

量子信息基础

第六章：量子计算

金潮渊

浙江大学信息与电子工程学院



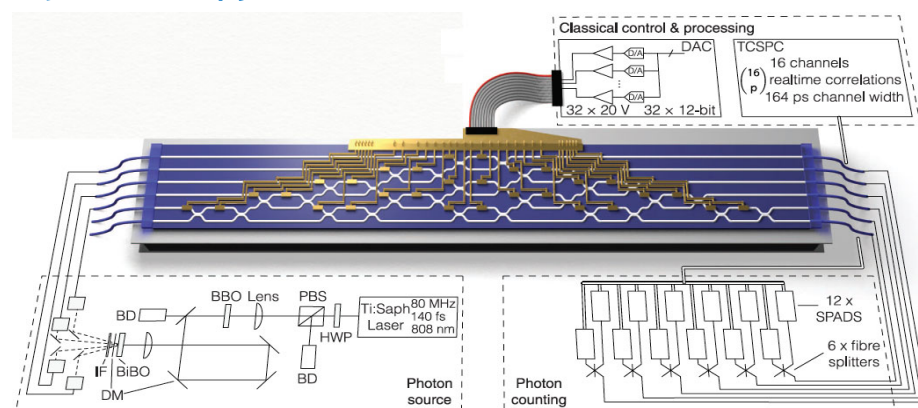
C6-4 约瑟夫森结和超导量子计算



课程回顾

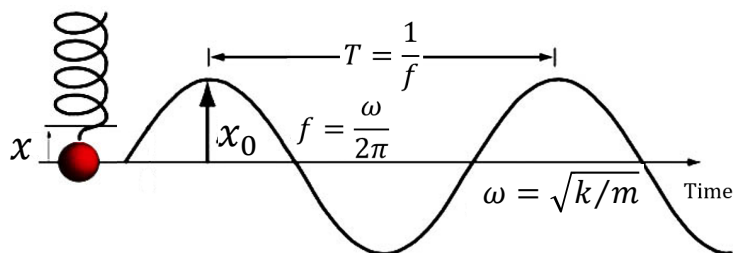
双光子干涉和光学量子计算：

- 双光子干涉是两个全同光子从50:50分束器的两侧入射，两个光子发生聚束的现象，也被称为双光子聚束现象，或者Hong-Ou-Mandel实验。
- 线性光量子计算（LOQC）是量子计算的一个范例。2000年，Knill、Laflamme和Milburn三位科学家证明了仅用线性光学工具就可以创造出通用量子计算机。
- 一般的线性光学器件包括分束器、移相器、偏振转换器等，利用这些元件可以组成移相门、H门、CNOT门、CZ门等量子比特门。

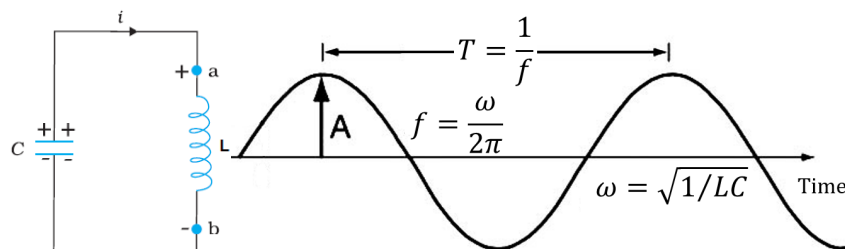


量子计算

简谐振动



弹簧振子



LC 回路

- 简谐振动可以用含时的正弦和余弦函数来表示

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \sim x_0 \sin(\omega t)$$

$$p(t) = m \frac{dx}{dt} = p_0 \cos(\omega t + \varphi) \sim p_0 \cos(\omega t)$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2m} p_0^2 \cos^2(\omega t) + \frac{m \omega^2}{2} x_0^2 \sin^2(\omega t)$$

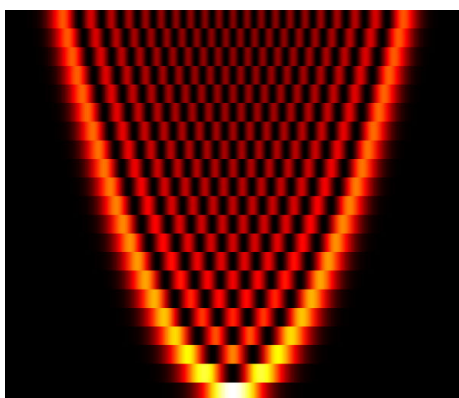
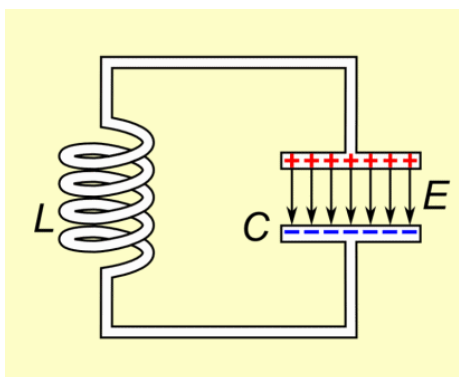
- LC回路

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \sim I_0 \sin(\omega t)$$

$$V(t) = L \frac{dI}{dt} = V_0 \cos(\omega t + \varphi) \sim V_0 \cos(\omega t)$$

$$E = \frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} C V^2 = \frac{L I_0^2}{2} \sin^2(\omega t) + \frac{C V_0^2}{2} \cos^2(\omega t)$$

量子LC回路



$$E = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\Phi^2}{2L} + \frac{Q^2}{2C}$$

- 因此我们可以写下LC回路的哈密顿量

$$\hat{H} = \frac{\hat{\Phi}^2}{2L} + \frac{\hat{Q}^2}{2C}$$

- 对照简谐振子，引入产生消灭算符

$$\hat{a}^\dagger = -i \frac{1}{\sqrt{2C\hbar\omega}} \hat{Q} + \frac{1}{\sqrt{2L\hbar\omega}} \hat{\Phi} \quad \hat{a} = i \frac{1}{\sqrt{2C\hbar\omega}} \hat{Q} + \frac{1}{\sqrt{2L\hbar\omega}} \hat{\Phi}$$

- 所以

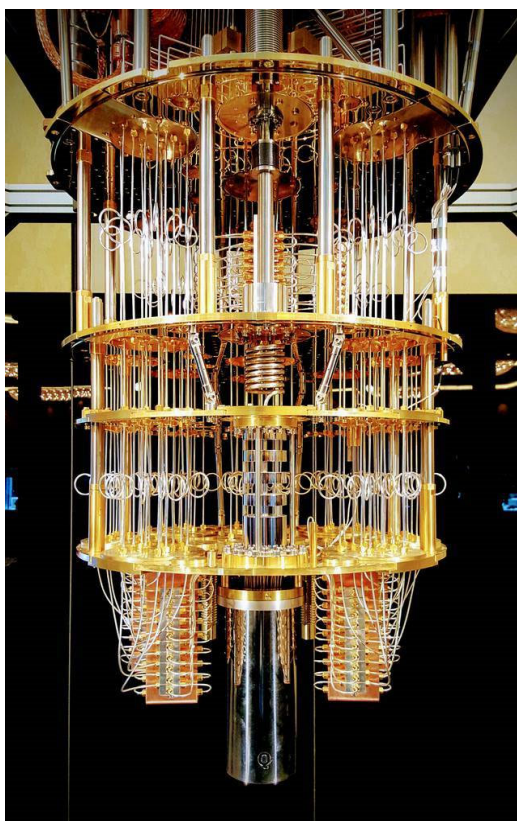
$$\hat{H} = \hbar\omega \left\{ \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right\}$$

- 算符之间满足如下对易关系

$$[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$$

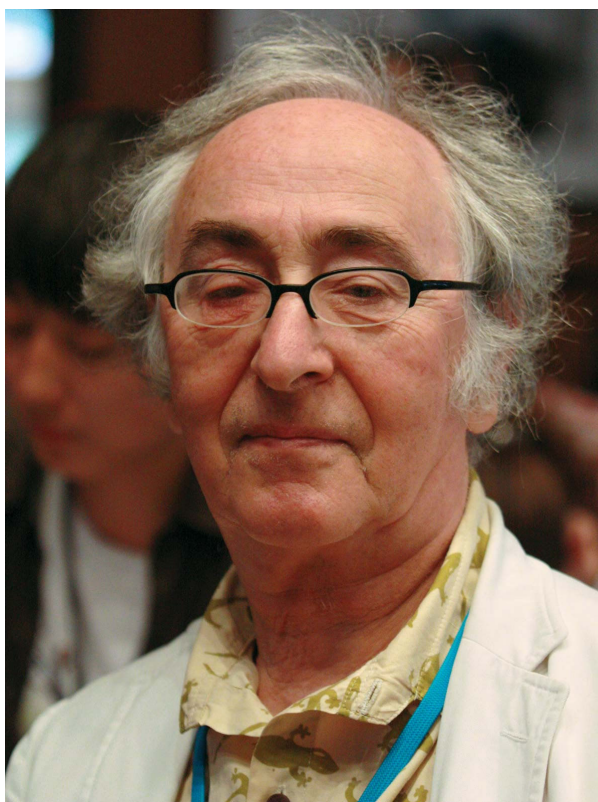
$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

量子电路的困难



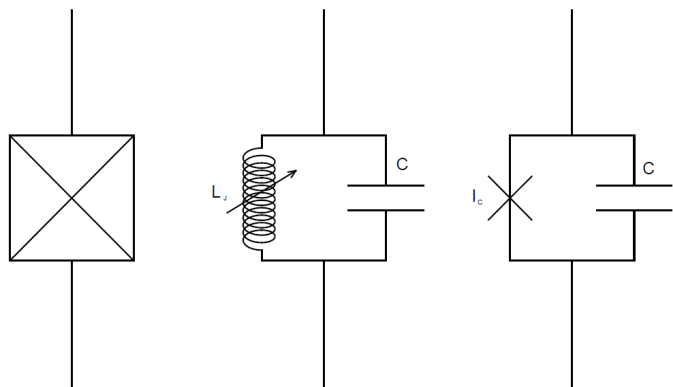
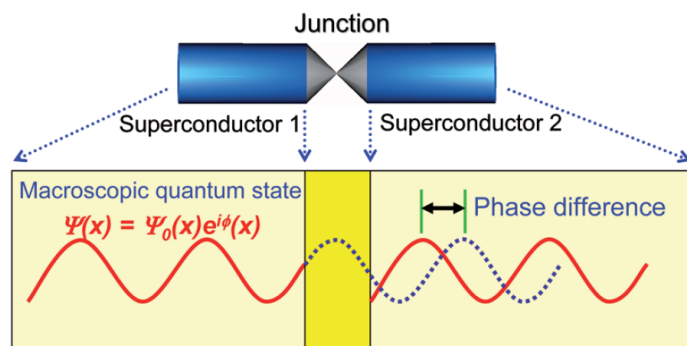
- 当前的计算机硬件技术基于传统电路，获得了巨大的商业和技术成功。其中典型的电子元件包括电阻、电容、电感、二极管、三极管、场效应管等。
- 很自然地，人们希望在量子计算机中复制传统计算机的成功先例，基于电路的量子计算被普遍认为是一个重要的研究方向。但量子电路的成功，面临一系列的技术困难。正是对这些困难的不断挑战和探索，产生了基于超导电路的量子计算机原型。
- 传统的LC回路可以获得能量量子化的结果。但传统电路中的电阻带来了能量的损耗，会引入量子退相干。超导电路理论上电阻为零，可以克服这个困难。
- LC回路具有线性的多能级结构。理想的量子比特需要二能级的结构，并希望利用非线性电路元件，但必须避免能量损耗。超导量子计算使用了一种称为约瑟夫森结的器件，这是当前唯一被发现的、无损的非线性电路元件。

约瑟夫森结(1)



- 约瑟夫森效应是宏观量子效应的一种体现。它以英国物理学家布赖恩·约瑟夫森（Brian D. Josephson）命名，这位物理学家在1962年提出了弱连结上的电流与电压关系式。
- 在量子力学中，非超导状态的电子可以借由量子隧穿效应流过绝缘层。约瑟夫森首次预测了超导状态下库柏对的隧穿现象，因此获得了1973年诺贝尔物理学奖。
- 约瑟夫森结在量子线路当中有许多重要的应用，例如超导量子干涉仪（SQUIDs）、超导量子计算、快速单磁通量子（RSFQ）等。美国国家标准技术研究所对于1伏特的标准是由19,000个串连的约瑟夫森结阵列所达成的。

约瑟夫森结(2)



约瑟夫森结的符号

- 约瑟夫森结由间隔一段绝缘势垒的两段超导体构成。势垒的宽度在纳米量级。约瑟夫森结的非线性主要体现在电子形成的库伯对（Cooper pair）只能成对地通过结区。如果令通过结区的库伯对数量为 $N(t)$ ，则 $Q_J(t) = -2eN(t)$ 。
- 通过一段传统电子元件比如电感的电流和磁通量的关系为 $I(t) = \Phi(t)/L$ ，而在约瑟夫森结中

$$I(t) = I_0 \sin \left[\frac{2e}{\hbar} \Phi_J(t) \right] = I_0 \sin \left[2\pi \frac{\Phi_J(t)}{\Phi_0} \right]$$

其中 $\Phi_0 = h/2e$ 是量子化的超导磁通量单元，结区引入的

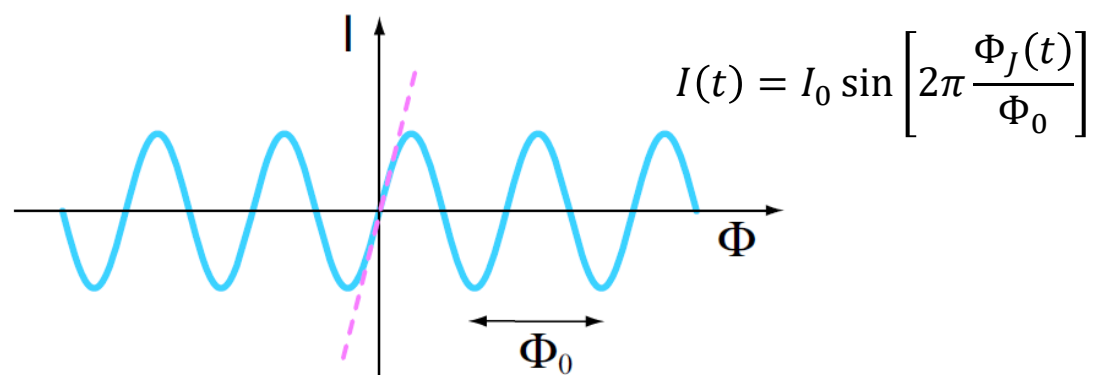
相位为 $\delta = 2\pi \frac{\Phi_J(t)}{\Phi_0}$ 。

- 结区储存的能量为

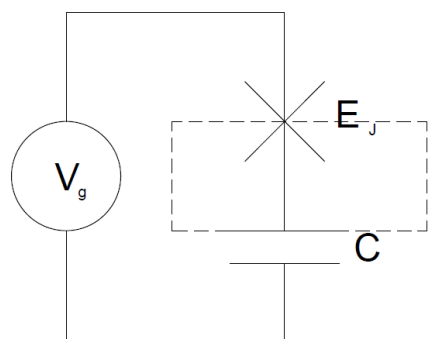
$$E(t) = -E_J \cos \left[2\pi \frac{\Phi_J(t)}{\Phi_0} \right]$$

约瑟夫森结(3)

- 约瑟夫森结的非线性主要体现在电流和磁通的关系上。下图中的虚线代表了传统的电感元件，电流和磁通是线性关系，但在约瑟夫森结中，由于库伯对只能分立地、量子化地通过结区，因此电流和磁通呈现周期性。



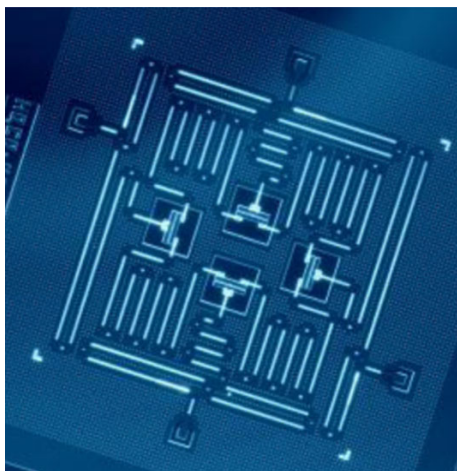
超导电荷量子比特(1)



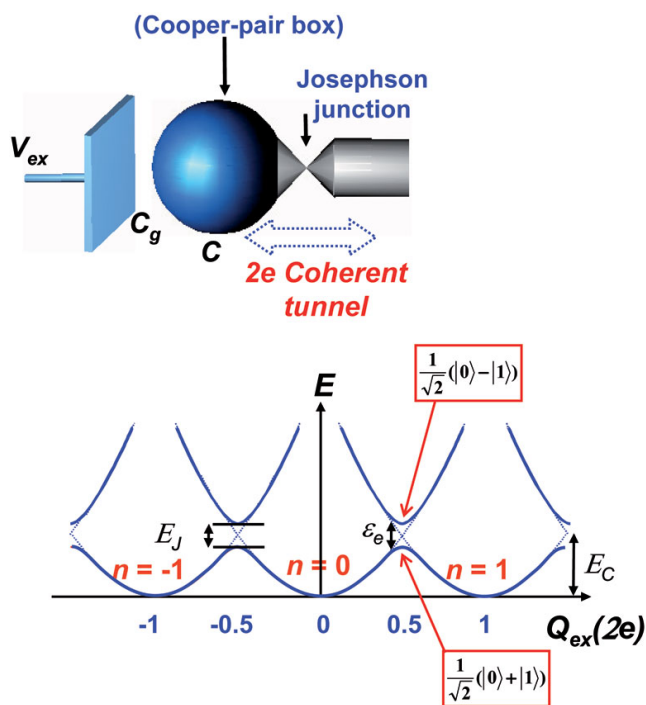
- 超导量子比特具有毫秒级的退相干时间，以及可扩展的能力。最重要的是超导量子比特是一种宏观量子比特，器件特征尺寸在微米量级，可以使用微纳加工工艺制作。
- 左上图是一种典型的超导量子比特：超导电荷量子比特（Charge qubit）。虚线部分也被称为库伯对盒（Cooper pair box），它由一个约瑟夫森结和一段超导线组成。库伯对盒同一个电容器串联起来。电荷量子比特的哈密顿量可以写为

$$\hat{H} = E_c (\hat{N} - N_g)^2 - E_J \cos \hat{\phi}$$

- 左下图是一个由四个Transmon量子比特组成的器件，Transmon是一种实用的电荷量子比特。



超导电荷量子比特(2)



- 超导电荷量子比特工作在 $E_C \gg E_J$ 的区域，由于能量的非线性，基态能级的劈裂产生了特定的二能级区域。

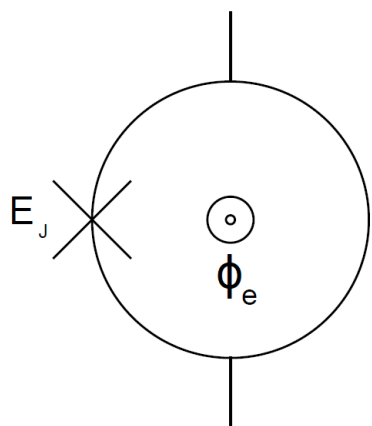
- 当 $N_g = \frac{1}{2}$ ， $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态具有相同的能量，它们去简并的结果产生了一个二能级系统，即

$$|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\hat{H} = E_C (\hat{N} - N_g)^2 - E_J \cos \hat{\phi}$$

超导磁通量子比特(1)

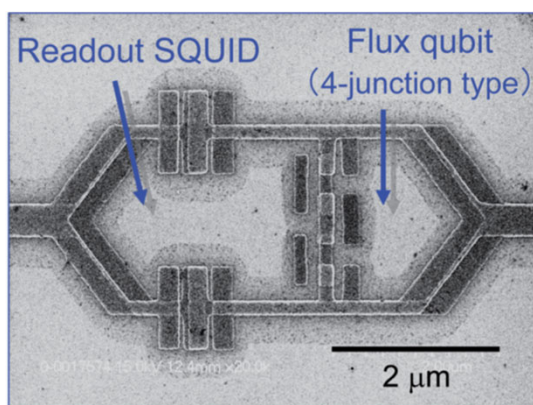


- 超导磁通量子比特由一个电感线圈和线圈上的一个约瑟夫森结组成。这种器件也被称为超导量子干涉器（Superconducting quantum interference device, SQUID）。在磁通量子比特中，磁通量被量子化了。

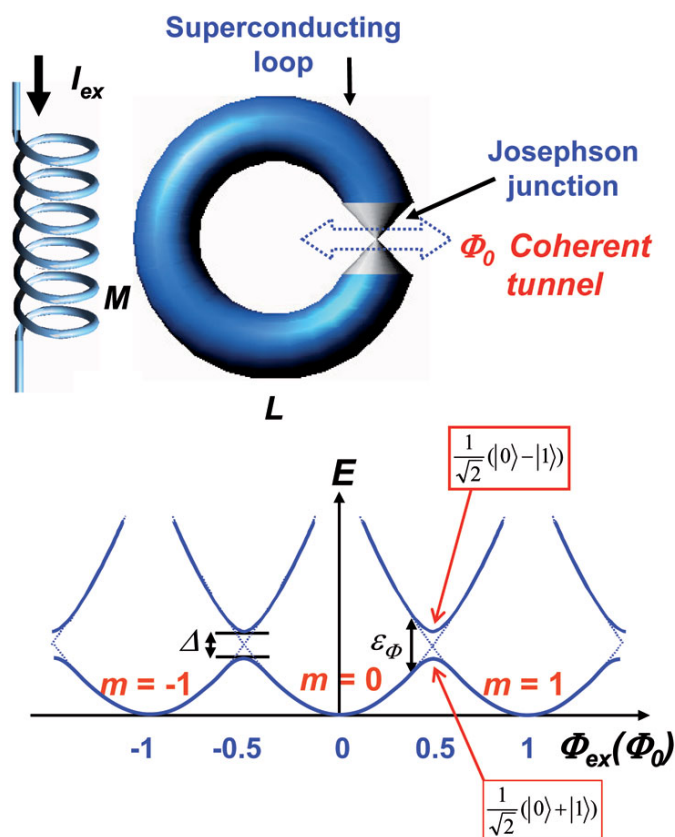
- 超导磁通量子比特的哈密顿量包括磁场能量和约瑟夫森结能量

$$H = \frac{Q^2}{2C_J} + \frac{(\Phi - \Phi_e)^2}{2L} - E_J \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)$$

- 左下图是一个包含4个约瑟夫森结的超导磁通量子比特的电镜照片。



超导磁通量子比特(2)

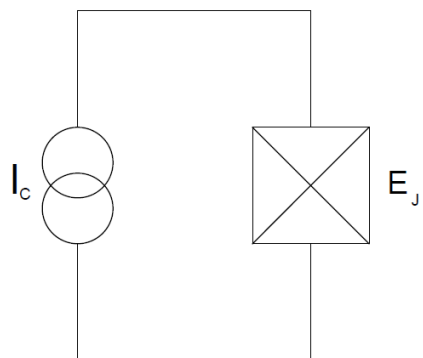


- 超导磁通量子比特工作在 $E_C \ll E_J$ 的区域，由于能量的非线性，基态能级的劈裂产生了特定的二能级区域。
- 当 $\Phi_e = \frac{1}{2}\Phi_0$ ， $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态具有相同的能量，它们去简并的结果产生了一个二能级系统，即

$$|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle)$$

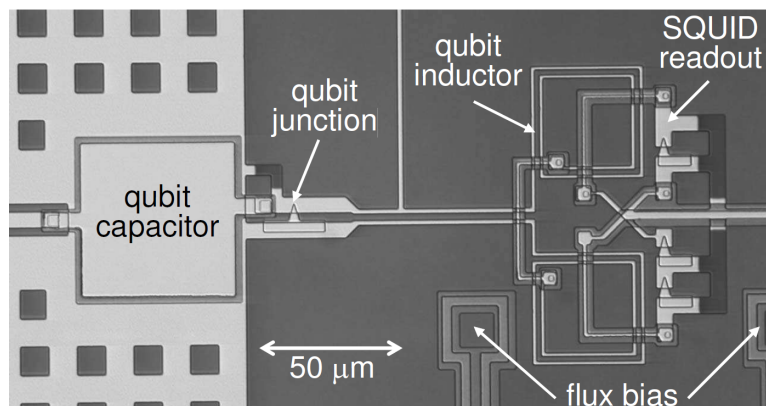
$$|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle)$$

超导相位量子比特



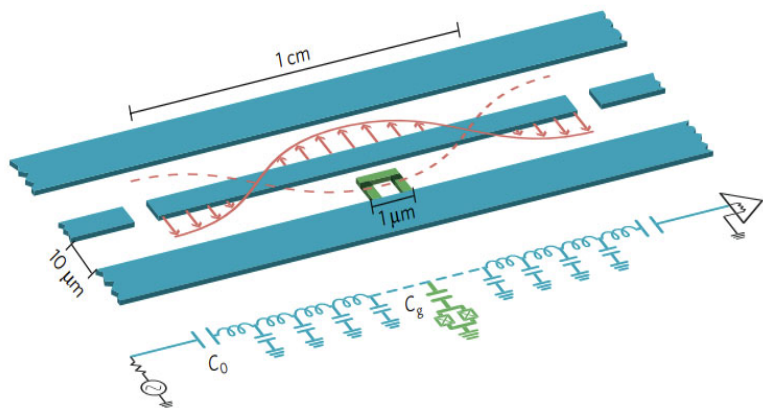
- 超导相位量子比特由一个电流源和一个约瑟夫森结组成。在这种器件中，相位被量子化了。
- 超导相位量子比特的哈密顿量由下式给出

$$H = \frac{Q^2}{2C} - I \frac{\Phi_0}{2\pi} \delta - E_J \cos \delta$$

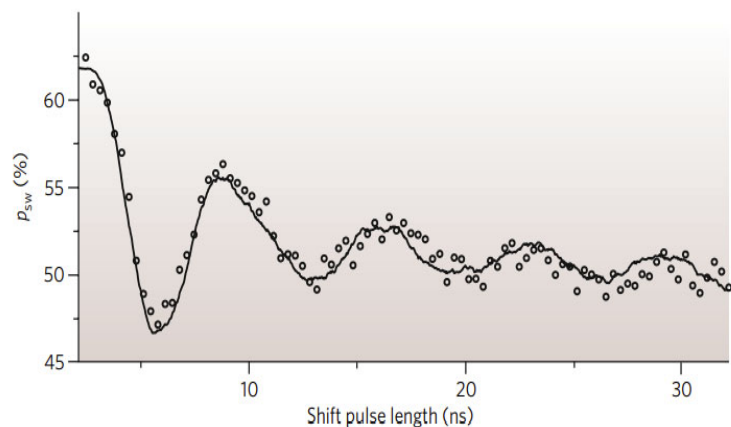


- 左下图是一个包含SQUID读出电路的超导相位量子比特的电镜照片。

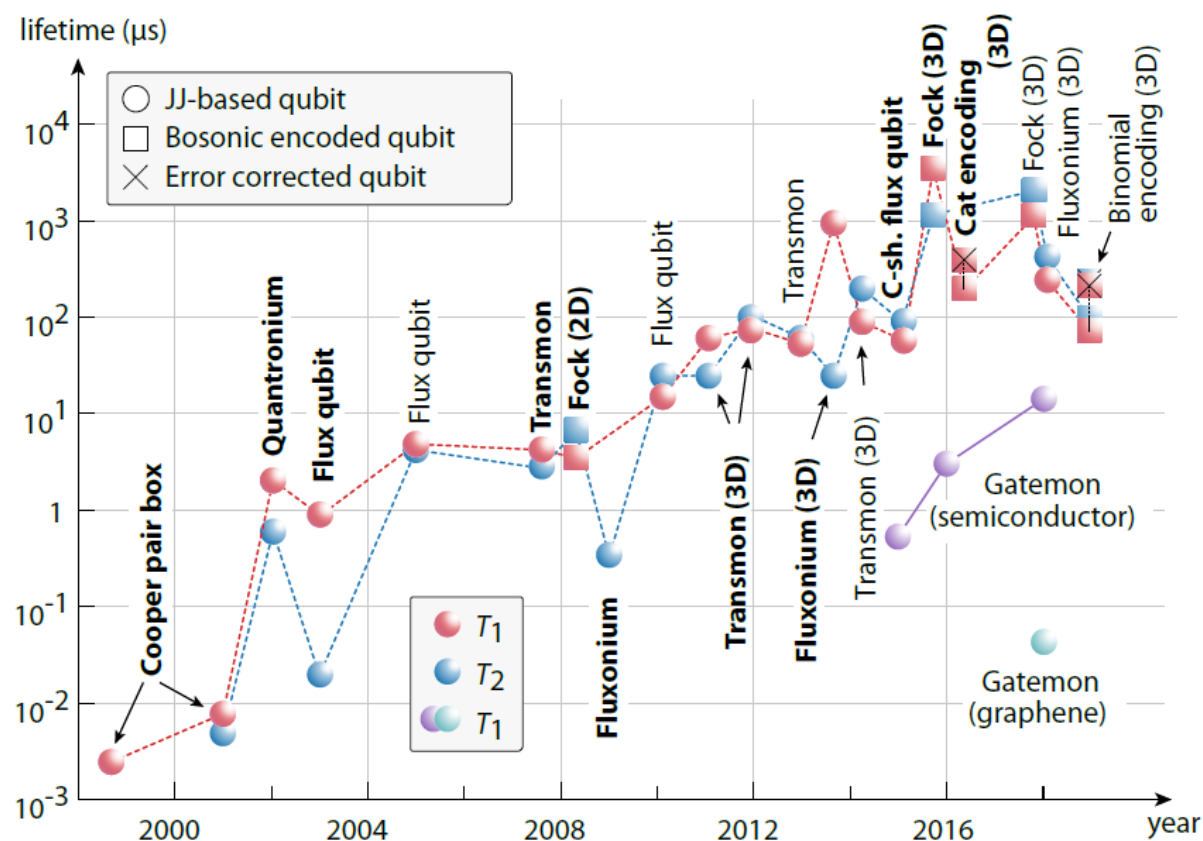
电路量子电动力学(Circuit-QED)



- 考虑到微波光腔和电荷量子比特的耦合，可以设计类比于腔量子电动力学（Cavity-QED）系统的电路量子电动力学（Circuit-QED）系统。
- 左上图中，电路量子电动力学系统由基于微带腔的微波光腔和电荷量子比特组成。两者的耦合强度可以处于强耦合或者弱耦合区域。
- 左下图显示了微波光腔中的Rabi振荡现象。



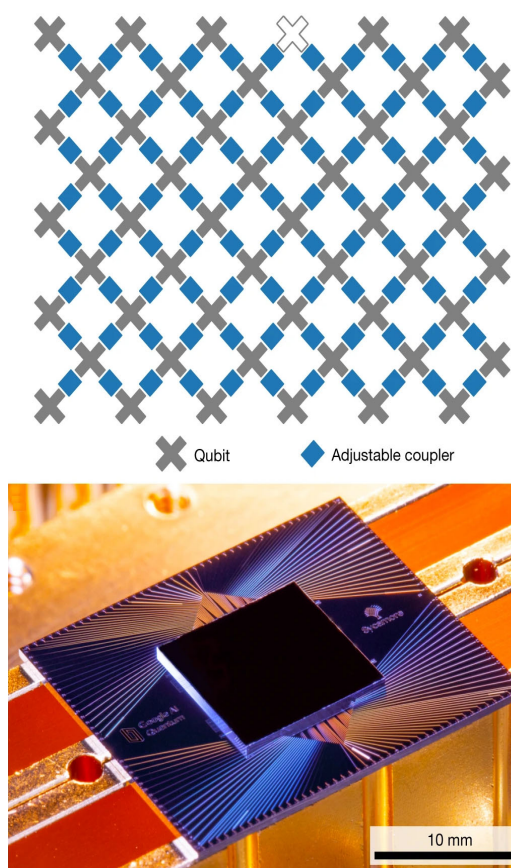
量子退相干



量子计算

- 我们在量子算法的课堂上给出了各类量子比特的退相干时间常数，超导量子比特的退相干时间在早期并不具备优势。
- 但是，近年来超导量子比特的退相干时间得到了大幅度的改进，其中磁通量子比特的退相干时间在2017年左右已经达到了 10^{-4} 秒，也就是100微秒的量级。
- 退相干时间的改善大大促进了超导量子计算机的发展。

量子霸权(Quantum supremacy)



- 量子霸权（Quantum Supremacy），或称量子优越性，是指用量子计算机解决传统计算机实际上解决不了的问题，问题本身未必需要有实际应用。量子优势（Quantum Advantage）则是指量子计算机在解决实际问题中能比传统计算机更快而带来的优势。从算法角度来说，这通常代表量子算法相对最佳传统算法的加速是超多项式的。
- 2019年9月，NASA网站上短暂出现的一篇文章报导，Google已用54个量子比特的阵列（其中53个功能正常）达到了量子优越性，它们在200秒内运行一系列操作，相同运算将花费超级电脑大约10000年才能完成。2019年10月21日IBM发文指出，如果使用Summit超级电脑的硬盘和计算资源，估计可以将10,000年时间降低至2.5天。
- 2019年10月23日《自然》刊出Google实现量子优越性的学术论文。
- 2020年12月4日，中国科学技术大学宣布该校潘建伟等人成功构建76个光子的量子计算原型机“九章”。首次在基于光子的量子计算原型机中实现了量子霸权。

参考文献

- 约瑟夫森结和超导量子计算主要参考：
 - Amaia Irastorza Gabilondo, Quantum Computation With Superconductors (2016).
 - M.H. Devoret, A. Wallraff, and J.M. Martinis, Superconducting Qubits: A Short Review, (2004).



第八章小结

- 量子计算的基本数据单元是量子比特。量子比特不是0或者1，而是0态和1态的量子叠加 $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ ，其中 $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ 。量子计算机使用量子逻辑门所组成的量子回路。三种最为常见单量子比特门分别是X门、Z门和H门。最常见的双量子比特门是CNOT门。
- 量子计算机根据其应用范围主要分为三种类型：量子退火、量子模拟和通用量子计算。量子算法是在量子计算机上运行实际模型时使用的算法，是一个有限指令序列。至今为止最著名的量子算法是Peter Shor提出的量子分解算法，主要用于质因数分解。量子计算机面临的主要挑战之一是退相干和量子纠错。
- 双光子干涉是两个全同光子从两侧入射50:50分束器时发生聚束的现象，也被称为双光子聚束现象，或者Hong-Ou-Mandel实验。2000年，Knill、Laflamme和Milburn三位科学家证明了仅用线性光学工具就可以创造出通用量子计算机。
- 量子LC回路是超导量子计算的基础。超导量子计算使用了一种称为约瑟夫森结的器件，这是当前唯一被发现的、无损的非线性电路元件。量子霸权（Quantum Supremacy），或称量子优越性，是指用量子计算机解决传统计算机实际上解决不了的问题，问题本身未必需要有实际应用。

