量子信息基础

第五章：量子通信

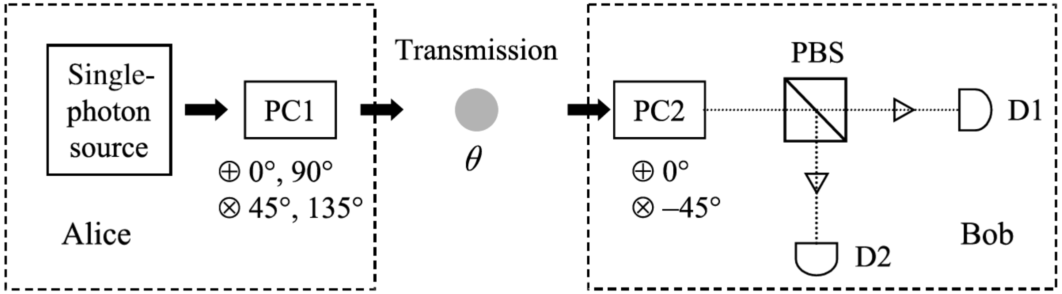
金潮渊
浙江大学信息与电子工程学院

C5-3 纠缠态和量子隐形传态

课程回顾

不可克隆原理和量子密码学：

- 量子不可克隆原理：我们可以克隆一个本征态，但无法克隆一个非平庸的线性叠加态。
- BB84协议：Alice发送的信号和Bob的测量过程在两组不同的基之间随机切换。Bob通过公开信道告诉Alice他对基的选择；Alice通过公开信道告诉Bob哪些基的选择是一致的；Bob通过公开信道把剩下的比特信息传输给Alice，Alice分析其中的误码率；如果误码率小于25%，Alice确认没有窃听存在，通信继续；Eve的窃听会使误码率上升至50%左右。



张量积

- 我们举例看一下张量积的定义，假设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

A和B的张量积为

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

- 对照于矩阵乘法和直积的定义分别为

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \qquad A\oplus B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

双量子比特(1)

- 如果我们考虑两个波函数矢量的张量积

$$|\psi\rangle_1 = a_1|0\rangle_1 + b_1|1\rangle_1 \qquad |\psi\rangle_2 = a_2|0\rangle_2 + b_2|1\rangle_2$$

$$|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = a_1a_2|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + a_1b_2|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 + b_1a_2|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + b_1b_2|1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2$$

上式可以简化为

$$|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = a_1a_2|0\rangle_1|0\rangle_2 + a_1b_2|0\rangle_1|1\rangle_2 + b_1a_2|1\rangle_1|0\rangle_2 + b_1b_2|1\rangle_1|1\rangle_2$$

或者

$$|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = a_1a_2|0\rangle|0\rangle + a_1b_2|0\rangle|1\rangle + b_1a_2|1\rangle|0\rangle + b_1b_2|0\rangle\,|1\rangle$$

$$|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = a_1a_2|00\rangle + a_1b_2|01\rangle + b_1a_2|10\rangle + b_1b_2|11\rangle$$

$$|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle$$

双量子比特(2)

- 将上面的推导写作矩阵形式

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

考虑到最初的本征波函数为

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

双量子比特定义为矩阵的张量积

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

密度矩阵

- 多个列矢量或者多个行矢量的张量积可以用来描述多量子比特

- 相对应地，密度矩阵也可以利用张量积来定义，表现为列矢量和行矢量的张量积

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a^* & b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 & ab^* \\ ba^* & |b|^2 \end{bmatrix}$$

- 明显可以得出

$$\rho^2 = \rho$$

$$\rho^\dagger = \rho$$

$$\mathrm{Tr}(\rho) = \sum_i \rho_{ii} = 1$$

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}(\rho A)$$

纠缠态(1)

- 如果一个多粒子体系的波函数无法写作单个粒子波函数的乘积形式，这种量子态被称之为纠缠态。比如以EPRB实验中的一对光子的波函数为例（正关联）

$$\left|\Phi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_1, 0_2\right\rangle \pm \left|1_1, 1_2\right\rangle\right)$$

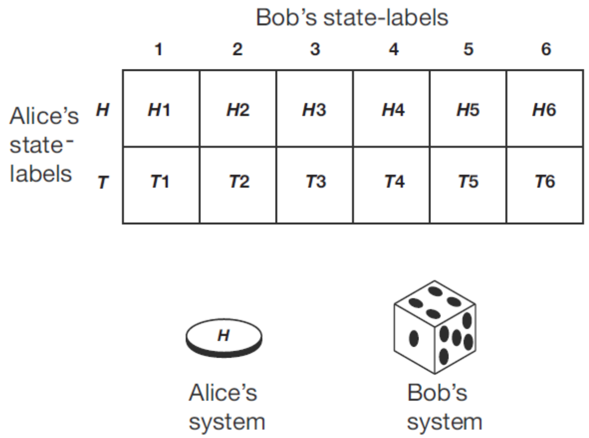
或者（负关联）

$$\left|\Psi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_1, 1_2\right\rangle \pm \left|1_1, 0_2\right\rangle\right)$$

- 纠缠态又被称为贝尔态。当我们测量一对正关联的纠缠粒子时，我们得到（0,0）和（1,1）的几率都是50%，但不会得到（0,1）或者（1,0）的测量结果。我们测量一对负关联的纠缠粒子时，我们得到（0,1）和（1,0）的几率都是50%，但不会得到（0,0）或者（1,1）的测量结果。

- 贝尔态（纠缠态）是一种特殊的双量子比特，无法写成张量积的形式。

纠缠态(2)



- 我们考虑一个更一般纠缠态的例子。假设Alice有一个量子比特

$$|\psi\rangle = c_H|H\rangle + c_V|V\rangle$$

Bob也有一个量子比特，但是这个量子比特是6个本征态的线性组合 $|\varphi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle + c_4|4\rangle + c_5|5\rangle$

- Alice和Bob的量子比特都处于各自本征态张成的（二维或六维）希尔伯特空间中，我们称这两个希尔伯特空间为S_A和S_B。我们定义这两个空间的张量积

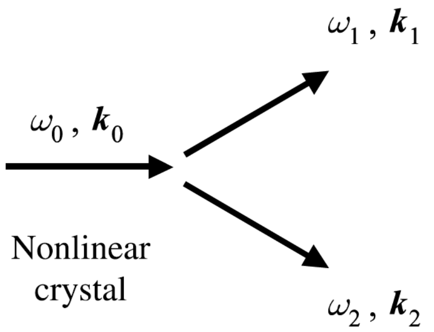
$$S_{AB} = S_A \otimes S_B$$

- 那么张量空间中的12个元素，以$H3$为例可以写为

$$|H\rangle \otimes |3\rangle \quad 或者 \quad |H\rangle|3\rangle \quad 或者 \quad |H3\rangle$$

这代表了一个单态，单态间的线性组合有可能代表纠缠态。

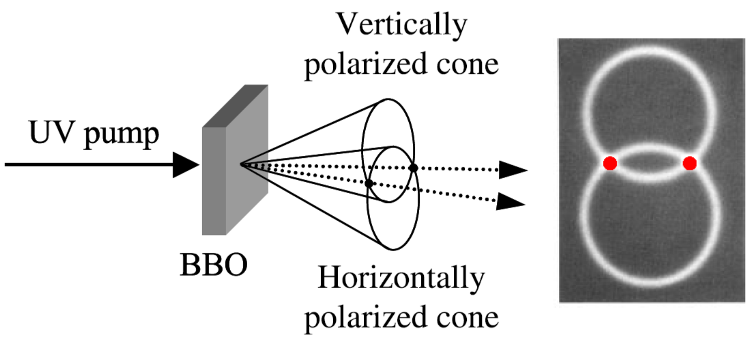
纠缠光子源



- 现在较常用一种生成纠缠光子对的方法主要基于非线性光学，利用了非线性光学晶体中的下转换过程(down conversion)。一个光子入射到非线性晶体中，转换成一对关联光子出射，关联光子之间满足所谓的**相位匹配**关系。

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$$

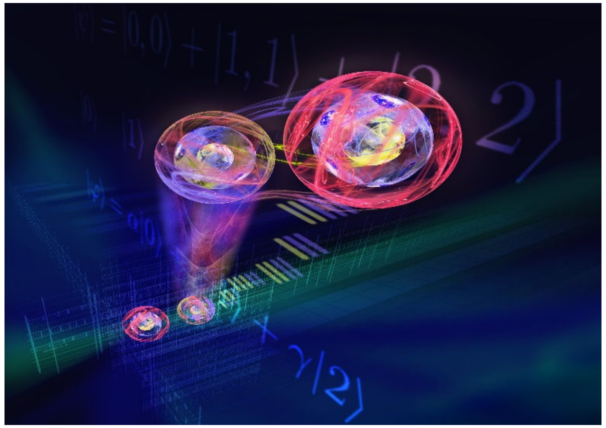


- 左图给出了下转换过程产生纠缠光子的实验示意图，紫外激光照在BBO晶体上，一个入射光子产生一对下转换后的红光光子。图中红点处的光子满足相位匹配关系，且具有相反的偏振，波函数可以写成

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\leftrightarrow_1, \updownarrow_2\rangle + e^{i\phi}|\updownarrow_1, \leftrightarrow_2\rangle\right)$$

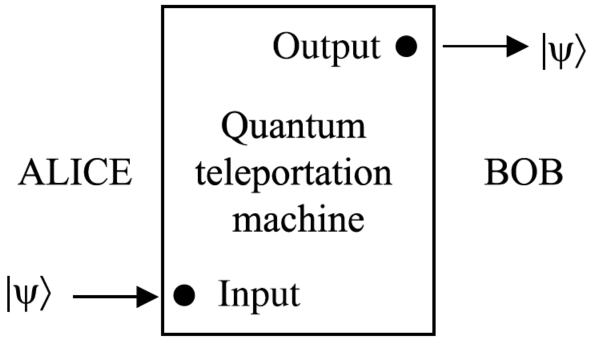
瞬间移动(Teleportation)

- 瞬间移动（Teleportation）指的是将物体传送到不同的空间、或者事物本身在一瞬移到他处的现象与能力。瞬移经常出现在科幻作品当中。



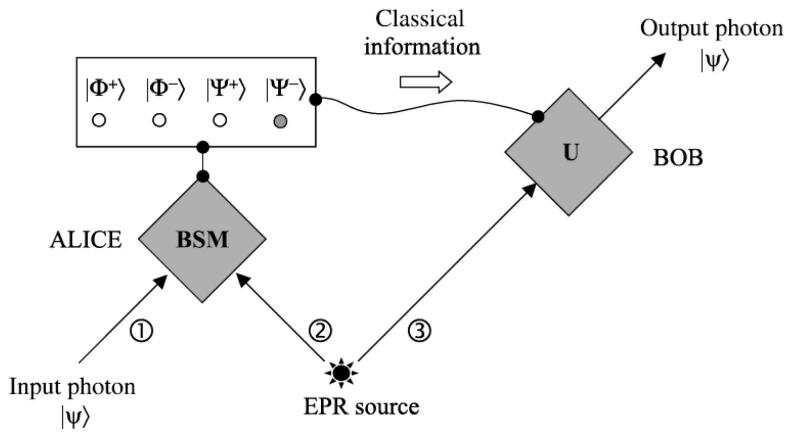
- 量子隐形传态（Quantum teleportation）是一种利用量子纠缠来传送量子态至任意距离的技术，是一种全新的通信方式。它传输的不再是经典信息而是量子态携带的量子信息。

几点原则



- 根据量子不可克隆原理，我们不可能复制原有量子比特。所以Alice手持的量子比特在量子隐形传态之后必然会消失或者转化。
- 量子测量的一般理论表明，如果量子隐形传态的机器引入了损耗或者获取了量子信息，输出和输入波函数之间的保真度会相应地下降。
- 在输入和输出之间传送的只有量子信息。
- 相对论告诉我们，我们传递信息的速度不能超过光速。因此，远距离传送不能用于超光速信息交流。

量子隐形传态



- 1993年，Charles H. Bennett（也是BB84的共同提出者）提出了第一个量子隐形传态的方案。
- Alice接收到光子❶，光子处在未知的偏振态上
$$|\psi\rangle_1 = c_0|0\rangle_1 + c_1|1\rangle_1$$
- 光子❷和光子❸是一对外来的纠缠光子，分别被送往Alice和Bob，我们假设两个光子处在反相关的纠缠态上
$$|\Psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3)$$
- Alice对光子❶和光子❷进行贝尔态测量，得到四种可能结果中的一个。然后告知Bob测量结果。
- Bob根据Alice的结果对光子❸进行幺正操作$\hat{U}$，光子的量子态变为
$$|\psi\rangle_3 = c_0|0\rangle_3 + c_1|1\rangle_3$$

HOM实验

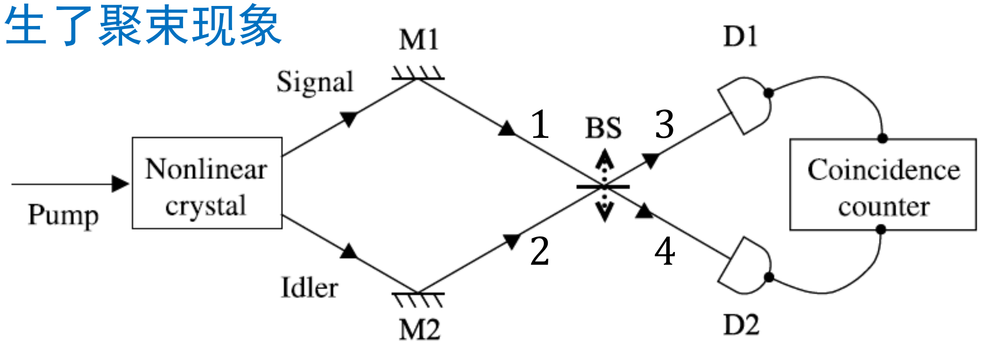
- HOM实验是C.K. Hong, Z.Y. Ou和L. Mandel在1987年开展的关于双光子干涉的一个著名实验。
- 考虑到50：50分束器两边的光子产生消灭算符满足

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{pmatrix}$$

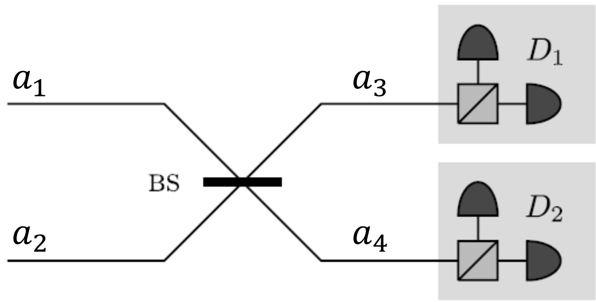
- 输入光子可以写作$|1_1 1_2\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$，输出光子为

$$\frac{1}{2}(a_3^\dagger + a_4^\dagger)(-a_3^\dagger + a_4^\dagger)|0\rangle = \frac{1}{2}(-a_3^{\dagger 2} + a_4^{\dagger 2})|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|2_3 0_4\rangle + |0_3 2_4\rangle)$$

两个入射光子之间发生了聚束现象



贝尔测试



- 考虑50：50分束器的输入端的贝尔态

$$|\Psi^-\rangle_{\text{in}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_{1H}^\dagger a_{2V}^\dagger - a_{1V}^\dagger a_{2H}^\dagger\right)|0\rangle$$

- 输出端为

$$|\Psi^-\rangle_{\text{out}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(a_{3H}^\dagger + a_{4H}^\dagger\right)\left(a_{3V}^\dagger - a_{4V}^\dagger\right) - \left(a_{3V}^\dagger + a_{4V}^\dagger\right)\left(a_{3H}^\dagger - a_{4H}^\dagger\right)\right]|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_{3V}^\dagger a_{4H}^\dagger - a_{3H}^\dagger a_{4V}^\dagger\right)|0\rangle$$

- 50:50分束器可以用于复制贝尔态。

理论描述

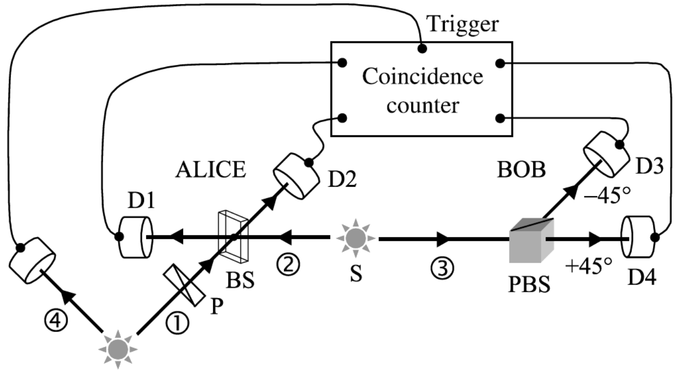
- 考虑三粒子波函数 $$|\Psi\rangle_{123}=\frac{1}{\sqrt{2}}(c_0|0\rangle_1+c_1|1\rangle_1)(|0\rangle_2|1\rangle_3-|1\rangle_2|0\rangle_3)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(c_0|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3-c_0|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3+c_1|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3-c_1|1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3)$$

- 引入贝尔态的公式 $$\left|\Phi^{\pm}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_1,0_2\right\rangle\pm\left|1_1,1_2\right\rangle\right)\qquad\left|\Psi^{\pm}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_1,1_2\right\rangle\pm\left|1_1,0_2\right\rangle\right)$$

$$|\Psi\rangle_{123}=\frac{1}{2}\left[\left|\Phi^+\right\rangle_{12}(c_0|1\rangle_3-c_1|0\rangle_3)+|\Phi^-\rangle_{12}(c_0|1\rangle_3+c_1|0\rangle_3)+\left|\Psi^+\right\rangle_{12}(-c_0|0\rangle_3+c_1|1\rangle_3)+|\Psi^-\rangle_{12}(c_0|0\rangle_3+c_1|1\rangle_3)\right]$$

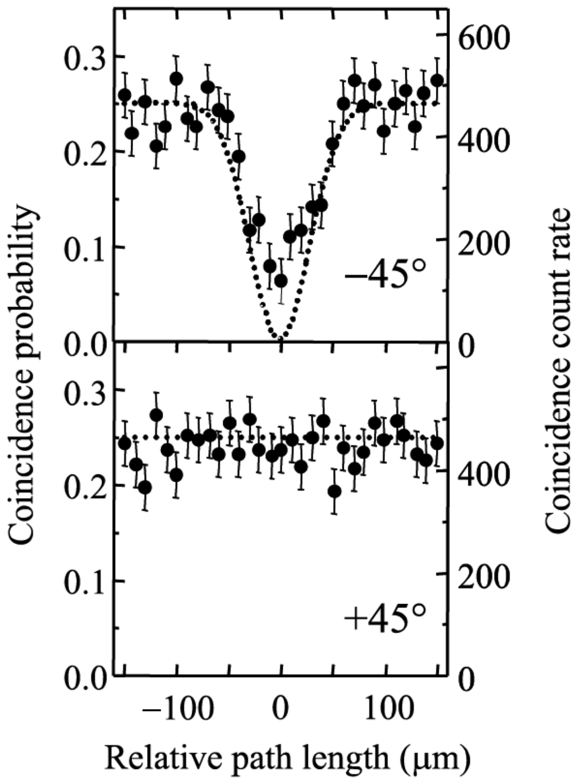
- Alice测试得到四种贝尔态的一种，假设是$\left|\Psi^+\right\rangle_{12}$，告诉Bob后，Bob对$-c_0|0\rangle_3+c_1|1\rangle_3$做一个幺正变换后得到
$$|\psi\rangle_3=c_0|0\rangle_3+c_1|1\rangle_3$$

实验验证(1)



- 1997年，Bouwmeester, Pan和Zeilinger在实验中实现了量子隐形传态。
- 在实验中他们利用了两对纠缠光子源，利用200fs的光脉冲激发纠缠光子。其中光子❹作为Alice开始贝尔测试的时钟信号。光子❷和光子❸作为量子隐形传态中的纠缠光子对。
- 光子❶通过一个偏振控制器P制备45°的偏振态。

实验验证(2)



- 在当时的实验中，只能够测到两种贝尔态的叠加

$$|\Psi\rangle_{123} = \frac{1}{2}\left[|\Psi^+\rangle_{12}(-c_0|0\rangle_3 + c_1|1\rangle_3) + |\Psi^-\rangle_{12}(c_0|0\rangle_3 + c_1|1\rangle_3)\right]$$

而且比较容易测到$|\Psi^-\rangle_{12}$，所以实验的重心放在了$|\Psi^-\rangle_{12}$的测试上。

- 对Alice而言，$|\Psi^-\rangle_{12}$是唯一可以让$D1D2$同时响应的态，对Bob而言$|\Psi^-\rangle_{12}$会带来$D4$的响应，而同时$D3$没有响应。

- 左图是记录$D1D2D3$和$D1D2D4$联合测试的结果。

讨论

- 量子隐形传态是量子非定域性的自然结果。从EPR佯谬到贝尔不等式，从贝尔不等式的量子检测到量子隐形传态的实验结果，都证明了在微观层面上非定域性具有坚实的实验基础，寻找隐变量的实验尝试被一再证实是徒劳的。因此，我们不得不接受量子非定域性和不确定原理的基础地位。

- 量子隐形传态打开了量子非定域性一扇通向未来的大门，量子信息的隔空传递是否可能得到更广泛和深入的应用，是值得思考和努力的方向。

参考文献

- 纠缠态主要参考：
  - Leonard Susskind, and Art Friedman，Quantum Mechanics the Theoretical Minimum，Basic Books (2014). 第6章。

- 贝尔测试主要参考：
  - Pieter Kok, and Brendon W. Lovett, Introduction to Optical Quantum Information Processing, Cambridge University Press (2010). 5.2小节。

- 量子隐形传态主要参考：
  - Mark Fox, Quntum Optics – An Introduction, Oxford University Press (2006). 14.5小节。