第五次作业：第四章 12、14、15、17、21、23

12、

以 $N(t)$ 表示 (0,t] 内到达某保险公司理赔的顾客数。设 $\{N(t); t \geqslant 0\}$ 是强度为 10 的泊松过程，这些顾客的理赔钱数 (单位: 元) 相互独立且都服从 $U(1000, 10000)$. 用 W_i 表示第 i 个顾客到达的时刻，计算:

(1) $P(N(1) = 1, N(4) > 1)$;

(2) $P(3 < W_3 \leqslant 4 | W_1 = 1, W_2 = 2)$;

(3) 第一个理赔钱数超过 5500 元的顾客在 (0,t] 内到达的概率.

解:

(1)

$$P(N(1) = 1, N(4) > 1) = P(N(1) = 1)P(N(3) > 0) = P(N(1) = 1)(1 - P(N(3) = 0))$$

$$= 10e^{-10}(1 - e^{-30})$$

(2)

$$P(3 < W_3 \leqslant 4 | W_1 = 1, W_2 = 2) = P(1 < W_1 \leqslant 2) = P(N(1) = 0)P(N(2) \geqslant 1 | N(1) = 0)$$

$$= P(N(1) = 0)P(N(1) \geqslant 1) = P(N(1) = 0)[1 - P(N(1) = 0)]$$

$$= e^{-10}(1 - e^{-10})$$

(3)

$P(\text{个人理赔钱数超过 } 5500) = \dfrac{1}{2}$

$P(\text{个人理赔钱数低于 } 5500) = \dfrac{1}{2}$

将 $N(t)$ 分解为 $N_1(t), N_2(t)$ 两个子泊松过程，$\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}\lambda = 5$

$P(N_2(t) \geqslant 1) = 1 - P(N_2(t) = 0)1 - e^{-5t}$

14、

某人在钓鱼，他只可能钓到鲫鱼或鳊鱼. 他钓到鲫鱼的规律服从强度为 2 条/h 的泊松过程，钓到鳊鱼的规律服从强度为 1 条/h 的泊松过程，且这两个过程相互独立. 假设每条鱼的质量 (单位:kg) 独立同分布，且服从 (0,2) 上均匀分布

(1) 计算此人在 1h 内钓到 2 条鱼的概率;

(2) 计算此人在 1h 内钓到 4 条鱼，其中 2 条不足 1kg 的概率.

(3) 计算此人在第 1h 内和第 2h 内各钓到 1 条鱼，且都是重达 1kg 以上鲫鱼的概率;

(4) 若已知他在 2h 内钓到两条鱼，求这两条都是重达 1kg 以上鲫鱼的概率.

解:

(1)

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$$
$$P(N(1) = 2) = \frac{9}{2}e^{-3}$$

(2)

$\lambda_3 = \lambda_4 = 1.5$, 分别代表钓到大于和小于 1.5kg 的鱼的子泊松过程的强度

$$P(N_3(1) = 2)P(N_4(1) = 2) = \frac{81}{64}e^{-3}$$

(3)

$\lambda_5 = \frac{1}{2}\lambda_1 = 1, \lambda_6 = \lambda - \lambda_5 = 2$, 分别代表钓到 1kg 以上鲫鱼和其他情况的强度

(4)

$$P = (\frac{1}{2} \times \frac{2}{1+2}) = \frac{1}{9}$$

15、

设 $\{N(t); t \geqslant 0\}$ 是强度为 $\lambda(t) = t$ 的非齐次泊松过程，求:

(1) $P(N(2) = 3)$

(2) $P(N(1) = 2, N(2) = 4)$

(3) $P(N(1) = 2 | N(2) = 4)$

解:

$$N(t) - N(s) \sim \pi(\int_s^t \lambda(h)\mathrm{d}h)$$

(1)

$$P(N(2) = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{4}{3}e^{-2}$$

(2)

$$P(N(1)=2,N(2)=4)=P(N(1)=2)P(N(2)=4|N(1)=2)=\frac{(1/2)^2e^{-1/2}}{2!}\cdot\frac{(3/2)^2e^{-3/2}}{2!}=\frac{9}{64}e^{-2}$$

(3)

$$P(N(1)=2|N(2)=4)=\frac{P(N(1)=2,N(2)=4)}{P(N(2)=4)}=\frac{27}{128}$$

17、

设 $\{B(t);t\geqslant 0\}$ 是标准布朗运动，求:

(1) $P\{B(3.6)\leqslant 1|B(1.6)=0.8,B(2.39)=-0.1\}$;

(2) $Cov(B(8)-B(4),B(6))$

(3) $D(2B(1)+B(2))$

解:

(1)

$$P\{B(3.6)\leqslant 1|B(1.6)=0.8,B(2.39)=-0.1\}=P\{B(3.6)-B(2.39)\leqslant 1.1\}$$

$$B(3.6)-B(2.39)\sim N(0,1.21)$$

$$P\{B(3.6)-B(2.39)\leqslant 1.1\}=\Phi(1)$$

(2)

$$Cov(B(8)-B(4),B(6))=Cov(B(8),B(6))-Cov(B(4),B(6))$$

$$=min\{8,6\}-min\{4,6\}=2$$

(3)

$$D(2B(1)+B(2))=D(2B(1))+D(B(2))+2Cov(2B(1),B(2))$$

$$=4+2+2min\{4,2\}$$

$$=10$$

21、

设 $\{B(t);t\geqslant 0\}$ 是标准布朗运动，计算:

(1) $P(B(\frac{1}{10})\geqslant 1.5|B(\frac{1}{6})=2,B(\frac{1}{4})=2.4)$;

(2) 在 $B(\frac{1}{6})=2,B(\frac{1}{4})=2.4$ 的条件下, 求 $B(\frac{1}{10})$ 的条件分布;

解:

(1)

$$P(B(\frac{1}{10})\geqslant 1.5)|B(\frac{1}{6})=2,B(\frac{1}{4})=2.4$$

$$= P(\widetilde{B(10)} \geqslant 15 | \widetilde{B(6)} = 12, \widetilde{B(4)} = 8)$$

$$= P(\widetilde{B(10)} - \widetilde{B(6)} \geqslant 3) = 1 - \Phi(1.5)$$

(2)

$$\widetilde{B(4)} = 9.6 \quad \widetilde{B(6)} = 12$$

$$\widetilde{B(10)} = \widetilde{B(10)} - \widetilde{B(6)} + 12 \sim N(12, 4)$$

$$B(\frac{1}{10}) \sim \frac{1}{10}\widetilde{B(10)} \sim N(\frac{6}{5}, \frac{1}{25})$$

23、

设 $\{B(t); t \geqslant 0\}$ 是标准布朗运动，对任给的 $t > 0, x > 0$，求:

(1) $P(|B(t)|) \leqslant x$;

(2) $P(\underset{0 \leqslant s \leqslant t}{max} B(s) - B(t) \leqslant x)$

解:

(1)

$$P(|B(t)| \leqslant x) = P(-x \leqslant B(t) \leqslant x) = 2\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - 1$$

(2)

$$P(\underset{0 \leqslant x \leqslant t}{max} B(s) - B(t) \leqslant x) = P(\underset{0 \leqslant s \leqslant t}{max}(B(s) - B(t)) \leqslant x)$$

$$= P(\underset{0 \leqslant u \leqslant t}{max} B(u) \leqslant x) = 1 - P(\underset{0 \leqslant u \leqslant t}{max} B(u) \geqslant x)$$

$$= 1 - 2P(B(t) > x)$$

$$= 1 - 2(1 - \Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})) = 2\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - 1$$