第六次课作业

2. 设随机过程 $X(t)=A\sin(t+\Theta),-\infty<t<\infty$，其中 A 与 Θ 是相同独立的随机变量，$P(\Theta=\frac{\pi}{4})=P(\Theta=-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，**A** 服从 $(-1,1)$ 上的均匀分布，判断 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 是否为平稳过程

解

$$f(A)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ,A\in(-1,1)\\ 0 & ,else\end{cases}$$

$$E(X(t))=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}A\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{2}dA+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}A\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}AdA+\frac{\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}{4}\Big|_{-\infty}^{\infty}AdA=0$$

$$R_x(t,t+\tau)=E(X(t)X(t+\tau))=E(A^2\sin(t+\theta)\sin(t+\theta+\tau))=E(A^2)E(\sin(t+\theta)\sin(t+\tau+\theta))$$

$$E(A^2)=D(A)+E^2(A)=\frac{4}{12}+0=\frac{1}{3}$$

$$E(\sin(t+\theta)\sin(t+\tau+\theta))=\frac{1}{2}E(\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right))+\frac{1}{2}E(\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t+\tau-\frac{\pi}{4}\right))$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{\cos(\tau)-\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}+\tau\right)}{2}+\frac{\cos(\tau)-\cos\left(2t-\frac{\pi}{2}+\tau\right)}{2}]$$

$$=\frac{1}{4}(2\cos(\tau)+\sin(2t+\tau)-\sin(2t+\tau))=\frac{1}{4}\cdot2\cos\tau=\frac{1}{2}\cos\tau$$

$$\therefore R_x(t,t+\tau)=EA^2\sin(t+\theta)\sin(t+\theta+\tau)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cos(\tau)=\frac{1}{6}\cos\tau$$

只与 τ 有关，而与 t 无关

$\therefore$ $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 是平稳过程

4. $X(t)=A\sin t-B\cos t,-\infty<t<\infty$，其中 **A**，**B** 独立同分布，且 $E(A)=\mu,E(A^2)=\sigma^2$

1.求 $\mu_x(t),R_x(t,t+\tau)$;

2.若 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 是宽平稳过程，求 μ 的值;

3.若 $P(A=1)=P(A=-1)=0.5$，分别求 $X(0)$ 和$X(\frac{\pi}{4})$ 的分布律，问 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 是严平稳过程吗？说明理由

解

(1)

$$\mu_t(t)=E(X(t))=E(A\sin t-B\cos t)=\sin E(A)-\cos E(B)=\mu\sin t-\mu\cos t$$

$$=\sqrt{2}\mu(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t)=\sqrt{2}\mu\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$R_x(t,t+\tau)=E(X(t)X(t+\tau))=E(A\sin t-B\cos t)(A\sin(t+\tau)-B\cos(t+\tau))$$

$$=E(A^2\sin t\sin(t+\tau)-AB\sin t\cos(t+\tau)-AB\sin(t+\tau)\cos t+B^2\cos t\cos(t+\tau))$$

$$E(A^2)=E(B^2)=\sigma^2\quad E(AB)=E(A)E(B)=\mu^2$$

$$\therefore\ R_x=\sigma^2\sin t\sin(t+\tau)-\mu^2\sin t\cos(t+\tau)-\mu^2\sin(t+\tau)\cos t+\sigma^2\cos t\cos(t+\tau)$$

$$=\sigma^2\cos(t+\tau-t)-\mu^2\sin(t+t+\tau)$$

$$=\sigma^2\cos\tau-\mu^2\sin(2t+\tau)$$

(2)

$\because\ \{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 是平稳过程

所以 $\mu_x(t)$ 为常数 $R_x(t,t+\tau)$ 只和 τ 有关

所以 $\mu=0$

(3)

$E(A)=0\quad E(A^2)=1$

$X(0)=-B,\quad X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(A-B)$

$P(X(0)=-1)=0.5,\quad P(X(0)=1)=0.5$

$P(X(\frac{\pi}{4})=-2)=0.25,\quad P(X(\frac{\pi}{4})=0)=0.5,\quad P(X(\frac{\pi}{4})=2)=0.25$

$\therefore X(0),\ X(\frac{\pi}{4})$ 不服从同一分布

$\therefore \{X(t)\}$ 不是严平稳过程

6. 设 $X(t)=X\cos t,-\infty<t<\infty$ **,** 其中 $X\sim N(1,3)$ **,** 令 $Y(t)=\int_0^t x(u)du$，求 $\mu_x(t)$ 和 $R_{xy}(s,t)$.

解

$\mu_y(t)=E(Y(t))=E(\int_0^\infty X(u)du)=E(X\sin t)=E(X)E(\sin t)=\sin t$

$\int_0^t X(u)du=\int_0^t X\cos udu=X\sin t$

$R_{XY}(s,t)=E(s)Y(t)=E(X)\cos s\int_0^t X(u)du=E(X^2)\cos s\sin t=E(X^2)\cos s\sin t=4\cos s\sin t$

$EX^2=D(X)+(EX)^2=3+1=4$

9. 设随机过程 $X(t)=\sqrt{2}X\cos t+Y\sin t,-\infty<t<\infty$ ，其中**X**，**Y**相互独立，**X**具有密度函数，**Y**服从 $(-1,1)$ 上的均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

1.求 $\mu_x(t),R_x(t,t+\tau)$ ，并证明 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 是平稳过程

2.求$\{X(t)\}$的时间均值 $\langle X(t)\rangle$ ，并判断 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 的均值是否具有各态历经性

3.判断$\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 是否为各态历经过程

解

(1)

$\mu_X(t)=EX(t)=E(\sqrt{2}X\cos t+Y\sin t)=\sqrt{2}\cos t+E(X)+\sin tE(Y)$

$E(X)=\int_{-1}^{1}x(1-|x|)dx=\int_0^1x(1-x)dx+\int_{-1}^{0}x(1+x)dx$

$\quad=\int_0^1xdx-\int_0^1x^2dx+\int_{-1}^{0}xdx+\int_{-1}^{0}x^2dx=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$

$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & ,-1<x<1\\ 0 & ,else\end{cases},\qquad E(Y)=0$

$\therefore\ \ \mu_x(t)=\sqrt{2}\cos tE(X)+\sin tE(Y)=0$

$R_X(t,t+\tau)=EX(t)X(t+\tau)=E((\sqrt{2}X\cos t+Y\sin t)(\sqrt{2}X\cos(t+\tau)+Y\sin(t+\tau)))$

求得 $E(XY)=0,\ \ E(X)E(Y)=0,\ \ E(X^2)=\dfrac{1}{6},\ \ E(Y^2)=\dfrac{1}{3},\ \ D(Y)=\dfrac{1}{3},\ \ E(Y)=0$

$R_X(t,t+\tau)=\dfrac{1}{3}\cos t\cos(t+\tau)+\dfrac{1}{3}\sin t\sin(t+\tau)=\dfrac{1}{3}\cos\tau$

$\therefore\{X(t)\}$ 是平稳过程

(2)

$\langle X(t)\rangle=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\sqrt{2}X\cos t+Y\sin t))dt$

$\quad=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}(2\sqrt{2}X\sin T+2Y\cos T)=0$

$\because\langle X(t)\rangle=E(X(t))=0$

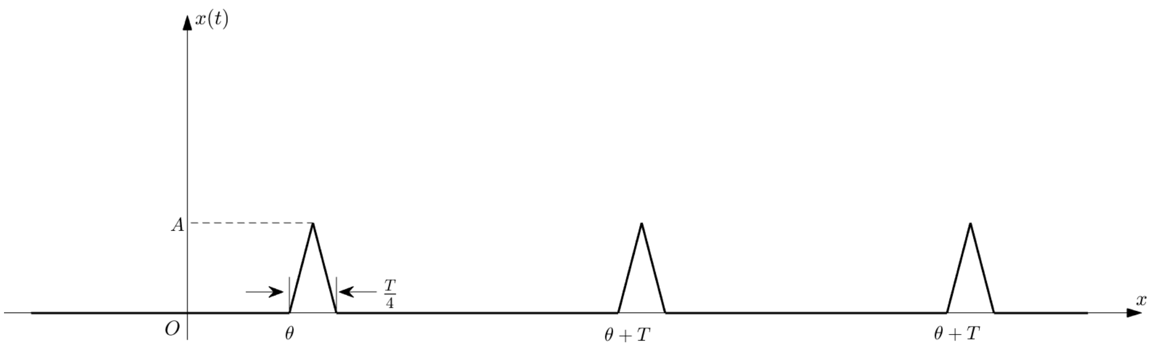
$\therefore$均值具有各态历经性

(3)

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\sqrt{2}X\cos t+Y\sin t))(\sqrt{2}X\cos(t+\tau)+Y\sin(t+\tau)))dt$$
$$=(X^2+\frac{Y^2}{2})\cos\tau^2 \neq R_X(t,t+\tau)$$

$\therefore$ 不是各态历经性

10. 设 $s(t)$ 是一周期为 T 的函数，Θ 服从 $(0,T)$ 上的均匀分布，称 $X(t)=s(t+\Theta)$ 为随机相位周期过程，证明 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$为平稳过程。现有一随机相位周期过程 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$，它的一个样本函数 $x(t)$ 如图所示：



1.求$\mu_x, R_x(\frac{T}{8})$;

2.求 $\langle x(t)\rangle$

解

(1)

$$\mu_X(t)=E(X(t))=Es(t+\theta)=\int_0^T s(t+\theta)\frac{1}{T}d\theta=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}s(\phi)d\phi$$

$\because$ $S(t)$ 有周期性 $\quad\therefore \frac{1}{T}\int_t^{t+T}s(\phi)d\phi=\frac{1}{T}\int_0^T s(\phi)d\phi=\frac{1}{T}\cdot\frac{T}{4}\cdot\frac{1}{2}A=\frac{A}{8}$

$$R_X(t,t+\tau)=E[s(t+\theta)s(t+\tau+\theta)]=\int_0^T s(t+\theta)s(t+\theta+\tau)\frac{1}{T}d\theta=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}s(\phi)s(\phi+\tau)d\phi$$

$=\frac{1}{T}\int_0^T s(\phi)s(\phi+\tau)d\phi$，只和 τ 有关

$$R_X(\frac{T}{8})=\frac{1}{T}\int_0^T s(\phi)s(\frac{T}{8}+\phi)d\phi=\frac{A^2}{48}$$

(2)

$$\langle X(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}s(t+\theta)dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\frac{A}{8}\cdot T\cdot 2=\frac{A}{8}$$