

夏学期第七周作业:

P.378-382 第八章 线性定常系统的状态空间分析法 习题八

8-15. 开环受控系统 (A, b) 的系数矩阵如下

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试求出状态反馈矩阵, 使得闭环系统极点配置在 $-1+2j, -1-2j$ 。

解:

$$\begin{aligned} k_1 &= -5.6 \\ k_2 &= 7.8 \end{aligned}$$

8-16 设某系统由状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

表示。要求: (1) 设计状态反馈矩阵 K, 以达到将闭环极点配置在 $\{-3, -6\}$ 的目的; (2) 确定在初始状态 $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1]^T$ 作用下的状态响应。

8-16 参考答案:

$$(1) \quad K = \begin{bmatrix} -8 & -2.5 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s+6)} \begin{bmatrix} s+8 \\ -s-18 \end{bmatrix}\right\} \\ (2) &= L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+8}{(s+3)(s+6)} \\ \frac{-s-18}{(s+3)(s+6)} \end{bmatrix}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{5/3}{s+3} + \frac{-2/3}{s+6} \\ \frac{-5}{s+3} + \frac{4}{s+6} \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{3}e^{-3t} - \frac{2}{3}e^{-6t} \\ -5e^{-3t} + 4e^{-6t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8-17 设受控系统传递函数为 $\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{10}{s^3 + 3s^2 + 2s}$ ，要求：

- (1) 设计状态反馈阵，使闭环系统极点为 $-2, -1 \pm j$ ；
- (2) 给出系统的闭环传递函数。

8-17 参考答案：

(1) 能控标准型时 $\mathbf{K} = [-4 \quad -4 \quad -1]$ ；串联分解时 $\mathbf{K} = [-4 \quad -3 \quad -1]$

$$(2) \quad \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{10}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}$$

8-19 一个 SISO 系统由状态方程 $\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p u$ 表示，其中

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{p1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

- (a) 确定系统的能控性；
- (b) 求出系统的特征值；
- (c) 求出将状态方程变换为能控标准型状态方程的变换矩阵 \mathbf{T}_c ；
- (d) 求出将闭环极点配置为 $\sigma(\mathbf{A}_{cl}) = \{-2, -4, -6\}$ 的状态反馈矩阵 \mathbf{K}_p 。

解：

- (a) 系统完全能控。
- (b) 特征值: $-1, -2, -3$
- (c) 变换矩阵

$$\mathbf{T}_{c1} = \mathbf{M}_{c1} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 16 \\ 1 & -4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 16 \\ 1 & -4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{c1}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & -3 \end{bmatrix}$$

可以验证: $\mathbf{A}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A}_p \mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

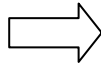
- (d) Determine the state-feedback matrix \mathbf{K}_p required to assign the eigenvalue spectrum $\sigma(\mathbf{A}_{cl}) = \{-2, -4, -6\}$.

The desired characteristic equation is

$$\Delta^*(s) = (s+2)(s+4)(s+6) = s^3 + 12s^2 + 44s + 48 = s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0$$

For control canonical(phase-variable) form with state feedback meets the equations

$$\mathbf{k}_{ci} = \boldsymbol{\alpha}_{i-1} - \boldsymbol{\beta}_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, n$$



$$\begin{aligned} k_{c1} &= a_0 - \beta_0 = 6 - 48 = -42 \\ k_{c2} &= a_1 - \beta_1 = 11 - 44 = -33 \\ k_{c3} &= a_2 - \beta_2 = 6 - 12 = -6 \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_c \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -42 & -33 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$