习题一

1.1．设：$\mathbf{E}=E_y\mathbf{y}_0=\mathbf{y}_0 10^{-3}\cos\left(2\pi\times10^6 t+2\pi\times10^{-2}x\right)$　V/m

问：矢量$\mathbf{E}$在什么方向？波沿什么方向传播？波的幅度多大？频率$f=$ ？相位常数$k=$ ？相速$v_p=$ ？

解：1）矢量$\mathbf{E}$在$\mathbf{y_0}$方向；2）波沿$\mathbf{-x_0}$方向传播；

3）波幅为 10^{-3}，频率$f=10^6$Hz，相位常数$k=2\pi\times10^{-2}$，相速$v_p=\omega/k=10^8 m/s$

1.2．写出以下时谐变量的复数表示（如果可能的话）

(a) $V(t)=6\sin(\omega t+\pi/6)$ $\Rightarrow V=6e^{-j\pi/3}=3-j3\sqrt{3}$

(b) $I(t)=-10\sin\omega t$ $\Rightarrow I=10e^{j\pi/2}=10j$

(c) $A(t)=3\cos\omega t-2\sin\omega t$ $\Rightarrow A=3e^{j0}-2e^{-j\pi/2}=3+2j$

(d) $C(t)=10\cos(1000\pi t-\pi/2)$ $\Rightarrow C=10e^{-j\pi/2}=-10j$

(e) $D(t)=1-\sin(\omega t)$　　不存在

(f) $U(t)=\sin(\omega t+\pi/6)\cos(\omega t+\pi/3)$　　不存在

1.3．由以下复数写出相应的时谐变量

a)　$C=3+4j=5e^{ja\tan(4/3)}\Rightarrow C(t)=5\cos(\omega t+a\tan(4/3))$

(b) $C=4exp(-j1.8)\Rightarrow$ $C(t)=4\cos(\omega t-1.2)$

(c) $C=3exp(j\pi/2)+4exp(j0.8)\Rightarrow C(t)=3\cos(\omega t+\pi/2)+4\cos(\omega t+0.8)$

1.4．写出以下时谐矢量的复矢量表示：

(a) $\overline{\mathrm{V}}(\mathrm{t})=3\cos(\omega\mathrm{t})\hat{\mathrm{x}}_0+4\sin(\omega\mathrm{t})\hat{\mathrm{y}}_0+\cos(\omega\mathrm{t}+\pi/2)\hat{\mathrm{z}}_0$

答：$\mathrm{V}=3\hat{\mathrm{x}}_0-4j\hat{\mathrm{y}}_0+j\hat{\mathrm{z}}_0$

(b) $\overline{\mathrm{E}}(\mathrm{t})=[3\cos\omega\mathrm{t}+4\sin(\omega\mathrm{t})]\hat{\mathrm{x}}_0+8[\cos\omega\mathrm{t}-4\sin\omega\mathrm{t}]\hat{\mathrm{z}}_0$

答：$\overline{\mathrm{E}}=(3-4j)\hat{\mathrm{x}}_0+(8+8j)\hat{\mathrm{z}}_0$

(c) $\overline{\mathrm{H}}(\mathrm{t})=0.5\cos(\mathrm{kz}-\omega\mathrm{t})\hat{\mathrm{x}}_0$

答：$\overline{\mathrm{H}}=0.5\exp(-j\mathrm{kz})\hat{\mathrm{x}}_0$

1.5．从下面复矢量写出相应的时谐矢量。

（a）$\overline{\mathrm{C}}=\hat{\mathrm{x}}_0-j\hat{\mathrm{y}}_0$

答：$\overline{\mathrm{C}}(\mathrm{t})=\cos\omega t\hat{\mathrm{x}}_0+\sin\omega t\hat{\mathrm{y}}_0$

（b）$\overline{\mathrm{C}}=j(\hat{\mathrm{x}}_0-j\hat{\mathrm{y}}_0)$

答：$\overline{\mathrm{C}}(\mathrm{t})=-\sin\omega t\hat{\mathrm{x}}_0+\cos\omega t\hat{\mathrm{y}}_0$

（c）$\overline{\mathrm{C}} = \exp(-jkz)\hat{\mathrm{x}}_0 + j\exp(jkz)\hat{\mathrm{y}}_0)$

答：$\overline{\mathrm{C}}(\mathrm{t}) = \cos(kz - \omega t)\hat{\mathrm{x}}_0 - \sin(\omega t + kz)\hat{\mathrm{y}}_0$

1.6．假定$\overline{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{x}}_0 + j\hat{\mathrm{y}}_0 + (1 + j2)\hat{\mathrm{z}}_0$，$\overline{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{x}}_0 - (2 + 2j)\hat{\mathrm{y}}_0 - j\hat{\mathrm{z}}_0$，求：$\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}}$，$\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}$，$\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}}^*$，$\mathrm{Re}(\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}^*)$ 。

答：$\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}} = 1 - j(2 + 2j) - j(1 + j2) = 5 - 3j$

$$\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{x}}_0 & \hat{\mathrm{y}}_0 & \hat{\mathrm{z}}_0 \\ 1 & j & 1+2j \\ 1 & -(2+2j) & -j \end{bmatrix} = (\text{-}1 + 6\mathrm{j})\hat{\mathrm{x}}_0 + (1 + 3j)\hat{\mathrm{y}}_0 - (2 + 3j)\hat{\mathrm{z}}_0$$

$$\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}}^* = 1 - j(2 - 2j) + j(1 + 2j) = -3 - j$$

$$\mathrm{Re}(\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}^*) = \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{x}}_0 & \hat{\mathrm{y}}_0 & \hat{\mathrm{z}}_0 \\ 1 & j & 1+2j \\ 1 & -(2-2j) & j \end{bmatrix} = (5 + 2\mathrm{j})\hat{\mathrm{x}}_0 + (1 + j)\hat{\mathrm{y}}_0 - (2 - j)\hat{\mathrm{z}}_0$$

1.7．计算下列标量场的梯度

(1) $u=x^2y^2z^2$ => $\nabla u = 2xy^2z^2\hat{x} + 2yx^2z^2\hat{y} + 2zy^2x^2\hat{z}$

(2) $u = 2x^2+y^2-z^2$ => $\nabla u = 4x\hat{x} + 2y\hat{y} - 2z\hat{z}$

(3) $u = xy+yz+xz$ => $\nabla u = (y + z)\hat{x} + (x + z)\hat{y} + (x + y)\hat{z}$

(4)$u = x^2 +y^2 +2xy$ => $\nabla u = 2(x + y)\hat{x} + 2(x + y)\hat{y}$

(5) $u = xyz$ => $\nabla u = yz\hat{x} + xz\hat{y} + yx\hat{z}$

1.8．求曲面$z = x^2 + y^2$ 在点(1, 1, 2) 处的法线方向.

答：令 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$，$\nabla f = 2x\mathbf{x}_0 + 2y\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0$,因为梯度的方向就是该点的发现方向，所以在点（1.1.2）处的法线方向为$\nabla f(x = 1, y = 1, z = 2) = 2\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0$

1.9．求下列矢量场的散度、旋度。

(1) $\mathbf{A} = x^2\mathbf{x}_0 + y^2\mathbf{y}_0 + z^2\mathbf{z}_0$ $\quad \nabla \cdot A = 2x + 2y + 2z, \nabla \times A = 0$

(2) $\mathbf{A} = (y + z)\mathbf{x}_0 + (x + z)\mathbf{y}_0 + (x + y)\mathbf{z}_0$ $\quad \nabla \cdot A = 0, \nabla \times A = 0$

(3) $\mathbf{A} = (x + y)\mathbf{x}_0 + (x^2 + y^2)\mathbf{y}_0$ $\quad \nabla \cdot A = 1 + 2y, \nabla \times A = (2x - 1)\mathbf{z}_0$

(4) $\mathbf{A} = 5\mathbf{x}_0 + 6yz\mathbf{y}_0 + x^2\mathbf{z}_0$ $\quad \nabla \cdot A = 6z, \nabla \times A = -6y\mathbf{x}_0 - 2x\mathbf{y}_0$

1.10．求$\nabla \cdot \mathbf{A}$和$\nabla \times \mathbf{A}$

(1) $\mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = \boldsymbol{\rho}_0\rho^2\cos\varphi + \varphi_0\rho\sin\varphi$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=(3\rho+1)\cos\varphi$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\rho_0 & \rho\varphi_0 & \mathbf{z}_0\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix}=(2+\rho)\sin\varphi\mathbf{z}_0$$

(2) $\mathbf{A}(r,\theta,\varphi)=\mathbf{r}_0 r\sin\theta+\boldsymbol{\theta}_0\frac{1}{r}\sin\theta+\varphi_0\frac{1}{r^2}\cos\theta$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial\left(r^2A_r\right)}{r^2\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right)+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]=3\sin\theta+2\cos\theta/r^2$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\mathbf{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r\sin\theta\varphi_0\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}=\frac{\cos2\theta}{r^3\sin\theta}\mathbf{r}_0+\frac{\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{\theta}_0-\cos\theta\varphi_0$$

1.11．求 z 方向无限长线电流 $\hat{z}_0 I\delta(x)\delta(y)$ 激发的恒定磁场 $\overline{\mathrm{H}}$ 及其旋度 $\nabla\times\overline{\mathrm{H}}$ 。

答：$\overline{\mathrm{H}}=\hat{\phi}\dfrac{I}{2\pi\rho}$； $\nabla\times\overline{\mathrm{H}}=\bar{J}=\hat{z}_0 I\delta(x)\delta(y)$

1.12．求球坐标中单位矢量 $\hat{r}_0$， $\hat{\theta}_0$， $\hat{\phi}_0$ 的旋度.

答：$\nabla\times\hat{r}_0=0$；$\nabla\times\hat{\theta}_0=\dfrac{1}{r}\hat{\phi}_0$；$\nabla\times\hat{\phi}_0=\dfrac{1}{r^2\sin\theta}(\hat{r}_0 r\cos\theta-r\hat{\theta}_0\sin\theta)=\dfrac{\hat{r}_0}{r}\cot\theta-\dfrac{1}{r}\hat{\theta}_0$

1.13．若矢量场 $\overline{A}=x\hat{x}$，求 $\oint_S\overline{A}\cdot d\overline{S}$ 的值，其中 S 是由 $x^2+y^2=r^2$， $z=0$， $z=h$ 组成的闭合曲面。

答：作出图形后，可以知道，闭合曲面 S 上下底面法向与 **A** 的点积为 0

$$\oint_S\overline{A}\cdot d\overline{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^h dzd\phi\ \rho\overline{A}\cdot\hat{\rho}=\int_0^{2\pi}\int_0^h dzd\phi\ r^2\cos^2\phi=\pi hr^2$$

1.14．假定 $\overline{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$， $\overline{B}=B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}$，证明（1.5.49）是正确的。

答：左右分别代入，左边=右边，即可证明。

1.15．证明（1.5.50）、（1.5.51）成立。

答：可参照 1.14 题

1.16．证明（1.5.47）、（1.5.48）成立。

答：同上。

1.17．将 $\overline{A}_{rec}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$ 变换到 $\overline{A}_{cyl}$ 和 $\overline{A}_{sph}$ 。

答： $\overline{A}_{cyl}=(x\cos\phi+y\sin\phi)\hat{\rho}+(-x\sin\phi+y\cos\phi)\hat{\phi}+z\hat{z}$

其中 $\phi = \arctan(y/x)$

$$\overline{A}_{sph} = (x\sin\theta\cos\phi + y\sin\theta\cos\phi + z\cos\theta)\hat{r}$$
$$+(x\cos\theta\cos\phi + y\cos\theta\sin\phi - z\sin\theta)\hat{\theta}$$
$$+(-x\sin\phi + y\cos\phi)\hat{\phi}$$

其中 $\theta = \arctan(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z})$ 和 $\phi = \arctan(y/x)$

1.18．将柱坐标矢量 $\overline{A}_{cyl} = \rho^2\hat{\rho} + \cos\phi\hat{\phi}$ 变换到直角坐标、球坐标中 $\overline{A}_{rec}$，$\overline{A}_{sph}$。

答：$\overline{A}_{rec} = (\rho^2\cos\phi - \sin\phi\cos\phi)\hat{x} + (\rho^2\sin\phi + \sin\phi\cos\phi)\hat{y}$

$\overline{A}_{sph} = \hat{r}\rho^2\sin\theta + \hat{\theta}\rho^2\cos\theta + \hat{\phi}\cos\phi$

1.19．导出在直角坐标系与圆柱坐标系有如下关系：

$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$,

并以 $f(\rho,\phi) = \rho^2 + \tan\phi$ 或者 $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{y}{x}$ 为例，进行验证。

答：由全微分：$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial y}$

而 $\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin\phi$，$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}\cos\phi$，

代入就可以得到：$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$

同理，可以得到：$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$

验证略。