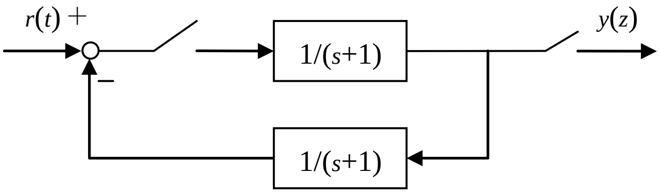
夏学期第五周作业：

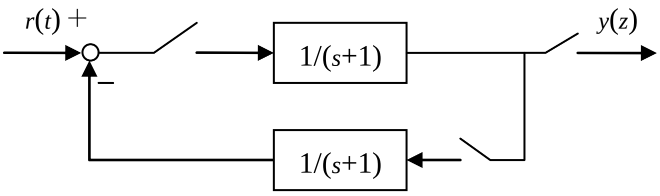
P.317-321 第七章 线性离散时间控制系统分析与综合 习题七

7-26; 7-27; 7-28; **附加题**

7-26 试求图 7-62 所示两个系统的位置偏差系数和稳态误差，其中 R(t)=u(t),T=1s



(a)



(b)

图 7-62 题 7-26 的离散系统结构图

解：

对（a）有：

$$\phi(z)=\frac{G(z)}{1+GH(z)} \qquad \phi_e(z)=\frac{1}{1+GH(z)}$$

$$\because G(s)H(s)=\frac{1}{(S+1)^2}$$

$$K_p=\lim_{z\to1}GH(z)=\lim_{z\to1}Z[\frac{1}{(s+1)^2}]=\lim_{z\to1}\frac{Te^{-T}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2}$$

$$=\frac{Te^{-T}}{(1-e^{-T})^2}=\frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}=0.921$$

又 R(t)= u(t), $\therefore e(\infty)=\frac{1}{1+K_p}=0.52$

对（b）有：

$\phi(z)=\dfrac{G(z)}{1+G(z)H(z)}$　　　$\phi_e(z)=\dfrac{1}{1+G(z)H(z)}$

$\because G(s)H(s)=\dfrac{1}{(S+1)^2}$ ，

$\therefore G(z)H(z)=Z[G(s)]Z[H(s)]=Z[\dfrac{1}{(S+1)}]Z[\dfrac{1}{(S+1)}]=\{\dfrac{z}{(z-e^{-1})}\}^2=\dfrac{z^2}{(z-e^{-1})^2}$

$K_p=\lim\limits_{z\to1}G(z)H(z)=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{z^2}{(z-e^{-1})^2}=(\dfrac{1}{1-e^{-1}})^2=2.50$

又 R(t)= u(t),　　∴ $e(\infty)=\dfrac{1}{1+K_p}=\dfrac{(e-1)^2}{(e-1)^2+e^2}=0.286$

7-27 已知系统的闭环传递函数 $\Phi_B(z)=\dfrac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$；试求：系统在 $u(t),t,\dfrac{t^2}{2}$ 输入时的稳态误差。

解：误差传递函数为

$$\Phi_e(z)=1-\Phi_B(z)=\frac{z^2-1.368z+0.368}{z^2-z+0.632}$$

特征方程：$\Delta(z)=z^2-z+0.632$

$$z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot0.632}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-1.528}}{2}=0.5\pm j0.618$$

$|z_{1,2}|<1$

由上知，系统是稳定的。可以运用终值定理。

不同输入的稳态误差

(1)单位阶跃　　$e_{ss}=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{z^2-1.368z+0.368}{z^2-z+0.632}\cdot\dfrac{z}{z-1}=0$

(2)单位速度　　$e_{ss}=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{z^2-1.368z+0.368}{z^2-z+0.632}\cdot\dfrac{z}{(z-1)^2}$

$$=\lim_{z\to1}\left\{\frac{\dfrac{d}{dz}(z^2-1.368z+0.368)z}{\dfrac{d}{dz}(z^2-z+0.632)(z-1)}\right\}=\lim_{z\to1}\frac{3z^2-2.736z+0.368}{3z^2-4z+1.632}=1$$

(3)单位加速度　　$e_{ss}=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{z^2-1.368z+0.368}{2(z^2-z+0.632)}\cdot\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

$$=\lim_{z\to1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{d}{dz}[(z^2-1.368z+0.368)z(z+1)]}{[(z^2-z+0.632)(z-1)^2]}\right\}=\infty$$

7-28 系统结构图如图 7-63 所示，K＝10，T＝0.2s， $x(t)=1(t)+t+t^2/2, G_h(s)$ 为零阶保持器，试计算系统的稳态误差 $e(\infty)$ (运用线性系统的叠加原理)。

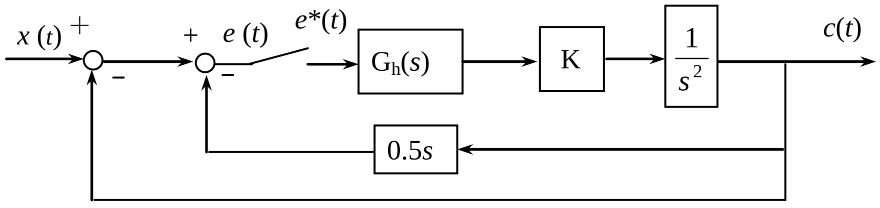


图 7-63　题 7-28 闭环系统图

解：方法一：用终值定理直接求

由图可看出：$e(t)=x(t)-c(t)-0.5sc(t)=r(t)-(1+0.5s)c(t)$

故原图可等效画为

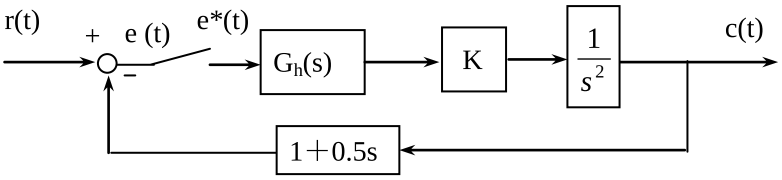


图 6-27　的等效图

于是，易知系统的开环脉冲传递函数

$$G(z)=Z\{G_h(s)\cdot\frac{K(1+0.5s)}{s^2}\}=Z[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{10(1+0.5s)}{s^2}]$$

$$=10(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s^3}+\frac{0.5}{s^2}+\frac{0}{s}]=(1-z^{-1})[\frac{5T^2z(z+1)}{(z-1)^3}+\frac{5Tz}{(z-1)^2}]$$

令 T＝0.2 代入，化简上式，得：　$G(z)=\dfrac{1.2z-0.8}{(z-1)^2}$

系统误差脉冲传递函数为：$\Phi_e(z)=\dfrac{1}{1+G(z)}$，因其所有极点都位于单位圆内，故满足终值定理的条件，可以使用终值定理得到其稳态值

又因系统的输入 $x(t)=1(t)+t+t^2/2$，其 Z 变换为：

$$X(z)=Z[1(t)+t+t^2/2]=\frac{z}{z-1}+\frac{Tz}{(z-1)^2}+\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

故：$e(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\lim\limits_{z\to1}(1-z^{-1})E(z)=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{(z-1)X(z)}{z[1+G(z)]}=\dfrac{T^2}{0.4}=\dfrac{0.04}{0.4}=0.1$

方法二：用静态误差系数计算

由系统开环脉冲传递函数知，系统为 2 型，故可完全无偏差地跟踪阶跃及斜坡输入信号，仅在跟踪抛物线输入信号时有误差

$$K_v \equiv \frac{1}{T^2}\lim_{z\to 1}\left[\frac{(z-1)^2}{z^2}G(z)\right]=\frac{1}{T^2}\lim_{z\to 1}\left[\frac{(z-1)^2}{z^2}\frac{1.2z-0.8}{(z-1)^2}\right]_{T=0.2}=\frac{0.4}{0.2^2}=10$$

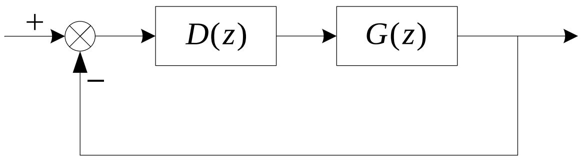
$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{R_2}{(z-1)^2G(z)}=\frac{R_2}{K_a}=\frac{1}{10}=0.1$$

可见两种方法的结果一样。

附加题：

1、离散闭环系统如图所示，为使闭环极点为 $0.2\pm j0.3$，已知工程师设计的控制器为

$D(z)=\dfrac{K(z-0.37)}{(z+a)}$，设被控对象的脉冲传递函数为 $G(z)=\dfrac{z+0.6}{(z-0.5)(z-b)}$，问：$D(z)$ 与 $G(z)$中的参数 K、a 与 b 分别应为多少？



解： 系统期望的闭环特征方程

$$(z-0.2+j0.3)(z-0.2-j0.3)=z^2-0.4z+0.13=0$$

因为 $D(z)=\dfrac{K(z-0.37)}{(z+a)}$， $G(z)=\dfrac{z+0.6}{(z-0.5)(z-b)}$

闭环特征方程：

$$1+D(z)G(z)=1+\frac{K(z-0.37}{(z+a)}\frac{z+0.6}{(z-0.5)(z-b)}=0$$

为简单起见，令 a=0.6，则整理后得

$$(z-0.5)(z-b)+K(z-0.37)=z^2+(K-b-0.5)z+0.5b-0.37K$$

与期望特征方程比较：

$$z^2+(K-b-0.5)z+0.5b-0.37K=z^2-0.4z+0.13=0$$

可得：

$$\begin{cases} K - b - 0.5 = -0.4 \\ 0.5b - 0.37K = 0.13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 1.385 \\ b = 1.285 \end{cases}$$

故：控制器为 $D(z) \approx \dfrac{1.4(z-0.37)}{(z+0.6)}$.

原来的被控对象为：$G(z) = \dfrac{z+0.6}{(z-0.5)(z-1.3)}$