

量子信息基础

第六章：量子计算

金潮渊

浙江大学信息与电子工程学院



C6-3 双光子干涉和光量子计算



课程回顾

量子算法与量子纠错：

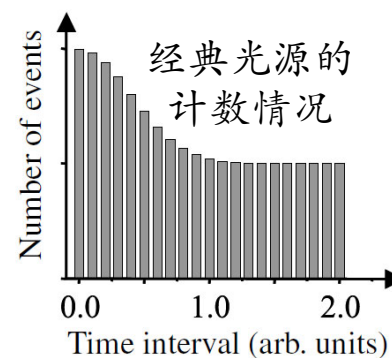
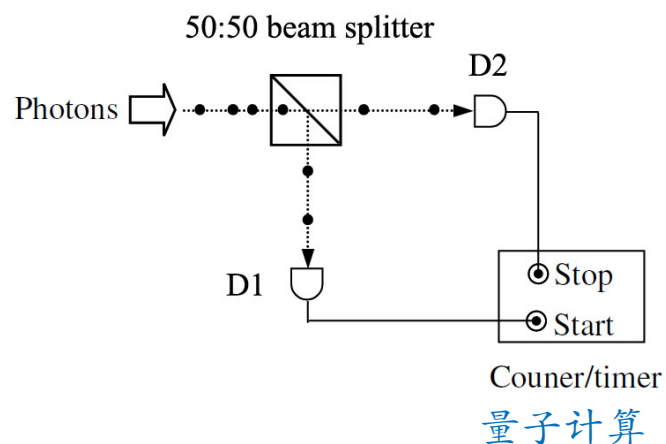
- 量子计算根据其应用范围主要分为三种类型：量子退火、量子模拟和通用量子计算。
- 量子算法是在量子计算机上运行实际模型时使用的算法，是一个有限指令序列。至今为止最著名的量子算法是Peter Shor提出的量子分解算法，主要用于质因数分解。形式较为简单的量子算法包括Deutsch算法和Grover算法等。
- 量子计算机面临的主要挑战之一是退相干和量子纠错。

System	T_2 (s)	T_{op} (s)	N_{op}
Nuclear spin	10^4	10^{-3}	10^7
Ion trap	10^0	10^{-6} (e)	10^6
Exciton (quantum dot)	10^{-9} (e)	10^{-12} (e)	10^3
Electron spin (quantum dot)	10^{-7}	10^{-12}	10^5
Superconducting flux qubit	10^{-8} (e)	10^{-10} (e)	10^2 (e)



非经典光源

- 考虑光子场景下的HBT实验设备。光电探测器将被单光子探测器所取代。一队光子通过50:50的分束器被平分为两队光子，分别被单光子探测器D1和D2所探测，并连接到光子计数器上。光子计数器会记录每个计数的时间，以及计数之间的时间差。
- 二阶关联函数在光子数表象下为
$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_1(t)n_2(t+\tau) \rangle}{\langle n_1(t) \rangle \langle n_2(t+\tau) \rangle}$$
- 对于非经典光源，比如单光子源，由于D1发生计数时，D2不发生计数，或者反之（单个光子通过分束器只能出现在某一路上），满足 $g^{(2)}(0) = 0$ 。



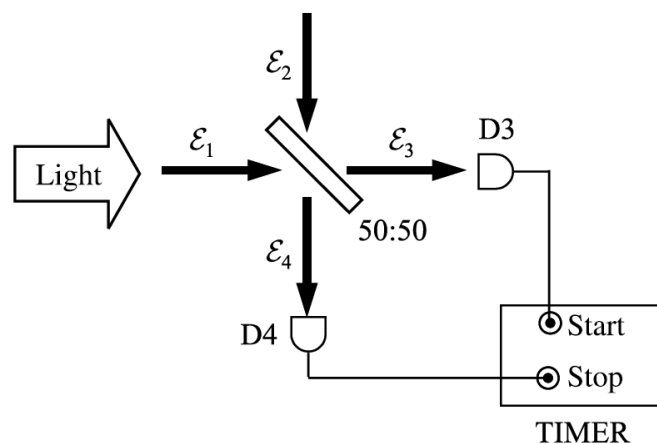
光子聚束与反聚束

Classical description	Photon stream	$g^{(2)}(0)$
Chaotic	Bunched	>1
Coherent	Random	1
None	Antibunched	<1

- 根据光源的统计性质，可分为超泊松统计，泊松统计和亚泊松统计三类，大致对应于三类聚束性质（为何不是完全对应？）：
 - a. 聚束光源， $g^{(2)}(0) > 1$ ；
 - b. 相干光源， $g^{(2)}(0) = 1$ ；
 - c. 反聚束光源， $g^{(2)}(0) < 1$ 。
- 注意：存在损耗介质的情况下，虽然单光子源的亚泊松统计会被削弱，但不会改变其反聚束的特征。为什么？
- 在实验中的单光子源经过长时间积分，可以较为准确地测得 $g^{(2)}(0)$ 。



HBT实验的量子描述(1)



- 无论使用经典还是量子的处理，二阶关联函数 $g^{(2)}(0)$ 都是一个非常突出的判据，可以在粒子的统计性质上区分经典光源和非经典光源。在量子处理中，乘法器被简化为一个光子计数器，用来记录光子计数事件的相关性。
- 在谐振子模型中，我们定义了粒子数表象下光子的产生和消灭算符，因此我们可以尝试建立HBT实验和二阶关联函数的量子理论。
- 把分束器前后的光场 ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 , ϵ_4 看作是量子化的，在粒子数表象下，分别为 n_1 , n_2 , n_3 , n_4 。探测器分别定义为 D_3 和 D_4 。

HBT实验的量子描述(2)

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp ip + m\omega x)$$

在粒子数表象下，二阶关联函数可以定义为

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_3(t)n_4(t+\tau) \rangle}{\langle n_3(t) \rangle \langle n_4(t+\tau) \rangle}$$

n_3 和 n_4 是被探测器 D_3 和 D_4 分别记录的光子计数事件， $\langle \dots \rangle$ 代表多次测量后的平均值。将二阶关联函数写为产生消灭算符的形式

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a_3^+(t)a_4^+(t+\tau)a_4(t+\tau)a_3(t) \rangle}{\langle a_3^+(t)a_3(t) \rangle \langle a_4^+(t+\tau)a_4(t+\tau) \rangle}$$

对于 $\tau = 0$,

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a_3^+ a_4^+ a_4 a_3 \rangle}{\langle a_3^+ a_3 \rangle \langle a_4^+ a_4 \rangle}$$

光场强度满足 $\begin{cases} \mathcal{E}_3 = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/\sqrt{2} \\ \mathcal{E}_4 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/\sqrt{2} \end{cases}$

所以 $\begin{cases} a_3 = (a_1 - a_2)/\sqrt{2} \\ a_4 = (a_1 + a_2)/\sqrt{2} \end{cases}$



HBT实验的量子描述(3)

考虑到入射光场波函数为 $|\Psi\rangle = |\psi_1, 0_2\rangle$ ，所以

$$\begin{aligned}\langle a_3^+ a_3 \rangle &= \langle \psi_1, 0_2 | (a_1^+ - a_2^+) (a_1 - a_2) / 2 | \psi_1, 0_2 \rangle = \langle \psi_1, 0_2 | a_1^+ a_1 - a_1^+ a_2 - a_2^+ a_1 + a_2^+ a_2 | \psi_1, 0_2 \rangle / 2 \\ &= \langle \psi_1 | a_1^+ a_1 | \psi_1 \rangle / 2 = \langle \psi_1 | n_1 | \psi_1 \rangle / 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle a_4^+ a_4 \rangle &= \langle \psi_1, 0_2 | (a_1^+ + a_2^+) (a_1 + a_2) / 2 | \psi_1, 0_2 \rangle = \langle \psi_1, 0_2 | a_1^+ a_1 + a_1^+ a_2 + a_2^+ a_1 + a_2^+ a_2 | \psi_1, 0_2 \rangle / 2 \\ &= \langle \psi_1 | a_1^+ a_1 | \psi_1 \rangle / 2 = \langle \psi_1 | n_1 | \psi_1 \rangle / 2\end{aligned}$$

同理有

$$\langle a_3^+ a_4^+ a_4 a_3 \rangle = \langle \psi_1, 0_2 | (a_1^+ - a_2^+) (a_1^+ + a_2^+) (a_1 + a_2) (a_1 - a_2) | \psi_1, 0_2 \rangle / 4$$

$$\langle a_3^+ a_4^+ a_4 a_3 \rangle = \langle \psi_1 | a_1^+ a_1^+ a_1 a_1 | \psi_1 \rangle / 4$$

由于

$$a_1^+ a_1^+ a_1 a_1 = a_1^+ (a_1 a_1^+ - 1) a_1 = a_1^+ a_1 a_1^+ a_1 - a_1^+ a_1 = n_1 (n_1 - 1)$$

$$\langle a_3^+ a_4^+ a_4 a_3 \rangle = \langle \psi_1 | n_1 (n_1 - 1) | \psi_1 \rangle / 4$$

HBT实验的量子描述(4)

二阶关联函数可以化简为

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a_3^+ a_4^+ a_4 a_3 \rangle}{\langle a_3^+ a_3 \rangle \langle a_4^+ a_4 \rangle} = \frac{\langle \psi_1 | n_1 (n_1 - 1) | \psi_1 \rangle / 4}{\langle \psi_1 | n_1 | \psi_1 \rangle^2 / 4} = \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2}$$

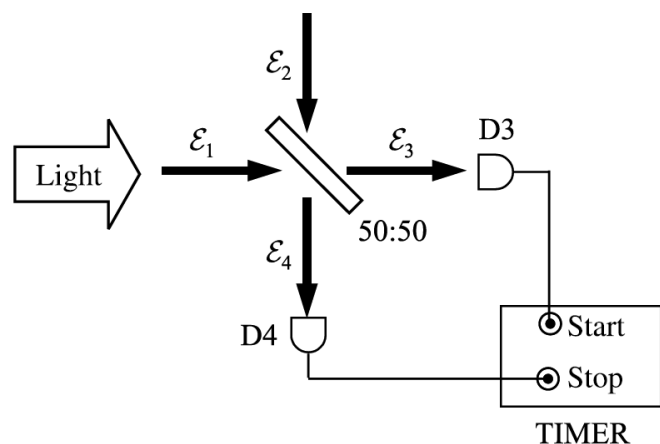
其中 n 为入射光束的光子数

$$g^{(2)}(0) = \frac{n(n-1)}{n^2}$$

对于单光子源 $n = 1$ ，所以 $g^{(2)}(0) = 0$ 。



HBT实验的量子描述(5)



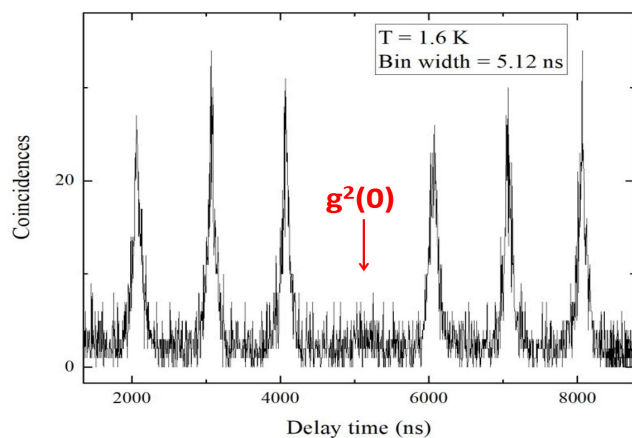
- HBT实验所记录的二阶关联函数，在粒子数表象下可表达为：

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_3(t)n_4(t+\tau) \rangle}{\langle n_3(t) \rangle \langle n_4(t+\tau) \rangle}$$

- 光场强度满足
$$\begin{cases} \varepsilon_3 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/\sqrt{2} \\ \varepsilon_4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/\sqrt{2} \end{cases}$$

- 二阶关联函数可以化简为

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a_3^+ a_4^+ a_4 a_3 \rangle}{\langle a_3^+ a_3 \rangle \langle a_4^+ a_4 \rangle} = \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2}$$



HOM实验

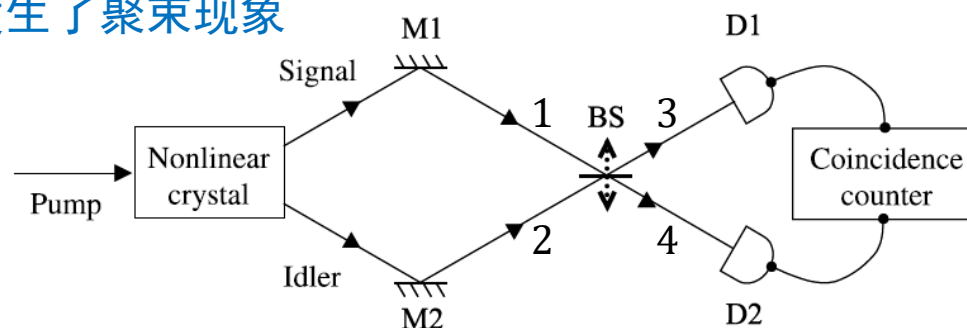
- HOM实验是C.K. Hong, Z.Y. Ou和L. Mandel在1987年开展的关于双光子干涉的一个著名实验。
- 考虑到50:50分束器两边的光子产生消灭算符满足

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{pmatrix}$$

- 输入光子可以写作 $|1_1 1_2\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$ ，输出光子为

$$\frac{1}{2}(a_3^\dagger + a_4^\dagger)(a_3^\dagger - a_4^\dagger)|0\rangle = \frac{1}{2}(a_3^{\dagger 2} - a_4^{\dagger 2})|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2_3 0_4\rangle - |0_3 2_4\rangle)$$

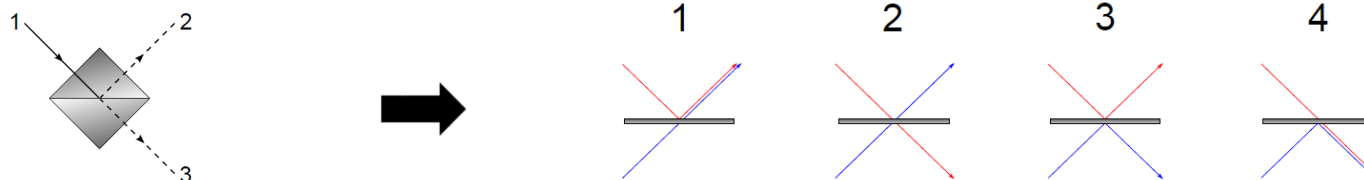
两个入射光子之间发生了聚束现象



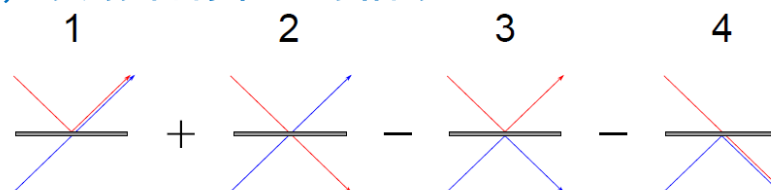
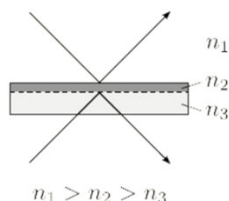
量子计算

双光子干涉

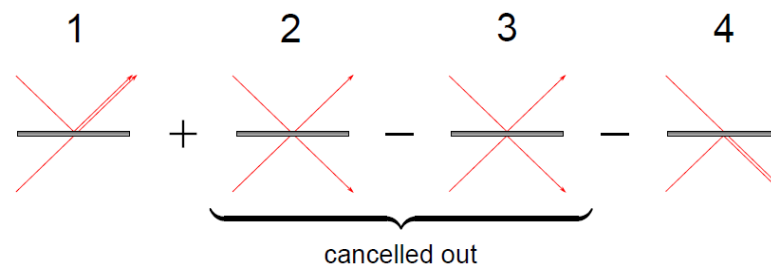
- 怎样理解双光子干涉过程？两个光子经过50:50分束器，共有四种可能的组合



- 从低折射率介质向高折射率介质传播的光，反射后存在 π 的相移

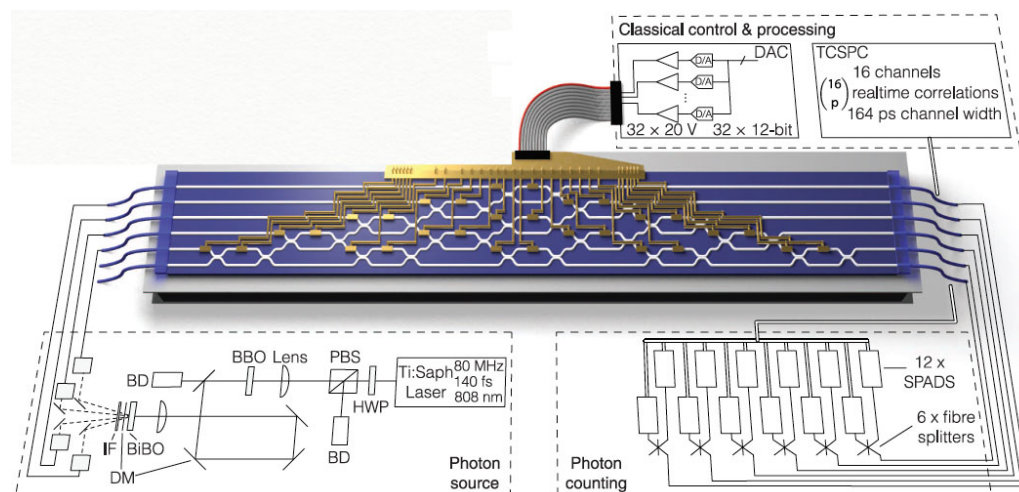


- 如果两个光子是全同粒子：



线性光量子计算

- 线性光量子计算 (LOQC) 是量子计算的一个范例，可以用于通用量子计算。LOQC以光子为信息载体，主要利用线性光学元件来处理量子信息，并利用光子探测器来检测量子信息。
- 起初，人们认为在线性光网络中加入非线性光学器件可以实现有效的量子计算。然而在量子层面上实现非线性光学效应是一项困难的任务。2000年，Knill、Laflamme和Milburn三位科学家证明了仅用线性光学工具就可以创造出通用量子计算机。他们的工作被称为“KLM方案”或“KLM协议”，它使用线性光学元件、单光子源和光子探测器作为资源来构造一个量子计算方案。



J. Carolan, Science 349, 711 (2015)

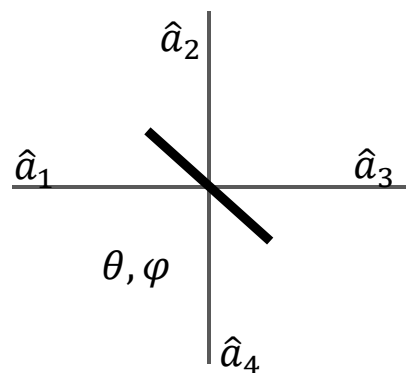
量子计算

13



浙江大学

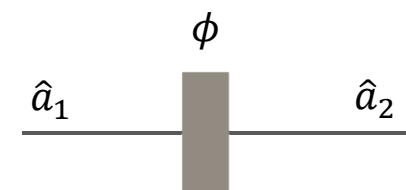
线性光学器件



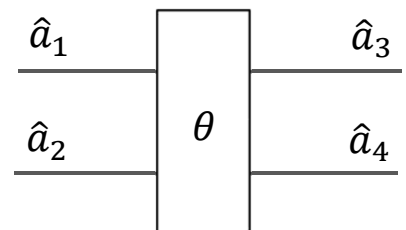
- 考虑一般分束器的情形

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & ie^{-i\varphi} \sin \theta \\ ie^{i\varphi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}$$

这里 φ 通常取作 $\pi/2$ 。当 $\theta = \pi/4$ 上式描述的是50: 50的分束器。

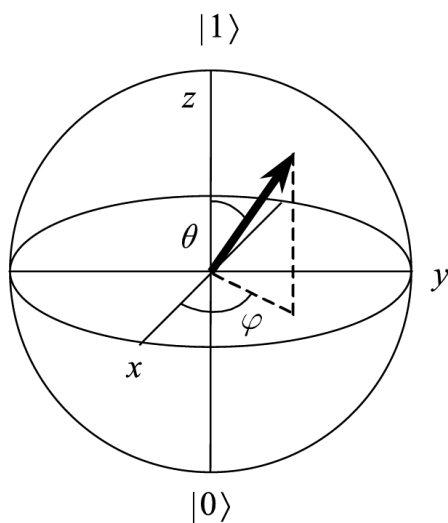
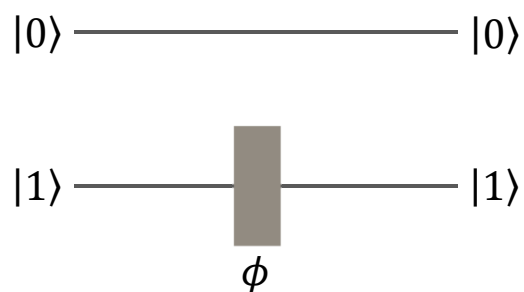


- 对于一个相位延迟器, 有 $\hat{a}_2 = \hat{a}_1 e^{-i\phi}$



- 对于一个偏振旋转器, 有 $\begin{pmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}$

移相门(Phase gate)



- 考虑左图显示的移相门，可以实现量子比特中两个本征态之间任意的相位变换。相当于本征矢量在布洛赫球上的旋转。

$$U(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

- 布洛赫球的表达式

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$$

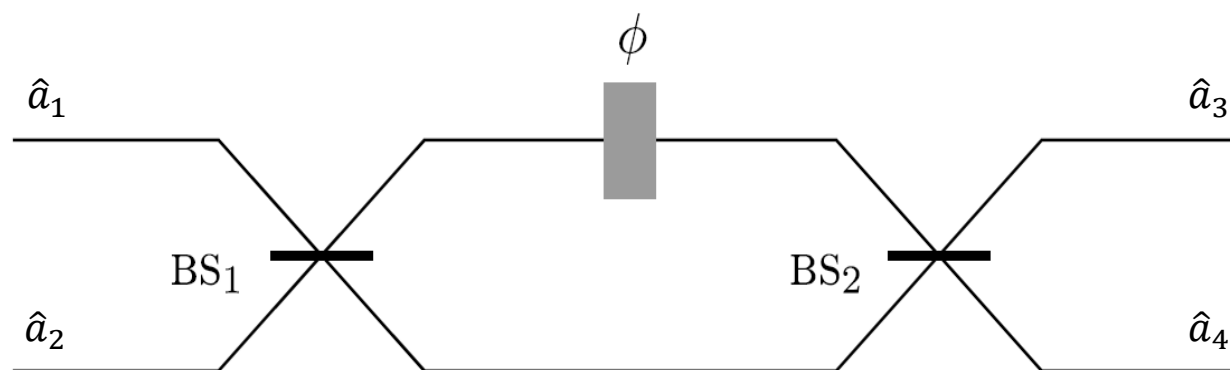
$$c_0 = \sin(\theta/2)$$

$$c_1 = e^{i\phi} \cos(\theta/2)$$

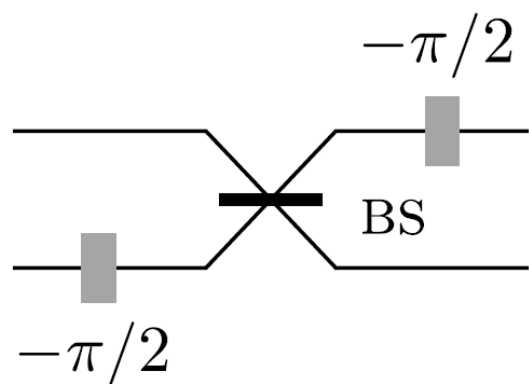
Mach-Zehnder干涉仪

- 考虑两个50: 50分束器和一个移相器的组合

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}$$



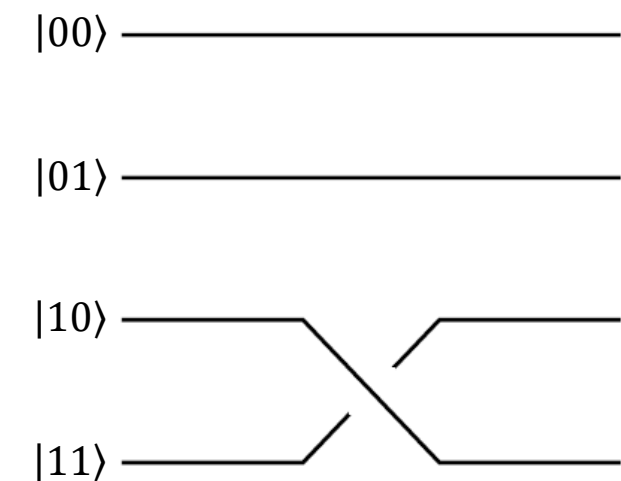
H门(Hadamard gate)



- 考虑左图显示的Hadamard门（H门），

$$\begin{aligned}
 H \cdot q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

CNOT门



- 左图所示的是CNOT门的线性光学回路。

$$\hat{U}_{CNOT} \cdot |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{00} \\ c_{01} \\ c_{10} \\ c_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} \\ c_{01} \\ c_{11} \\ c_{10} \end{pmatrix}$$

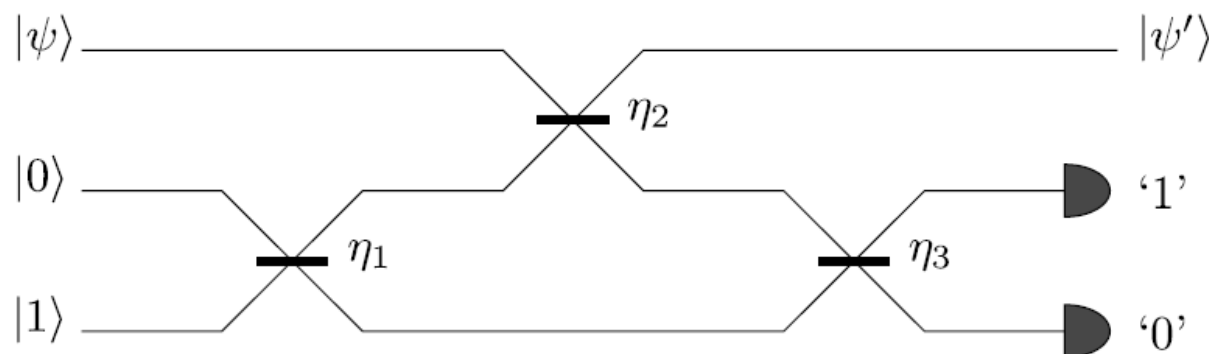
Control	Target	CNOT
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0,0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0,1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1,1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1,0\rangle$

- 可以得到CNOT门的真值表。

NS门

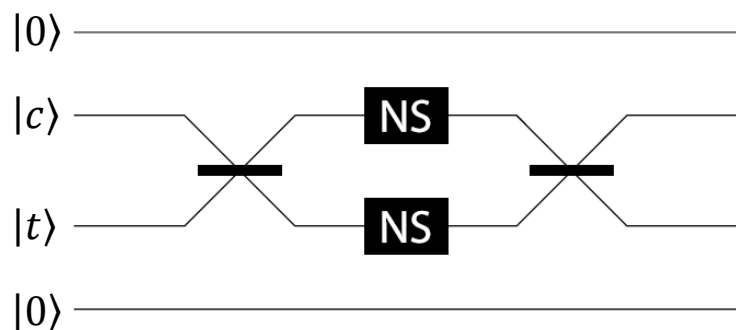
- 下图所示的双量子比特门，即所谓的非线性系数门（Nonlinear sign gate, NS门），其中 $\eta_1 = \eta_3 = 1/(4 - 2\sqrt{2})$ 和 $\eta_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ 可以实现粒子数表象下的态变换

$$c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle \rightarrow c_0|0\rangle + c_1|1\rangle - c_2|2\rangle$$



量子计算

CZ门



- 我们来看一个双量子比特门，即条件移相门（conditional phase gate, cz门）。

Control	Target	CZ
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0,0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0,1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1,0\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$- 1,1\rangle$

- 可以得到CZ门的真值表。

量子因特网



- 量子因特网由可中继的量子信道(Quantum channel)和量子节点(Quantum node)组成,可分别粗略地对应于量子通信和量子计算技术。
- 近年来,美国提出了《美国量子网络战略构想》《量子互联网国家战略蓝图》;欧盟提出了《欧盟量子因特网联盟计划》;中国提出了《中国天地一体化广域量子通信网络》,发展下一代量子网络和量子信息技术。
- 光量子通信和光量子计算结合有可能提供量子因特网的同质解决方案。

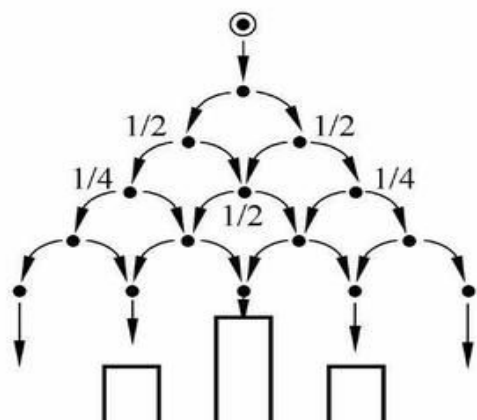
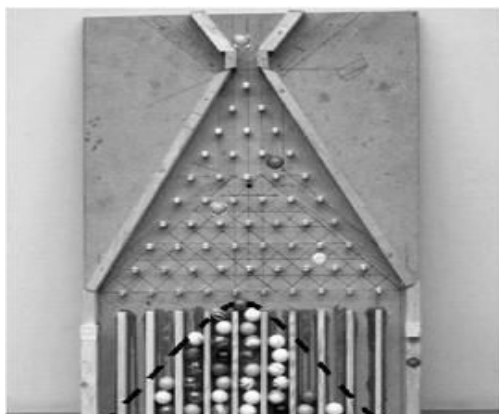
量子计算

21



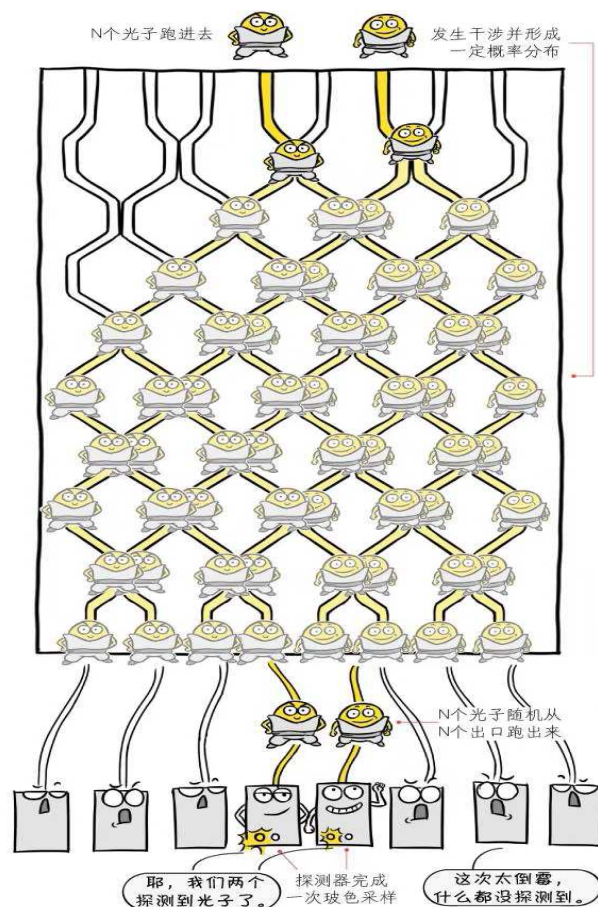
浙江大学

“九章” 光量子计算(1)



- 弗朗西斯·高尔顿是英国著名的统计学家、心理学家和遗传学家。他设计了一个钉板实验，希望从统计的观点来解释遗传现象。
- 木板上钉了数排（ n 排）等距排列的钉子，下一排的每个钉子恰好在上一排两个相邻钉子之间；从入口处放入若干直径略小于钉子间距的小球，小球在下落的过程中碰到任何钉子后，都将以 $1/2$ 的概率滚向左边，以 $1/2$ 的概率滚向右边，碰到下一排钉子时又是这样。如此继续下去，直到滚到地板的格子里为止。试验表明，只要小球足够多，它们在底板堆成的形状将近似于正态分布。

“九章” 光量子计算(2)

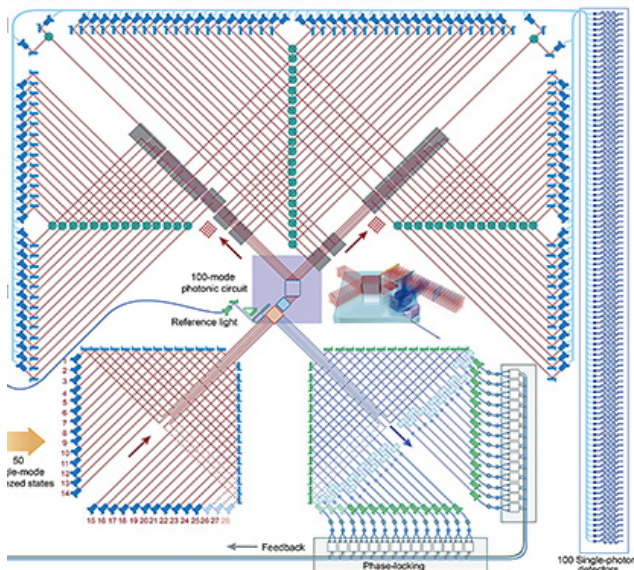


- 玻色采样是展示量子计算优越性的候选问题之一。这一问题的
美妙之处在于,它联系了线性光学和积和式,因为光子在不同的
模式上的概率分布,可以对应到某个积和式上。

$$\text{perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

- 即使是已知的最好的经典算法,积和式的精确计算的时间复杂度
仍然需要 $O(n \times 2^n)$ 。“九章”光量子计算机采用了更为复
杂的高斯玻色采样,其计算复杂度达到了 $O(n^3 \times 2^n)$ 。
- 光学玻色采样的结果可以基于线性光量子计算获得,但玻色采
样并非通用量子计算。

“九章” 光量子计算(3)



- 2020年12月4日，中国科学技术大学宣布该校潘建伟等人成功构建76个光子的量子计算原型机“九章”。命名为“九章”是为了纪念中国古代最早的数学专著《九章算术》。
- 九章开发团队声称当求解5000万个样本的高斯玻色取样时，“九章”需200秒，而截至2020年世界最快的超级计算机“富岳”需6亿年。
- “九章”中25个光源通过参量下转换过程产生50路单模压缩态输入到100个光学模式的光量子干涉网络，最后利用100个高效率超导单光子探测器对干涉仪输出光量子态进行探测。

量子计算

24



浙江大学

参考文献

- HOM实验和双光子干涉主要参考：
 - Mark Fox, Quntum Optics – An Introduction, Oxford University Press (2006). 14.3小节。
- 线性光子计算主要参考：
 - Pieter Kok, and Brendon W. Lovett, Introduction to Optical Quantum Information Processing, Cambridge University Press (2010). 6.1小节。
 - P. Kok, W.J. Munro, K. Nemoto, T.C. Ralph, J.P. Dowling, and G.J. Milburn, “Linear optical quantum computing with photonic qubits.” Review of Modern Physics 79, 135 (2007).

