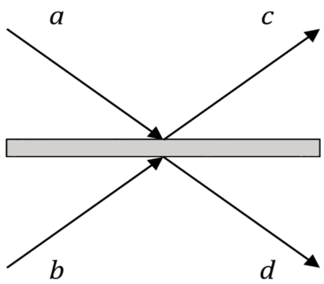
《量子信息基础》2024.6.6 随堂作业：

（2024.6.11 22:00 前提交）

1. If we consider a more general case for two photons incident a beam splitter, the input states are
$$|\psi_i\rangle_{12} = (\alpha|\leftrightarrow\rangle_1 + \beta|\updownarrow\rangle_1)\cdot|a\rangle_1 \otimes (\gamma|\leftrightarrow\rangle_2 + \delta|\updownarrow\rangle_2)\cdot|b\rangle_2$$
Derive $|\psi_o\rangle_{[12]}$ with symmetric output and Bell states on polarizations for indistinguishable photons.



两个光子的输入态为：

$$|\Psi_i>_{12}= (\alpha|\leftrightarrow>_1+\beta|\updownarrow>_1)\cdot|a>_1 \otimes(\gamma|\leftrightarrow>_2+\delta|\updownarrow>_2)\cdot|b>_2$$

分束器不改变入射光子的极化状态，出射态为：

$$|\Psi_f>_{12}= [(\alpha|\leftrightarrow>_1+\beta|\updownarrow>_1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(i|c>_1+|d>_1)]\otimes[(\gamma|\leftrightarrow>_2+\delta|\updownarrow>_2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|c>_2 + i|d>_2)]$$
$$= [\alpha\gamma|\leftrightarrow\rangle_1|\leftrightarrow\rangle_2 + \beta\delta|\updownarrow\rangle_1|\updownarrow\rangle_2 + \alpha\delta|\leftrightarrow\rangle_1|\updownarrow\rangle_2 + \beta\gamma|\updownarrow\rangle_1|\leftrightarrow\rangle_2]\cdot\frac{1}{2}(i|c\rangle_1|c\rangle_2 - |c\rangle_1|d\rangle_2 + |d\rangle_1|c\rangle_2 + i|d\rangle_1|d\rangle_2)$$

由全同光子的干涉及其对称性，结果为：

$$|\Psi_f>_{[12]}= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_f>_{12}+|\Psi_f>_{21})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{[\alpha\delta(|\leftrightarrow\rangle_1|\updownarrow\rangle_2) + \beta\gamma|\updownarrow\rangle_1|\leftrightarrow\rangle_2 + \alpha\gamma|\leftrightarrow\rangle_1|\leftrightarrow\rangle_2 + \beta\delta|\updownarrow\rangle_1|\updownarrow\rangle_2]\cdot\frac{1}{2}(i|c\rangle_1|c\rangle_2 - |c\rangle_1|d\rangle_2 + |d\rangle_1|c\rangle_2 + i|d\rangle_1|d\rangle_2) + [\alpha\delta(|\leftrightarrow\rangle_2|\updownarrow\rangle_1) + \beta\gamma|\updownarrow\rangle_2|\leftrightarrow\rangle_1 + \alpha\gamma|\leftrightarrow\rangle_2|\leftrightarrow\rangle_1 + \beta\delta|\updownarrow\rangle_2|\updownarrow\rangle_1]\cdot\frac{1}{2}(i|c\rangle_2|c\rangle_1 - |c\rangle_2|d\rangle_1 + |d\rangle_2|c\rangle_1 + i|d\rangle_2|d\rangle_1)\Big\}$$

偏振纠缠态与 Bell 态可以互相转换，如：

$$|\leftrightarrow\rangle_1|\updownarrow\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle)$$

其中：

$|\Psi^{\pm}>_{12}$和$|\phi^{\pm}>_{12}$为 4 个 Bell 态$\begin{cases} |\Psi^{\pm}>_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\updownarrow>_1|\leftrightarrow>_2 \pm |\leftrightarrow>_1|\updownarrow>_2\} \\ |\phi^{\pm}>_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\updownarrow>_1|\updownarrow>_2 \pm |\leftrightarrow>_1|\leftrightarrow>_2\} \end{cases}$

由上述等效方法，干涉结果可以写为：

$$
\begin{aligned}
|\Psi_f\rangle_{[12]} = \frac{1}{2}\Big\{&[\alpha\delta(|\Psi^+\rangle_{12} - |\Psi^-\rangle_{12}) + \beta\gamma(|\Psi^+\rangle_{12} + |\Psi^-\rangle_{12}) + \beta\delta(|\Phi^+\rangle_{12} + |\Phi^-\rangle_{12}) \\
&+ \alpha\gamma(|\Phi^+\rangle_{12} - |\Phi^-\rangle_{12})] \cdot \frac{1}{2}(i|c\rangle_1|c\rangle_2 - |c\rangle_1|d\rangle_2 + |d\rangle_1|c\rangle_2 + i|d\rangle_1|d\rangle_2) \\
&+ [\alpha\delta(|\Psi^+\rangle_{21} - |\Psi^-\rangle_{21}) + \beta\gamma(|\Psi^+\rangle_{21} + |\Psi^-\rangle_{21}) + \beta\delta(|\Phi^+\rangle_{21} \\
&+ |\Phi^-\rangle_{21}) + \alpha\gamma(|\Phi^+\rangle_{21} - |\Phi^-\rangle_{21})] \\
&\cdot \frac{1}{2}(i|c\rangle_2|c\rangle_1 - |c\rangle_2|d\rangle_1 + |d\rangle_2|c\rangle_1 + i|d\rangle_2|d\rangle_1)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{1}{4}&[(\alpha\delta + \beta\gamma)|\Psi^+\rangle_{12} + (\beta\delta + \alpha\gamma)|\Phi^+\rangle_{12} + (\beta\gamma - \alpha\delta)|\Psi^-\rangle_{12} + (\beta\delta - \alpha\gamma)|\Phi^-\rangle_{12}] \\
&\cdot (i|c\rangle_1|c\rangle_2 - |c\rangle_1|d\rangle_2 + |d\rangle_1|c\rangle_2 + i|d\rangle_1|d\rangle_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ \frac{1}{4}&[(\alpha\delta + \beta\gamma)|\Psi^+\rangle_{21} + (\beta\delta + \alpha\gamma)|\Phi^+\rangle_{21} + (\beta\gamma - \alpha\delta)|\Psi^-\rangle_{21} + (\beta\delta - \alpha\gamma)|\Phi^-\rangle_{21}] \\
&\cdot (i|c\rangle_2|c\rangle_1 - |c\rangle_2|d\rangle_1 + |d\rangle_2|c\rangle_1 + i|d\rangle_2|d\rangle_1)
\end{aligned}
$$

由$|\Psi^+\rangle_{21} = |\Psi^+\rangle_{12}$，$|\Phi^+\rangle_{21} = |\Phi^+\rangle_{12}$, $|\Psi^-\rangle_{21} = -|\Psi^-\rangle_{12}$，$|\Phi^-\rangle_{21} = |\Phi^-\rangle_{12}$。上式可化为

$$
\begin{aligned}
|\Psi_f\rangle_{[12]} = \frac{1}{2}&[(\alpha\delta + \beta\gamma)|\Psi^+\rangle_{12} + (\beta\delta + \alpha\gamma)|\Phi^+\rangle_{12} + (\beta\delta - \alpha\gamma)|\Phi^-\rangle_{12}] \\
&\cdot (i|c\rangle_1|c\rangle_2 + i|d\rangle_1|d\rangle_2) + \frac{1}{2}[(\alpha\delta - \beta\gamma)|\Psi^-\rangle_{12}] \cdot (|c\rangle_1|d\rangle_2 - |d\rangle_1|c\rangle_2)
\end{aligned}
$$

$|\Psi^{\pm}>_{12}$和$|\phi^{\pm}>_{12}$为 4 个 Bell 态$\begin{cases} |\Psi^{\pm}>_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\updownarrow>_1|\leftrightarrow>_2 \pm |\leftrightarrow>_1|\updownarrow>_2\} \\ |\phi^{\pm}>_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\updownarrow>_1|\updownarrow>_2 \pm |\leftrightarrow>_1|\leftrightarrow>_2\} \end{cases}$

答案正确 20 分，推导部分 30 分，共 50 分

2. Using the philosophy of quantum measurement to explain the Schrödinger “cat state” is mixed states with 50:50 classical probabilities for alive and dead.

设原子衰变为$|\alpha\rangle$，原子不衰变为$|\beta\rangle$。定义原子是否衰变的测量算符：

$$\widehat{\Omega} = |\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|$$

可以验证该算符满足完备归一化条件：

$$\Sigma\widehat{\Omega}^{+}\widehat{\Omega} = I$$

若给定一个猫态：

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|alive\rangle + |dead\rangle)$$

一、从投影测量的角度考虑

检验原子是否衰变（即猫是否存活）属于投影测量，投影测量对信息的提取最明确但退相干作用最强。投影测量结果的表达式：

$$P(alive, dead) = \langle\psi|\widehat{\Omega}_{\beta,\alpha}|\psi\rangle$$

由于为投影测量，原子衰变时（$|\alpha\rangle$），猫处于$|dead\rangle$；反之原子不衰变时（$|\beta\rangle$），猫处于$|alive\rangle$。由此可知$\langle\alpha live|\alpha\rangle = 0$，$\langle dead|\beta\rangle = 0$，猫存活/死亡的概率可分别计算得到：

$$P(alive) = \langle\psi|\widehat{\Omega}_{\beta}|\psi\rangle = \frac{1}{2}(\langle alive| + \langle dead|)(|\beta\rangle\langle\beta|)(|alive\rangle + |dead\rangle) = \frac{1}{2}$$

$$P(dead) = \langle\psi|\widehat{\Omega}_{\alpha}|\psi\rangle = \frac{1}{2}(\langle alive| + \langle dead|)(|\alpha\rangle\langle\alpha|)(|alive\rangle + |dead\rangle) = \frac{1}{2}$$

可见就算原本猫处于纯态，也会因为衰变粒子的投影测量而完全退相干到概率为 50:50 的混态。

二、从密度矩阵的角度考虑

初态密度矩阵：

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|alive\rangle + |dead\rangle)(\langle alive| + \langle dead|)$$

经过测量：

$$\bar{\hat{\rho}}' = \sum_{\alpha,\beta}\widehat{\Omega}^{+}\hat{\rho}\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}^{+}{}_{\beta}\hat{\rho}\widehat{\Omega}_{\beta} + \widehat{\Omega}^{+}{}_{\alpha}\hat{\rho}\widehat{\Omega}_{\alpha}$$

由$\langle\alpha live|\alpha\rangle = 0$，$\langle dead|\beta\rangle = 0$

对于原子不衰变的情况：

$$\widehat{\Omega}^{+}{}_{\beta}\hat{\rho}\widehat{\Omega}_{\beta} = \frac{1}{2}|alive\rangle\langle alive|$$

对于原子衰变的情况：

$$\widehat{\Omega}^{+}{}_{\alpha}\hat{\rho}\widehat{\Omega}_{\alpha} = \frac{1}{2}|dead\rangle\langle dead|$$

所以测量后的密度矩阵：

$$\bar{\rho}' = \frac{1}{2}|alive\rangle\langle alive| + \frac{1}{2}|dead\rangle\langle dead|$$

可以看出，薛定谔的猫态密度矩阵在测量之后变成了一个经典概率混合态，每种状态（“alive”和“dead”）出现的概率各为 50%，这反映了测量后系统在不同状态下的概率分布。

类似的说法和言之有理即可，50 分

1.5 解：i) 按通常反射透射各一半，并且反射有$\frac{\pi}{2}$位相突变考虑，输出态可写为

$$|\Psi_f\rangle_{12} = (\alpha|\leftrightarrow\rangle_1 + \beta|\updownarrow\rangle_1) \otimes (\mathrm{i}|c\rangle_1 + |d\rangle_1)$$
$$\times (\gamma|\leftrightarrow\rangle_2 + \delta|\updownarrow\rangle_2) \otimes (|c\rangle_2 + \mathrm{i}|d\rangle_2)$$

但假如两个光子同时到达分束器，在出射态中光子的空间模有重叠，就必须考虑两个光子按全同性原理所产生的交换干涉。这时出射态应该是交换对称的，所以正确的出射态用 Bell 基表示为

$$|\Psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_f\rangle_{12} + |\Psi_f\rangle_{21})$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha\gamma + \beta\delta)\cdot|\phi^+\rangle_{12}\cdot \mathrm{i}(|c\rangle_1|c\rangle_2 + |d\rangle_1|d\rangle_2)$$
$$-(\alpha\gamma - \beta\delta)\cdot|\phi^-\rangle_{12}\cdot \mathrm{i}(|c\rangle_1|c\rangle_2 + |d\rangle_1|d\rangle_2)$$
$$+(\alpha\delta + \beta\gamma)\cdot|\Psi^+\rangle_{12}\cdot \mathrm{i}(|c\rangle_1|c\rangle_2 + |d\rangle_1|d\rangle_2)$$
$$+(\alpha\delta - \beta\gamma)\cdot|\Psi^-\rangle_{12}\cdot \mathrm{i}(|c\rangle_1|d\rangle_2 - |d\rangle_1|c\rangle_2))\}$$

其中

$$|\phi^\pm\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\updownarrow\rangle_1|\updownarrow\rangle_2 \pm |\leftrightarrow\rangle_1|\leftrightarrow\rangle_2)$$

$$|\Psi^\pm\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\updownarrow\rangle_1|\leftrightarrow\rangle_2 \pm |\leftrightarrow\rangle_1|\updownarrow\rangle_2)$$