第七次课作业

15. 设平稳过程 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 的谱密度为 $S_X(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}$,求 $\{X(t)\}$ 的自相关函数

解

$$egin{aligned} S_X(\omega) &= rac{1}{w^4 + 5w^2 + 6} = rac{1}{w^2 + 2} - rac{1}{w^2 + 3} \ &\therefore \ R_X au &= rac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (rac{1}{w^2 + 2} - rac{1}{w^2 + 3}) e^{iw au} d au &= rac{\sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}| au|} - rac{\sqrt{3}}{6} e^{-\sqrt{2}| au|} \end{aligned}$$

17. 设 $X(t) = A\cos t + B\sin t + C$, $-\infty < t < \infty$, 其中A, B, C相互独立且同服从区间 [-1,1] 上的均匀分布

1.证明 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是平稳过程;

2.计算 $\langle x(t) \rangle$, 判断 X(t) 的均值是否具有各态历经性, 说明理由;

 $3.求\{X(t)\}$ 的谱密度 $S_X(\omega)$.

解

(1)

$$\mu_x(t) = E(x(t)) = \cos t E(A) + \sin t E(B) + E(0)$$

∵ A, B, C 相互独立且同服从区间 [-1,1] 上的均匀分布

$$\mu_x(t)=0$$
 为常数

$$R_X(\tau) = E(X(t)X(t+\tau)) = E((A\cos t + B\sin t + C)(A\cos(t+\tau) + B\sin(t+\tau) + C))$$

$$=E(A^2rac{\cos au}{2}+B^2rac{\cos au}{2}+C^2)$$

$$E(A^2) = D(A) + E^2(A) = D(A) = rac{1}{3}$$

$$R_X(au) = rac{1}{3}(\cos au + 1)$$

∴ {X(t)} 是平稳过程

(2)

$$\langle X(t)
angle = \lim_{T o \infty} rac{1}{2T} \int_{-T}^T (A\cos t + B\sin t + C) dt = C$$
 $P(\langle X(t)
angle = 0) = 0
eq 1$,均值不具有各态历经性

(3)

$$egin{align} R_X(au) &= rac{1}{3}(\cos au + 1) = rac{1}{6}(e^{i au} + e^{-i au}) + rac{1}{3} \ S_X(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(au) e^{-iw au} d au = rac{\pi}{3}(\delta(w-1) + 2\delta(w) + \delta(w+1)) \ \end{array}$$

18.已知平稳过程 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 的谱密度如下,求 $\{X(t)\}$ 的自相关函数

$$S_X(\omega) = egin{cases} 2\delta(\omega) + 1 - |\omega|, & |\omega| < 1 \ 0, & \sharp \& \end{cases}$$

解

$$egin{align} R_X(au) &= rac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(w) e^{iw au} dw \ &= rac{1}{2\pi} (\int_{-1}^1 2\delta(w) e^{iw au} dw + \int_{-1}^1 e^{iw au} dw - \int_{-1}^0 (-w) e^{iw au} dw - \int_0^1 2w e^{iw au} dw) \ &= rac{1}{\pi} [1 + rac{2\sin^2(rac{ au}{2})}{ au^2}] \ \end{aligned}$$

20. 设 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是均值为零的平稳过程, $Y(t) = X(t)\cos(t + \Theta)$,其中 $P(\Theta = \frac{\pi}{4}) = P(\Theta = -\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$,且 $\{X(t)\}$ 与 Θ 相互独立,记 $\{X(t)\}$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)$,谱密度为 $S_X(\omega)$,证明:

$$1.\{Y(t); -\infty < t < \infty\}$$
 是平稳过程,其自相关函数 $R_Y(\tau) = \frac{1}{2}R_X(\tau)\cos\tau$; $2.Y(t)$ 的谱密度为 $S_Y(\omega) = \frac{1}{4}[S_X(\omega-1) + S_X(\omega+1)].$

解

(1)

$$\mu_y(y) = E(y(t)) = E(X(t)\cos(t+\theta)) = 0$$

$$R_Y(\tau) = E(X(t)\cos(t+\theta)X(t+\tau)\cos(t+\theta+\tau)) = R_X(\tau) \cdot \frac{\cos\tau}{2}$$
 ∴ $\{Y(t)\}$ 是平稳过程

$$egin{aligned} S_Y(w) &= rac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(au) e^{iw au} dw = rac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (rac{1}{2} R_x(au) \cdot rac{e^{i au} + e^{-i au}}{2}) e^{iw au} dw \ &= rac{1}{4} (S_X(w-1) + S_X(w+1)) \end{aligned}$$

22. 设平稳过程 $X(t)=\alpha\cos{(t+\Theta)},\ Y(t)=\beta\cos{(t+\Theta)},\ -\infty< t<\infty$,其中 α , β 均为正常数, Θ 服从 $(0,2\pi)$ 上的均匀分布,求互相关系数 $R_{XY}(\tau)$ 和互谱密度 $S_{XY}(\omega)$

解

$$egin{aligned} R_{XY}(au) &= E(X(t)X(t+ au)) = E(lpha\cos{(t+ heta)}eta\cos{(t+ au+ heta)}) \ &= lphaeta E(\cos{(t+ heta)}\cos{(t+ heta+ au)}) = lphaeta\cdotrac{\cos{ au}}{2} \ &S_{XY}(w) = \int_{-\infty}^{\infty}R_{XY}(au)e^{iw au}d au = rac{1}{2}lphaeta\int_{-\infty}^{\infty}(rac{1}{2}(e^{i au}+e^{-i au}))e^{iw au}d au \ &= rac{\pi}{2}\cdotlphaeta\cdot[\delta(w-1)+\delta(w+1)] \end{aligned}$$