

量子信息基础

# 第五章：量子通信

金潮渊

浙江大学信息与电子工程学院



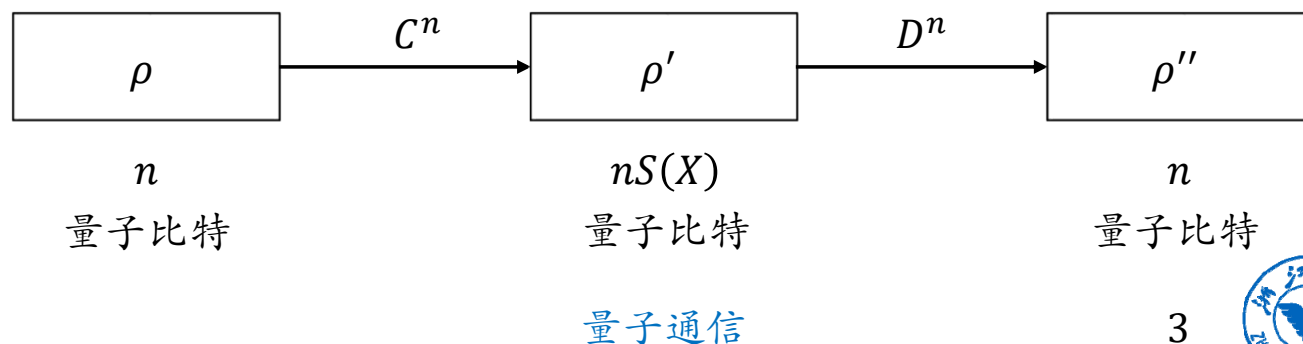
# C5-1 EPR佯谬和贝尔不等式



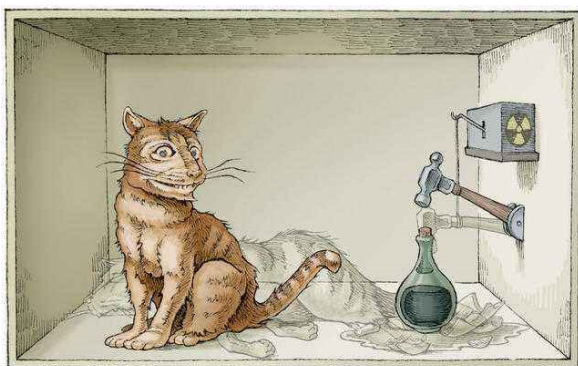
# 课程回顾

## 量子信源和无噪声编码：

- 对于量子系综的典型序列  $X = \{|\varphi_x\rangle, p_x\} \Rightarrow (|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle)$ ，冯诺依曼熵  $S(X)$  就是量子信源不可压缩信息内容的量度，正如同香农熵是经典信源不可压缩信息内容的量度一样。
- 如果  $R > S(X)$ ，则存在对该量子光源压缩率为  $R$  的可靠编码压缩方案；反之，如果  $R < S(X)$ ，则压缩率为  $R$  的任何压缩方案都是不可靠的。此即量子信源的无噪声信道编码定理，一般称作舒马赫无噪声信道编码定理。



# 薛定谔的猫

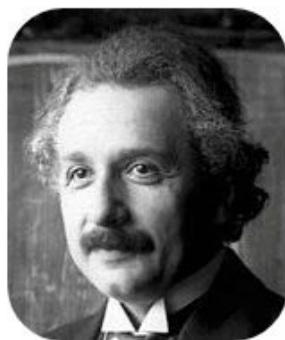


- 薛定谔提出的一个著名思想实验。一只猫关在装有少量镭和氰化物的密闭容器里。镭的衰变存在几率，如果镭发生衰变，会触发机关打碎装有氰化物的瓶子，猫就会死；如果镭不发生衰变，猫就存活。
- 根据量子力学理论，我们可以写出镭处于衰变态 $|1\rangle$ 与未衰变态时 $|2\rangle$ 体系的状态，即一种纠缠态：

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{live}, 2\rangle + |\text{dead}, 1\rangle)$$

- 由于退相干现象的存在，薛定谔猫的思想实验没有宏观上的实验版本，但却可以在微观世界中被验证。

# EPR佯谬



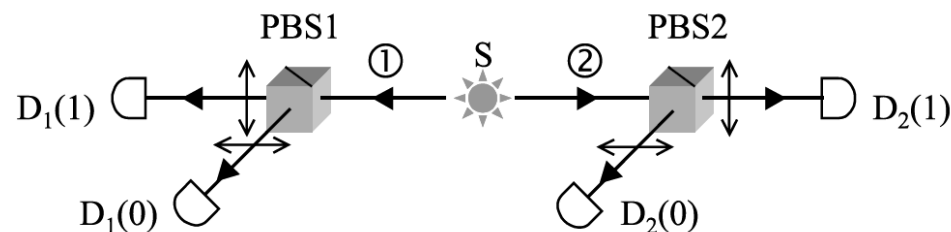
A. Einstein



B. Podolsky



N. Rosen



- EPR佯谬（Einstein-Podolsky-Rosen Paradox）是爱因斯坦、波多尔斯基和罗森在1935年为论证量子力学的不完备性而提出的一个悖论。David Bohm在1951年提出了一个简化的版本，成为了现在最为流行的EPR佯谬版本，也被称为EPRB实验。
- 假设光源 $S$ 能够发射一对关联光子，这对关联光子向着相反的方向出射，分别经过一个偏振分束器，然后被两对探测器在不同的偏振路径上接收到。光子的关联性使得 $D1(1)$ 和 $D2(1)$ 同时观测到光子，或者 $D1(0)$ 和 $D2(0)$ 同时观测到光子。
- 由于出射光子的偏振是不同偏振态 $|\leftrightarrow\rangle$ 和 $|\updownarrow\rangle$ 的线性组合，这意味着光子①和光子②无论距离多远都会因为对某一光子的测量，瞬时坍缩到同一本征态上。爱因斯坦称之为“鬼魅般的超距作用”。“定域实在论”和量子论在此产生了矛盾。

# 纠缠态

- 如果一个多粒子体系的波函数无法写作单个粒子波函数的乘积形式，这种量子态被称之为纠缠态。比如以EPRB实验中的一对光子的波函数为例（正关联）

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 0_2\rangle \pm |1_1, 1_2\rangle)$$

或者（负关联）

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 1_2\rangle \pm |1_1, 0_2\rangle)$$

- 纠缠态又被称为贝尔态。当我们测量一对正关联的纠缠粒子时，我们得到（0,0）和（1,1）的几率都是50%，但不会得到（0,1）或者（1,0）的测量结果。我们测量一对负关联的纠缠粒子时，我们得到（0,1）和（1,0）的几率都是50%，但不会得到（0,0）或者（1,1）的测量结果。



# 子系统

- 如果我们在关联体系中只关注其中的某一个粒子。例如在负关联波函数中的粒子1

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 0_2\rangle \pm |1_1, 1_2\rangle)$$

对粒子1的测量可以返回 $|\leftrightarrow\rangle$ 和 $|\updownarrow\rangle$ 的偏振态，但是明显的，粒子1并不是 $|\leftrightarrow\rangle$ 和 $|\updownarrow\rangle$ 偏振态的线性叠加。

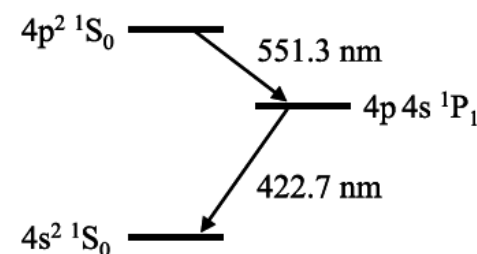
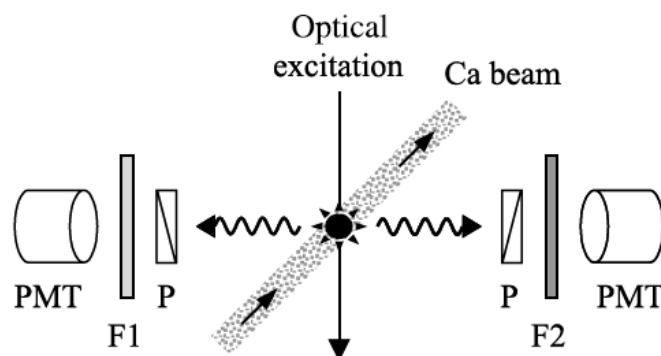
- 这种情况我们称粒子1为二粒子体系的子系统，子系统可以用混态密度矩阵来描述

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- 问题：粒子2的密度矩阵是什么样的？怎样区别量子纠缠和经典几率？



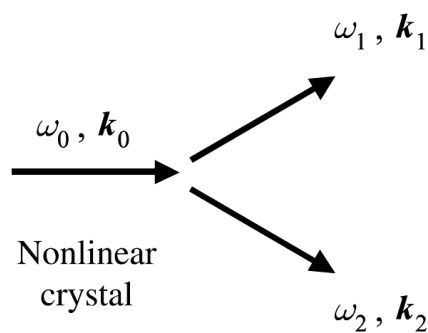
# 纠缠光子对的产生(1)



- 早期的纠缠光子对生成基于钙原子的级联光子发射。钙原子的外层电子从 $4p^2\ ^1S_0$ 轨道顺序弛豫到 $4p\ 4s\ ^1P_1$ 轨道和 $4s^2\ ^1S_0$ 轨道，发射出波长分别为551.3nm和422.7nm的一对关联光子。
- 这对光子向着相反的方向出射，经过偏振分束器和窄带滤波器后被一对PMT（光电倍增管）所探测到，从而验证光子对的关联性。实验中只有当两个偏振分束器的方向相互平行时，才能同时观察到光子对的出射，因而验证了光子之间的纠缠特性。



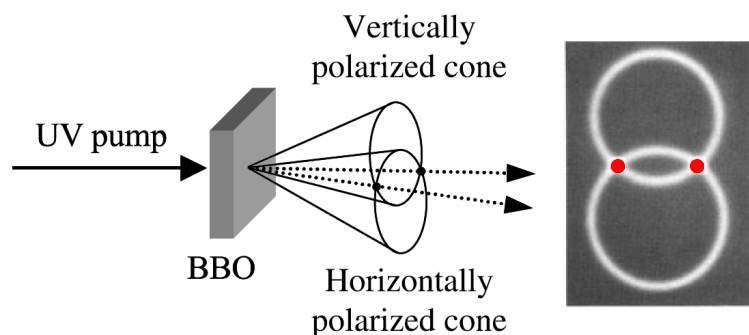
## 纠缠光子对的产生(2)



- 另一种常用一种生成纠缠光子对的方法主要基于非线性光学，利用了非线性光学晶体中的下转换过程(down conversion)。一个光子入射到非线性晶体中，转换成一对关联光子出射，关联光子之间满足所谓的相位匹配关系。

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$$

$$k_0 = k_1 + k_2$$

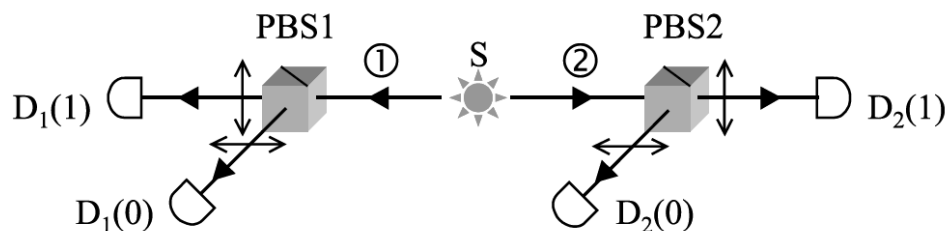


- 左图给出了下转换过程产生纠缠光子的实验示意图，紫外激光照在BBO晶体上，一个入射光子产生一对下转换后的红光光子。图中红点处的光子满足相位匹配关系，且具有相反的偏振，波函数可以写成

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow_1, \uparrow_2\rangle + e^{i\phi}|\uparrow_1, \leftrightarrow_2\rangle)$$

# 隐变量

- 爱因斯坦、波多尔斯基和罗森并非怀疑量子力学的正确性，他们提出EPR佯谬的主要目的在于阐明量子力学的不完备性。波函数的几率诠释并不能完全描述体系的状态，需要引入额外的变量，这种变量叫做“隐变量”。
- 对于右图中的光子①，我们从量子力学的几率诠释中得知，测量之前光子处于两种偏振态的线性组合。在测量之后，光子才能随机地坍缩到某一个偏振态上。隐变量假说认为这个随机过程和抛硬币的过程类似，虽然我们得到了随机的结果，但实际上，硬币出现正反面的结果完全可由抛出硬币时的初始条件所决定。
- 在EPR佯谬中，如果两套探测系统被放置到足够远的距离，对光子①的测量将会瞬时导致光子②坍缩到同光子①相关联的本征态上，这个过程是非定域的，这看起来与相对论矛盾，甚至一度被认为可能导致因果性的丧失。
- 量子非定域性无法找到经典的对应物，而且被实验一再证实。现在我们几乎可以确定，隐变量假设在量子过程中是冗余的，非定域性是微观体系的自然属性。

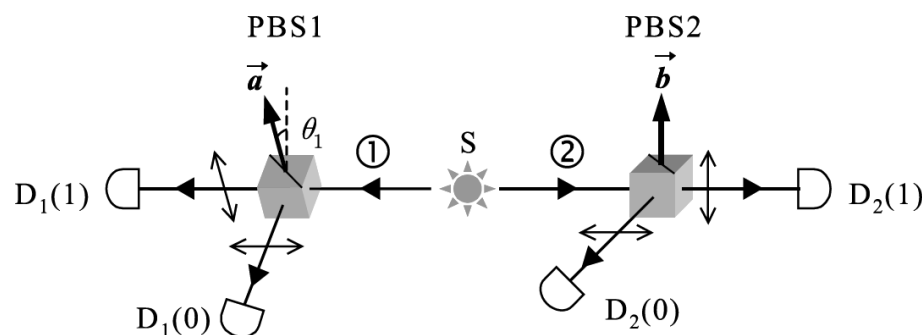


# 贝尔不等式(1)



- 贝尔(John Stewart Bell, 1928-1990)的主要贡献是贝尔不等式，他阐明在“定域实在论”的范畴内，贝尔不等式始终成立。量子理论的预测显著违反了贝尔不等式，因此贝尔不等式为“定域实在论”和量子理论的哲学分歧提供了实验判据。
- EPR佯谬和贝尔不等式反映了量子纠缠的非定域性，为现在量子信息科学，比如量子密钥分发，量子隐形传态，量子计算提供了理论基础。
- 贝尔不等式基于的实验设想和纠缠光子对的实验类似，但两个偏振分束器被安排在了不同的偏振方向上。

## 贝尔不等式(2)



- 我们假设两个偏振分束器PBS1和PBS2的方向为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，两者和垂直方向的夹角分别为 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ ，在EPRB实验中 $\theta_1 = \theta_2$ 。
- 两个探测器的响应情况概率可以分为四类

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{11}(\theta_1, \theta_2) \text{ 代表了 } D_1(1) \text{ 和 } D_2(1) \text{ 同时响应的概率} \\ \mathcal{P}_{10}(\theta_1, \theta_2) \text{ 代表了 } D_1(1) \text{ 和 } D_2(0) \text{ 同时响应的概率} \\ \mathcal{P}_{01}(\theta_1, \theta_2) \text{ 代表了 } D_1(0) \text{ 和 } D_2(1) \text{ 同时响应的概率} \\ \mathcal{P}_{00}(\theta_1, \theta_2) \text{ 代表了 } D_1(0) \text{ 和 } D_2(0) \text{ 同时响应的概率} \end{cases}$$

## 贝尔不等式(3)

- 对于每个光子而言，通过分束器之后的两个探测器响应几率各占50%，所以有

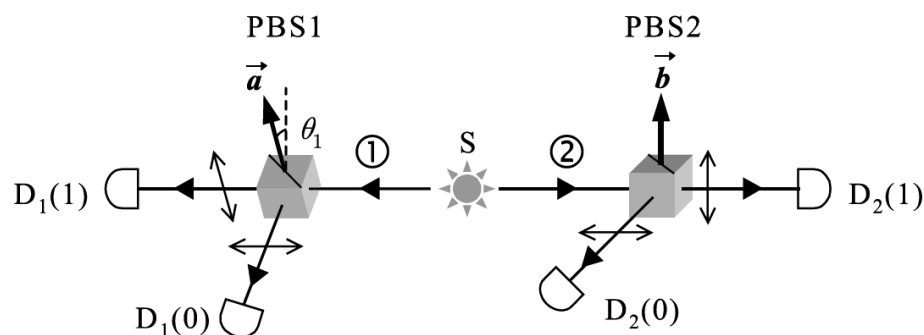
$$\begin{cases} \mathcal{P}_{11}(\theta_1, \theta_2) + \mathcal{P}_{10}(\theta_1, \theta_2) = 0.5 \\ \mathcal{P}_{01}(\theta_1, \theta_2) + \mathcal{P}_{00}(\theta_1, \theta_2) = 0.5 \\ \mathcal{P}_{11}(\theta_1, \theta_2) + \mathcal{P}_{01}(\theta_1, \theta_2) = 0.5 \\ \mathcal{P}_{10}(\theta_1, \theta_2) + \mathcal{P}_{00}(\theta_1, \theta_2) = 0.5 \end{cases}$$

- 在EPRB实验中 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ，可以得到

$$\text{正关联} \quad \begin{cases} \mathcal{P}_{11}(\theta, \theta) = 0.5 \\ \mathcal{P}_{10}(\theta, \theta) = 0 \\ \mathcal{P}_{01}(\theta, \theta) = 0 \\ \mathcal{P}_{00}(\theta, \theta) = 0.5 \end{cases}$$

$$\text{负关联} \quad \begin{cases} \mathcal{P}_{11}(\theta, \theta) = 0 \\ \mathcal{P}_{10}(\theta, \theta) = 0.5 \\ \mathcal{P}_{01}(\theta, \theta) = 0.5 \\ \mathcal{P}_{00}(\theta, \theta) = 0 \end{cases}$$

# 贝尔不等式(4)



$$\begin{cases} \mathcal{P}_{11}(\theta_1, 0) = \frac{1}{2} \cos^2 \theta_1 \\ \mathcal{P}_{10}(\theta_1, 0) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_1 \\ \mathcal{P}_{01}(\theta_1, 0) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_1 \\ \mathcal{P}_{00}(\theta_1, 0) = \frac{1}{2} \cos^2 \theta_1 \end{cases}$$

- 在 $\theta_2 = 0$ 和正关联的情形下，我们采用垂直和水平偏振的联合测量。
- 假设 $D_2(1)$ 响应，这时两个光子都同时坍缩到垂直方向的偏振态，那么 $D_1(1)$ 响应的几率为 $\cos^2 \theta_1$ 和 $D_1(0)$ 响应的几率为 $\sin^2 \theta_1$ 。
- 假设 $D_2(0)$ 响应，这时两个光子都同时坍缩到水平方向的偏振态，那么 $D_1(1)$ 响应的几率为 $\sin^2 \theta_1$ 和 $D_1(0)$ 响应的几率为 $\cos^2 \theta_1$ 。
- $D_2(1)$ 和 $D_2(0)$ 发生的几率各为50%

## 贝尔不等式(5)

- 现在我们假设 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 都是随机值，我们选择 $\theta_2$ 和 $\theta_2 + 90^\circ$ 两个方向的联合测量，这时的结论是类似的，即

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{11}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \\ \mathcal{P}_{10}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \\ \mathcal{P}_{01}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \\ \mathcal{P}_{00}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

- 现在我们假设 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 都是随机值，而出射的关联光子是垂直偏振的或者水平偏振的（隐变量），这时我们得到

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{11}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} (\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2) \\ \mathcal{P}_{10}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} (\sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2) \\ \mathcal{P}_{01}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} (\cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2) \\ \mathcal{P}_{00}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} (\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2) \end{cases}$$

- 在EPRB实验中 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 和 $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$ 得到同样的测量结果，而在隐变量假设下，结果是不一样的！不同之处仅仅在于我们假设光子离开光源之时带有隐藏的偏振属性！

# 贝尔不等式(6)

---

- 上面我们研究的只是贝尔不等式的特例，实际的情况要复杂的多，我们课本上也给出了通用的贝尔不等式，它对任意隐变量假设都是成立的

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq 1 + P(b, c)$$

- 贝尔实验给出了判定隐变量假设和量子理论之间冲突的判据。从而引发了许多检验贝尔不等式的实验，其中Aspect, Grangier和Roger做出的工作最为突出，他们在一系列实验中证实了贝尔不等式不能成立。
- 关于贝尔不等式的实验结果引发了一系列对于超距作用和因果关系的辩论。现在看来量子理论并未违法因果关系，但为什么导致了这种神奇的超距关联性的原因仍然是富有争议的。





# 参考文献

---

- EPR佯谬和纠缠态主要参考：
  - 教材David J. Griffiths, and Darrell F. Schroeter, Introduction to Quantum Mechanics (3rd Edition), Cambridge University Press (2018). 第12.1, 12.2节。
  - Mark Fox, Quantum Optics – An Introduction, Oxford University Press (2006). 第14.1, 14.2, 14.4节。

