(\Omega)$ 间存在傅氏变换的关系。

2.5 离散信号的傅氏变换

■ 离散信号的傅氏变换对 (离散时间傅氏变换 DTFT)

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} d\omega \end{cases}$$

频域变量 ω
是连续的

时间：离散
频谱：连续

时域变量 n
是离散的

时间：连续
频谱：连续

$$x(n) = x_a(nT)$$

$$X(e^{j\omega}) = \hat{X}_a(\Omega)$$

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t} dt$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

2.5 离散信号的傅氏变换：变换对的推导

- 离散信号 $\hat{x}_a(t)$ 与 $\hat{X}_a(\Omega)$ 间存在一对傅氏变换。

$$F[\hat{x}_a(t)] = F\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)F[\delta(t-nT)]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-jnT\Omega}$$

是周期频谱 $\hat{X}_a(\Omega)$ 展
成付氏级数的系数

$$\text{即：}\hat{X}_a(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-jnT\Omega}$$

2.5 离散信号的傅氏变换：变换对的推导

- ❖ 因 $\hat{X}_a(\Omega)$ 是 Ω 的周期函数（周期为 $\frac{2\pi}{T} = \Omega_s$ ），因此它可以展成付氏级数，其付氏级数系数可表示为：

$$x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \hat{X}_a(\Omega) e^{jnT\Omega} d\Omega$$

$$\hat{X}_a(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-jnT\Omega}$$

变换成数字域形式：

$$\Omega T = \omega$$

$$x(n) = x_a(nT)$$

$$X(e^{j\omega}) = \hat{X}_a(\Omega)$$

$$\therefore \begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \end{cases}$$

级数收敛的充分条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

----- 离散时间傅氏变换对(DTFT)

2.5 离散信号的傅氏变换：举例

例：求下列信号的 **DTFT** 变换

$$(1) x(n) = 2\delta(n) - \delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \delta(n-4)$$

$$(2) x(n) = 4[u(n) - u(n-3)]$$

解：1) $x(n)$ 只有 4 个非 0 值对 **DTFT** 变换有贡献，因而：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = 2 - e^{-j\omega} + 3e^{-2j\omega} + e^{-j4\omega}$$

一般情况下，DTFT 变换后的系数是复值。

2) 在 $n < 0$ 和 $n \geq 3$ 时， $x(n)$ 信号值都是 0，所以：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = 4 + 4e^{-j\omega} + 4e^{-2j\omega}$$

2.5 离散信号的傅氏变换：性质

- ❖ 线性性质
- ❖ 时延性质
- ❖ 周期性
- ❖ 时域卷积定理（时域卷积映射为频域乘）
- ❖ 频域卷积定理（时域序列相乘）
- ❖ 离散傅氏变换的对称性（复数、实数）
- ❖ 时域相关定理（能量信号 $x(n)$ 的自相关函数和其能量谱是一对傅氏变换）
- ❖ Wiener-Khinchin(维纳-辛钦)定理（功率信号 $x(n)$ 的自相关函数和其功率谱是一对傅氏变换）
- ❖ Parseval(帕斯瓦尔) 定理（能量保持不变）

1. 线性性质

- 离散傅氏变换是一个线性变换，即：

$$F[\textcolor{red}{a}x_1(n) + \textcolor{blue}{b}x_2(n)] = \textcolor{red}{a}F[x_1(n)] + \textcolor{blue}{b}F[x_2(n)]$$



IIR 系统的差分方程

$$\begin{aligned} & F \left[\sum_{\textcolor{red}{m}=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{\textcolor{red}{k}=1}^N a_k y(n-k) \right] \\ &= \sum_{\textcolor{red}{m}=0}^M b_m F[x(n-m)] - \sum_{\textcolor{red}{k}=1}^N a_k F[y(n-k)] \end{aligned}$$

2. 时延特性

- 假设信号 $x(n)$ 的DTFT $X(e^{j\omega})$ 存在,

则 $x(n - n_0)$ 的DTFT为:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0) e^{-jn\omega} = e^{-jn_0\omega} X(e^{j\omega})$$

3. 周期性

- 序列的傅氏变换是 ω 的周期函数，周期为 2π 。

证明: $\because X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$

$$\begin{aligned} X[e^{j(\omega+2\pi)}] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn(\omega+2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}e^{-jn \cdot 2\pi} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

注意：连续信号的傅氏变换不是周期函数。

- 推论：在分析时，我们只需要知道 $X(e^{j\omega})$ 的一个周期（即 $\omega \in [0, 2\pi]$, or $[-\pi, \pi]$ 等）即可，而不需要在整个 $-\infty < \omega < \infty$ 域来分析。

4. (时域) 卷积定理

- ❖ 时域内的卷积关系映射为频域内相乘

$$x(n) * h(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

时域卷积

频域相乘

利用这一性质，可以方便地把时域内的离散线性卷积计算，化简成频域内的相乘计算。**Why?**

5. (频域)卷积定理

- 时域内的相乘关系映射为频域内的卷积

$$x(n)h(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) * H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

证明:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta \right] e^{-jn\omega}$$

交换积分与求和的次序, 有

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn(\omega-\theta)} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

注意频域卷积的积分号前面有 $\frac{1}{2\pi}$ 。

6. 对称性

❖ 共轭对称函数 $X_e(e^{j\omega})$ 定义为: $X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega})$

■ 若为实函数, 共轭对称既为偶函数。

❖ 共轭反对称函数 $X_o(e^{j\omega})$ 定义为: $X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$

■ 若为实函数, 共轭反对称则为奇函数。

❖ 任一傅氏变换都可分解为共轭对称和共轭反对称两部分

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$



$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

6. 对称性

❖ 若 $x(n)$ 为复序列，则其傅氏变换 $X(e^{j\omega})$ 有以下性质：

$$1. \quad x^*(n) \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$$

$$2. \quad x^*(-n) \xleftrightarrow{F} X^*(e^{j\omega})$$

$$3. \quad \text{Re}[x(n)] \xleftrightarrow{F} X_e(e^{j\omega})$$

$$4. \quad j \text{Im}[x(n)] \xleftrightarrow{F} X_o(e^{j\omega})$$

$$5. \quad x_e(n) \xleftrightarrow{F} \text{Re}[X(e^{j\omega})]$$

$$6. \quad x_o(n) \xleftrightarrow{F} j \text{Im}[X(e^{j\omega})]$$

❖ 证明(3): 已知

$$\mathbf{Re}[x(n)] = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(n)]$$

那么:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{Re}[x(n)]) &= \frac{1}{2} F([x(n) + x^*(n)]) \\ &= \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \\ &= X_e(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

6. 对称性

❖ 若 $x(n)$ 为实序列，则其傅氏变换有以下性质：

a. 共轭对称；

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

b. 实部是偶函数；

$$\operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] = \operatorname{Re}[X(e^{-j\omega})]$$

c. 虚部是奇函数；

$$\operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] = -\operatorname{Im}[X(e^{-j\omega})]$$

d. 模是偶函数；

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$$

6. 对称性

e. 幅角是奇函数;

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})]$$

f. $x(n)$ 的共轭对称序列对应实部;

$$x_e(n) \leftrightarrow \operatorname{Re}[X(e^{j\omega})]$$

g. $x(n)$ 的共轭反对称序列对应虚部。

$$x_o(n) \leftrightarrow j \operatorname{Im}[X(e^{j\omega})]$$

● 推论:

要画出 $X(e^{j\omega})$ 的幅度频率响应特性 $|X(e^{j\omega})|$, 只需要 $|X(e^{j\omega})|$ 半个周期即可。

7. 时域相关定理

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(m-n) = x(m) * h(m)$$

■ **时域相关定理**：若 $r(n)$ 是 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的相关函数，即

$$r(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(n+m) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} R(e^{j\omega}) = X^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

证明： $R(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(n+m) \right] e^{-jm\omega}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{+jn\omega} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n+m) \right] e^{-j(n+m)\omega} = X^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

和卷积的区别

1) 形式相似

2) 卷积描述的是离散系统

3) 相关是两个信号，与系统无关

■ 如果令 $E_x(e^{j\omega})$ 是能量信号 $x(n)$ 的**自相关函数** $r_x(m)$ 的傅里叶变换，由上述相关函数，得：

$$E_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x(m)e^{-jm\omega} = X^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$$

能量信号 $x(n)$ 自相关函数的傅里叶变换等于 $x(n)$ 的傅里叶变换的幅值平方，即 $x(n)$ 的能量谱。

8. 维纳-辛钦定理

- 功率信号 $x(n)$ 自相关函数和其功率谱是一对傅氏变换

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x(m) e^{-jm\omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)x(n+m) \right] e^{-jm\omega}$$

功率信号的
自相关函数

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|X_{2N}(e^{j\omega})|^2}{2N+1} = P_x(e^{j\omega})$$

确定信号的维
纳-辛钦定理

其中 $P_x(e^{j\omega})$ 是功率信号 $x(n)$ 的功率谱； $X_{2N}(e^{j\omega})$ 是下述信号的傅里叶变换：

$$x_{2N}(n) = \begin{cases} x(n) & |n| \leq N \quad (-N \leq n \leq N) \\ 0 & |n| > N \end{cases}$$

信号 $x(n)$ 的总功率为：

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{j\omega}) d\omega$$

9. Parseval 定理

■ 变换前后能量保持不变

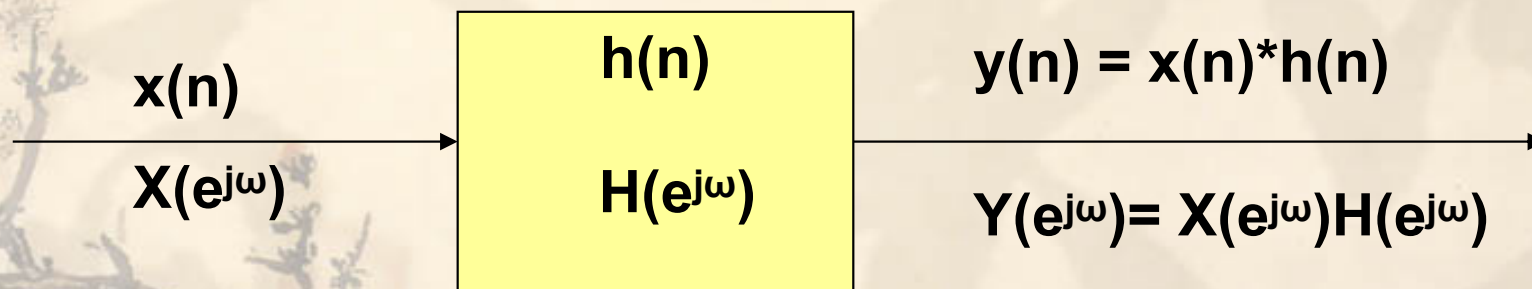
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

证明：信号 $x(n)$ 在时域的总能量 E_x 为：

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) e^{jn\omega} \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E(e^{j\omega}) d\omega \end{aligned}$$

Parseval 定理说明，信号在时域的总能量等于其在频域的总能量。频域的总能量等于 $|X(e^{j\omega})|^2$ 在一个周期内的积分，因此， $|X(e^{j\omega})|^2$ 是信号的能量谱

2.5 离散信号的傅氏变换：LSI 系统的频率响应



❖ LSI系统的输入、输出关系为:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

❖ 其傅氏变换为:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= F[y(n)] = F[x(n) * h(n)] \\ &= X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

--- (卷积特性)

2.5 离散信号的傅氏变换：LSI 系统的频率响应

- 其中 $H(e^{j\omega})$ 为系统单位取样响应序列 $h(n)$ 的傅氏变换：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega}$$

或者

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\text{输出频率响应}}{\text{输入频率响应}}$$

是 ω 的周期函数，周期为 2π 。

- ❖ $H(e^{j\omega})$ 称为 LTI 系统的**频率响应**，一般来讲，它是 ω 的复函数，其幅度 $|H(e^{j\omega})|$ 称为**幅度（增益）响应函数**，或**幅频响应**，而其相角 $\angle H(e^{j\omega})$ 则称为**相位响应**，或**相频响应**。

2.5 离散信号的傅氏变换：LSI 系统的频率响应

例 求下列差分方程所表示的滤波器的频率响应表达式：

$$y(n) = -0.85y(n-1) + 0.5x(n)$$

解： 对每一项都进行 DTFT 变换，得：

$$Y(e^{j\omega}) + 0.85e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = 0.5X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega})[1 + 0.85e^{-j\omega}] = 0.5X(e^{j\omega})$$

频率响应为：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{0.5}{1 + 0.85e^{-j\omega}}$$

2.6 Z 变换的定义及其收敛域

❖ 线性模拟系统:

L变换（拉氏变换）：解常系数微分方程的运算方法
微分方程 \rightarrow 代数方程（时域 \rightarrow **s 域**）

❖ 离散系统:

Z变换：解常系数差分方程的运算方法
差分方程 \rightarrow 代数方程（时域 \rightarrow **z 域**）；

用**零极点图**形象的表示离散系统的时间与频率特性，避免大量的数学分析。

2.6 Z 变换的定义及其收敛域

❖ 序列 $x(n)$ 的 Z 变换定义

∞ 正变换:

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



双边 Z 变换定义

z — 复变量，它所在的平面称为复平面

令 $z = re^{j\omega}$ — 复指数形式。

∞ 反变换:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

2.6 Z 变换的定义及其收敛域

■ 收敛域

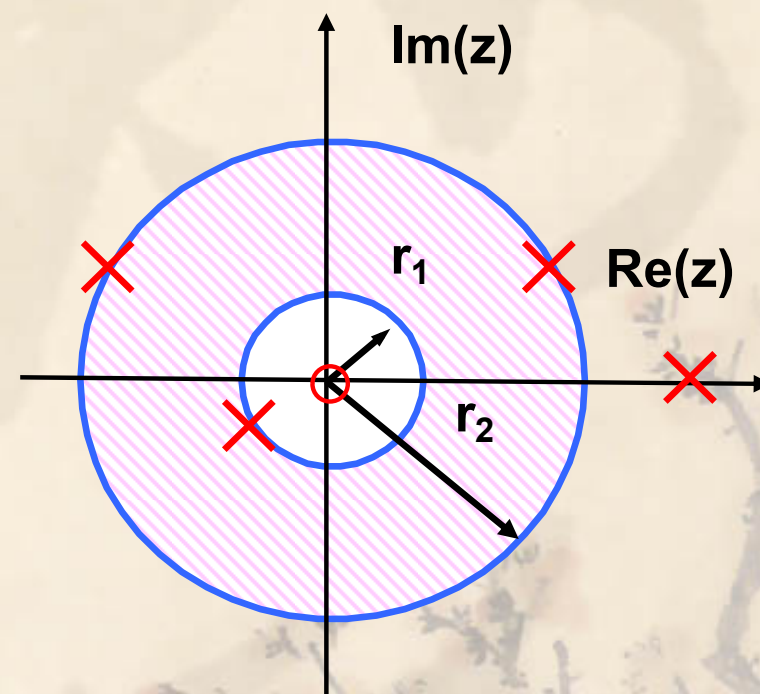
- ✧ 既然 $X(z)$ 是幂级数，就存在它是否收敛的问题？
- ✧ 对于任意给定的序列 $x(n)$ ，使其 Z 变换收敛的 z 值集合称作 $X(z)$ 的收敛域 ROC (Region of Convergence)，即： $\{z: X(z) \text{ 存在}\}$ 。
- ✧ 即 ROC 是满足 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$ 的区域

注意：

不同的序列 $x(n)$ ，可能对应相同的 Z 变换，只是收敛域不同，故在确定 Z 变换时，必须指明收敛域。

2.6 Z 变换的定义及其收敛域

- ❖ 因收敛域仅决定于模值 $|z|=r$ ，按复变函数的理论，幂级数的收敛域为 Z 平面上的环状区域： $r_1 < |z| < r_2$ ， r_1 、 r_2 是 $X(z)$ 的极点。
- ❖ 在收敛域内的 $X(z)$ 是解析函数， $X(z)$ 的极点在收敛域 ROC 之外，收敛域以极点为边界，收敛域内无极点。
- ❖ r_1 可以取 0， r_2 可取 ∞ 。如果 $r_2 < r_1$ ，说明收敛域不存在，那么 Z 变换也不存在。



- 根据极点和收敛域 ROC 的情况， $x(n)$ 序列分为：
 - ❖ 右边序列 (ROC: $|z| > r_1$)
 - ❖ 左边序列 (ROC: $|z| < r_2$)
 - ❖ 双边序列 (ROC: $r_1 < |z| < r_2$)

【例】 设双边序列 $x(n) = b^{|n|}$, $-\infty \leq n \leq \infty$ $b > 0$

$$x(n) = \underbrace{b^n u(n)}_{n \geq 0} + \underbrace{b^{-n} u(-n-1)}_{n < 0}$$

$$Z[b^n u[n]] = \frac{1}{1 - bz^{-1}} \quad |z| > b$$

$$Z[b^{-n} u[-n-1]] = -Z\left[-(b^{-1})^n u[-n-1]\right] = \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}} \quad |z| < b^{-1}$$

对于 $b > 1$, 没有任何公共的ROC。

对于 $b < 1$, 上式的ROC有重叠, 因此合成序列的Z变换是

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \frac{1}{1 - b^{-1}z^{-1}} \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$

2.7 Z 反变换

- 从给定的 Z 变换闭合式 $X(z)$ 中还原出原序列 $x(n)$, 称为 Z 反变换:

$$X(z) \xrightarrow{z^{-1}} x(n) \quad z \in R$$

❖ 常用方法:

- 幂级数展开法 (长除法)
- 部分分式分解法
- 留数法 (围线积分)

注意: 收敛域 ROC

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

2.7.1 Z反变换：幂级数（长除法）

由Z变换的定义

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \underbrace{\dots x(-2)z^2 + x(-1)z^1}_{z \text{ 的正幂}} + x(0)z^0 + \underbrace{x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots x(n)z^n}_{z \text{ 的负幂}} + \dots$$

根据收敛域判断所要得到的 $x[n]$ 的特性(单边、双边等)，然后再展开成相应的Z的幂级数。

如果 $X(z)$ 的收敛域是 $|z| > R_{x-}$ ，则 $x[n]$ 必然是因果序列，此时 $N(z)$ 、 $D(z)$ 按 z^{-1} 的升幂次序进行长除法。

如果收敛域是 $|z| < R_{x+}$ ，则 $x[n]$ 必然是左边序列，此时 $N(z)$ 、 $D(z)$ 按 z 的升幂次序进行长除法。

2.7.1 Z 反变换：幂级数（长除法）

【例】已知 $X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ ，收敛域为 $|z| > 1$ ，求其Z反变换 $x[n]$ 。

解：由 $X(z)$ 的收敛域得， $x[n]$ 必然是因果序列（右边序列）。

按 z^{-1} 升幂次序排成下列形式

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

进行长除。

2.7.1 Z 反变换：幂级数（长除法）

$$\begin{array}{r} z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots \\ 1 - 2z^{-1} + z^{-2} \overline{) z^{-1}} \\ \underline{z^{-1} - 2z^{-2} + z^{-3}} \\ 2z^{-2} - z^{-3} \\ \underline{2z^{-2} - 4z^{-3} + 2z^{-4}} \\ 3z^{-3} - 2z^{-4} \\ \underline{3z^{-3} - 6z^{-4} + 3z^{-5}} \\ 4z^{-4} - 3z^{-5} \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

所以 $X(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n}$ ，得到 $x[n] = n u[n]$

2.7.1 Z 反变换：幂级数（长除法）

【例】已知 $X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ ，收敛域为 $|z| < 1$ ，求其Z反变换 $x[n]$ 。

解：由 $X(z)$ 的收敛域得， $x[n]$ 必然是左边序列。
按 z 的升幂次序排成下列形式

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 2z^1 + 1}$$

长除运算

$$\begin{array}{r}
 z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots \\
 1 - 2z + z^2 \overline{)z} \\
 \underline{z - 2z^2 + z^3} \\
 2z^2 - z^3 \\
 \underline{2z^2 - 4z^3 + 2z^4} \\
 3z^3 - 2z^4 \\
 \underline{3z^3 - 6z^4 + 3z^5} \\
 4z^4 - 3z^5 \\
 \cdots
 \end{array}$$

所以 $X(z) = z^1 + 2z^2 + 3z^3 + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{-1} -nz^{-n}$ ，得到 $x[n] = -nu[-n-1]$

【例】求反变换 $X(z) = \log(1 + az^{-1})$, $|z| > |a|$

由 $|z| > |a|$, 可得 $|az^{-1}| < 1$. 因此, 可用泰勒级数展开为

$$\log(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (az^{-1})^n}{n}, \quad |az^{-1}| < 1$$

即
$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}, \quad |az^{-1}| < 1$$

据此, 可以确定 $x[n]$ 为
$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

或写为
$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$$

【例】已知 $X(z)=e^{1/z}, |z|>0$ ，求 z 反变换

解：将 $e^{1/z}$ 展开成幂级数的形式，有

$$e^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

所以有

$$x(n) = \frac{1}{n!} u(n)$$

2.7.2 Z 反变换：部分分式展开

如Z变换式 $X(z)$ 具有如下形式的有理分式

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^{-M} + b_{m-1} z^{-(M-1)} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_n z^{-N} + a_{n-1} z^{-(N-1)} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0}$$

式中的 $N(z)$ 、 $D(z)$ 都是变量 z^{-1} 的实数系数多项式。

一般情况下（无重根），可展开成以下的部分分式形式

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-N} B_n z^{-n} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{z - z_k}$$

当 $M \geq N$ 时，存在 B_n （ $M=N$ 时只有 B_0 项）， $M < N$ 时，各个 $B_n=0$ 。 B_n 可用长除法求得。

右边序列: $z_i^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - z_i} \Rightarrow x(n) = \sum_i A_i z_i^n u(n)$

左边序列: $-z_i^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z - z_i} \Rightarrow x(n) = -\sum_i A_i z_i^n u(-n-1)$

例: 利用部分分式分解法求 $X(z)$ 的 z 反变换。

$$X(z) = \frac{z+2}{2z^2 - 7z + 3}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 3$$

解

$$X(z) = \frac{2}{3} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - 3}$$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{2}{3} \delta(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{3} (3)^n u(-n-1)$$

2.7.2 Z反变换：部分分式展开

【例】 已知 $X(z) = \frac{10z}{z^2 - 3z + 2}$ ，试用部分 $|z| > 2$ 分式展开法求其反变换。

解：

$$X(z) = \frac{10z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{10z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

将此式展开成部分分式

$$X(z) = \frac{-10}{1 - z^{-1}} + \frac{10}{1 - 2z^{-1}}$$

根据收敛域可得 $x[n] = 10(2^n - 1)u[n]$

2.7.2 Z反变换：部分分式展开

【例】已知 $X(z) = \frac{2z+4}{(z-1)(z-2)^2}$, $|z| > 2$, 试用部分分式法求其反变换。

解：将此等式两端同除以 z 并展开成部分分式得

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{C_1}{z-2} + \frac{C_2}{(z-2)^2}$$

待定参数

$$A_1 = z \left. \frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2} \right|_{z=0} = -1$$

$$A_2 = (z-1) \left. \frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2} \right|_{z=1} = 6$$

2.7.2 Z反变换：部分分式展开

$$C_2 = (z-2)^2 \left. \frac{2z+4}{z(z-1)(z-2)^2} \right|_{z=2} = 4$$

取 $z=-2$ (零点), 得 $0 = \frac{A_1}{-2} + \frac{A_2}{-3} + \frac{C_1}{-4} + \frac{C_2}{16}$ 从而 $C_1 = -5$

得
$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-1}{z} + \frac{6}{z-1} + \frac{-5}{z-2} + \frac{4}{(z-2)^2}$$

$$X(z) = -1 + \frac{6z}{z-1} - 5 \frac{z}{z-2} + 2 \frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$X(z) = -1 + \frac{6}{1-z^{-1}} - \frac{5}{1-2z^{-1}} + 2 \frac{2z}{(z-2)^2}$$

根据收敛域得
$$x[n] = -\delta[n] + 6u[n] - 5(2)^n u[n] + 2n(2)^n u[n]$$

2.7.2 Z反变换：部分分式展开(Matlab)

【例】已知 $X(z) = \frac{2z+4}{(z-1)(z-2)^2}$ ， $|z|>2$ ，试对 $X(z)$ 作部分分式展开，并求 $x[n]$ 。

解：首先改写 $X(z)$ ，将分子和分母多项式按 z 的降幂次序排列。

$$X(z) = \frac{2z^{-2} + 4^{-3}}{1 - 5z^{-1} + 8z^{-2} - 4z^{-3}}$$

程序如下：

```
>> b=[0,0,2,4]
>> a=[1,-5,8,-4]
>> [r,p,k]=residuez(b,a)
```


运行结果:

$r =$	$p =$	$k =$
-7.0000	2.0000	-1
2.0000	2.0000	
6.0000	1.0000	

其中, p 向量的第一、二两个值均为2, 表明它是一个二阶极点, 它们的展开系数分别对应于 r 向量中的第一、二个值。故

$$X(z) = \frac{-7}{1-2z^{-1}} + \frac{2}{(1-2z^{-1})^2} + \frac{6}{1-z^{-1}} - 1$$

改写为

$$X(z) = \frac{-7}{1-2z^{-1}} + \frac{z \cdot 2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} + \frac{6}{1-z^{-1}} - 1$$

查表可求得 $x[n]$:

$$x[n] = -7(2)^n u[n] + (n+1)(2)^{n+1} u[n+1] + 6u[n] - \delta[n]$$

当 $n=-1$ 时上式中等号后面第二项为零，故可进一步化简为

$$x[n] = -5(2)^n u[n] + 2n(2)^n u[n] + 6u[n] - \delta[n]$$

也可直接调用iztrans()函数来获得反变换。

【例】利用部分分式展开求 $X(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$ 的Z反变换。

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{3z^2 - 4z + 1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \right) \end{aligned}$$

(1) 收敛域: $|z| > 1 \quad \Rightarrow \quad x_1(n) = \frac{1}{2}u(n) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

(2) 收敛域: $|z| < \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_2(n) = -\frac{1}{2}u(-n-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$

(3) 收敛域: $\frac{1}{3} < |z| < 1 \quad \Rightarrow \quad x_3(n) = -\frac{1}{2}u(-n-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

2.7.3 Z 反变换：留数法

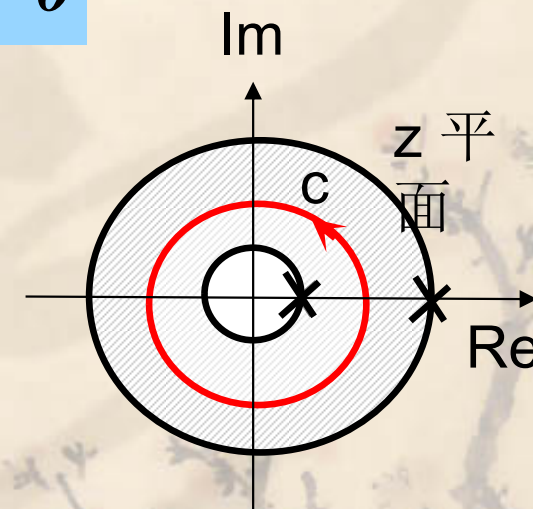
■ 柯西定理

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{k-1} dz = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

式中 c 是一条逆时针方向环绕原点的围线。

■ Z 变换的定义：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



两边同乘上 z^{k-1} ，在 $X(z)$ 的收敛区域内取一条包围原点的逆时针闭合曲线 c 作围线积分，得到

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n+k-1} dz$$

2.7.1 Z 反变换：留数法

右边表达式，交换积分与求和次序，根据柯西定理可得

$$= \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n+k-1} dz &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{-n+k-1} dz \\ &= x(k) \end{aligned}$$

把上页表达式中的变量 k 换成 n ，即得 Z 反变换的定义：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

式中 c 是 $X(z)$ 收敛域内的一条逆时针方向绕原点的闭合围线。

■ 问题：如何求解上述围线积分？

2.7.3 Z 反变换：留数法

■ 利用留数定理可以求解围线积分运算

设 z_k 是被积函数 $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 内的一组极点。根据留数定理， $x(n)$ 等于围线 c 内全部极点留数之和，即：

$$x(n) = \sum_k \text{Res}[X(z)z^{n-1}, z_k]$$

■ 求极点的留数

✧ $X(z)z^{n-1}$ 在单极点 z_0 的留数

$$(z - z_0)X(z)z^{n-1} \Big|_{z=z_0}$$

✧ $X(z)z^{n-1}$ 在 z_0 有 K 阶极点的留数

$$\frac{1}{(K-1)!} \frac{d^{K-1}}{dz^{K-1}} [(z - z_0)^K X(z)z^{n-1}] \Big|_{z=z_0}$$

复杂！

2.7.3 Z 反变换：留数法

■ 利用围线外极点留数求 $x(n)$

- ✧ 假设围线 c 内有 k 个极点 z_k ， c 外有 m 个极点 z_m (k 、 m 是有限值)，对于扩充复平面，围线 c 内外的极点留数之和为 0 ，包括无穷远点 ∞ 的留数，则有：

$$\sum_k \text{Res}[X(z)z^{n-1}, z_k] + \sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}, z_m] + \text{Res}[X(z)z^{n-1}, \infty] = 0$$

- ✧ 对于在围线 c 内有多阶极点，而围线 c 外没有多阶极点的情况，为避免求多阶极点留数的麻烦，可以利用留数辅助定理，即改求围线 c 外的极点留数之和，并取负号：

$$x(n) = \sum_k \text{Res}[X(z)z^{n-1}, z_k] = - \sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}, z_m]$$

- ✧ 要求条件： $X(z)z^{n-1}$ 分母多项式 z 的阶次比分子多项式 z 的阶次高二阶或二阶以上。此时， $X(z)z^{n-1}$ 在无穷远点的留数为零。否则，需要考虑无穷远点的留数。

$$x(n) = - \sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}, z_m] - \text{Res}[X(z)z^{n-1}, \infty]$$

2.7.3 Z 反变换：留数法

❖ 几点说明：

- **极点的确定**。首先确定收敛域，然后针对收敛域中围线 c 内的函数 $X(z)z^{n-1}$ 的极点计算 Z 反变换。需要判断 $X(z)z^{n-1}$ 极点是否发生了变化。
- 当 $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=0$ 处有极点时应特别注意：
 - ⑩ 设 $X(z)$ 在 $z=0$ 处有 r 阶的极点，即有因子 z^{-r} ，则 $X(z)z^{n-1}$ 就有因子 z^{-r+n-1} 。若 $-r+n-1 < 0$ 时，则在 $z=0$ 处将出现极点。因此，应对一个或多个 n_k 值分别求，以免出错。
- **留数法分为两种情况：**

$$\begin{cases} (1) x(n) = \sum [X(z)z^{n-1} \text{ 在 } c \text{ 内极点上的留数}] & n \geq 0, \text{ 右边序列} \\ (2) x(n) = -\sum [X(z)z^{n-1} \text{ 在 } c \text{ 外极点上的留数}] & n < 0, \text{ 左边序列} \end{cases}$$

2.7.3 Z 反变换：留数法

✧ 利用围线外极点留数求 $x(n)$ 的条件： $X(z)z^{n-1}$ 分母多项式 z 的阶次比分子多项式 z 的阶次高二阶或二阶以上。此时， $X(z)z^{n-1}$ 在无穷远点的留数为零。否则，需要考虑无穷远点的留数。

无穷远点的留数： $\text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0\right]$

$$f(z) = \frac{b_M z^M + \cdots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{b_M z^{-M} + \cdots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_N z^{-N} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0} = \frac{z^{N-M} (b_M + \cdots + b_1 z^{M-1} + b_0 z^M)}{a_N + \cdots + a_1 z^{N-1} + a_0 z^N}$$

$$f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2} = \frac{z^{N-M} (b_M + \cdots + b_1 z^{M-1} + b_0 z^M)}{z^2 (a_N + \cdots + a_1 z^{N-1} + a_0 z^N)}$$

2.7.3 Z 反变换：留数法

无穷远点的留数： $\text{Res}[f(z), \infty] = -\text{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0\right]$

$$= (z-0)f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}\bigg|_{z=0} = \frac{z^{N-M-1}(b_M + \cdots + b_1 z^{M-1} + b_0 z^M)}{(a_N + \cdots + a_1 z^{N-1} + a_0 z^N)}\bigg|_{z=0}$$

因此，当 $N-M-1 \geq 1$ or $N-M \geq 2$ 时，上式等于 0。即 $f(z) = \frac{X(z)z^{n-1}}{\text{分母}}$ 多项式 z 的阶次 N 比分子多项式 z 的阶次 M 高二阶或二阶以上。此时， $X(z)z^{n-1}$ 在无穷远点的留数为零。

$$\text{Res}[f(z), \infty] = \frac{z^{N-M-1}(b_M + \cdots + b_1 z^{M-1} + b_0 z^M)}{(a_N + \cdots + a_1 z^{N-1} + a_0 z^N)}\bigg|_{z=0}^{N-M \geq 2} = 0$$

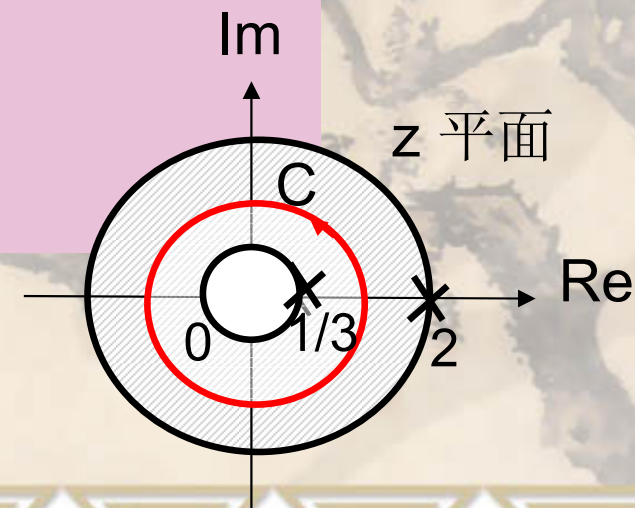
2.7.3 Z 反变换：留数法

例： $X(z) = \frac{5z}{(2-z)(3z-1)}, \quad \frac{1}{3} < |z| < 2$

解： $X(z)z^{n-1} = \frac{5z}{(2-z)(3z-1)} z^{n-1} = \frac{5z^n}{(2-z)(3z-1)}$

(1) 当 $n \geq 0$ 时有极点 $z=1/3$ (在 C 的内部)

$$\begin{aligned} \therefore x(n) &= \sum_{\text{留数}} \frac{5z(z^{n-1})}{(2-z)(3z-1)} = \left(z - \frac{1}{3} \right) \frac{5z \cdot z^{n-1}}{(2-z)(3z-1)} \bigg|_{z=\frac{1}{3}} \\ &= \left(z - \frac{1}{3} \right) \frac{5 \cdot z^n}{3(2-z)(z - \frac{1}{3})} \bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3} \right)^n \end{aligned}$$



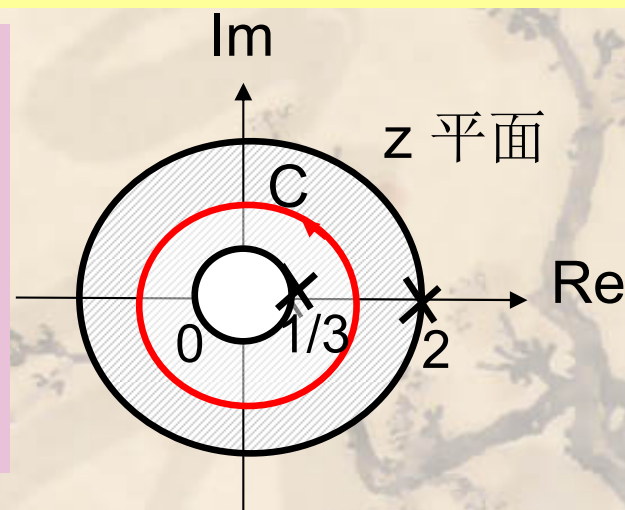
2.7.3 Z 反变换：留数法

(2) 当 $n < 0$ 时

$X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 内的极点有 $z=1/3$ 和 $z=0$ ，而 $z=0$ 是一个多阶极点，改求围线外的留数之和，围线外只有极点 $z=2$ 。

$$\frac{5z}{(2-z)(3z-1)} \cdot z^{n-1} = \frac{5z^n}{(2-z)(3z-1)} \quad \text{在 } z=2 \text{ 有极点 (在 } C \text{ 的外部)}$$

$$\begin{aligned} x(n) &= - \sum_{\text{留数}} \frac{5z(z^{n-1})}{(2-z)(3z-1)} \Big|_{z=2} \\ &= - (z-2) \frac{5z(z^{n-1})}{(2-z)(3z-1)} \Big|_{z=2} = 2^n \end{aligned}$$



$$\therefore x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ 2^n & n < 0 \end{cases}$$

2.7.3 Z 反变换：Matlab 实现

■ Matlab 的 **residuez** 函数 (residue留数 + z 数字域)

- ✧ **residuez** 可计算出有理函数的留数部分和直接（或多项式）项，展成部分分式形式。有理函数的分子分母都按 z^{-1} 的递增顺序排列，设有如下形式：

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$
$$= \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

- ✧ 分子、分母多项式 **B(z)** 和 **A(z)** 分别由矢量 **a**、**b** 给定。
- ✧ 用语句 **[R,p,C] = residuez(b,a)** 可求得 **X(z)** 的留数**R**、极点**p**和直接项**C**。
- ✧ 求得的列向量 **R** 包含着留数；列向量 **p** 包含着极点；行向量 **C** 包含着直接项。

2.7.3 Z 反变换: Matlab 实现

✧ 则求得 $x(n)$ 为:

$$x(n) = \sum_{k=1}^N R_k \mathbf{Z}^{-1} \left[\frac{1}{1 - p_k z^{-1}} \right] + \sum_{k=0}^{M-N} C_k \delta(n - k)$$



$$\mathbf{Z}^{-1} \left[\frac{1}{1 - p_k z^{-1}} \right] = \begin{cases} p_k^n u(n) & |z_k| > r_1 \text{ 右边序列} \\ -p_k^n u(-n-1) & |z_k| < r_2 \text{ 左边序列} \end{cases}$$

✧ 如果 $p(k) = \dots = p(k+r+1)$ 是 r 阶极点, 则其展开形式包括如下形式的项:

$$\frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{R_{k+1}}{(1 - p_k z^{-1})^{-2}} + \dots + \frac{R_{k+r-1}}{(1 - p_k z^{-1})^{-r}}$$

● 类似的, 函数 $[b, a] = \text{residuez}(R, p, C)$ 有三个输入变量和两个输出变量, 它把部分分式变成多项式的系数行向量 b 和 a 。

2.7.3 Z 反变换: Matlab 实现

例 求取 $X(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$ 的 Z 反变换。

% Check of residues in the Example

```
b = [0,1]; a = [3,-4,1];
```

```
[R,p,C] = residuez(b,a)
```

```
[b,a] = residuez(R,p,C)
```

$$X(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1} = \frac{0 + z^{-1}}{3 - 4z^{-1} + z^{-2}}$$

运行结果如下（留数、极点、直接项以及分子分母多项式的系数）：

R =

0.5000

-0.5000

p =

1.0000

0.3333

C =

[]

b =

-0.0000 0.3333

a =

1.0000 -1.3333 0.3333

$$X(z) = \frac{z}{3\left(z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

根据收敛域情况， $\mathbf{x(n)}$ 表示为右边序列、左边序列或者双边序列。

2.8 Z变换的性质

1. 线性

$$\text{若 } x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

$$y[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) \quad R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$$

$$\text{则 } ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{Z} aX(z) + bY(z) \quad R_- < |z| < R_+$$

$$R_- = \max(R_{x^-}, R_{y^-}), \quad R_+ = \min(R_{x^+}, R_{y^+})$$

如果有零点和极点相抵消，从而使ROC的边界发生改变，则收敛域可能在原来收敛域的基础上扩大。

【例】求序列 $x[n] = a^n u[n]$, $y[n] = a^n u[n-1]$ 以及两者之差的Z变换

解：令 $x_1[n] = a^n u[n] - a^n u[n-1]$

由Z变换定义式，得

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] z^{-n} = \frac{a}{z-a} \quad |z| > |a|$$

所以 $Z[x_1[n]] = X(z) - Y(z) = \frac{z-a}{z-a} = 1 \quad 0 \leq |z| \leq \infty$

【例】已知 $x[n] = [\cos \omega_0 n]u[n]$ ，求它的Z变换。

解：已知
$$Z[a^n u[n]] = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

所以
$$Z[e^{j\omega_0 n} u[n]] = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} \quad |z| > |e^{j\omega_0}| = 1$$

$$Z[e^{-j\omega_0 n} u[n]] = \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \quad |z| > |e^{-j\omega_0}| = 1$$

$$\begin{aligned} Z[\cos(\omega_0 n)u[n]] &= Z\left[\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}u[n]\right] = \frac{1}{2}Z[e^{j\omega_0 n}u[n]] + \frac{1}{2}Z[e^{-j\omega_0 n}u[n]] \\ &= \frac{1}{2(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})} + \frac{1}{2(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} = \frac{1 - z^{-1}[\cos \omega_0]}{1 - 2z^{-1}[\cos \omega_0] + z^{-2}} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

2. 移位性

若序列 $x[n]$ 的双边Z变换为 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ $R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

$$x[n-m] \xleftrightarrow{Z} z^{-m} X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

则有

式中 m 为任意整数， m 为正则为延迟， m 为负则为超前。

证：按Z变换的定义

$$Z[x[n-m]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-m] z^{-n} = z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} = z^{-m} X(z)$$

上式推导过程中，应用了变量替换 $k=n-m$ 。

❖ $m > 0$, z^{-m} 会引入 $z = 0$ 的极点, 但可以抵消 $X(z)$

在 $z = 0$ 的零点。因此 $z = 0$ 虽然不是 $X(z)$ 的一个极点, 但却可以是 $z^{-m}X(z)$ 的一个极点。在此情况下, 原点可能要除去。

$m < 0$, z^{-m} 会引入 $z = 0$ 的零点, 可以抵消 $X(z)$ 在 $z = 0$ 的极点。因此, 当 $z = 0$ 不是 $X(z)$ 的一个极点, 但却可以是 $z^{-m}X(z)$ 的一个零点。在此情况下, $z = \infty$ 可能要除去。

在上述情况下, 收敛域可能发生变化。

3. 乘以指数序列（ z 域的尺度变换）

$$\text{若 } x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

$$\text{则 } a^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left[\frac{z}{a}\right] \quad R_{x^-} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x^+}$$

式中 a 是常数，它可以是复数。

证：按定义

$$Z[a^n x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left[\frac{z}{a}\right] \quad R_{x^-} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x^+}$$

特别地，当 $a = -1$ 时： $(-1)^n x[n] \xleftrightarrow{z} X(-z)$

【例】已知 $x[n] = (\frac{1}{3})^n [\cos \omega_0 n] u[n]$ ，求它的Z变换。

解：已知

$$\begin{aligned} Z[\cos(\omega_0 n) u[n]] &= Z\left[\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} u[n]\right] = \frac{1}{2} Z[e^{j\omega_0 n} u[n]] + \frac{1}{2} Z[e^{-j\omega_0 n} u[n]] \\ &= \frac{1}{2(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})} + \frac{1}{2(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} = \frac{1 - z^{-1} [\cos \omega_0]}{1 - 2z^{-1} [\cos \omega_0] + z^{-2}} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

由于Z域尺度变换性质

$$\begin{aligned} a^n x[n] &\xleftrightarrow{Z} X\left[\frac{z}{a}\right] \\ X(z) &= \frac{1 - \frac{1}{3} [\cos \omega_0] z^{-1}}{1 - \frac{1}{3} [2 \cos \omega_0] z^{-1} + \frac{1}{9} z^{-2}} \quad |z| > \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4. Z 域微分

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$

$$R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

则 $nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{d}{dz} X(z)$

$$R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

证: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

$$\begin{aligned} \frac{dX(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{d}{dz} (z^{-n}) \\ &= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = -z^{-1} Z[nx[n]] \end{aligned}$$

5. 复共轭序列

一个复序列 $x[n]$ 的共轭序列记为 $x^*[n]$,

若 $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

则 $x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

证：按定义

$$\begin{aligned} Z[x^*[n]] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [x[m] \cdot (z^*)^{-m}]^* \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] (z^*)^{-m} \right]^* = X^*(z^*) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+} \end{aligned}$$

6. 初值定理

如果 $x[n]$ 为一因果序列，则其初始值可以由下式求得

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

证明：

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \lim_{z \rightarrow \infty} [x(0) + x(1)z^{-1} + \cdots] = x(0)$$

7. 终值定理

如果 $x[n]$ 为一因果序列，且当 z 变换的极点位于单元圆 $|z|=1$ 以内

（单位圆上最多在 $z=1$ 处有一阶极点）

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

证明：

$$Z[x(n+1) - x(n)] = (z-1)X(z)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n}$$

因果序列

$$x(n) = 0, \quad n < 0$$

$$(z-1)X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=-1}^n x(m+1)z^{-m} - \sum_{m=0}^n x(m)z^{-m} \right]$$

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=-1}^n x(m+1)z^{-m} - \sum_{m=0}^n x(m)z^{-m} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [x(0) + x(1) + \cdots + x(n+1) - x(0) - x(1) - \cdots - x(n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ 有终值存在，才成立。

8. 序列的卷积

若

$$\begin{aligned}x[n] &\xleftrightarrow{Z} X(z) & R_{x^-} < |z| < R_{x^+} \\ y[n] &\xleftrightarrow{Z} Y(z) & R_{y^-} < |z| < R_{y^+}\end{aligned}$$

则 $x[n] * y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)Y(z) \quad \max\{R_{x^-}, R_{y^-}\} < |z| < \min\{R_{x^+}, R_{y^+}\}$

证:

$$\begin{aligned}Z[x[n] * y[n]] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x[n] * y[n]] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} [x[m] y[n-m]] \right] z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-m] z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} Y(z) = Y(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} \\ &= X(z) Y(z) \quad \max\{R_{x^-}, R_{y^-}\} < |z| < \min\{R_{x^+}, R_{y^+}\}\end{aligned}$$

9. 复卷积定理

复卷积定理与序列的卷积是对偶关系。设 $w(n) = x(n)y(n)$

$$\text{则 } W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c_1} X\left(\frac{z}{v}\right) Y(v) v^{-1} dv, \quad c_1 \text{ 是 } X\left(\frac{z}{v}\right) \text{ 和 } Y(v) \text{ 重叠部分的闭合围线}$$

或

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c_2} X(v) Y\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv \quad c_2 \text{ 是 } X(v) \text{ 和 } Y\left(\frac{z}{v}\right) \text{ 重叠部分的闭合围线}$$

证明：略。

10. 帕塞瓦尔定理

如果有两个序列 $x(n)$ ， $y(n)$ ，则帕塞瓦尔定理为：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv,$$

式中，积分围线C取在 $X(v)$ 与 $Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)$ 两者收敛的重叠部分内。

证明：设 $w(n) = x(n)y(n)$ ，则 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n) = W(z)|_{z=1}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = W(z)|_{z=1}$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_C [X(v)Y^*\left(\frac{z}{v^*}\right)v^{-1}dv]_{z=1}$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

2.9 一些常用的Z变换对

❖ 见书上教材P.53页。

序号	序列	z 变换	收敛域
1	$\delta[n]$	1	整个 z 平面
2	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
4	$\delta[n-m]$	z^{-m}	除去 0 (若 $m>0$) 或 ∞ (若 $m<0$) 的所有 z
5	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
6	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
7	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $

序号	序列	z 变换	收敛域
8	$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
9	$[\cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10	$[\sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11	$[r^n \cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12	$[r^n \sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r \sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$

2.10.1 Z变换与拉氏变换的关系

❖ 连续时间信号 $x_a(t)$ $\xrightarrow{\text{采样}}$ $\hat{x}_a(t)$

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$$

$$x_a(t) \longrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-st} dt$$

$$\hat{x}_a(t) \longrightarrow \hat{X}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) \right] e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-nsT}$$

$$x(n) = x_a(nT) \longrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

2.10.1 Z变换与拉氏变换的关系

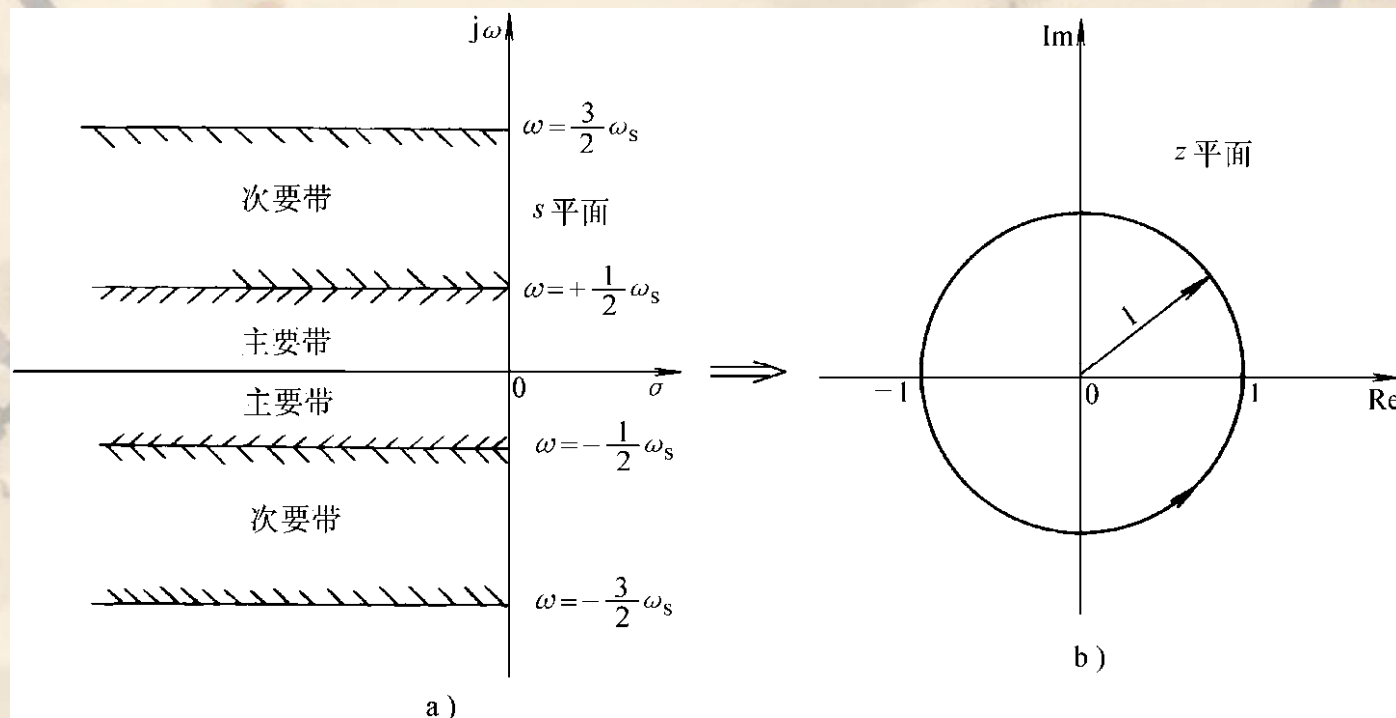
$$X(z)|_{z=e^{sT}} = X(e^{sT}) = \hat{X}_a(s)$$

S平面与Z平面间的对应关系

$$z = e^{Ts} \quad s = \sigma + j\omega$$

$$|z| = e^{T\sigma} \quad \arg z = \omega T = \frac{2\pi\omega}{\omega_s}$$

S平面	Z平面
$\sigma < 0$	单位圆内
$\sigma = 0$	单位圆的圆圈
$\sigma > 0$	单位圆的外围
$\sigma = -\infty$	坐标原点



2.10.2 Z变换与傅氏变换的关系：正变换

- ❖ 序列的傅氏变换就是在单位圆上的 Z 变换
- ❖ 序列 $x(n)$ 的 Z 变换为：

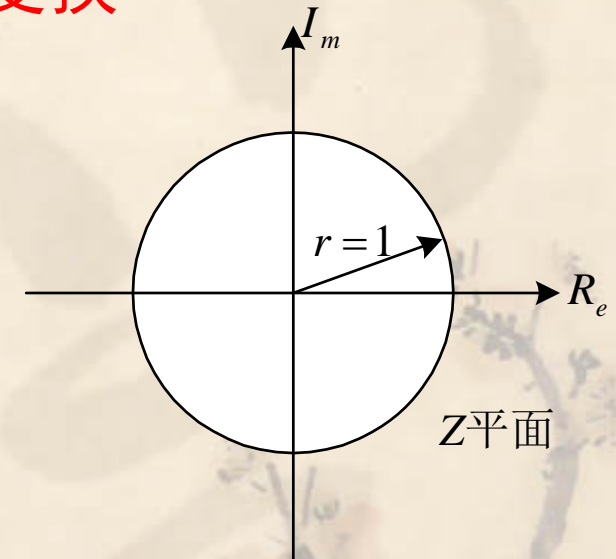
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

令复变量 $z=re^{j\omega}$ ，则

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-jn\omega}$$

令 $r=1$ ，则 $z=e^{j\omega}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$



- 因此，单位圆上的 Z 变换就是傅氏变换。
- 傅氏变换是 Z 变换的特例。
- F 变换的一切特性可直接由 Z 变换的特性得到。

—傅氏变换的表达式

ω —数字角频率，复数 z 的幅角。

2.10.2 Z变换与傅氏变换的关系：反变换

■ **Z** 反变换定义为：

$$x(n) = \frac{1}{2j\pi} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

设单位圆在 **X(z)** 的收敛域内，单位圆作为积分围线 **c**，即

$$z = e^{j\omega} \quad dz = je^{j\omega} d\omega$$

得：

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2j\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega(n-1)} je^{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \end{aligned}$$

2.10.2 Z变换与傅氏变换的关系：反变换

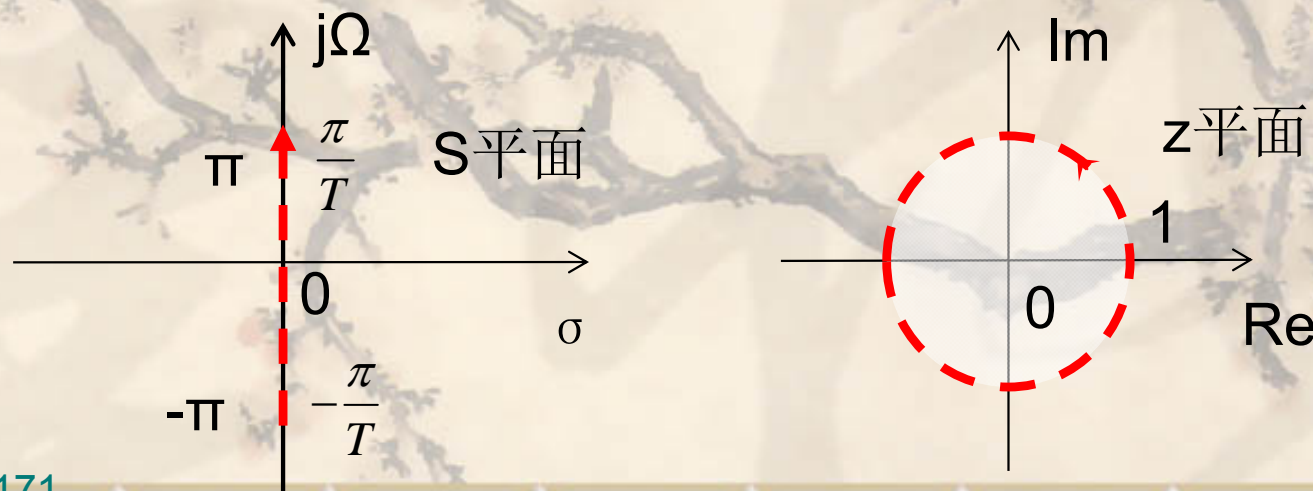
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

如果 $\omega = \Omega T$ ，将此关系式代入上式得：

$$x(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(e^{j\Omega T}) e^{jn\Omega T} d\Omega$$

在 z 平面单位圆上转一圈，相当于在 S 平面的虚轴上从 $-\pi/T$ 到 π/T 。

(S 平面的虚轴对应 CTFT, z 平面的单位圆对应 DTFT)



2.10.2 Z变换与傅氏变换的关系：收敛问题

- Z变换和F变换是级数求和——存在是否收敛的问题（有要求）？
- 傅氏变换的收敛：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

收敛就是指

$$|X(e^{j\omega})| < \infty$$

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |e^{-jn\omega}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$$

∴ 如果 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ ，便有 $|X(e^{j\omega})| < \infty$ ，即F变换收敛

2.10.2 Z 变换与傅氏变换的关系：收敛问题

■ Z 变换的收敛：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-jn\omega}$$

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-jn\omega} \right|$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |r^{-n}| |e^{-jn\omega}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| r^{-n}$$

因此，如果 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| r^{-n} < \infty$ ，则 $|X(z)| < \infty$ ，即 Z 变换收敛。

2.10.2 Z 变换与傅氏变换的关系：收敛问题

❖ 结论：

F 变换收敛对于 $x(n)$ 的要求高于 Z 变换收敛对于 $x(n)$ 的要求。

- 因为即使 $x(n)$ 不满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ ，仍可以找到适当的 r ，使

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| r^{-n} < \infty$$

- 即可在 Z 平面上找一个合适的区域，也就是说，虽然 $x(n)$ 的傅氏变换不收敛，也可设法使其 Z 变换收敛。

2.11 离散系统的频域分析：系统函数

❖ 系统函数（传输函数，传递函数）

一个 **LSI** 因果系统的差分方程为：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{j=1}^N a_j y(n-j)$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

z 变换后，得

$$\sum_{j=0}^N a_j z^{-j} Y(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} X(z)$$

系统函数
(必须指定收敛域)

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^N a_j z^{-j}} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}} = \frac{B(z)}{A(z)} = H(z)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

LSI系统的频率响应是
z平面单位圆上的传输函数

2.11 离散系统的频域分析:

——单边Z变换解线性差分方程

变换域求解法, **z**域求解法

$$\sum_{j=0}^N a_j y(n-j) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i), \quad n \geq 0$$

从对系统施加激励的时刻起,
之前的系统状态等效为一组初始条件

$$y(-1), y(-2), \dots, y(-N) = 0$$

求 $y(n)$

解: 做单边**ZT**, 变换到复频域

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N a_j z^{-j} [Y(z) + \sum_{l=-j}^{-1} y(l) z^{-l}] &= \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} [X(z) + \sum_{K=-i}^{-1} x(k) z^{-k}] \\ Y(z) &= \frac{-\sum_{j=0}^N a_j z^{-j} [\sum_{l=-j}^{-1} y(l) z^{-l}]}{\sum_{j=0}^N a_j z^{-j}} + \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^N a_j z^{-j}} \\ &= Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z) \end{aligned}$$

做反向**ZT**, 变换到时域

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n), \quad n \geq 0$$

【例】已知描述因果系统的二阶差分方程为

$$y[n] + y[n-1] - 6y[n-2] = x[n]$$

输入 $x[n] = 4^n u[n]$ ，起始条件 $y[-2] = 0$ ， $y[-1] = 1$ ，试求系统的响应 $y[n]$

解：利用单边Z变换对给定的差分方程求单边Z变换

$$Y(z) + z^{-1}[Y(z) + y[-1]z] - 6z^{-2}[Y(z) + y[-2]z^2 + y[-1]z] = X(z)$$

代入起始值 $y[-2] = 0$ ， $y[-1] = 1$ ，和 $X(z) = \frac{1}{1-4z^{-1}} \quad |z| > 4$

$$\text{有 } Y(z) + z^{-1}[Y(z) + z] - 6z^{-2}[Y(z) + z] = \frac{1}{1-4z^{-1}}$$

整理得 $(1 + z^{-1} - 6z^{-2})Y(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-1}} + (-1 + 6z^{-1})$

则：

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{(1 + z^{-1} - 6z^{-2})(1 - 4z^{-1})} + \frac{(-1 + 6z^{-1})}{(1 + z^{-1} - 6z^{-2})} \\ &= \underbrace{\frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 + 3z^{-1})(1 - 4z^{-1})}}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{\frac{(-1 + 6z^{-1})}{(1 - 2z^{-1})(1 + 3z^{-1})}}_{\text{零输入响应}} \\ &= \underbrace{\frac{A_1}{(1 - 2z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 + 3z^{-1})} + \frac{A_3}{(1 - 4z^{-1})}}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{\frac{B_1}{(1 - 2z^{-1})} + \frac{B_2}{(1 + 3z^{-1})}}_{\text{零输入响应}} \end{aligned}$$

其中：

$$A_1 = -\frac{2}{5}, \quad A_2 = \frac{9}{35}, \quad A_3 = \frac{8}{7};$$

$$B_1 = \frac{4}{5}, \quad B_2 = -\frac{9}{5};$$

进行Z反变换，得

$$y[n] = \underbrace{\left(-\frac{2}{5} \cdot 2^n + \frac{9}{35} \cdot (-3)^n + \frac{8}{7} \cdot 4^n\right) u[n]}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{\left(\frac{4}{5} \cdot 2^n - \frac{9}{5} \cdot (-3)^n\right) u[n]}_{\text{零输入响应}}$$

$$= \left(\frac{2}{5} \cdot 2^n - \frac{54}{35} \cdot (-3)^n + \frac{8}{7} \cdot 4^n\right) \cdot u[n]$$

2.11 离散系统的频域分析：零极点

❖ 系统函数的零极点

$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (z - c_i)}{\prod_{i=1}^M (z - d_i)} \quad \begin{array}{l} c_i \text{ 是零点} \\ d_i \text{ 是极点} \end{array}$$

❖ **负指数**使求零极点困难，故把 $H(z)$ 的分子分母表示成**正指数形式**，从数学角度看，这并没有改变系统函数。但这并不意味着计算零极点一定要表示成正指数，只是这样使得求根过程更直接。

❖ Matlab 求解

- ⊕ 分别对有理函数 $H(z)$ 的分子分母多项式使用 Matlab 的 **roots** 函数，就可求得其零极点。
- ⊕ 也可利用 **DSP Toolbox** 中的 **zplane(b,a)** 函数，由给定的分子行向量 **b** 和分母行向量 **a** 绘制出系统的零极点图，用符号“o”表示零点，“x”表示极点，图中还给出用作参考的单位圆。

2.11 离散系统的频域分析：零极点

例：求下列系统函数的零极点 $H(z) = \frac{1}{0.8 + 0.23z^{-1} + 0.15z^{-2}}$

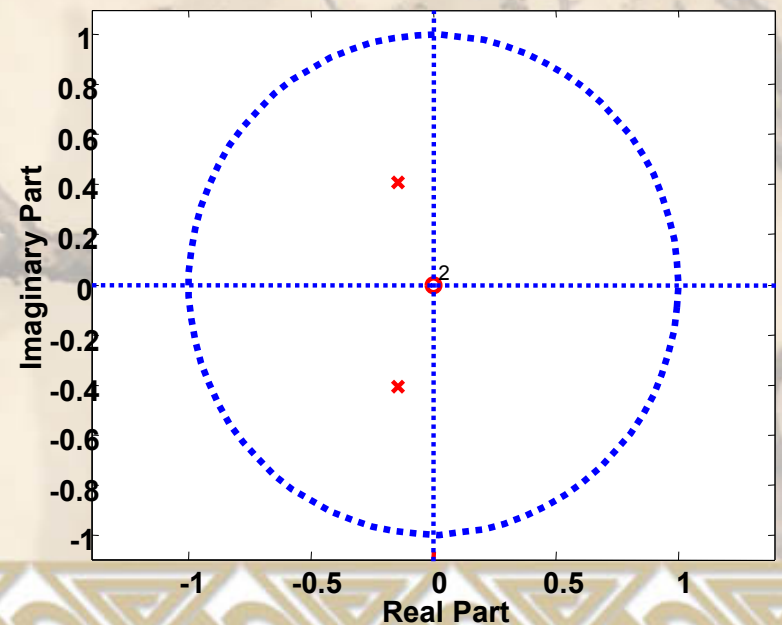
解：
$$H(z) = \frac{z^2}{0.8z^2 + 0.23z + 0.15} = \frac{1.25z^2}{z^2 + 0.2875z + 0.1875}$$

用一元二次方程求分母多项式的根，即极点：

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0.2875 \pm \sqrt{0.2875^2 - 4 \times 1 \times 0.1875}}{2 \times 1} = -0.1438 \pm j0.4085$$

```
>> b=[1, 0];  
>> a=[0.8, 0.23, 0.15];  
>> p=roots(a)  
>> zplane(b, a)
```

此系统有两个零点，都位于 $z=0$ 处；
有两个极点，位于 $-0.1438 \pm j0.4085$



2.11 离散系统的频域分析：零极点

❖ 系统频率响应

- 若函数 $H(z)$ 的收敛域包括单位圆 $z=e^{j\omega}$ ，就可在这个单位圆上计算 $H(z)$ ，并得到系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。

$$H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{i=1}^M (e^{j\omega} - c_i)}{\prod_{i=1}^M (e^{j\omega} - d_i)}$$

2.11 离散系统的频域分析：零极点

- 用 \vec{C}_i 表示在 Z 复平面上由零点 c_i 指向单位圆上的 $z=e^{j\omega}$ 点的向量：

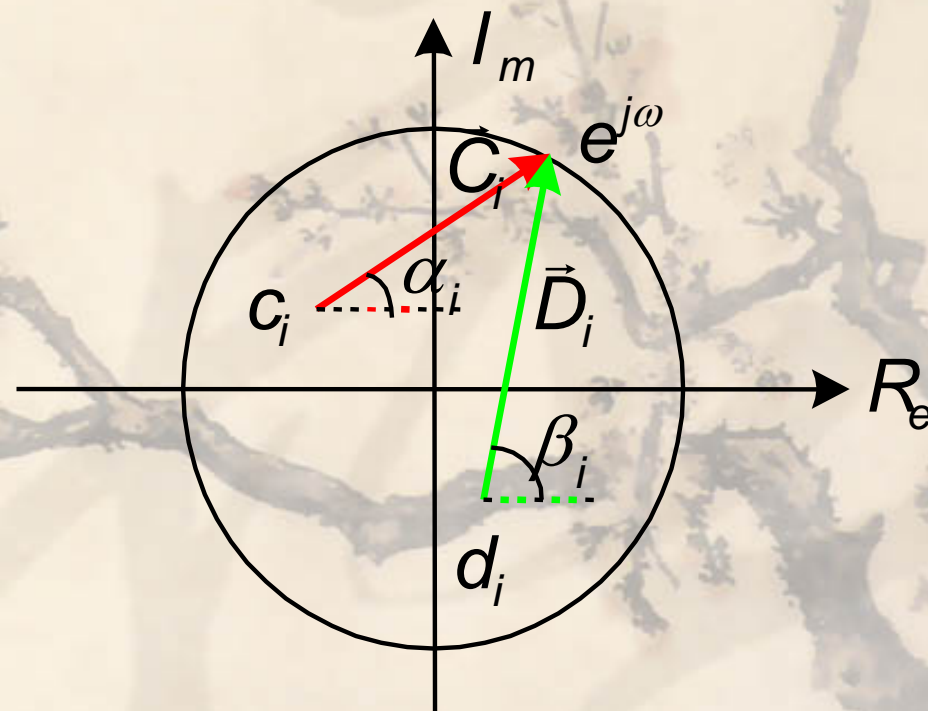
$$\vec{C}_i = e^{j\omega} - c_i$$

- 用 \vec{D}_j 表示在 Z 复平面上由极点 d_i 指向单位圆上的 $z=e^{j\omega}$ 点的向量：

$$\vec{D}_i = e^{j\omega} - d_i$$

因此

$$H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{i=1}^M \vec{C}_i}{\prod_{i=1}^M \vec{D}_i}$$

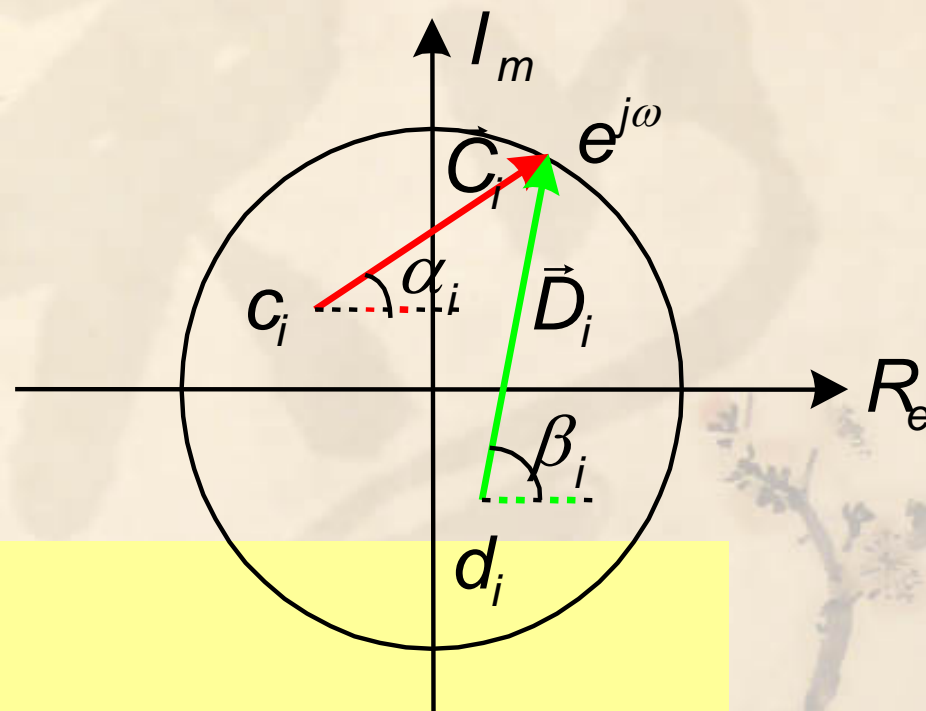


2.11 离散系统的频域分析：零极点

■ 用极坐标表示

$$\vec{C}_i = C_i e^{j\alpha_i} \quad \vec{D}_i = D_i e^{j\beta_i}$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$



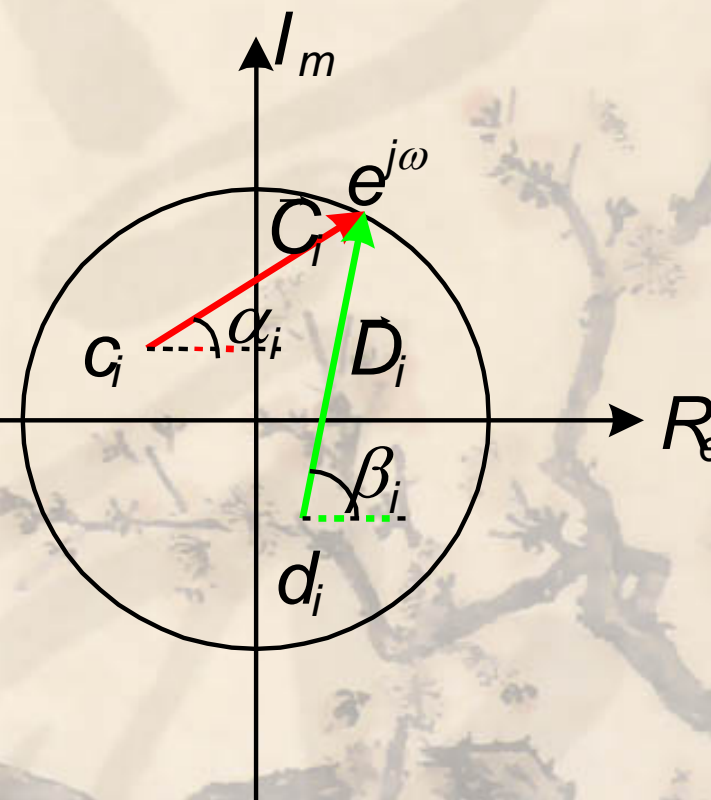
$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= |A| \frac{\prod_{i=1}^N |C_i|}{\prod_{i=1}^N |D_i|} \\ &= |A| \frac{\text{从 } e^{j\omega} \text{ (到零点 } z_1 \text{ 的距离)} \times \cdots \times \text{(到零点 } z_i \text{ 的距离)}}{\text{从 } e^{j\omega} \text{ (到极点 } d_1 \text{ 的距离)} \times \cdots \times \text{(到极点 } d_i \text{ 的距离)}} \end{aligned}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \alpha_i - \sum_{i=1}^N \beta_i$$

2.11 离散系统的频域分析：零极点

❖ 零极点与频响的关系

- 对于 $0 \sim \pi$ 弧度的数字频率 ω ， $e^{j\omega}$ 离滤波器极点越近，零点越远，则幅度就越大。
- 极点附近出现峰值。靠近单位圆的极点，将导致滤波器形状在某一频率上有非常大的幅值；当极点在单位圆上时，频响出现 ∞ ，极点在单位圆外，系统不稳定。
- 零点附近频响出现谷值。靠近单位圆的零点，将导致滤波器形状在某一频率上有非常小的幅值；零点在单位圆上时，频响为零，零点可以在单位圆外。
- Z平面原点处的零极点不影响系统的幅频响应。
- 幅值大小的剧烈变化可增加滤波器的选择性



2.11 离散系统的频域分析：因果性

1.因果性

一个因果离散LTI系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 满足

$$n < 0, h[n] = 0$$

且它的Z变换（系统函数）可表示为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

因果离散LTI系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 是一因果序列，它是一右边信号，而且 $H(z)$ 的幂级数不包含任何 z 的正幂次项。

因此ROC包含 $z = \infty$ 。故可得到以下性质：

一个离散LTI系统是因果，当且仅当它的系统函数 $H(z)$ 的ROC是某一个圆的外部，且包含无限远点 $z = \infty$ 。

【例】考察一系统的因果性，其系统函数是

$$H(z) = \frac{z(2z^2 - \frac{3}{2}z)}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$$

解：由于系统函数分子的阶数大于分母的阶数，表明其ROC不含 ∞ ，这不符合因果性的条件。因此，该系统不是因果的。

实际上， $H(z)$ 可展开为如下部分分式形式

$$H(z) = \frac{z}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{z}{1 - z^{-1}}$$

【例】考察一个系统的因果性，其系统函数表达式为

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

解：其收敛域ROC可分成以下三种情况

1. $|z| < \frac{1}{2}$, $h[n]$ 是一左边信号，因此，系统不是因果系统。
2. $\frac{1}{2} < |z| < 1$, $h[n]$ 是一双边信号，因此，系统不是因果系统。
3. $|z| > 1$, $h[n]$ 是一因果信号，因此，系统是因果系统。

2.11 离散系统的频域分析：稳定性

2. 稳定性

一个稳定离散时间LTI系统的充要条件是其单位脉冲响应 $h[n]$ 满足：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

在这种情况下 $h[n]$ 的傅立叶变换收敛，也就是说，系统函数 $H(z)$ 的ROC必须包含单位圆。

因此，一个离散时间LTI系统是稳定的，当且仅当它的系统函数 $H(z)$ 的ROC包含单位圆。

【例】设一线性非移变系统的传输函数为

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

试画出零-极点分布图，并确定 $H(z)$ 的收敛域和稳定性。

解：

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z(z - \frac{1}{2})}{(z + \frac{1}{4})(z + \frac{1}{2})}$$

极点为 $z_1 = -\frac{1}{4}, z_2 = -\frac{1}{2}$ 零点为 $z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{2}$

❖ (1) 若收敛域是 $|-\frac{1}{2}| < |z| \leq \infty$ 收敛域包含了单位圆，所以系统稳定。

❖ (2) 若收敛域是 $0 \leq |z| \leq |-\frac{1}{4}|$ 收敛域没有包含单位圆，所以系统是不稳定的。

❖ (3) 若收敛域是 $|-\frac{1}{4}| \leq |z| \leq |-\frac{1}{2}|$ 收敛域不包含单位圆，所以系统是不稳定的。

2.11 离散系统的频域分析：因果稳定性

❖ LSI 因果系统的稳定性

■ 因果性：因果可实现系统一定满足 $h(n)=0, n<0$ ，其 Z 变换只包含 z 的负指数项(z^{-n})，收敛域一定包括 ∞ 点。因此，因果系统的收敛域一定是某个圆外的整个 Z 平面， $r_1 < |z| \leq \infty$ 。

■ 稳定性：任何稳定系统，其系统函数的收敛域一定包括单位圆。系统稳定的充要条件为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ ，而 Z 变换的收敛域由满足的那些 z 值确定，对于单位圆 ($|z|=1$) 上的 z ，有：
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty$$

$$|H(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

因此， $H(z)$ 在单位圆上收敛。

❏ 因果稳定性：综合上述两点，因果稳定系统函数 $H(z)$ 的收敛域必须包含了：

$$a \leq |z| \leq \infty, a < 1 \quad (\text{收敛域内无极点})$$



系统的因果稳定性可由系统传递函数 $H(z)$ 的极点判断。如果全部极点都在单位圆内，则系统因果稳定。

2.11 离散系统的频域分析：举例

❖ 频率响应的 Matlab 实现

在 Matlab 中，提供了一个 **freqz** 函数来计算幅度和相位响应，该函数有如下几种调用方式。

1) $[H,w] = \text{freqz}(b,a,N)$

b 和 a 分别表示分子和分母的系数向量，与 $\text{filter}(b,a,x)$ 函数中的相同。此函数在上**半个单位圆** $[0, \pi)$ 上等间距的 N 点计算频率响应，返回该系统的 N 点频率矢量 ω 和对应的 N 点复数频率响应矢量 H 。

2) $[H,w] = \text{freqz}(b,a,N,'whole')$

在**整个单位圆上**等间距的 N 点计算频率响应。

3) $H = \text{freqz}(b,a,w)$

它返回矢量 ω 指定的那些频率点上的频率响应，通常在 0 到 π 之间。

2.11 离散系统的频域分析：举例

例：已知因果系统

$$y(n] = 0.9y(n-1) + x(n)$$

(1) 求 $H(z)$ ，并画出零极点示意图

(2) 画出 $|H(e^{j\omega})|$ 和 $\angle H(e^{j\omega})$

解：差分方程可以变形为： $y(n] - 0.9y(n-1) = x(n]$

(1) 由差分方程可得：

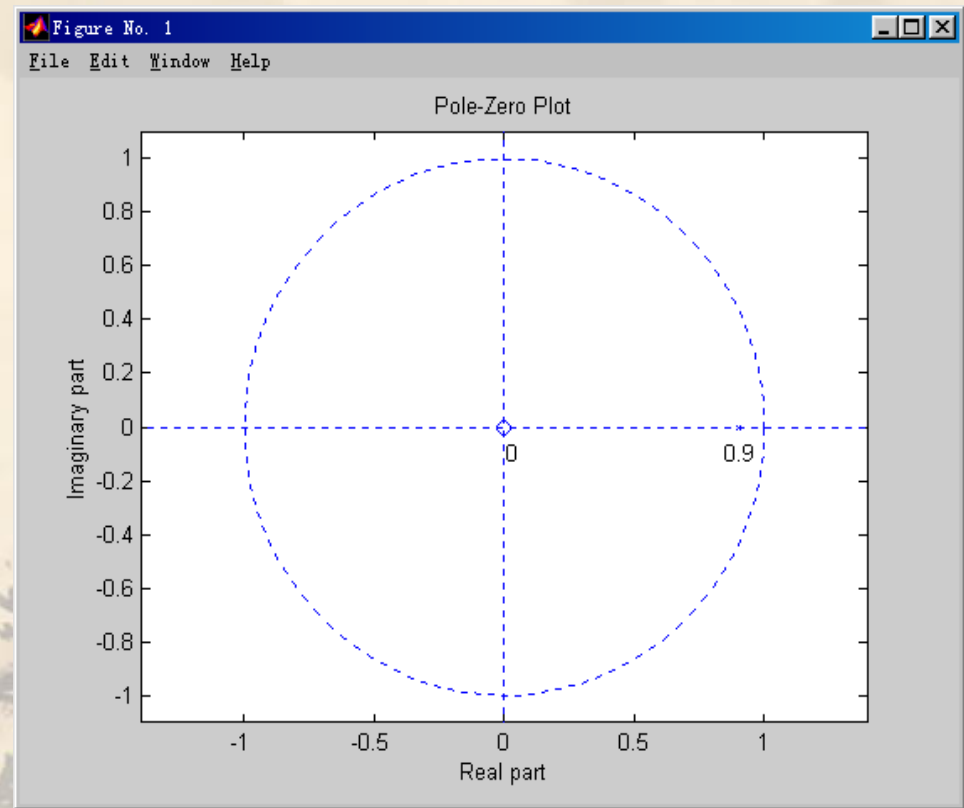
$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}$$

系统有一个位于 **0.9** 的极点和一个位于原点的零点。下面用 **Matlab** 中的函数 **zplane** 画出它的零极点图。

2.11 离散系统的频域分析：举例

```
% Chapter 2: Example 13:  
% zplane function:  
b = [1,0];  
a = [1, -0.9];  
zplane(b,a);  
title('Pole-Zero Plot');  
text(0.85,-  
    0.1,'0.9');text(0.01,-  
    0.1,'0');
```

(注意：令 $b=[1,0]$ ，而不是 $b=1$ ，是因为 `zplane` 函数假设标量是零点或极点。)



2.11 离散系统的频域分析：举例

利用 **freqz** 函数画出幅度响应和频率响应。

%Drawing the Frequency Response of this system

%Using the first usage of freqz:
freqz(b,a,N)

```
[H,w]= freqz(b,a,100);
```

```
magH = abs(H);
```

```
phaH = angle(H);
```

```
figure(2);
```

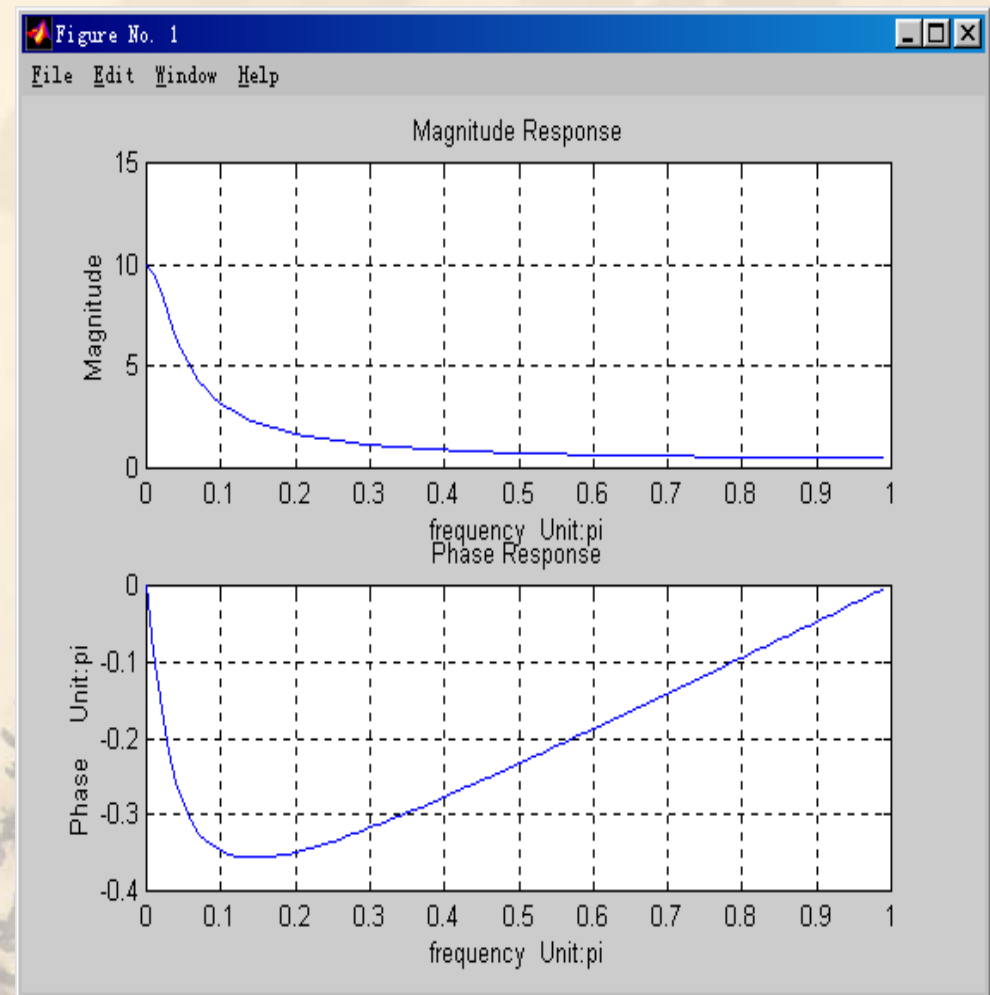
```
subplot(2,1,1);
```

```
plot(w/pi,magH);
```

```
grid
```

```
subplot(2,1,2);
```

```
plot(w/pi,phaH/pi);grid
```



首先我们使用第一种形式 **freqz(b,a,N)**, 沿单位圆的上半圆取 100 个点。

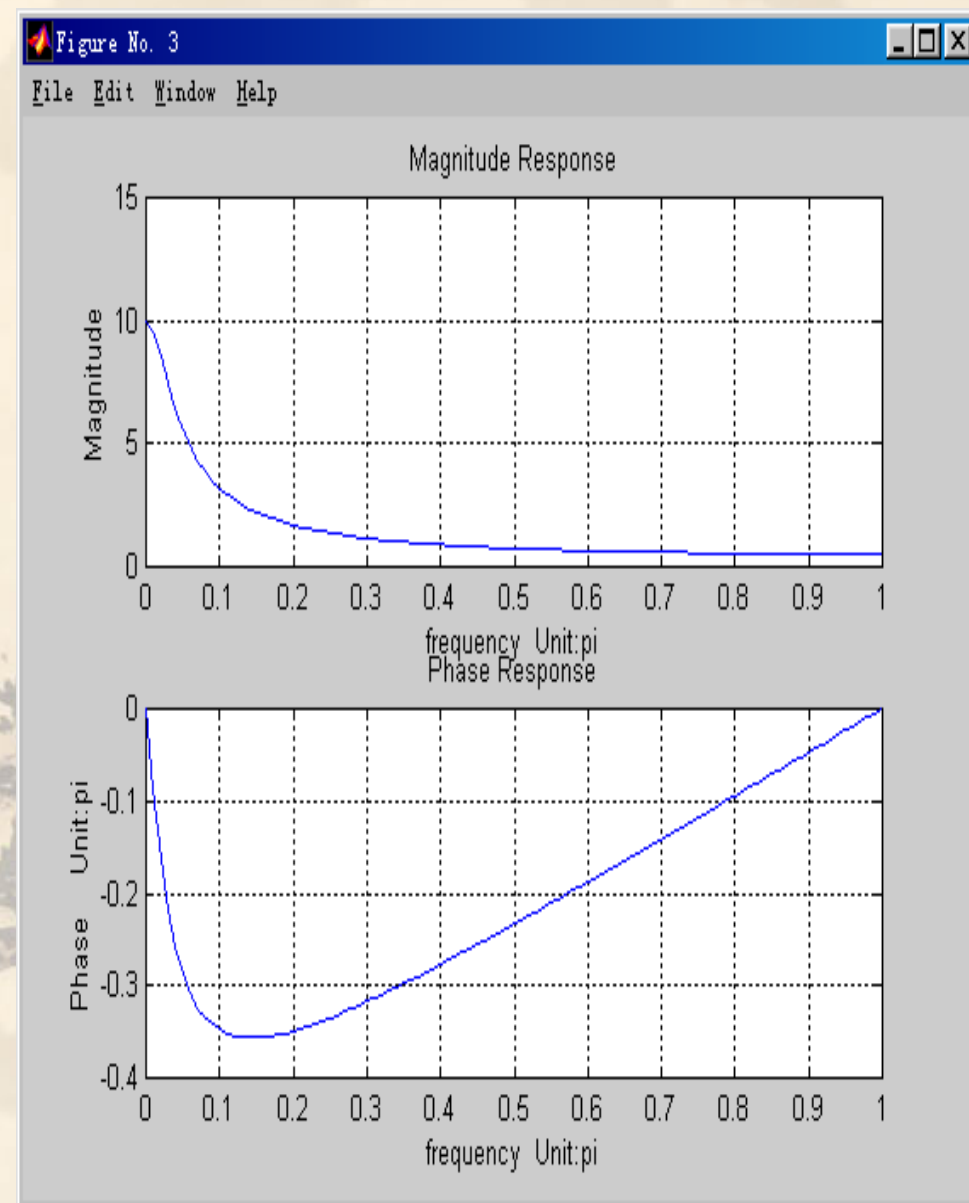
2.11 离散系统的频域分析：举例

- 这种情况下计算区间是 $0 \leq w \leq 0.99\pi$ ，而在 $w=\pi$ 点不确定。这是由于在 **Matlab** 中，单位圆的下半圆是从 $w=\pi$ 开始的。
- 为了克服这个问题，我们使用 **freqz** 函数的第二种形式 **freqz(b,a,N,'whole')**，程序如下：

% Using the second usage of freqz:
freqz(b,a,'whole')

```
[H,w]=freqz(b,a,200,'whole');  
magH = abs(H(1:101));  
phaH = angle(H(1:101));
```

```
w = w(1:101);  
figure(3);  
subplot(2,1,1);plot(w/pi,magH);grid  
subplot(2,1,2);plot(w/pi,phaH/pi);grid
```

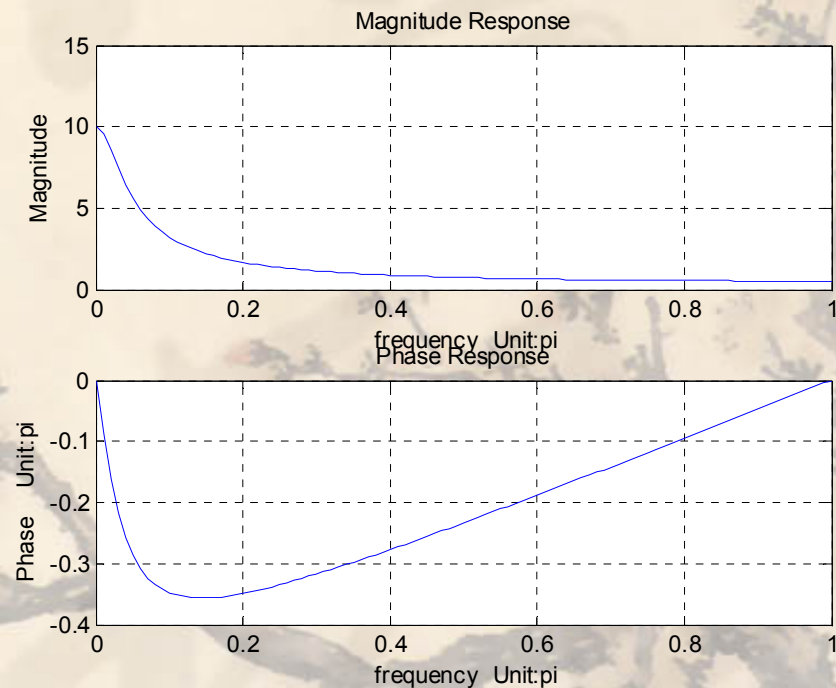


2.11 离散系统的频域分析：举例

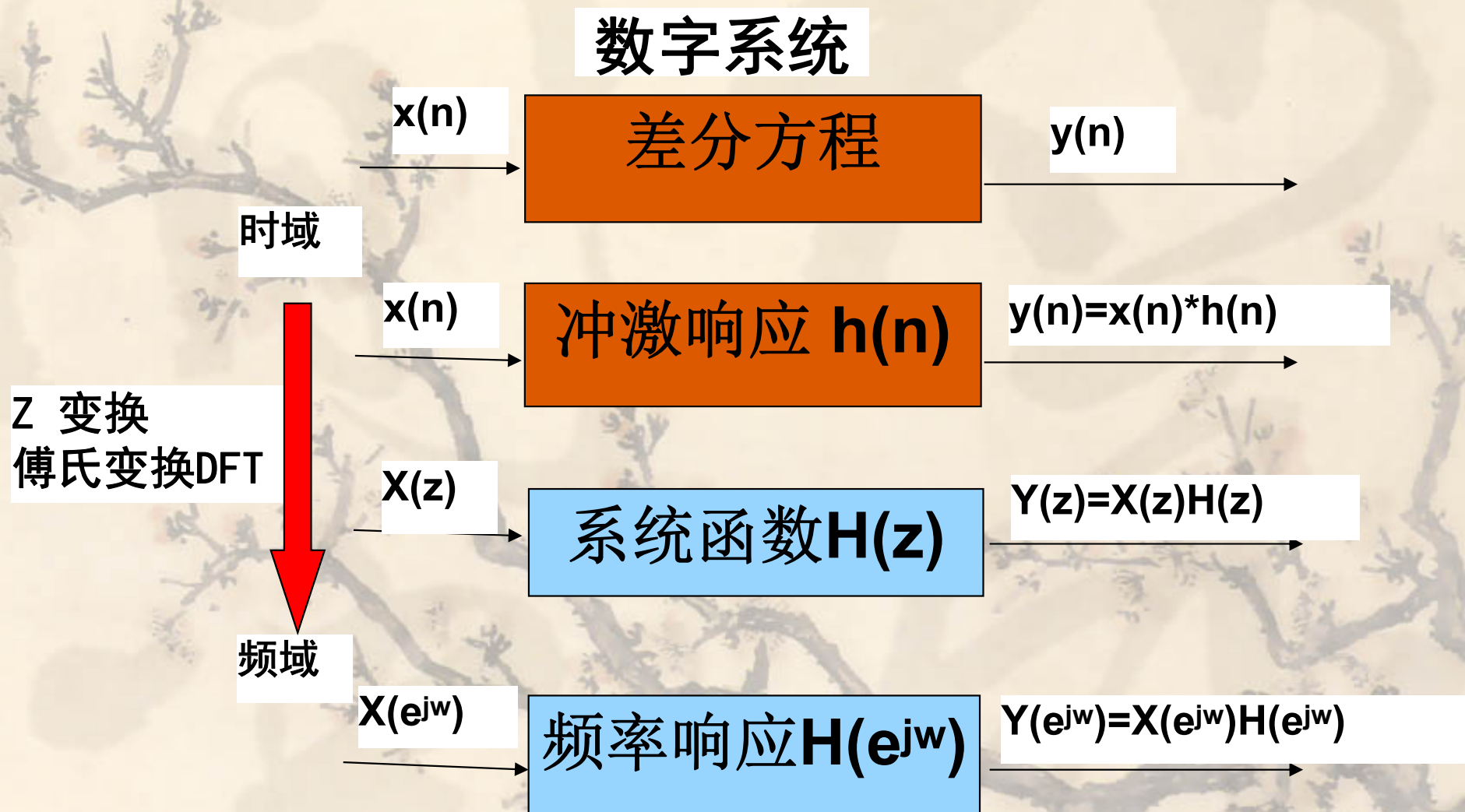
使用 `freqz` 函数的第三种形式的程序如下，运行结果和上图一样：

```
% Using the third usage of freqz:
freqz(b,a,w)
w = [0:1:100]*pi/100;
[H,w] = freqz(b,a,w);
magH = abs(H);phaH = angle(H);
figure(4)
subplot(2,1,1);plot(w/pi,magH);
grid
xlabel('frequency Unit:pi');
ylabel('Magnitude');
title('Magnitude Response');

subplot(2,1,2);plot(w/pi,phaH/pi);
grid
xlabel('frequency Unit:pi');
ylabel('Phase Unit:pi');
title('Phase Response');
```



本章小结



本章小结

- ❖ 熟练掌握和运用取样定理；
- ❖ 掌握序列的概念、基本运算、离散线性卷积，并会判断序列的周期性；
- ❖ 掌握线性/移不变/因果/稳定的离散时间系统的概念并会判断，掌握线性移不变系统因果性/稳定性判断的充要条件；
- ❖ 掌握傅氏变换、Z正反变换(留数法)和系统函数的求解方法，掌握系统的零极点和稳定性、频率响应的关系；
- ❖ 掌握信号流图的化简和利用信号流图求系统函数。