第二次作业: 第二章 9、12、14; 第三章 3、5、7

9、

设 $X(t) = At + B, t \geqslant 0$, 这里 A 和 B 独立同分布,$E(A) = \mu, D(A) = \sigma^2 > 0$

(1) 计算 $\mu_X(t), R_X(s,t), C_X(s,t)$;

(2) 若 $A \sim N(0,1)$, 证明 $\{X(t)\}$ 是正态过程; 并求出 $X(t), X(t) - X(s), X(t) + X(s)$ 的分布.

解:

(1)

$$\mu_X(t) = E(X(t)) = E(At + B) = \mu(t+1)$$

$$\begin{aligned}
R_X(s,t) &= E(X(s)X(t)) = E(A^2 st + AB(s+t) + B^2) \\
&= stE(A^2) + (s+t)E(AB) + E(B^2) \\
&= st[D(A) + E^2(A)] + (s+t)E(A)E(B) + D(B) + E^2(B) \\
&= \sigma^2(st+1) + (s+1)(t+1)\mu^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_X(s,t) &= R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t) \\
&= \sigma^2(st+1)
\end{aligned}$$

(2)

$A \sim N(0,1), B \sim N(0,1), X(t) = tA + B$, $X(t)$ 为正态分布的线性组合

$X(t) \sim N(0, t^2+1)$ 为正态过程

$X(t) - X(s) = A(s-t) \sim N(0, (s-t)^2)$

$X(t) + X(s) = A(s+t) + 2B \sim N(0, (s+t)^2 + 4)$

12、

设随机过程 $\{X(t); t\in T\}, \{Y(t); t\in T\}$ 不相关，

$$Z(t) = a(t)X(t) + b(t)Y(t) + c(t), \quad t \in T$$

这里 $a(t), b(t), c(t)$ 都是通常的函数。已知 $\mu_X(t), \mu_Y(t), C_X(s,t), C_Y(s,t)$, 求 $\mu_Z(t), C_Z(s,t)$.

解：

$$\begin{aligned}
\mu_Z(t) &= E(a(t)X(t) + b(t)Y(t) + c(t)) \\
&= a(t)E(X(t)) + b(t)E(Y(t)) + c(t) \\
&= a(t)\mu_X(t) + b(t)\mu_Y(t) + c(t) \\
C_Z(s,t) &= Cov(a(s)X(s) + b(s)Y(s) + c(s), a(t)X(t) + b(t)Y(t) + c(t)) \\
&= R_Z(s,t) - \mu_Z(s)\mu_Z(t) \\
&= a(s)a(t)C_X(s,t) + b(s)b(t)C_Y(s,t) \quad \text{利用 X 和 Y 独立，太长不敲了}
\end{aligned}$$

14、

设随机过程 $\{X(t); t\in(-\infty,+\infty)\}, \{Y(t); t\in(-\infty,+\infty)\}$ 相互独立，已知它们的均值函数和自相关函数。令 $Z(t) = X(t)Y(t), t\in(-\infty,+\infty)$, 求 $\mu_Z(t), R_Z(s,t), R_{XZ}(s,t)$.

解：

$$\begin{aligned}
\mu_Z(t) &= E(X(t)Y(t)) = E(X(t))E(Y(t)) = \mu_X(t)\mu_Y(t) \\
R_Z(s,t) &= E(X(s)Y(s)X(t)Y(t)) = E(X(s)X(t))E(Y(s)Y(t)) \\
&= R_X(s,t)R_Y(s,t) \\
R_{XZ}(s,t) &= E(X(s)X(t)Y(t)) = R_X(s,t)\mu_Y(t)
\end{aligned}$$

3、

设 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布，$P(X_i=1)=p=1-P(X_i=0), 0<p<1$. 对 $n \geqslant 1$, 令

$$L_n = \begin{cases} 0, & X_n = 0 \\ max\{1 \leqslant k \leqslant n : X_{n+1-1}X_{n+1-2}\cdots X_{n+1-k}=1\}, & X_n = 1 \end{cases}$$

为第 n 次出现的 1 的游程长度。例如，$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)=(1,0,1,1,1)$, 那么对应的 $(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)=(1,0,1,2,3)$ 则 $\{L(n)\}$ 是一时齐马尔可夫链，写出它的状态空间和一步转移概率。

解:

$$L_{n+1} = \begin{cases} 0, & X_{n+1} = 0 \\ L_n + 1, & X_{n+1} = 1 \end{cases}$$

$p_{i(i+1)} = p \quad p_{i0} = 1-p, \forall i \in I$

5、

独立重复掷骰子，令 X_n 表示第 n 次得到的点数，令 $Y_n = max\{X_{n+1}, X_{n+2}\}, Z_n = X_{n+1}+X_{n+2}, \forall n \geqslant 0$

(1) 计算 $P(Y_2=1|Y_0=1, Y_1=6), P(Y_2=1|Y_1=6)$;

(2) 计算 $P(Z_2=12|Z_0=2, Z_1=7), P(Z_2=12|Z_1=7)$;

(3) 判断 $\{Y_n\}, \{Z_n\}$ 是否具有马尔可夫性？说明理由.

解:

(1)

$X_1 = X_2 = 1, X_3 = 6, Y_2 = 6$

$P(Y_2=1|Y_0=1, Y_1=6)=0$

$X_3 = X_4 = 1, X_2 = 6, max\{X_2, X-3\} = 6$

$P(Y_2=1|Y_1=6) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2\times 6-1} = \frac{1}{66}$

(2)

$P(Z_2=12|Z_0=2, Z_1=7) = \frac{1}{6}$

$X_3 = X_4 = 6, X_2 = 1, X_2 + X_3 = 7$

$P(Z_2=12|Z_1=7) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

(3)

$P(Y_2=1|Y_0=1, Y_1=6) \neq P(Y_2=1|Y_1=6)$

$P(Z_2=12|Z_0=2, Z_1=7) \neq P(Z_2=12|Z_1=7)$

$\{Y_n\},\{Z_n\}$ 未来受过去影响，不具备马尔可夫性。

7、

在单位圆上等距取 3 个点，按顺时针方向记为 $0,1,2$ 当一质点位于状态 $i(i=0,1,2)$ 时，下一时刻以 $\dfrac{2}{3}$ 概率顺时针走一格，以 $\dfrac{1}{3}$ 概率逆时针走一格，以 X_0 表示初始时刻的位置，设 $P(X_0=0)=\dfrac{1}{2},P(X_0=1)=P(X_0=2)=\dfrac{1}{4}$. 令 X_n 表示 n 时刻质点所处的位置，则 $\{X_n;n=0,1,\cdots\}$ 时一时齐马尔可夫链。

(1) 计算一步转移矩阵；

(2) 计算 $P(X_0=0,X_2=0,X_4=1)$和$P(X_2=1)$.

解：

(1)

$$I=\{0,1,2\}$$

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$P^2=\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$P(X_0=0,X_2=0,X_4=1)=P(X_0=0)P_{00}^2P_{01}^2=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{2}{81}$$

$$P(X_2=1)=P(X_0=0)P_{01}^2+P(X_0=1)P_{11}^2+P(X_0=2)P_{21}^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{5}{18}$$