

量子信息基础

第四章：量子信息论

金潮渊

浙江大学信息与电子工程学院



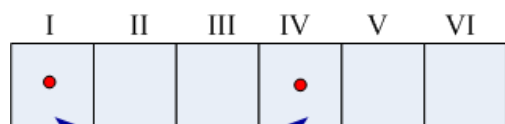
C4-2 香农熵和冯诺依曼熵



课程回顾

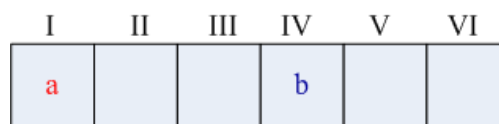
量子统计与微观态：

- 量子力学认为：全同粒子具有不可区分性，因此双粒子哈密顿量具有交换不变性。在哈密顿量交换不变的前提下，双粒子波函数分为对称和反对称两种情况，分别对应于玻色子和费米子。
- 微观态计数方法的不同，是经典统计和量子统计的重大区别。
- 等概率原理：处于统计平衡状态的孤立系统，其所有可能出现的微观态出现的概率是相等的。
- 热力学概率最大的分子分布方式，即最概然分布，为粒子均匀地分布于它所占据的空间内，即系统熵处于极大值的状态。

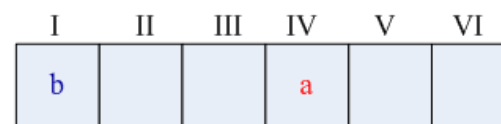


两粒子互换

量子统计



(a)



(b)

经典统计

量子信息论

3



浙江大学

熵的物理意义(经典统计)



- 在热力学中，孤立系统发生的任何变化，是朝熵增加的方向（熵增原理），系统趋向平衡态，熵趋于极大。
- 从统计物理的观点看，平衡态对应于热力学概率最大的宏观态，粒子的分布为最概然分布。
- 玻耳兹曼于1877年在其论文中，运用概率方法进行推算，把熵 S 与热力学概率 W 联系起来，从而得出热力学第二定律是关于概率定律的重要结论。1900年，物理学家普朗克将玻耳兹曼的熵与热力学概率的关系简写为：

$$S = k \ln W$$

- 玻耳兹曼通过熵与热力学概率的联系，直接沟通了热力学系统的宏观与微观之间的关联，并对热力学第二定律进行了微观解释。玻耳兹曼通过建立熵与几率的联系，不仅把熵与分子运动的无序程度联系起来，而且使热力学第二定律具有统计上的可靠性。

熵增原理

- 一个系统的内能“退化”，系统中的原子则更加无序，熵增加。
- 系统混乱度可由熵来描述，玻耳兹曼认为 $S = k \cdot \log W$ ，其中 k 是玻耳兹曼常数， W 是热力学概率，即一种宏观态所包含微观态的数目。
- 玻耳兹曼认为，当一个系统受到外界扰动（受热或振动），系统会从低概率状态趋向高概率状态，直至平衡态；在平衡态，系统处于最概然状态，此时熵极大。
- 一种可能性，容器中的气体分子全都跑到一个角落，这种概率极低，但非零。只要熵的概率诠释正确，上述可能性永远存在，即涨落现象。



熵增原理的统计解释(经典统计)

- 熵增原理：孤立系统的熵永远增加。
- 气体自由膨胀熵增加，从统计物理的角度看，是一个系统自发地由小概率的状态趋向大概率的状态，最终趋于平衡态，此时熵极大。熵的增加也可以看出系统的有序程度降低，无序程度提高的过程，熵增原理表明，孤立系统趋向无序状态，即均匀分布的状态。
- 系统的熵与其出现的热力学概率对应，熵的增加与系统自发趋向最概然状态相对应。这样热力学第二定律，即熵增原理，可以看成统计性质的规律，宏观上的不可逆性也就成为统计性质的结论。
- 理论上，孤立系统熵的减少并非不可能，只是概率极低，实际上也就是不可能。



香农熵

- 克劳德·香农通过玻尔兹曼的热力学熵来类比信息熵。只不过在信息论中不需要使用玻尔兹曼常数（想一想为什么？）。

$$S(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv - \sum_x \underline{p_x} \log \underline{p_x}$$

p_x 对应于信息发生的几率。 \log 缺省为 \log_2 。

例1. 抛硬币，得到硬币正反面的概率都为 $1/2$ 。一枚硬币在脱手之后落地之前的信息熵为

$$S = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = 1$$

落地之后的信息熵为

$$S = -1 \log 1 - 0 \log 0 = 0$$

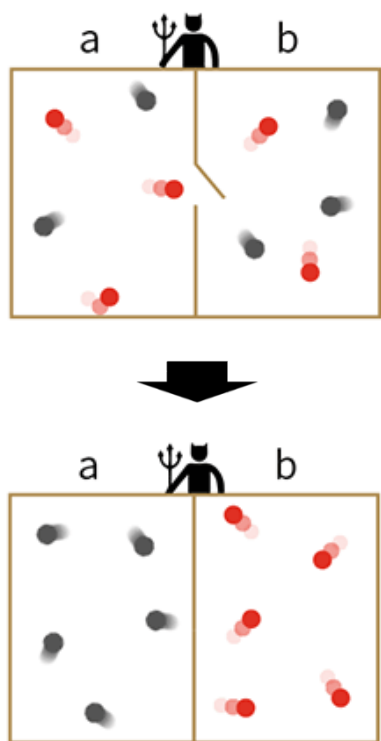


思想实验

- 思想实验是指使用想象力去进行的实验，所做的都是在现实中无法做到（或现实未做到）的实验。
- 历史上著名的物理学思想实验
 - a. 伽利略重力实验
 - b. 薛定谔猫
 - c. 麦克斯韦妖
 - d. 爱因斯坦电梯实验
 - e. 双生子佯谬
 - f.

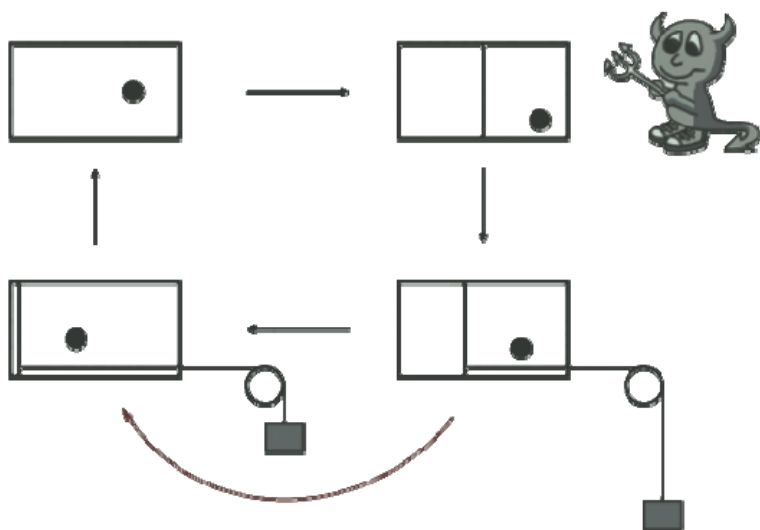


麦克斯韦妖



- 麦克斯韦妖（Maxwell's demon），是在物理学中假想的妖，能探测并控制单个分子的运动。
- 妖控制的一扇小门可以选择性的将速度较快的分子放入一格，而较慢的分子放入另一格。这样，其中的一格就会比另外一格温度高，可以利用此温差，驱动热机做功。这是第二类永动机的一个范例。

信息熵



- 利奥·西拉德 (Leo Szilard) 认为麦克斯韦妖在测量分子处于左边还是右边的过程（获取信息的过程）中会消耗能量，从而导致整体的熵的增加。

$$w = \int_{V/2}^V P dV = \int_{V/2}^V \frac{k_B T}{V} dV = k_B T \ln 2$$

- 兰道尔原理：经典计算机要擦除一个经典比特，其所消耗的最小能量是 $k_B T \ln 2$ 。

二进制熵

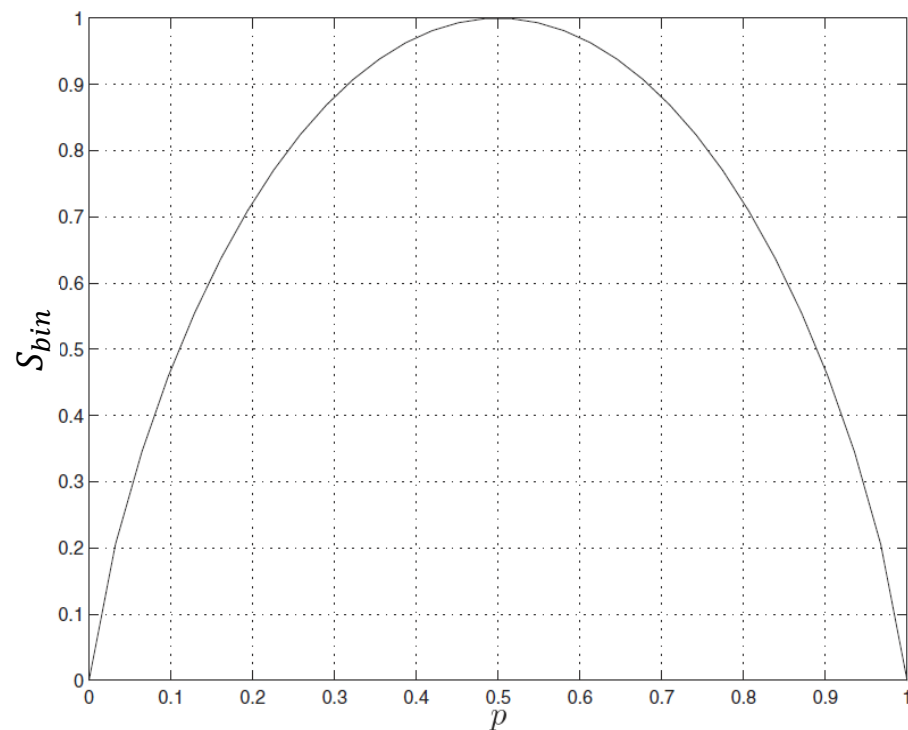
- 对于经典比特 $\{0,1\}$ ，可以定义所谓的二进制熵

$$S_{bin}(p) \equiv -p \log p - (1-p) \log(1-p)$$

从右图可以观察到，经典比特的不确定度在 $p = 0.5$ 时达到极值。

例2. 随机抛两枚不同硬币A和B。选择硬币A的概率为 q ，得到硬币A正面的概率为 p_A ；选择硬币B的概率为 $(1-q)$ ，得到硬币B正面的概率为 p_B 。如果只告诉硬币的正反面，这时候你得到体系的信息不确定度是多少？

$$S(qp_A + (1-q)p_B) \geq qS(p_A) + (1-q)S(p_B)$$



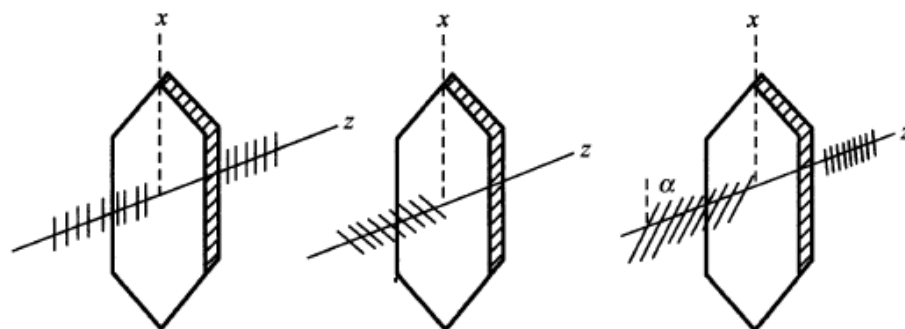
量子态的叠加

如果我们考虑一个光学的线性偏振片。在量子力学里，对于单光子，究竟是通过偏振片还是被偏振片吸收，只能给予几率性的回答。至于通过晶片的过程中，单光子怎样改变了偏振态，量子力学理论并不能回答。从量子力学看来，应该按照态叠加原理来理解这个实验：即一个偏振方向与晶轴成 α 角的光子，部分地处于沿晶轴方向偏振的态 ψ_x ，部分地处在与晶轴方向垂直的态 ψ_y 。两个量子态的线性叠加即为：

$$\psi_\alpha = \cos \alpha \cdot \psi_x + \sin \alpha \cdot \psi_y$$

用狄拉克符号表示为：

$$|\psi_\alpha\rangle = \cos \alpha |\psi_x\rangle + \sin \alpha |\psi_y\rangle$$



量子信息论

量子比特

- 传统计算机的信息处理依赖于比特（1或者0），是信息量的最小单位。相对应地，量子计算机的逻辑运算依赖于量子比特（quantum bits, qubits）。
- 量子比特不是1或者0，而是1态和0态的量子叠加 $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ ，其中 $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ 。一般情形下，我们要求 $\langle 0|1\rangle = 0$ 。
- 常见的量子比特有光子偏振、核自旋、电子自旋、二能级原子、约瑟夫森结、超导线圈等等。

Quantum system	Physical property	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Photon	Linear polarization	Horizontal	Vertical
Photon	Circular polarization	Left	Right
Nucleus	Spin	Up	Down
Electron	Spin	Up	Down
Two-level atom	Excitation state	Ground state	Excited state
Josephson junction	Electric charge	N Cooper pairs	$N + 1$ Cooper pairs
Superconducting loop	Magnetic flux	Up	Down



矩阵表示

- 量子比特也可以用矩阵的形式来表示

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{on the basis of}} \begin{matrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{matrix}$$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 定义量子比特之间的操作算符（矩阵）

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

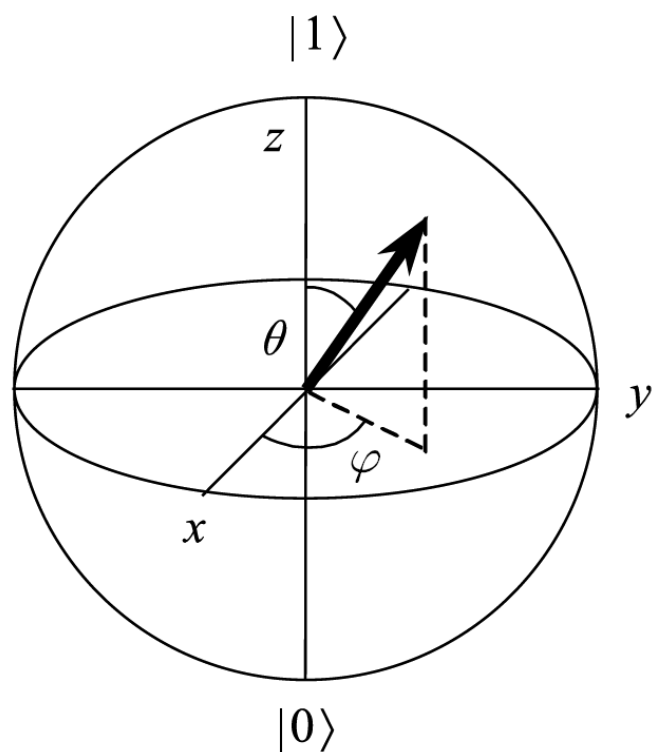
$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

X代表比特翻转；Z代表相位翻转。这三个矩阵又被称为泡利矩阵。



布洛赫球



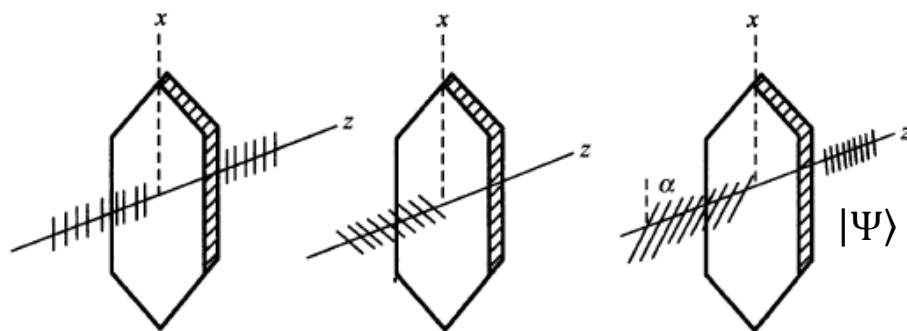
- 量子比特也可以通过所谓的布洛赫矢量来表示，即对于 $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ ，相应的布洛赫矢量系数为

$$c_0 = \sin(\theta/2)$$
$$c_1 = e^{i\varphi} \cos(\theta/2)$$

- 不难验证上式中的 φ 和 θ 对应于极坐标系中的方位角。 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 分别代表布洛赫球面上的北极点和南极点，即 $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ 。

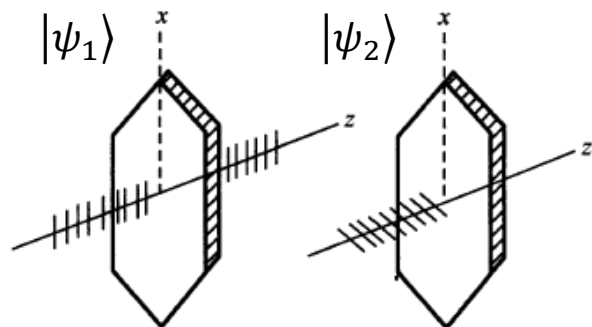
纯态

- 到现在为止，我们考虑的量子态都是所谓的“纯态”。这里我们回到光子偏振态的实验来理解纯态这个概念。
- 如果我们考虑一个光学的线性偏振片。从量子力学看来，应该按照态叠加原理来理解这个实验：即一个偏振方向与晶轴成 α 角的光子，部分地处于沿晶轴方向偏振的态 ψ_x ，部分地处在与晶轴方向垂直的态 ψ_y 。两个量子态的线性叠加即为 $|\Psi\rangle = \cos \alpha |\psi_x\rangle + \sin \alpha |\psi_y\rangle$ 。光子处在 $|\psi_x\rangle$ 态和 $|\psi_y\rangle$ 态上的几率分别为 $\cos^2 \alpha$ 和 $\sin^2 \alpha$ 。在这种情况下我们一定能找到一种偏振片，100%的光子都可以通过它。这种能够用波函数线性叠加来描述的态叫做纯态。



混态

- 如果我们假设在光子偏振态的实验中，我们使用的是两束来自于不同激光器的光子。其中一束激光处于 x 偏振上，另一束激光处于 y 偏振上。或者一般地讲，处于任意两种不同的偏振，即 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的组合上。在这种情况下，我们不能找到一种偏振片，100%的光子都可以通过它。这个例子等于是告诉我们，某些量子态并不能使用简单的波函数线性叠加来表示，而是波函数几率（纯态）和经典概率的混合。比如在这个例子里，如果我们使用 $c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$ 的形式，那我们必然可以找到一种偏振片，100%的光子都可以通过它。
- 这种不能简单地使用波函数线性叠加而必须部分地借助于经典概率来描述的态叫做混态。



混态的密度算符和密度矩阵

- 对于混态波函数 $|\Psi_k\rangle$ （注意不能简单地线性叠加）。我们可以定义算符 $\langle A \rangle = \sum_k p_k \langle \Psi_k | \hat{A} | \Psi_k \rangle$ ，其中 p_k 是混态处于 $|\Psi_k\rangle$ 上的经典几率。这时我们定义密度算符：

$$\hat{\rho} \equiv \sum_k p_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k| \quad \text{其中 } 0 \leq p_k \leq 1 \text{ 和 } \sum_k p_k = 1$$

- 如果考虑一组正交归一的基函数 $\{|e_i\rangle\}$ ，在这组基函数的表象中，定义混态的密度矩阵

$$\rho_{ij} = \sum_k p_k \langle e_i | \Psi_k \rangle \langle \Psi_k | e_j \rangle$$

这里我们会有

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_i \rho_{ii} = 1$$

相当于前面定义的传统几率 p 。



冯诺依曼熵(1)

- 从传统比特香农熵的概念出发，很自然地我们希望知道量子态熵的定义。一般可以定义量子态的冯诺依曼熵

$$S(\rho) \equiv - \sum \text{tr}(\rho \log \rho)$$

ρ 对应于某个纯态发生的几率。

例3. 考虑到两个来自不同光源的单光子。两个光源的强度都为1/2。

$$S = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = 1$$

如果单光子来自同一光源，或者两个光源中的一个不发光

$$S = -1 \log 1 - 0 \log 0 = 0$$



冯诺依曼熵(2)

- 如果 λ_x 是 ρ 的本征根，冯诺依曼熵蜕化成香浓熵的形式

$$S(\rho) \equiv - \sum_x \lambda_x \log \lambda_x$$



参考文献

- 熵增原理主要参考：
 - 仲顺安等，理论物理导论（第3版），北京理工大学出版社。第13-5，13-6小节的内容。
- 香农熵与冯诺依曼熵主要参考：
 - Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information (10th anniversary edition), Cambridge University Press (2016). 第11章。
 - Peter Kok and Brendon W. Lovett, Introduction to Optical Quantum Information Processing, Cambridge University Press (2010). 第2章。

