数字信号处理

Digital Signal Processing

第 7 章 多抽样率数字信号处理

第7章 多抽样率数字信号处理

7.1 概述

- 前面所讨论的信号处理的各种方法都把采样频率F_s视为固定值，即在一个数字系统中只有一个采样频率

----单抽样率数字信号处理系统

- 实际系统中，经常要求能对采样率进行转换，即要求一个数字系统能工作在多采样率状态。这样的系统称为多采样率信号处理系统。例如：数字电视系统中我们需要同时对语音、视频、图像采用不同频率进行处理，数字通信中的码率变换（通信带宽）等----多抽样率数字信号处理系统

- 建立在采样率转换基础上的“多抽样率数字信号处理系统”已成为数字信号处理学科的主要内容之一，在语音信号处理、图像处理、通信系统等领域有着广泛的应用。

在信号处理的很多应用中，需要用到变换数字信号采样频率的问题。原因：

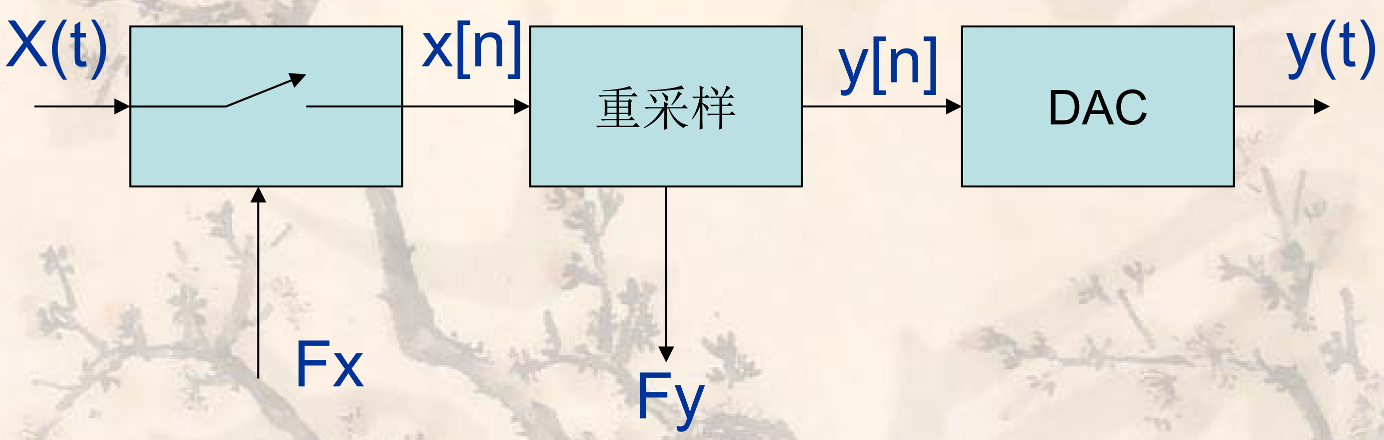
A：应用中需要混合不同标准的信号。

例不同音频信号的采样率：

CD播放器	数字音频磁带	数字广播
44.1KHZ	48KHZ	32KHZ

B：新技术的需要。 例信号的采样频率相对带宽很大情形。

信号处理过程可视为在两个数字序列时间的线性处理：需要重采样的输入序列x[n]和y[n], 他们的采样速率分别为Fx和Fy，如下图所示：



$F_x > F_y$, 下采样

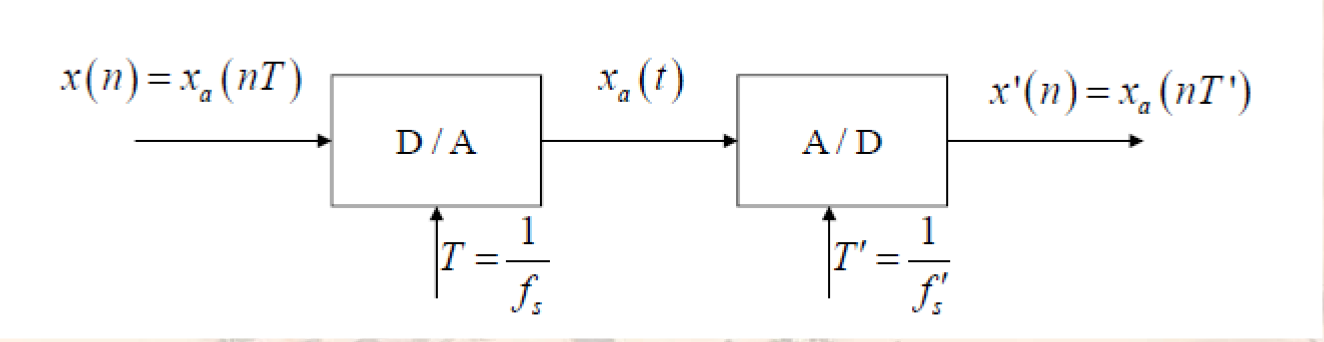
$F_x < F_y$, 上采样

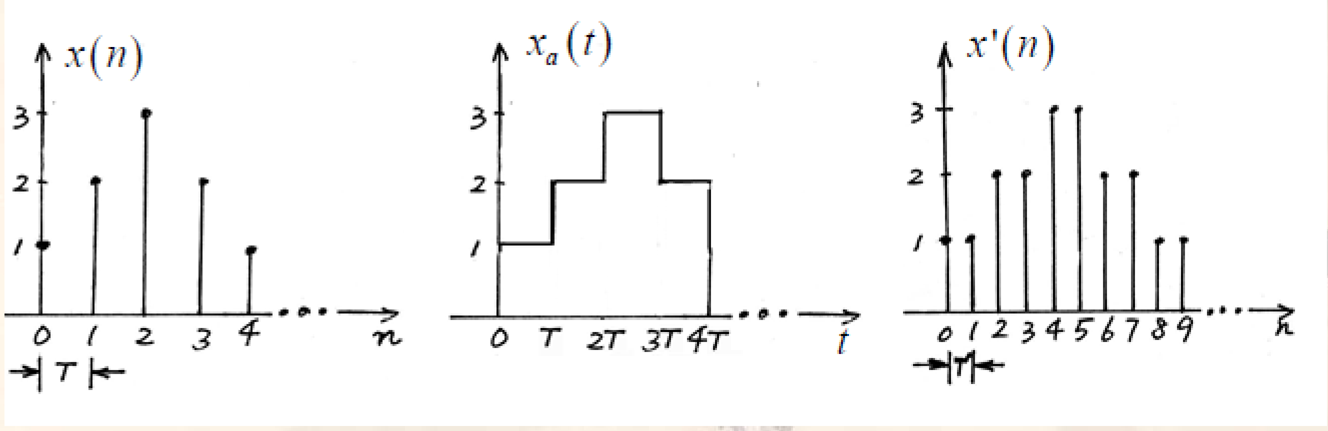
7.1 概述

■ 实现抽样率转换的方法：
- ■ 模拟域方法
- ■ 数字域方法

优点：可以实现抽样率的任意转换

缺点：信号重构误差、量化噪声





例：抽样率升高2倍

$$T'=\frac{T}{2}$$

$$x'(n)=\begin{cases} x(\frac{n}{2}), & even \\ x(\frac{n-1}{2}), & odd \end{cases}$$

7.1 概述

■数字域方法

- 内插(Interpolation)：采样率由低到高，也称为上采样(Up-Sampling)—是增加数据的过程。

- 抽取 (Decimation) ：采样率由高到低，也称为下采样(Down-Sampling)—是去掉过多数据的过程。

- 抽取、内插及其二者相结合的使用便可实现信号取样率的转换。

7.1 概述

采样率转换通常分为：抽取和内插

采样率转换类型：

（1）整数因子抽取 （7.2）

（2）整数因子内插 （7.3）

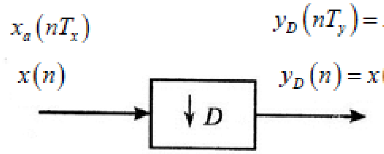
（3）有理数因子采样率转换 （7.4）

（4）多抽样率的高效实现（7.5）

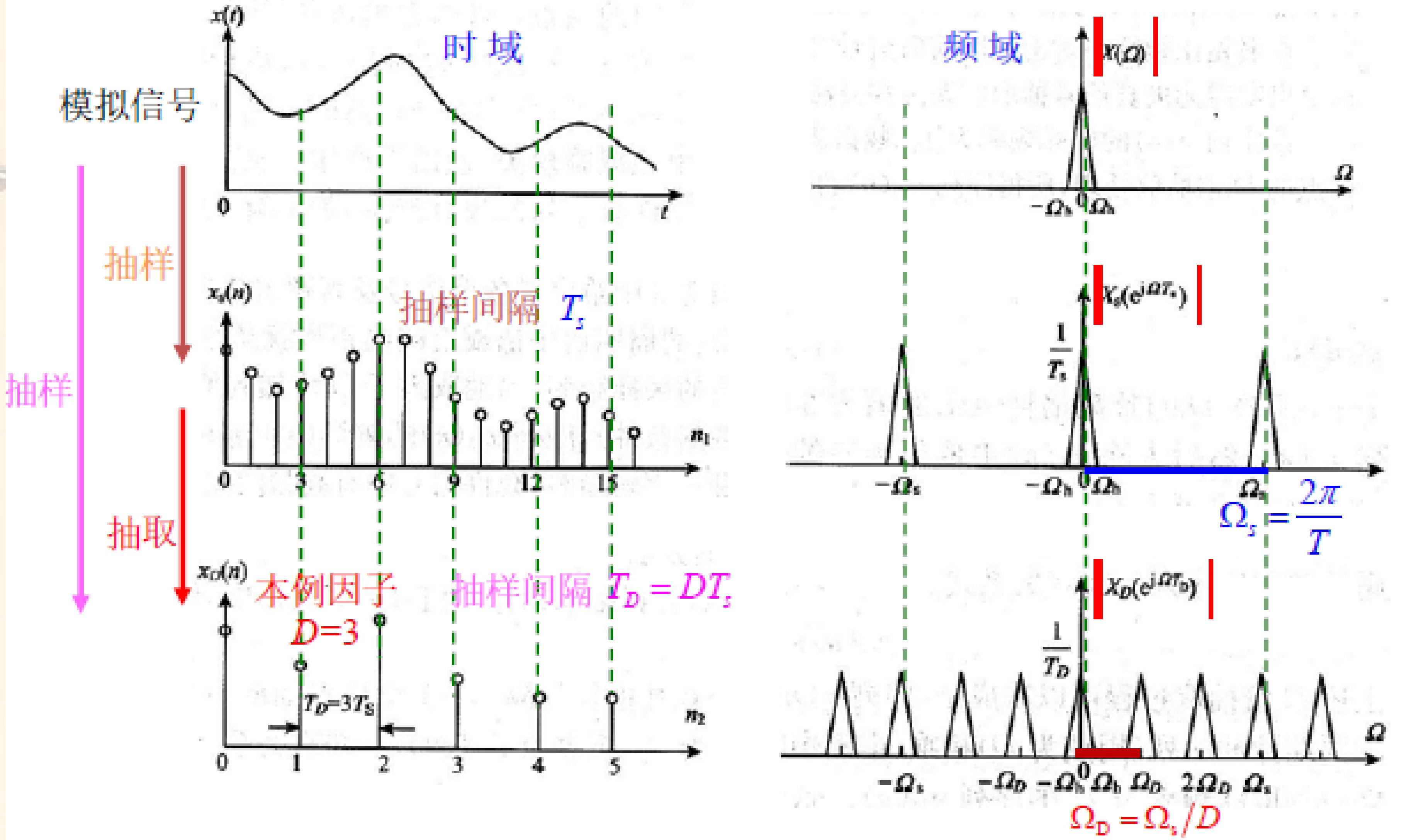
7.2 以整数因子D抽取

$$y_D(nT_y)=x_a(nDT_x) \qquad (7.5)$$

$$y_D(n)=x(nD)$$



1、不同的抽样率

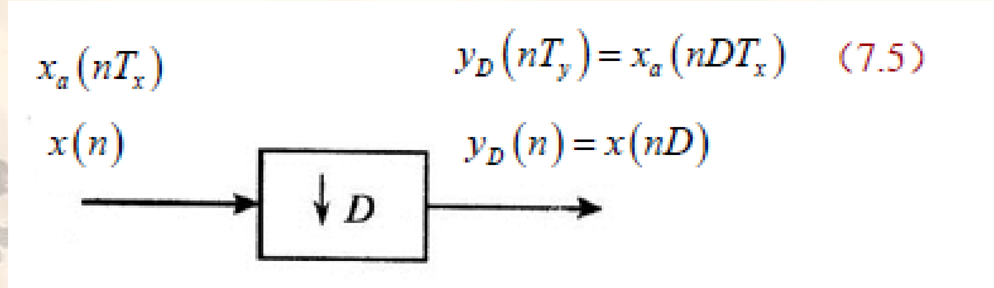


D 大可能造成频域混叠！

（频率轴成比例地缩放）

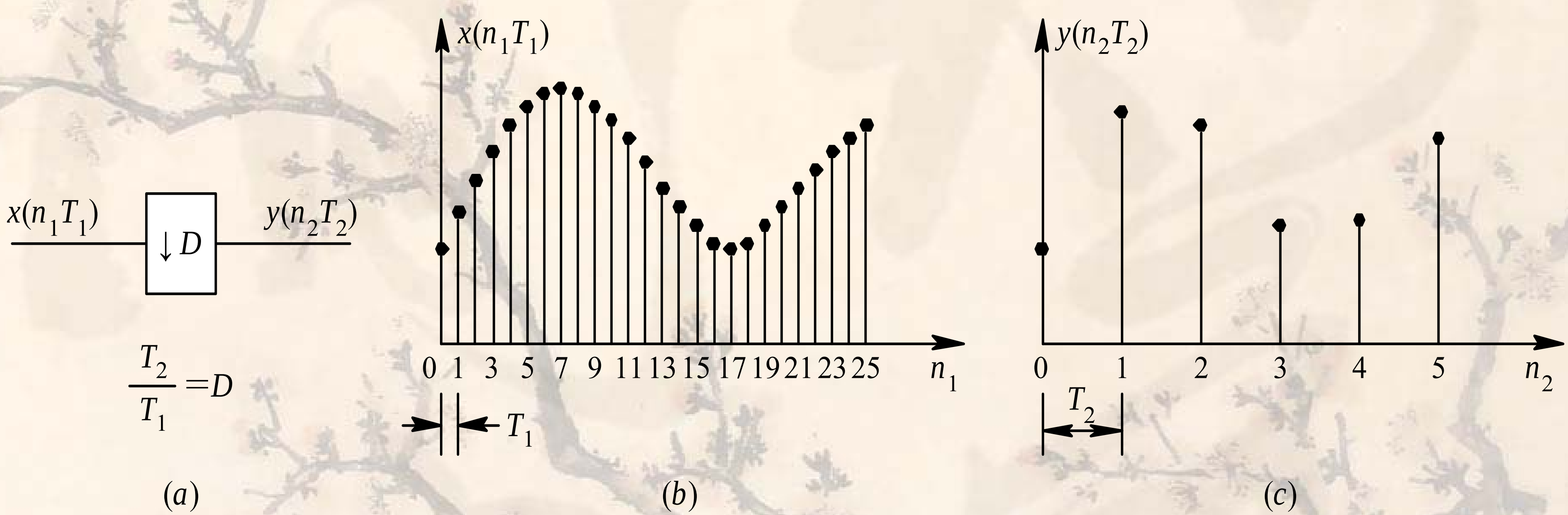
7.2 以整数因子D抽取

2. 抽样率变换



抽样间隔	T_x	$T_y = DT_x$	抽样间隔增加到*D*倍
抽样频率	$\dfrac{1}{T_x}$	$\dfrac{1}{T_y} = \dfrac{1}{DT_x}$	抽样率下降到1/*D*
数字角频率	$w_x = \Omega T_x = 2\pi f T_x$	$w_y = \Omega T_y = \Omega D T_x = D w_x$	频率轴成比例地缩放

7.2 以整数因子D抽取



数字信号的抽取

7.2 以整数因子D抽取

❖ **2. 抽样前后频谱关系**

$$X_s(e^{jw}) = X_s(e^{j\Omega T_s}) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\Omega - n\Omega_s) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\frac{w-2\pi n}{T_s})$$

其中 $\Omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s},\qquad w = \Omega T_s$

$$X_D(e^{jw}) = X_D(e^{j\Omega T_D}) = \frac{1}{T_D}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\Omega - n\Omega_D) = \frac{1}{DT_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\Omega - \frac{1}{D}n\Omega_s)$$

$$= \frac{1}{DT_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\frac{w-2\pi n}{DT_s})$$

其中 $\Omega_D = \dfrac{2\pi}{T_D} = \dfrac{2\pi}{DT_s} = \dfrac{\Omega_s}{D},\qquad w = \Omega T_D = \Omega DT_s$

7.2 以整数因子D抽取

- **3.抽取过程和数学表达**

每*D*个抽样，保留第1个，丢弃后*D*-1个。

等效为两步：

$$x'(n)=\begin{cases}x(n), n=0,\pm D,\pm 2D,\cdots\\0, \quad otherwise\end{cases}$$

每*D* 个抽样，
保留第1 个，后*D* - 1 个置零。

$$=x(n)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-mD) \qquad \text{(first step)}$$

抽样间隔仍为 T_x

$$y_D(n)=x'(Dn)=x(Dn) \quad \text{(second step)}$$

稀疏的序列（去除零点）
抽样间隔为 $T_y=DT_x$

例：*D*=3，则

$$y_D(0)=x(0)$$

$$y_D(1)=x(3)$$

$$y_D(2)=x(6)$$

$$\cdots$$

7.2 以整数因子D抽取

❖ 4、抽取前后的频谱

抽取前 $x(n)$

的频谱 $X(e^{jw_x})$

抽取后 $y_D(n)$ 的频谱

$$Y_D(e^{jw_y}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_D(m)e^{-jw_y m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x'(Dm)e^{-jw_y m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [x(Dm)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(Dm-kD)]e^{-jw_y m}$$

傅里叶级数展开

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

令 $l = Dm$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} [x(l)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(l-kD)]e^{-j\frac{w_y}{D}l}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} [x(l)\boxed{\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}li}}]e^{-j\frac{w_y}{D}l}$$

抽取前后复频谱间关系

$$= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{-j\frac{w_y l-2\pi li}{D}}]$$

抽取后的频谱：

D倍扩展

幅度降到 $1/D$

2π 整数倍周期移位叠加

$$Y_D(z_y) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(z_x e^{-j\frac{2\pi i}{D}})$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(z_x W_D^i)$$

做DTFT

$$= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(e^{j\frac{w_y-2\pi i}{D}})$$

$w_y = Dw_x$

$$= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(e^{j(w_x-\frac{2\pi i}{D})})$$

7.2 以整数因子D抽取

5、抽取的频率响应

$$Y_D(e^{jw_y})=\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1}X(e^{j(w_x-\frac{2\pi i}{D})})$$

频率轴 w_x
重复D次
周期为 $2\pi/D$
幅度减小到1/D

频率轴 $w_y=Dw_x$
频率扩展D倍
相邻周期间距减小，可能混叠

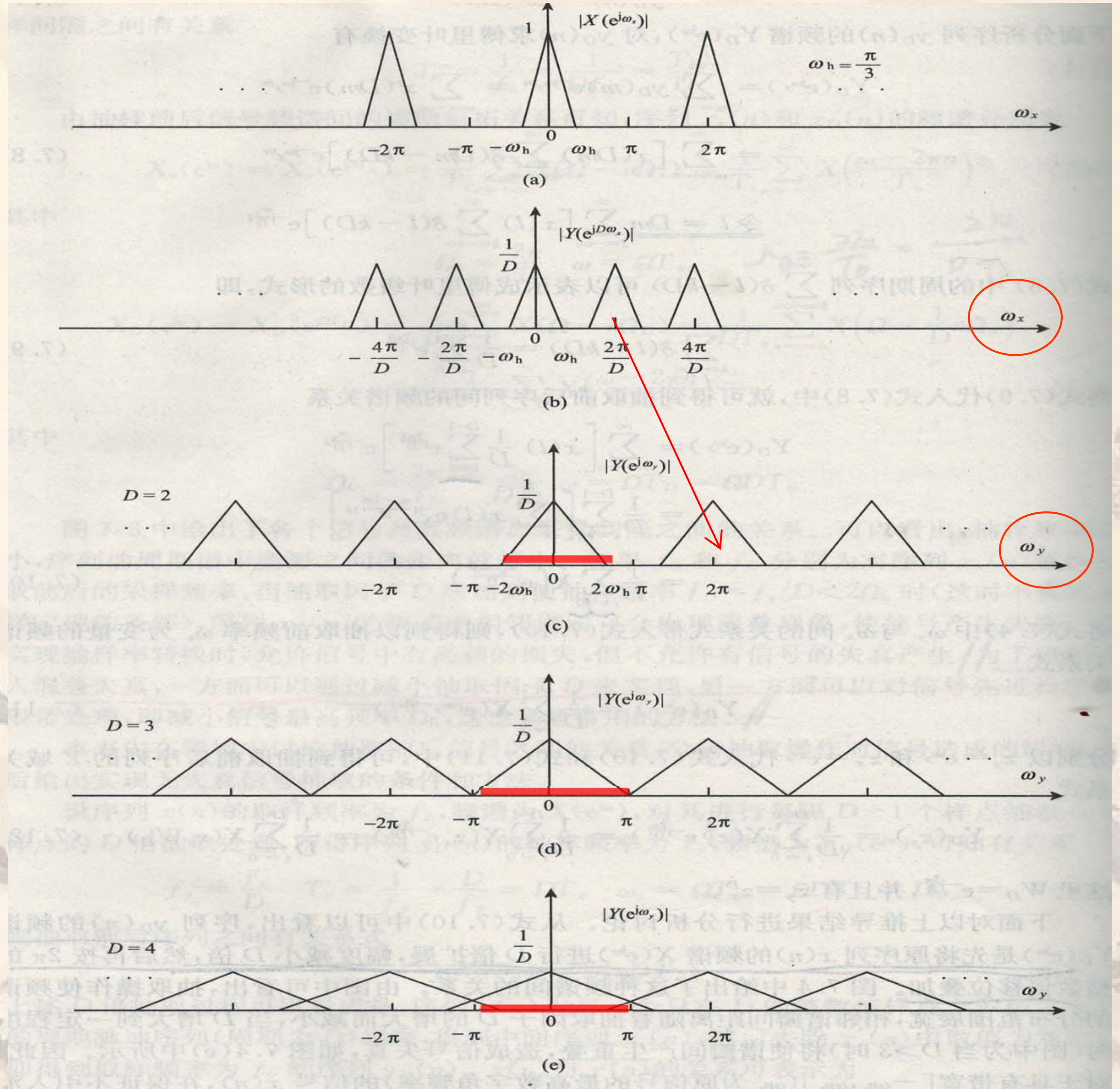


图 7.4 不同抽取后信号频谱的变化

7.2 以整数因子D抽取

- 抽样率转换时，允许信号中有高频的损失，不允许有信号的失真（混叠）产生。

- 为了减小混叠失真，采取的方法：
  - 通过减小抽取因子D来实现

    给定带宽 $[-w_h, w_h]$ ，保证不引入混叠的最大抽取因子 $D_{\max} = \left\lfloor \dfrac{\pi}{w_h} \right\rfloor$

  - 通过对信号先进行滤波限带处理，即减小信号的最高频率

    给定抽样率D，保证不产生混叠的原信号带宽为 $[-\dfrac{\pi}{D}, \dfrac{\pi}{D}]$

7.2 以整数因子D抽取

滤波限带处理 $w_y = Dw_x$

给定信号带宽 $[-\omega_h, \omega_h]$

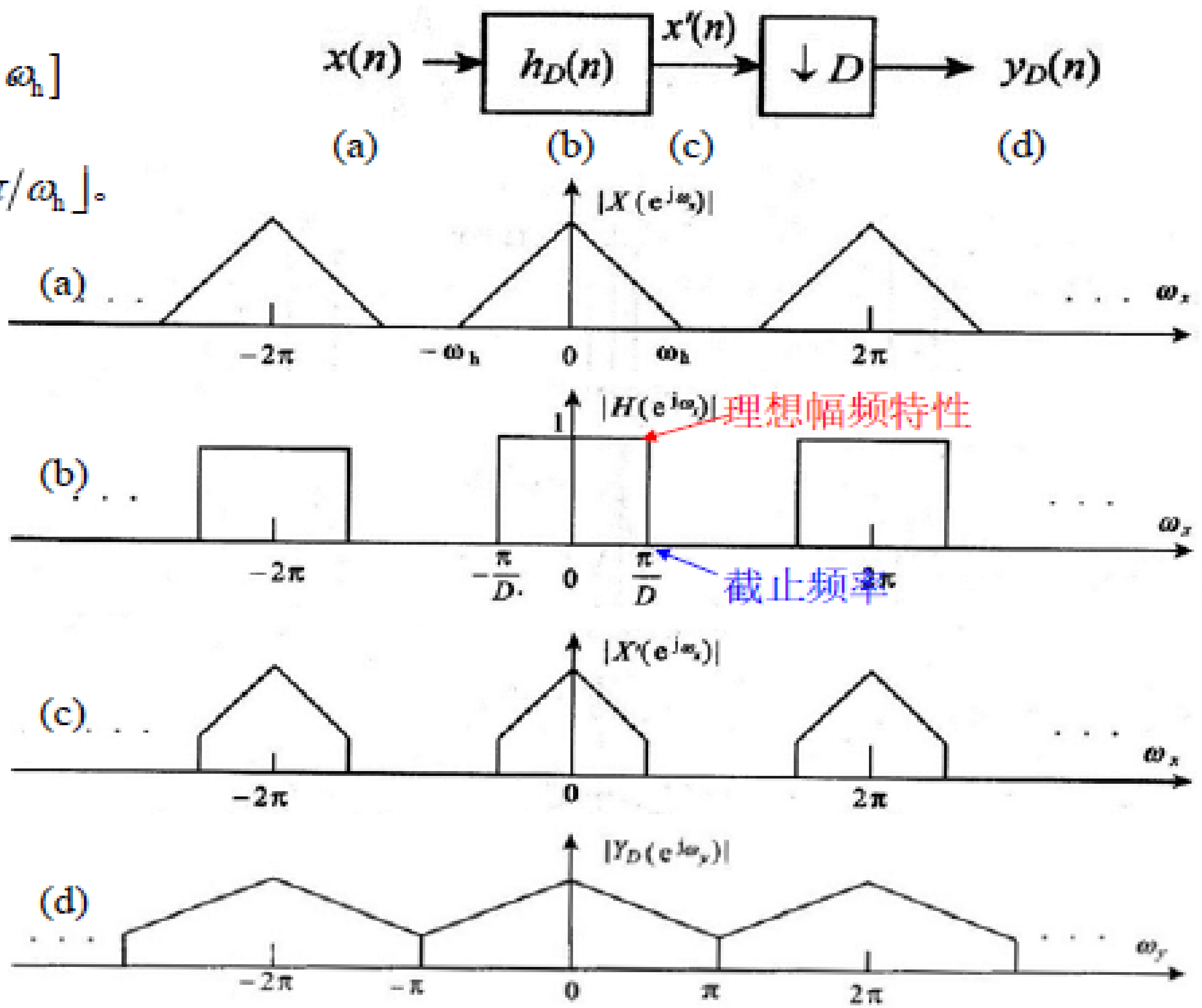
保证不引入混叠的最大抽取因子 $D_{max} = \lfloor \pi/\omega_h \rfloor$。

给定抽取因子D，

为抽取后不产生混叠，原信号带宽须限制在 $\left[\frac{-\pi}{D}, \frac{\pi}{D}\right]$ 内。

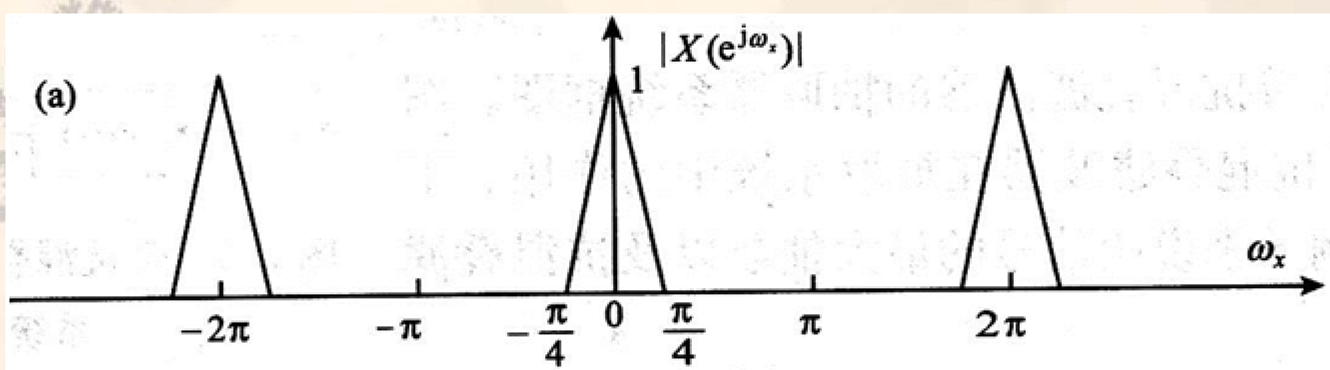
为避免产生混叠，

抽取前应先做抗混叠滤波。



7.2 以整数因子D抽取

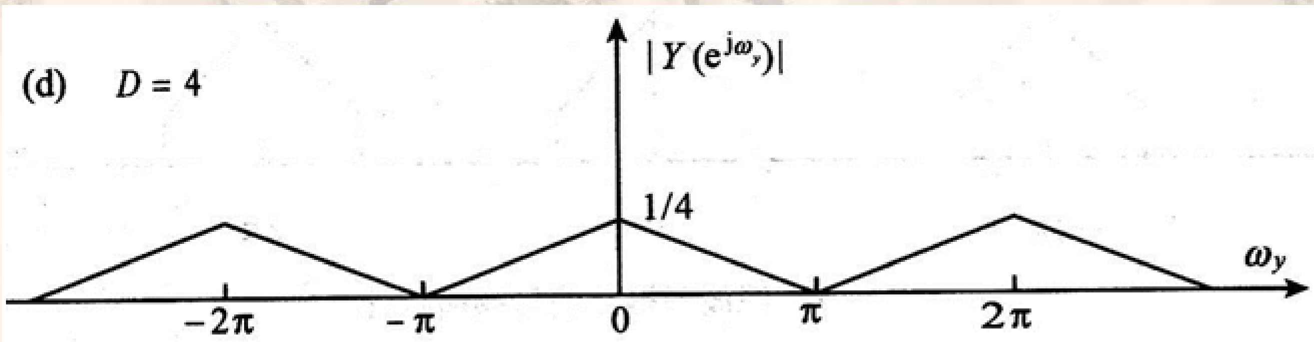
例7.1 信号$x(n)$ 的频谱如图。



（1）求信号的最大抽取因子及抽取后信号的频谱

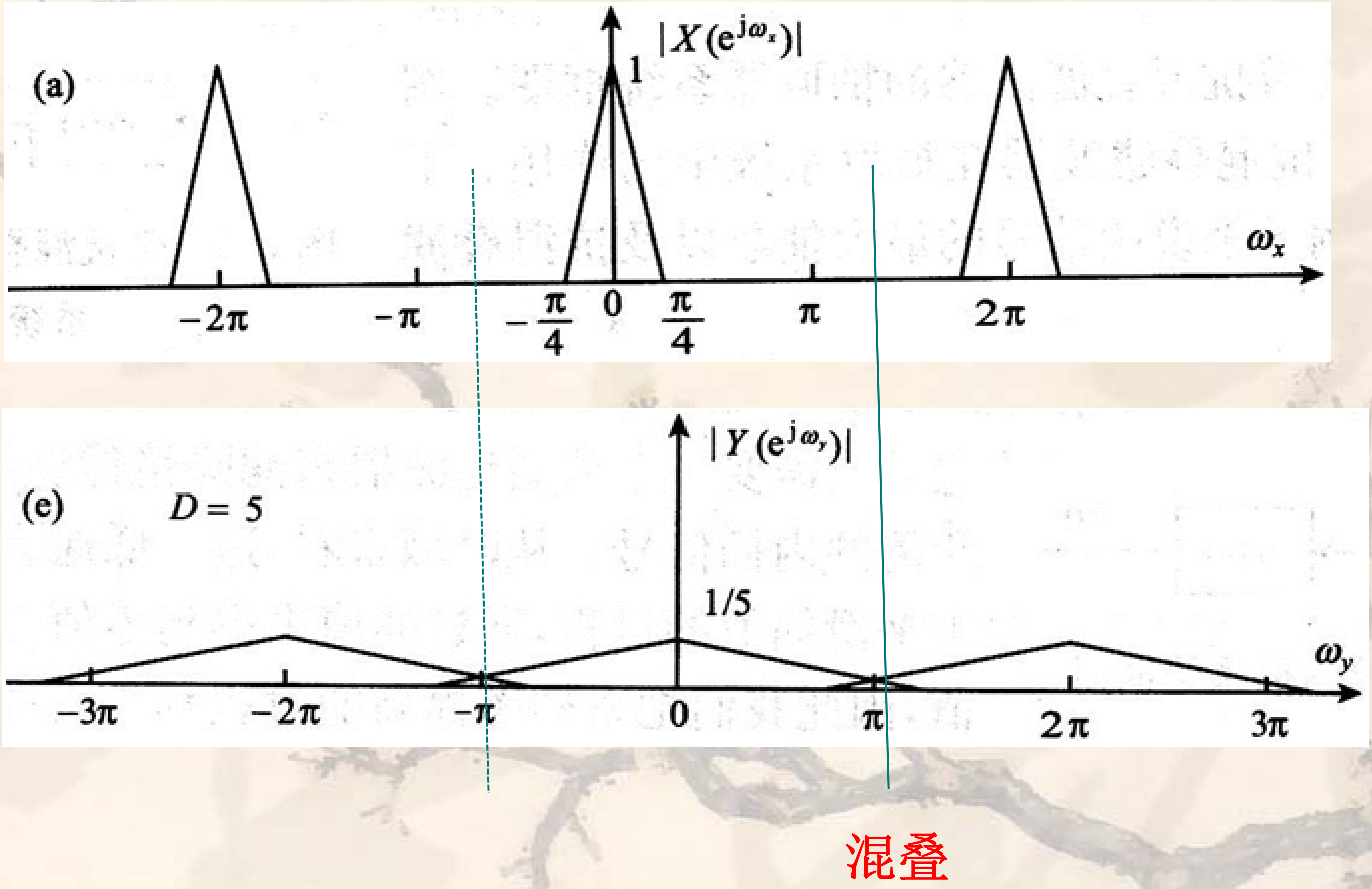
最大抽取因子 $D_{\max} = [\frac{\pi}{w_h}] = 4$

用最大因子抽取后信号的频谱 $D = 4$



7.2 以整数因子D抽取

（**2**）若对***x***(***n***) 进行***D* = 5** 的抽取。求抽取后信号***y***(***n***)的频谱。



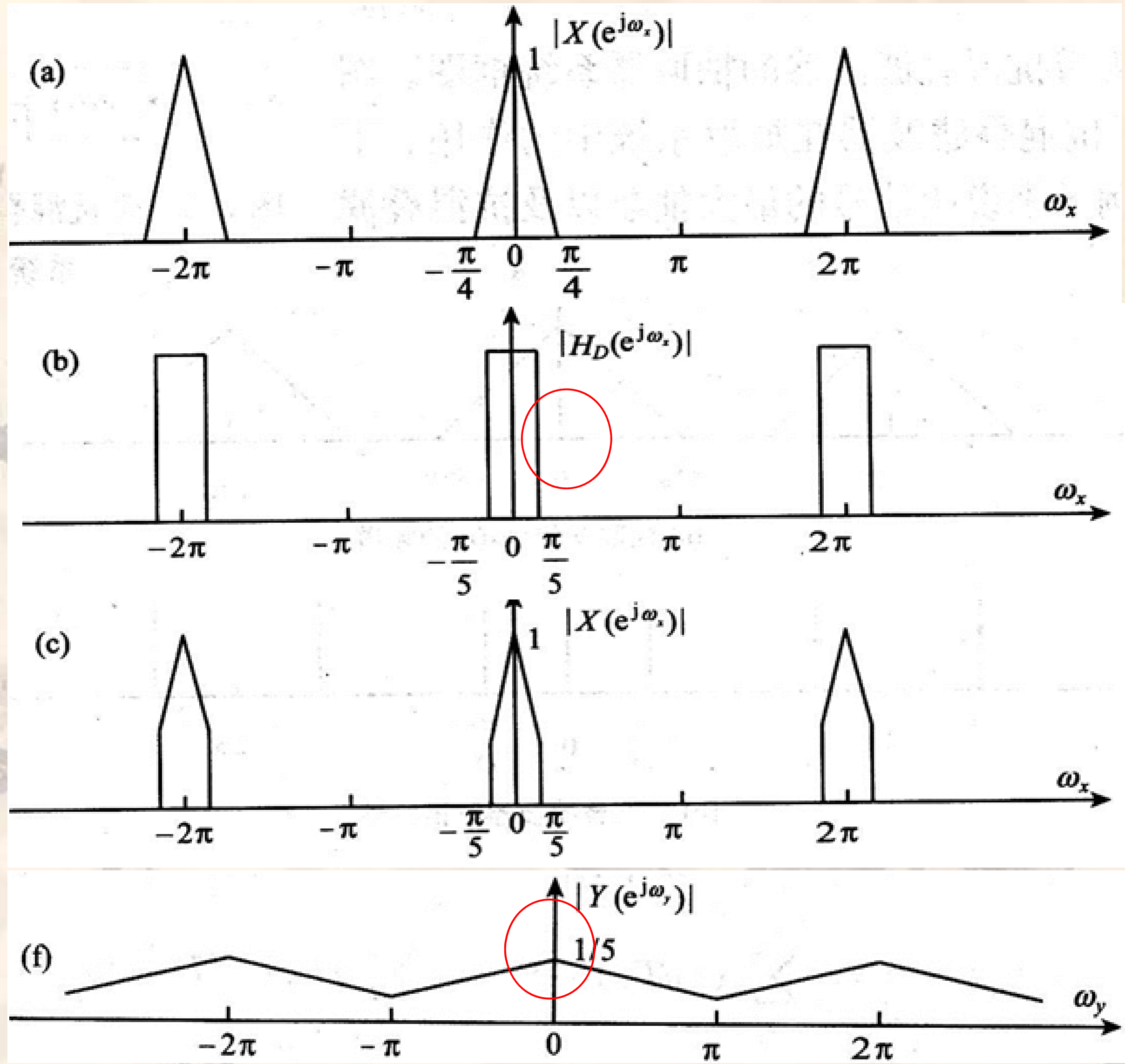
7.2 以整数因子D抽取

要进行$D = 5$的抽取。

为使信号$y(n)$无混叠，求抗混叠滤波器的截止频率。

先抗混叠滤波

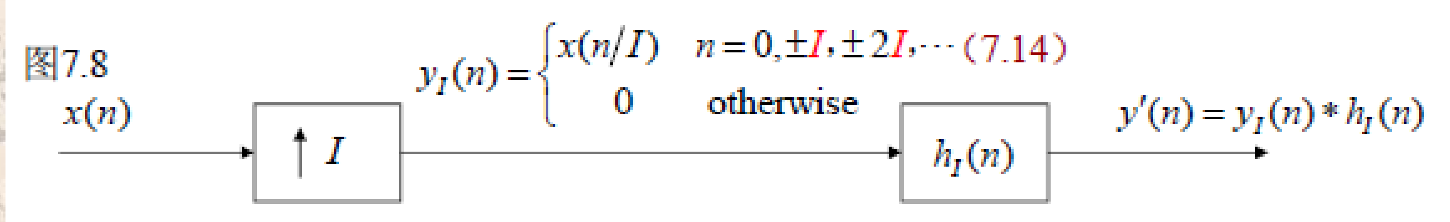
再抽取



7.3 以整数因子 I 内插

❖ 内插—— 提高抽样频率（上采样，升采样）

*I*倍内插：每个样点后插入*I* -1个零值点，再通过低通滤波来平滑

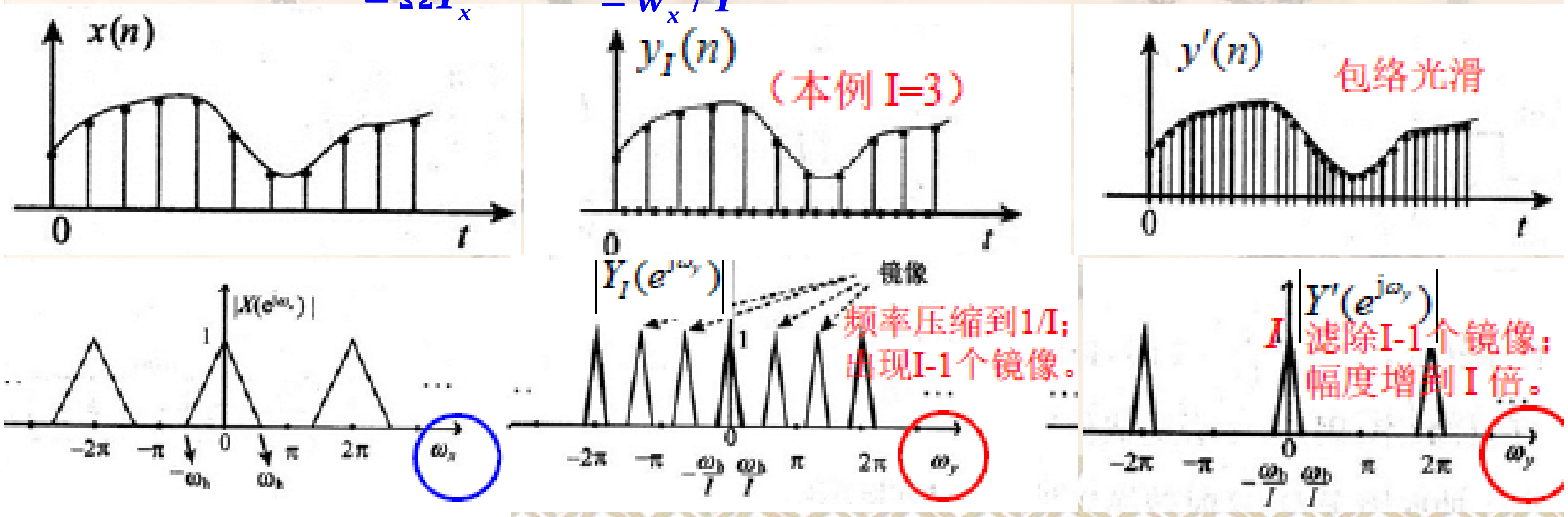


抽样间隔 T_x　　$T_y = T_x / I$

数字角频率 $w_x = 2\pi f T_x = \Omega T_x$　　$w_y = 2\pi f T_y = w_x / I$

理想频响　弥补能量损失

$$|H_I(e^{jw})| = \begin{cases} I, |w_y| \le \dfrac{\pi}{I} \\ 0, otherwise \end{cases}$$

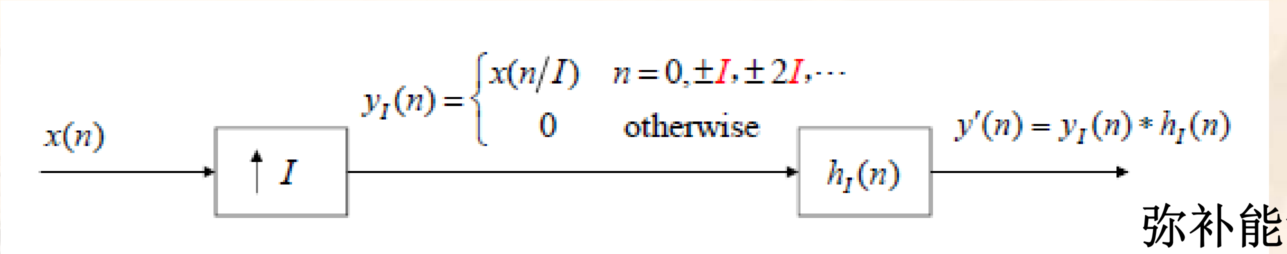


❖ 说明：

- 内插过程中原信号相邻样本点间插入的是零值点，而非真正的抽样点
- 得到一个抽样率提高了I倍的信号，同时存在镜像失真；
- 为了消除镜像失真，需要加入一个低通滤波器

注：镜像失真与抽样产生的混叠失真不同，镜像不会造成信号的信息损失。

7.3 以整数因子 I 内插



弥补能量损失

内插前后复频谱的关系

$$Y_I(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_I(n)z^{-n}=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n=mI}}^{\infty}x(n/I)z^{-n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-mI}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)(z^I)^{-m}$$

$$=X(z^I)$$

内插前后
频谱的关系 $Y_I(e^{jw_y})=X(e^{jw_yI})$

低通滤波器

$$|H_I(e^{jw})|=\begin{cases}I, |w_y|\le \dfrac{\pi}{I}\\ 0, otherwise\end{cases}$$

内插且滤波后

频谱的关系

$$Y'(e^{jw_y})=Y_I(e^{jw_y})H_I(e^{jw_y})$$

$$=X(e^{jw_yI})H_I(e^{jw_y})$$

频带压缩了I倍，周期变为 $2\pi/I$。

（不同于周期延拓，不会混叠）

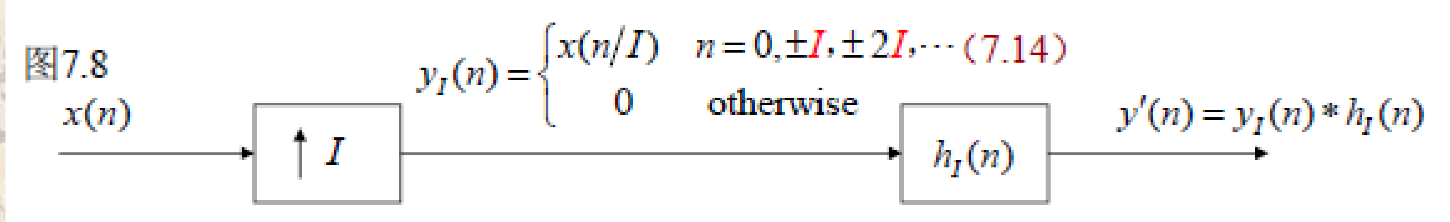
原主值区间上，现在有I 个谱瓣（镜像）。

频域：只保留一个谱瓣
时域：包络平滑

7.3 以整数因子 I 内插

❖ 内插—— 提高抽样频率（上采样，升采样）

I倍内插：每个样点后插入I -1个零值点，再通过低通滤波来平滑

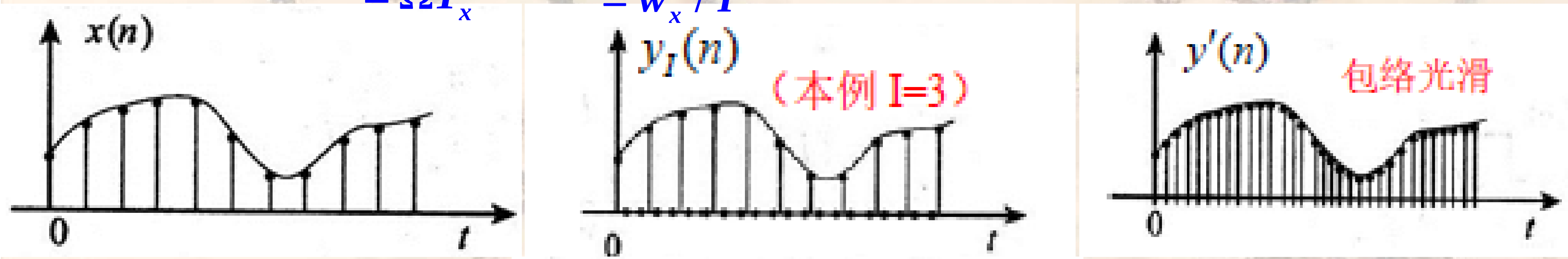


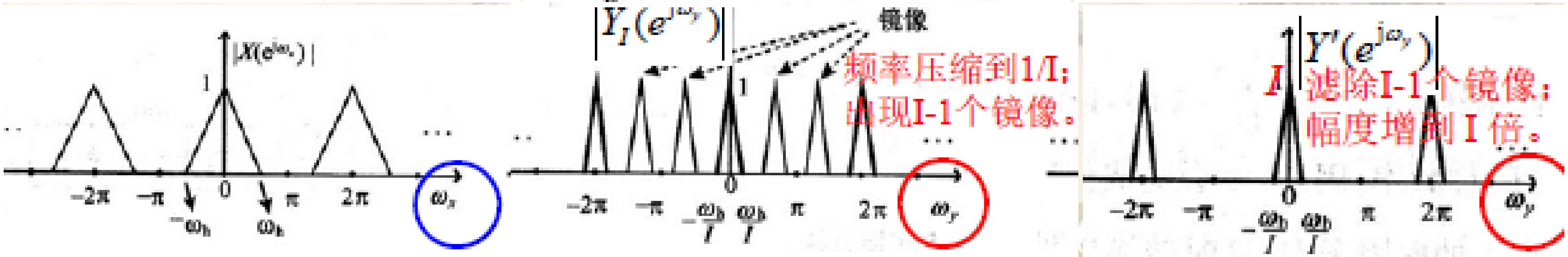
抽样间隔 T_x $\quad T_y=T_x/I$

数字角频率 $w_x=2\pi fT_x=\Omega T_x$ $\quad w_y=2\pi fT_y=w_x/I$

理想频响 弥补能量损失

$$|H_I(e^{jw})|=\begin{cases} I, |w_y|\le \dfrac{\pi}{I} \\ 0, otherwise \end{cases}$$





7.3 以整数因子 I 内插

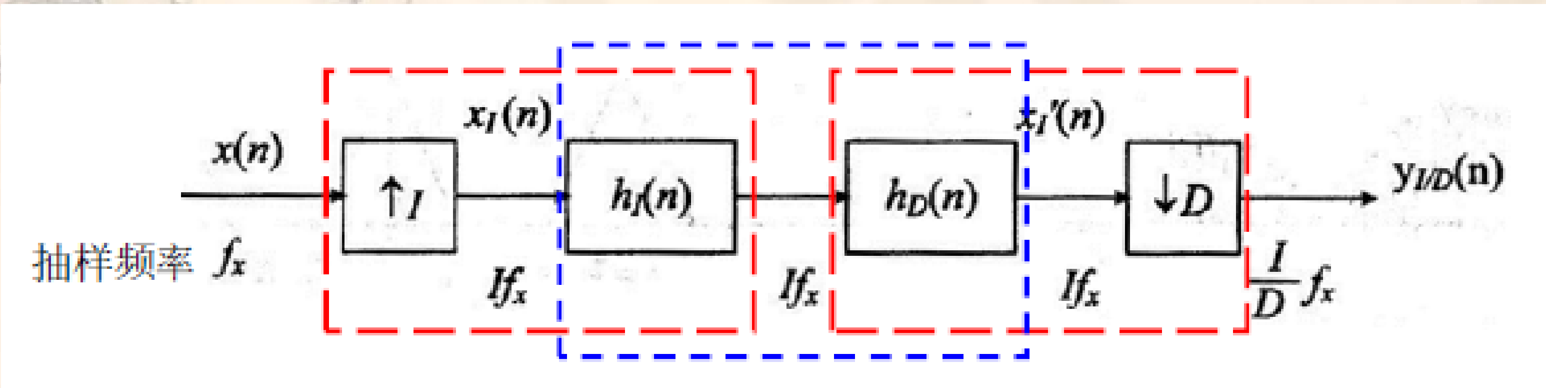
- 低通滤波器的作用：
  - 通过对滤波器频带的设置，实现对镜像谱的滤除；
  - 通过卷积运算实现对所插入零值点的插值运算，得到平滑的内插信号。

7.4 以有理数因子 I/D转换抽样频率

将抽样率变为*I / D* 倍　　*I* 和*D* 为互质的整数

先内插，再抽取。（why?）

抽取降低了采样频率，是原信号样值点减少，可能会造成信息的丢失，产生混叠。



两个低通滤波器级联，工作频率相同

合成一个低通滤波器 $h(n)$

应逼近的理想频率响应

$$|H(e^{jw})| = \begin{cases} I, |w| \le \min(\frac{\pi}{I}, \frac{\pi}{D}) \\ 0, otherwise \end{cases}$$

保证消除内插器中的镜像谱，又保证抽取器中不存在混叠失真。

7.4 以有理数因子 I/D转换抽样频率

输入输出的频域关系

两个低通滤波器级联，工作频率相同

合成一个低通滤波器 $h(n)$

应逼近的理想频率响应

$$|H(e^{jw})| = \begin{cases} I, |w| \le \min(\frac{\pi}{I}, \frac{\pi}{D}) \\ 0, otherwise \end{cases}$$

保证消除内插器中的镜像谱，
又保证抽取器中不存在混叠失真。

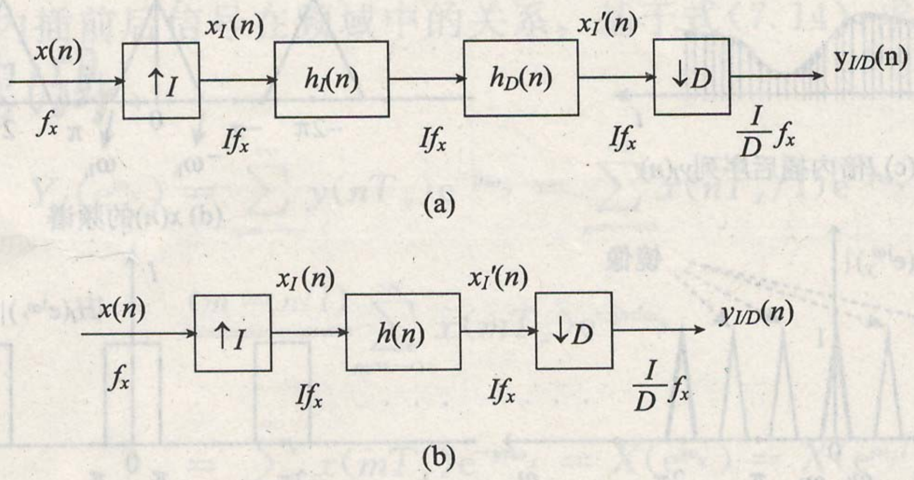


图 7.10 有利因子 I/D 频率转换系统

$\frac{I}{D} > 1$, 转换后的抽样频率大于原抽样频率，

不会造成信号信息的丢失

$\frac{I}{D} < 1$, 转换后的抽样频率小于原抽样频率，

原信号中部分高频信息丢失，这是由抗混叠滤波造成

❖ 例7.2 设信号x(n)的抽样频率为 $f_x = 12\text{kHZ}$ ，分别按如下两种情况对其进行抽样率转换：（1）抽样频率转换为 $f_y = 26\text{kHZ}$；

（2）抽样频率转换为 $f_y = 10\text{kHZ}$

解（1）由于 $\frac{f_y}{f_x} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6} = \frac{I}{D} > 1$, 无信息损失　　$\min(\frac{\pi}{I}, \frac{\pi}{D}) = \frac{\pi}{I} = \frac{\pi}{13}$

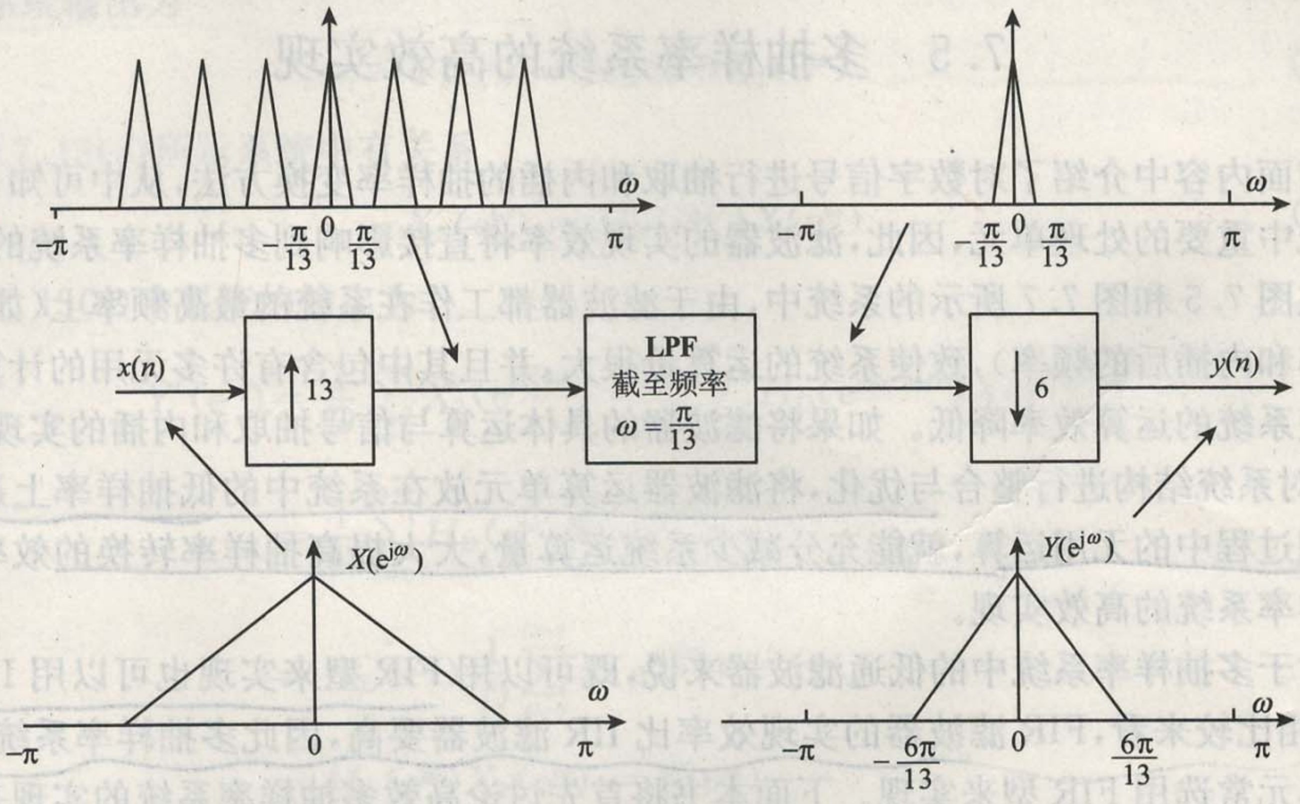


图 7.11　转换因子大于 1 时系统中信号的频谱分布

（2）由于

$$\frac{f_y}{f_x}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}=\frac{I}{D}<1,$$ 信息损失 $$\min\left(\frac{\pi}{I},\frac{\pi}{D}\right)=\frac{\pi}{D}=\frac{\pi}{6}$$

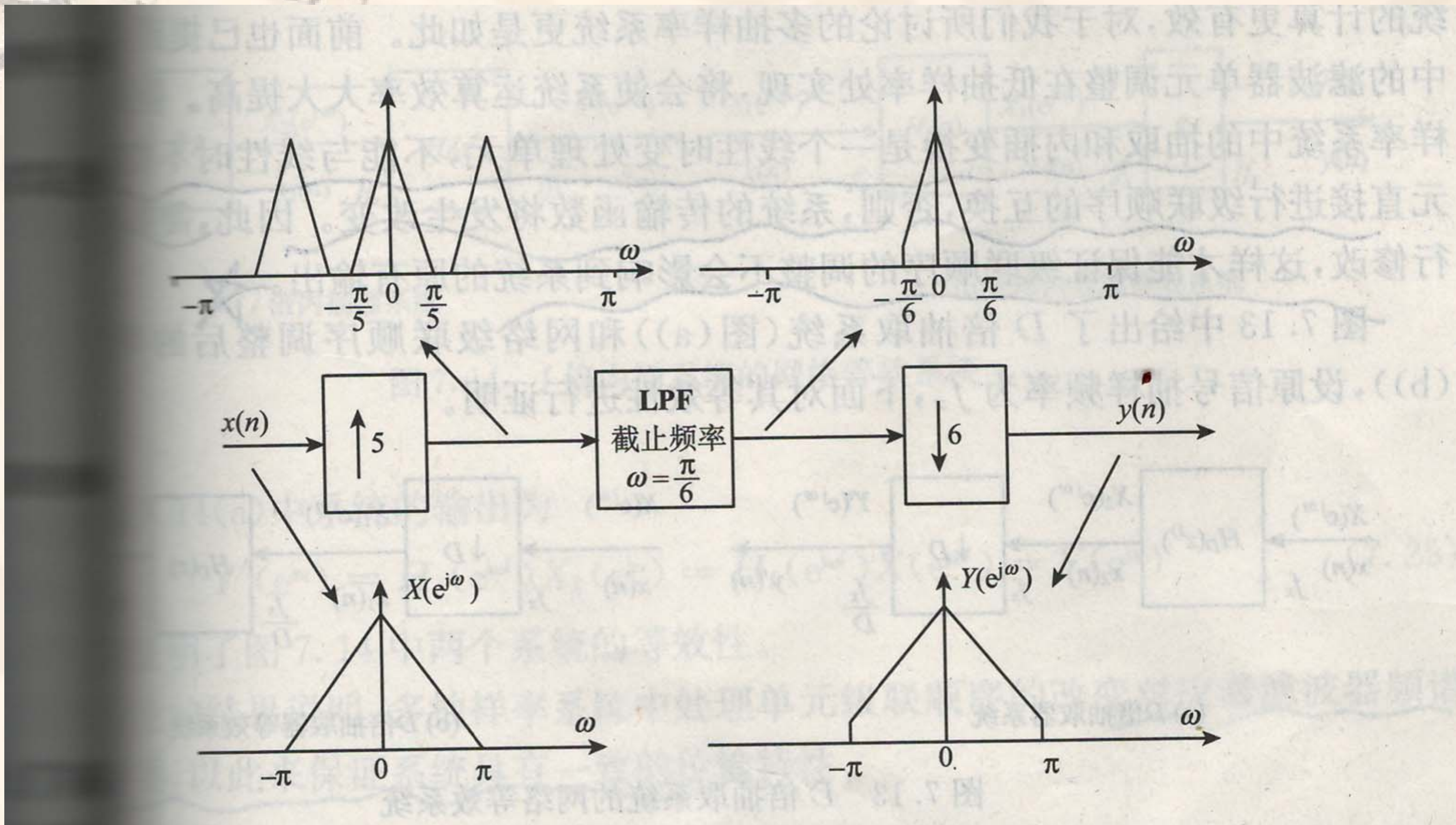


图 7.12 转换因子小于 1 时系统中信号频谱的分布

7.5 多抽样率系统的高效实现

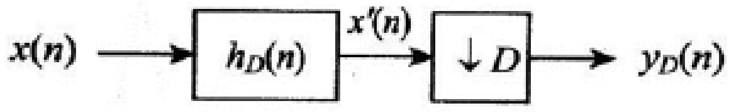


图 7.5 带抗混叠滤波器的抽取器系统框图

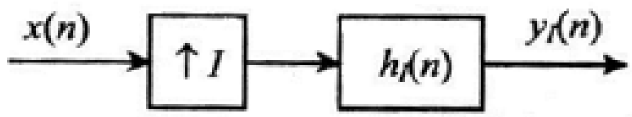


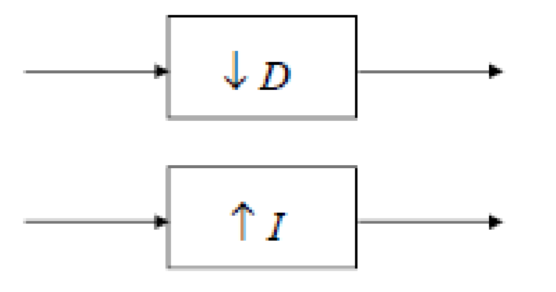
图 7.8 I 倍内插系统框图

运算量大（含无用计算），因为滤波器放在高抽样率的一侧

想要高效，滤波器应放在低抽样率的一侧（系统结构整合和优化）

想要避免相位失真，滤波器应当用**FIR** 型

抽取和内插都是线性、移变的,可以与放大器、加法器交换级联次序，

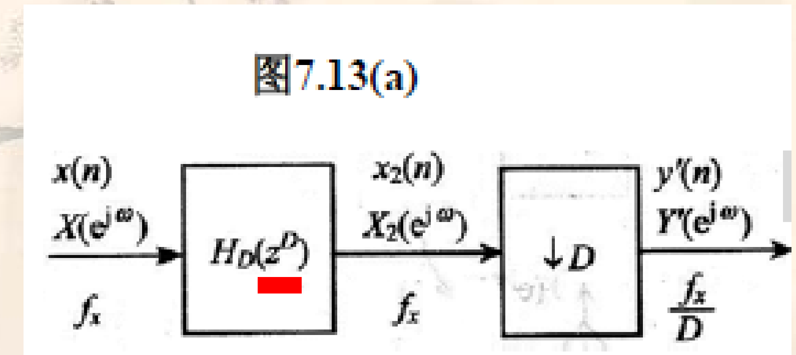


滤波器非线性
不能与延迟器交换级联次序。

怎样才能交换级联次序？

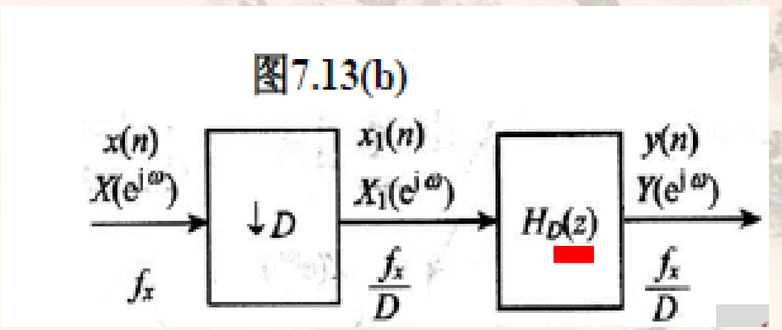
7.5 多抽样率系统的高效实现

7.5.1 网络级联的恒等变换：抽取



数字角频率 $w = \Omega T_x$

$= 2\pi f / f_x$



两个系统等效。

$$X_2(e^{jw}) = H_D(e^{jwD})X(e^{jw})$$

$$Y'(e^{jw}) = \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X_2(e^{j\frac{w-2\pi i}{D}})$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} H_D(e^{j(w-2\pi i)})X(e^{j\frac{w-2\pi i}{D}})$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} H_D(e^{jw})X(e^{j\frac{w-2\pi i}{D}})$$

$$= H_D(e^{jw})\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(e^{j\frac{w-2\pi i}{D}})$$

$$Y(e^{jw}) = H_D(e^{jw})\frac{1}{D}\sum_{i=0}^{D-1} X(e^{j\frac{w-2\pi i}{D}})$$

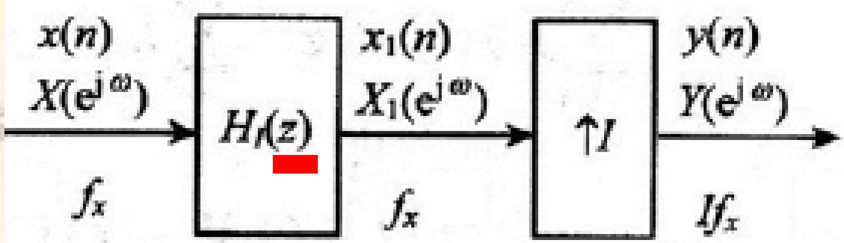
$$= Y'(e^{jw})$$

注： 不是简单的互换次序,滤波器$H_D(z^D)$和 $H_D(z)$之间的关系：频率轴成倍缩放。

7.5.1 网络级联的恒等变换

7.5.1 网络级联的恒等变换：内插

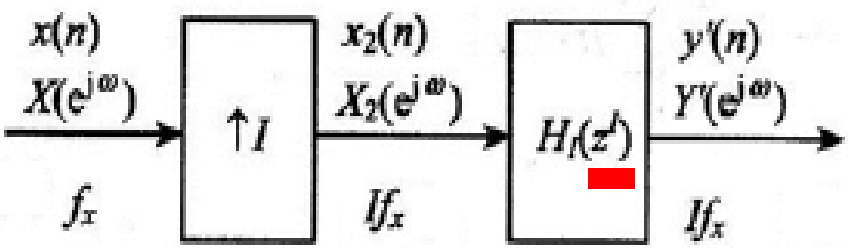
图7.14(b)



$$X_1(e^{j\omega})=H_I(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{jw})=X_1(e^{jwI})$$
$$=H_I(e^{jwI})X(e^{jwI})$$

图7.14(a)



$$X_2(e^{jw})=X(e^{jwI})$$

$$Y'(e^{jw})=H_I(e^{jwI})X_2(e^{jw})$$
$$=H_I(e^{jwI})X(e^{jwI})$$

$$\boxed{Y(e^{jw})=Y'(e^{jw})}$$

两个系统等效。

不是简单的互换次序，滤波器 $H_I(z^I)$和 $H_I(z)$之间的关系：频率轴成倍缩放

7.5.2 FIR 滤波器的多相分解表示

借助上述 网络恒等变换，将系统中的滤波器单元与抽样率单元进行级联顺序的交换，从而获得更高效的系统实现

多相分解：按信号不同相位分组

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

$$=[h(0)z^{-0}+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+\cdots+h(L-1)z^{-(L-1)}]+$$
$$[h(L)z^{-L}+h(L+1)z^{-(L+1)}+h(L+2)z^{-(L+2)}+\cdots+h(2L-1)z^{-(2L-1)}]+\cdots$$
$$[h((M-1)L)z^{-(M-1)L}+h((M-1)L+1)z^{-((M-1)L+1)}+h(ML-1)z^{-(ML-1)}]$$

$$=\sum_{i=0}^{L-1}h(i)z^{-i}+\sum_{i=0}^{L-1}h(L+i)z^{-(L+i)}+\cdots+\sum_{i=0}^{L-1}h((M-1)L+i)z^{-((M-1)L+i)}$$

$$=\sum_{i=0}^{L-1}z^{-i}\{h(i)+z^{-L}h(L+i)+\cdots+h((M-1)L+i)z^{-(M-1)L}\}$$

$$=\sum_{i=0}^{L-1}z^{-i}\sum_{j=0}^{M-1}h(jL+i)z^{-jL}$$

$$=\sum_{i=0}^{L-1}z^{-i}\sum_{j=0}^{M-1}h(jL+i)(z^{L})^{-j}$$

$$=\sum_{i=0}^{L-1}E_i(z^{L})z^{-i}$$

$$E_i(z^L)=\sum_{j=0}^{M-1}h(jL+i)(z^L)^{-j},\quad i=0,1,2\cdots,L-1$$

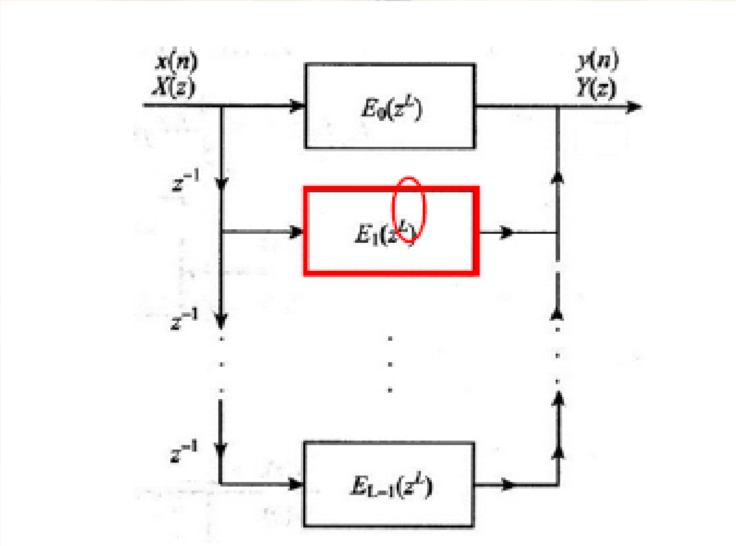
7.5.2 FIR 滤波器的多相分解表示

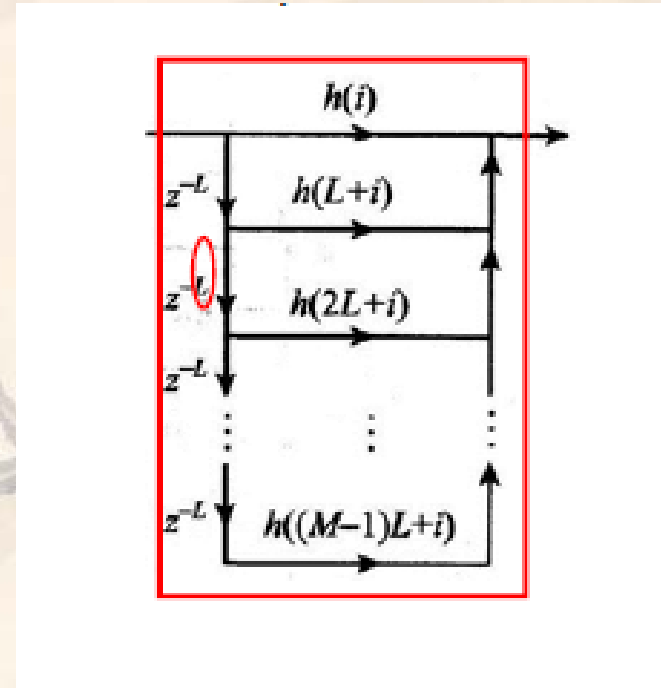
$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{L-1}\boxed{E_i(z^L)}z^{-i}$$

$$E_i(z^L)=\sum_{j=0}^{M-1}h(jL+i)(z^L)^{-j},\quad i=0,1,2\cdots,L-1$$

直接型　　多相型

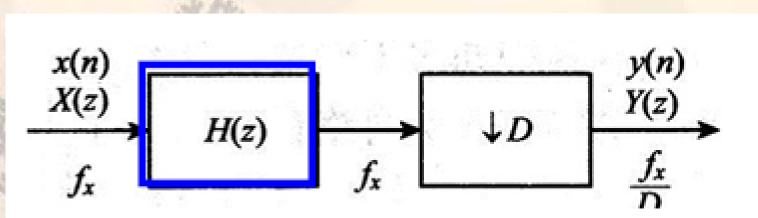
$$H(e^{jw})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-jwn}=\sum_{n=0}^{L-1}E_i(e^{jwL})e^{-jwi}$$





7.5.3 多抽样率系统的高效FIR多相实现

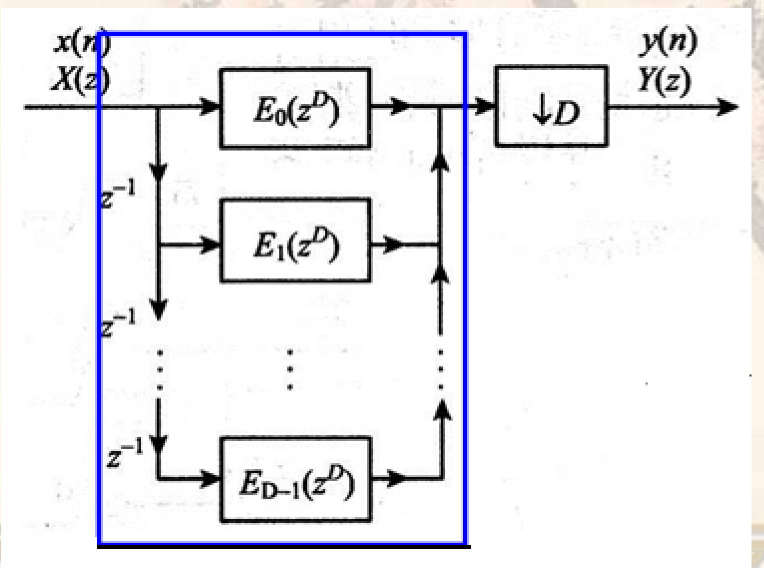
1. *D* 倍抽取器系统的高效FIR 多相实现

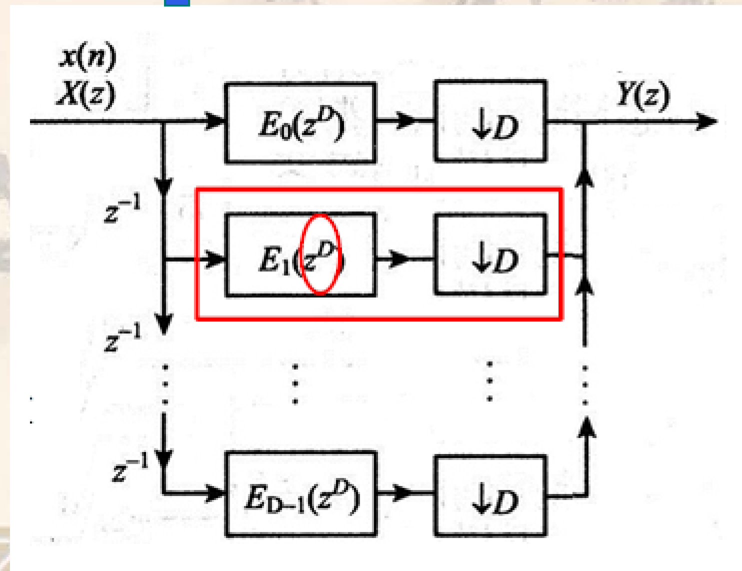


实际的抽取系统（图 7.5）

$$E_i(z^D)=\sum_{j=0}^{M-1} h(jD+i)(z^L)^{-j},\quad i=0,1,2\cdots,D-1$$

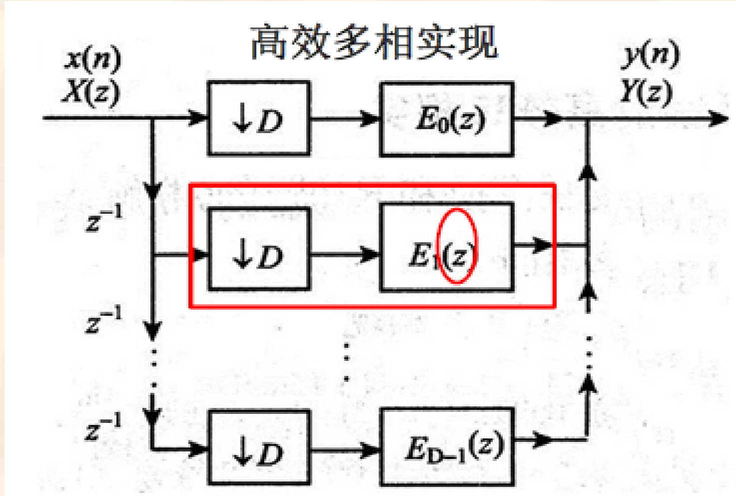
多相型





将乘法放在低抽样率的一侧

$$E_i(z)=\sum_{j=0}^{M-1} h(jD+i)(z)^{-j},\quad i=0,1,2\cdots,D-1$$



例7.3: 对抽样频率为fs的信号x(n)进行4倍抽取，设滤波器冲击响应h(n)的长度为12，用高效FIR多相结构实现此抽取系统。

解：D=4，N=12, M=N/D=3. 滤波器以4个3阶并联子网络实现

$$E_0(z)=h(0)+h(4)z^{-1}+h(8)z^{-2}$$

$$E_1(z)=h(1)+h(5)z^{-1}+h(9)z^{-2}$$

$$E_2(z)=h(2)+h(6)z^{-1}+h(10)z^{-2}$$

$$E_3(z)=h(3)+h(7)z^{-1}+h(11)z^{-2}$$

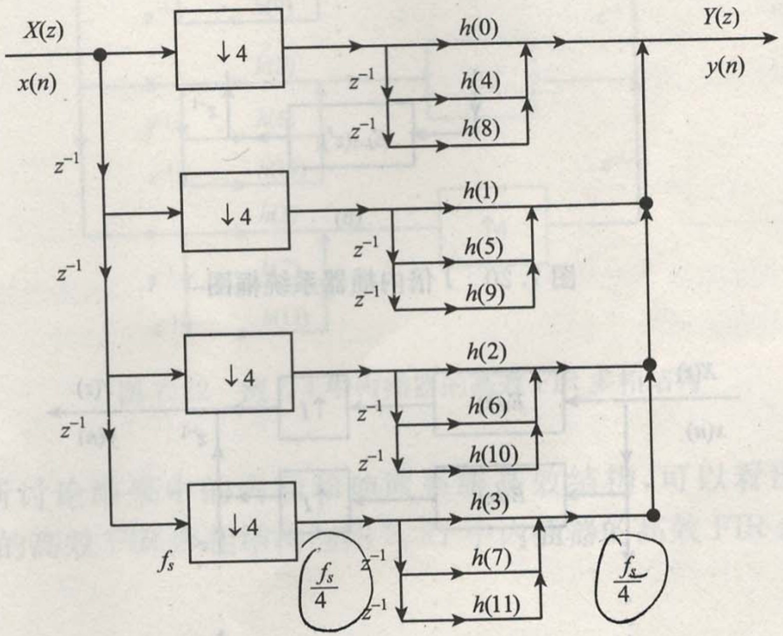
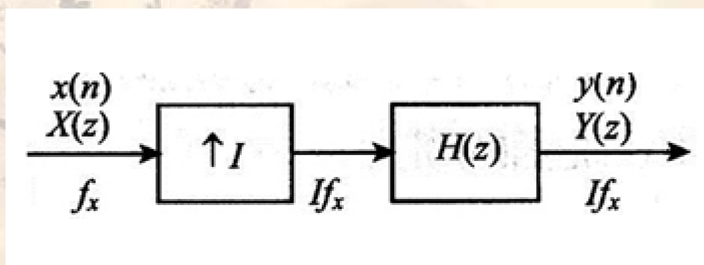


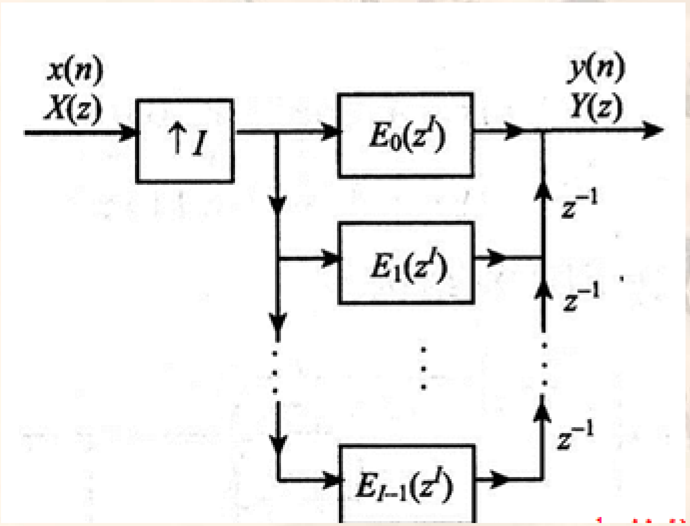
图 7.19　例 7.3 中抽取器的高效 FIR 多相结构

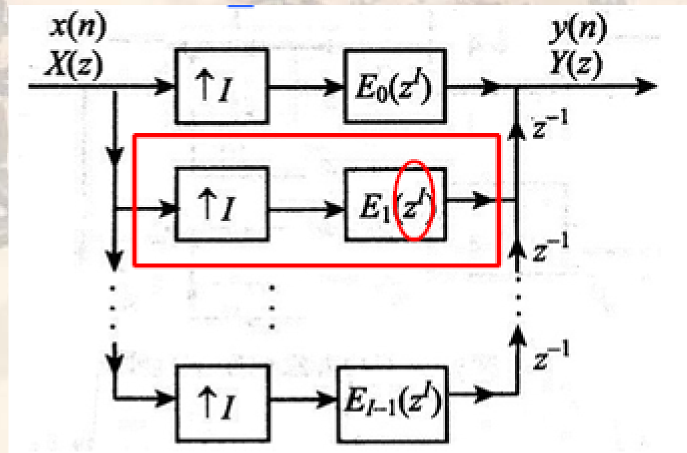
7.5.3 多抽样率系统的高效FIR多相实现

2. *I* 倍内插器系统的高效**FIR** 多相实现



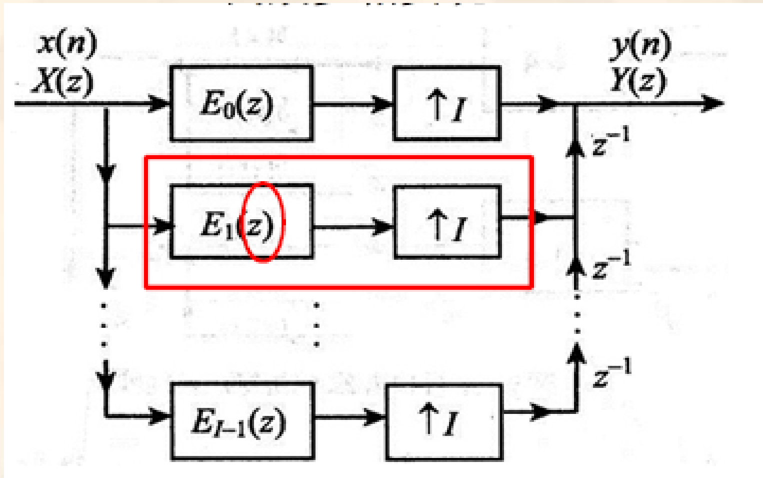
多相型





将乘法放在低抽样率的一侧

高效多相实现



例7.4: 对抽样频率为fs的信号x(n)进行4倍内插处理，设滤波器冲击响应h(n)的长度为12，用高效FIR多相结构实现此内插系统。

解：I=4，N=12, M=N/I=3. 滤波器以4个3阶并联子网络实现

$$E_0(z)=h(0)+h(4)z^{-1}+h(8)z^{-2}$$
$$E_1(z)=h(1)+h(5)z^{-1}+h(9)z^{-2}$$
$$E_2(z)=h(2)+h(6)z^{-1}+h(10)z^{-2}$$
$$E_3(z)=h(3)+h(7)z^{-1}+h(11)z^{-2}$$

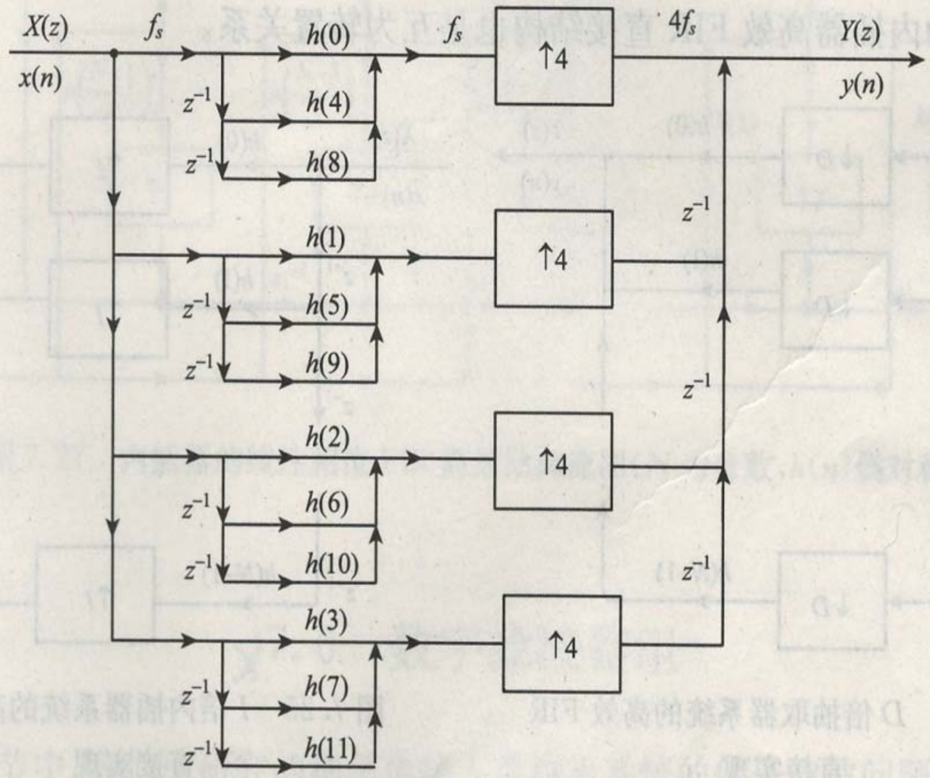


图 7.22　例 7.4 中内插器的高效 FIR 多相结构

7.5.4 多抽样率系统的高效FIR直接实现

1. 抽取系统的高效FIR 直接结构

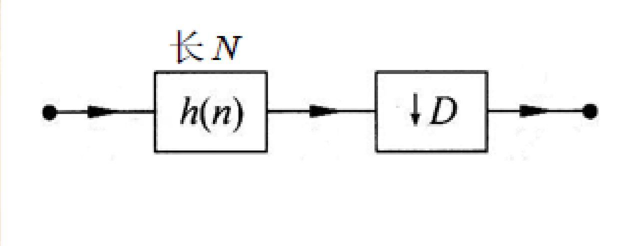
每**D** 个输入抽样，产生一个输出抽样。

需**DN** 次乘法，**D(N-1)** 次加法。

$M=1$，$L=N$，

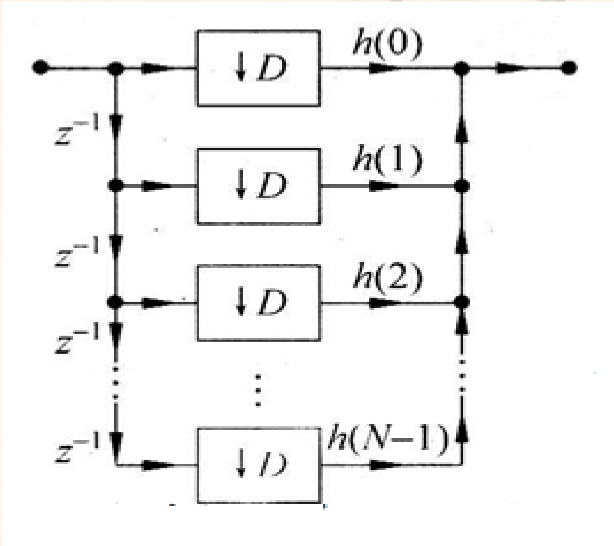
$$E_i(z^L)=\sum_{j=0}^{M-1} h(jL+i)(z^L)^{-j}=h(i),\quad i=0,1,2\cdots,L-1$$

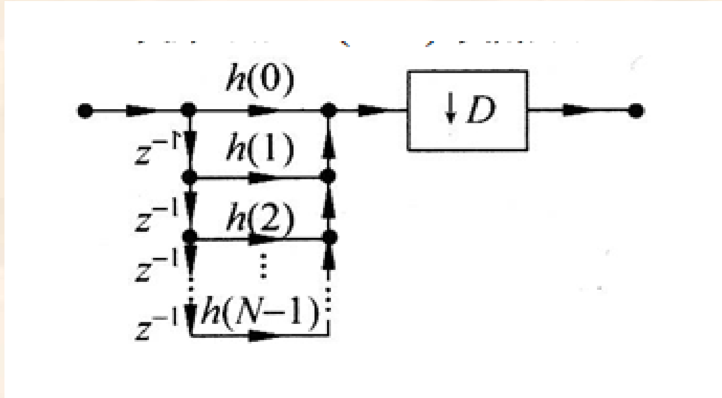
$$H(z)=\sum_{n=0}^{L-1} E_i(z^L)z^{-i}=\sum_{i=0}^{N-1} h(i)z^{-i}$$



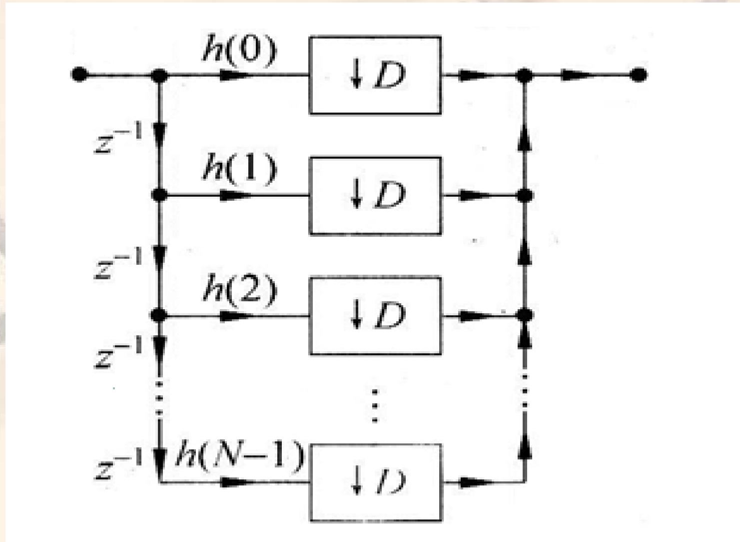
直接型

$E_i(z^N)$





将乘法放在低抽样率的一侧



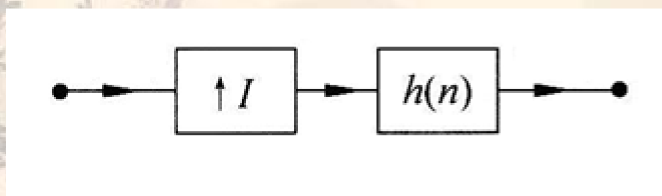
每**D** 个输入抽样，

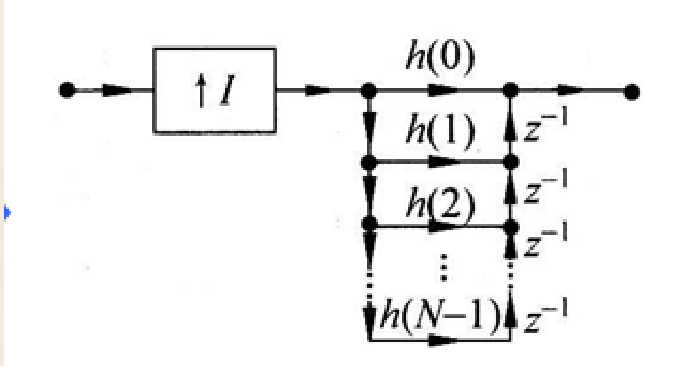
需**N** 次乘法，**(N-1)** 次加法。

7.5.4 多抽样率系统的高效FIR直接实现

2. 内插系统的高效**FIR** 直接结构

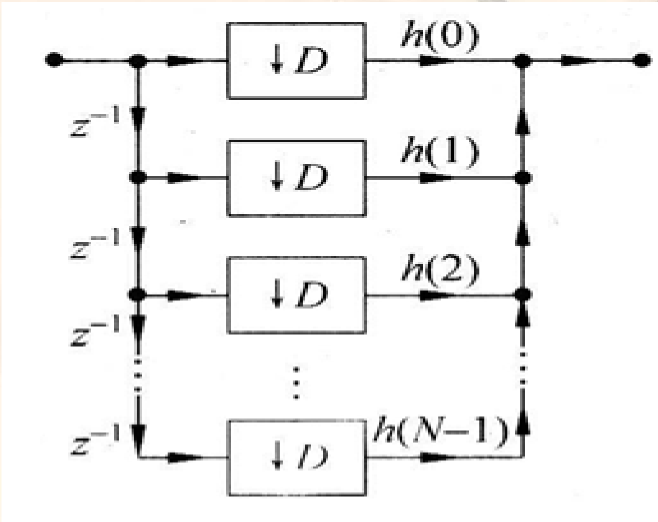
每一个输入抽样，需***I N*** 次乘法…



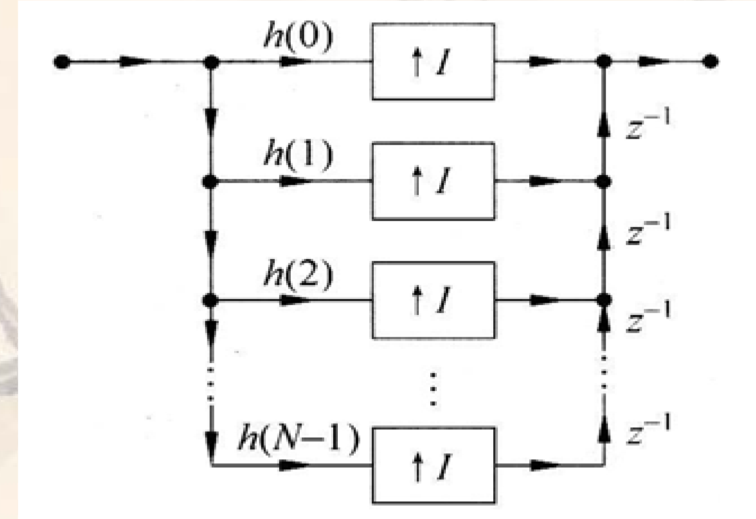


将乘法放在低抽样率的一侧

对照：抽样系统的FIR结构



互为转置
（若D = I）



每一个输入抽样，需***N*** 次乘法…

7.5.4 多抽样率系统的高效FIR直接实现

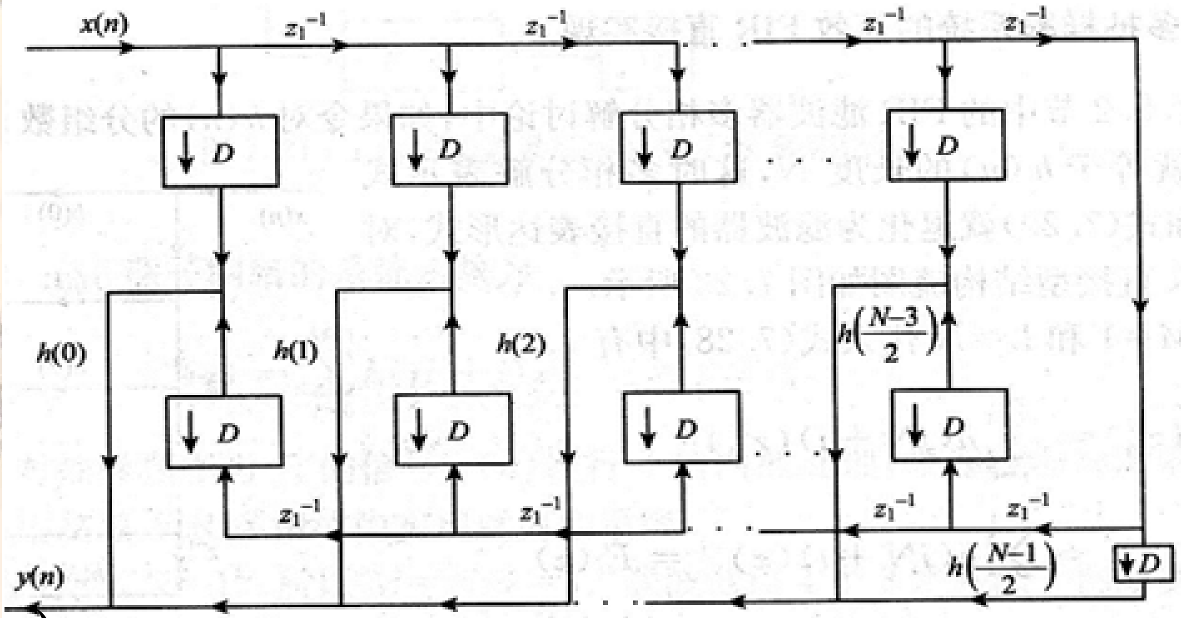
3. 抽取的FIR

线性相位结构

$h(n)$ 偶对称

N 为奇数

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n) \end{cases}$$



先抽取
后乘

$h(n)$ 偶对称

N 为奇数

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n) \end{cases}$$

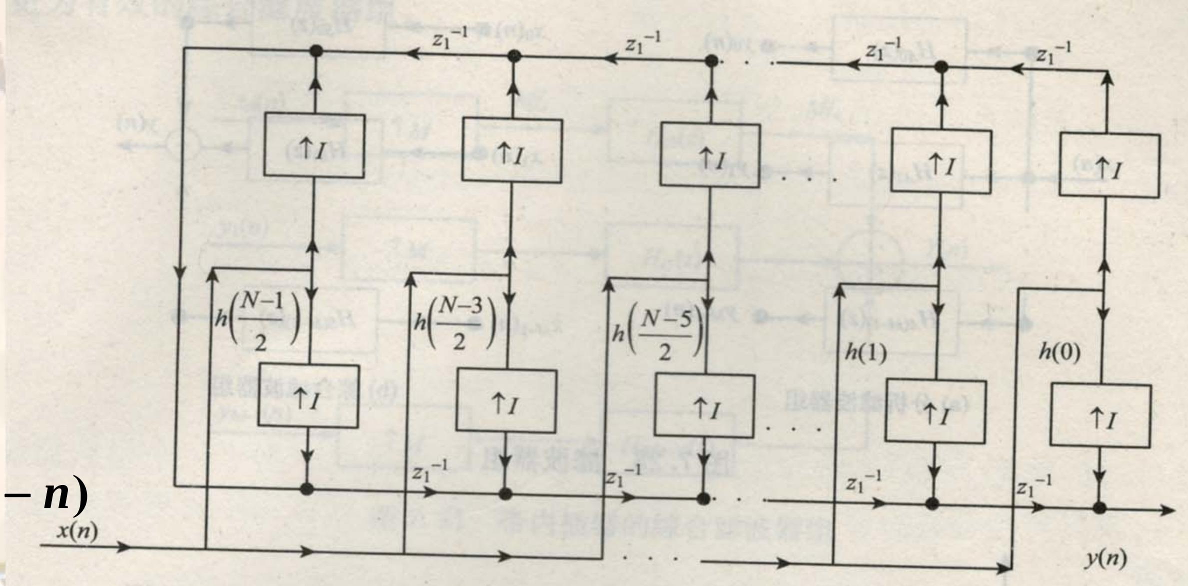


图 7.27 内插器的线性相位 FIR 高效结构流图（N 为奇数，$h(n)$偶对称）

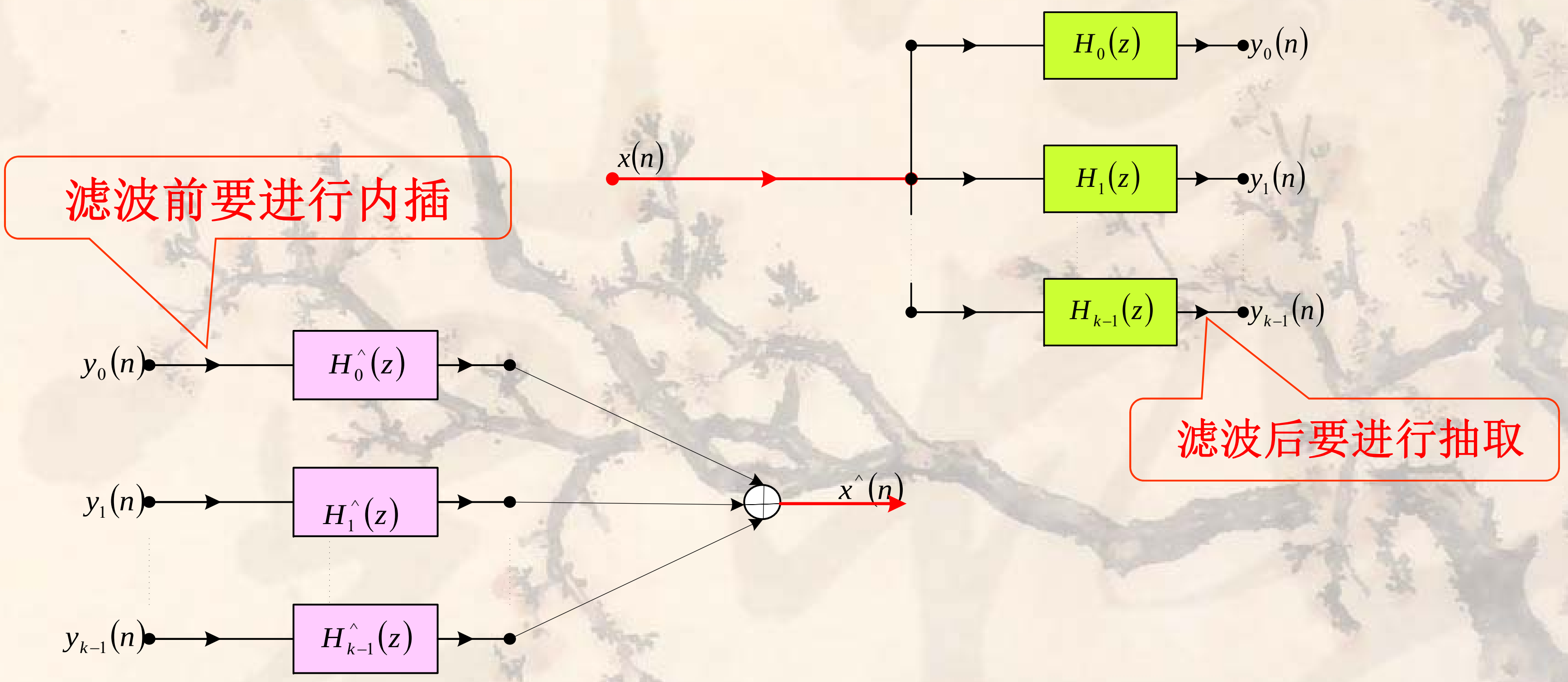
先乘
后内插

7.6 多率数字滤波器组

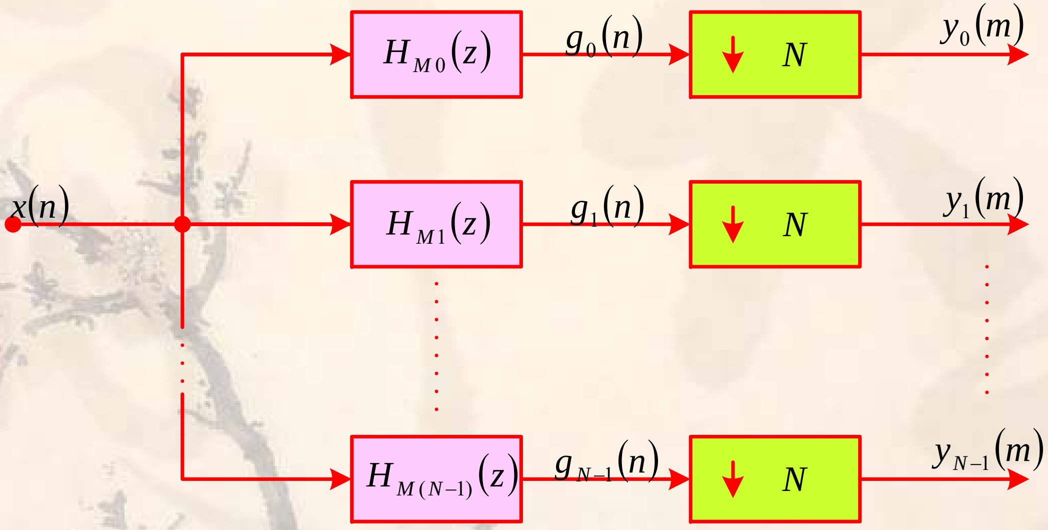
数字滤波器组： 具有共同输入或者共同输出的一组数字滤波器

分析滤波器组： 具有共同输入的一组数字滤波器（常用于谱分析）

综合滤波器组： 具有共同输出的一组数字滤波器（常用于信号合成）



7.6.1 多率数字滤波器组：分析滤波器组



- **0 通道滤波器 $H_{M0}(z)$ 通带在 -π/N 到 π/N 之间，是低通滤波器.**
- 其他通道均为带通滤波器，且它们的频率响应与第0通道滤波器的频率响应之间的关系为：

$$H_{Mk}(e^{j\omega}) = H_{M0}[e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)}]$$

冲激响应之间的关系为：$h_{Mk}(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} h_{M0}(n)$ **k=1,2,…,N-1**

7.6.1 多率数字滤波器组：分析滤波器组

0 通道滤波器的系统函数 $H_{M0}(z)$ 与其它 N-1 个通道滤波器的系统函数之间的关系：

$$H_{Mk}(z) = H_{M0}(zW_N^k)$$ 其中： $$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$ **k=0,1,2,…,N-1**

如果$H_{M0}(z)$用多相结构实现，即： $$H_{M0}(z) = \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} Q_i(z^N)$$

则： $$H_{Mk}(z) = \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} W_N^{-ki} Q_i(z^N W_N^{kN})$$

$W_N^{kN} = 1$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} W_N^{-ki} Q_i(z^N) = \sum_{i=0}^{N-1} [z^{-i} Q_i(z^N)] W_N^{-ki}$$

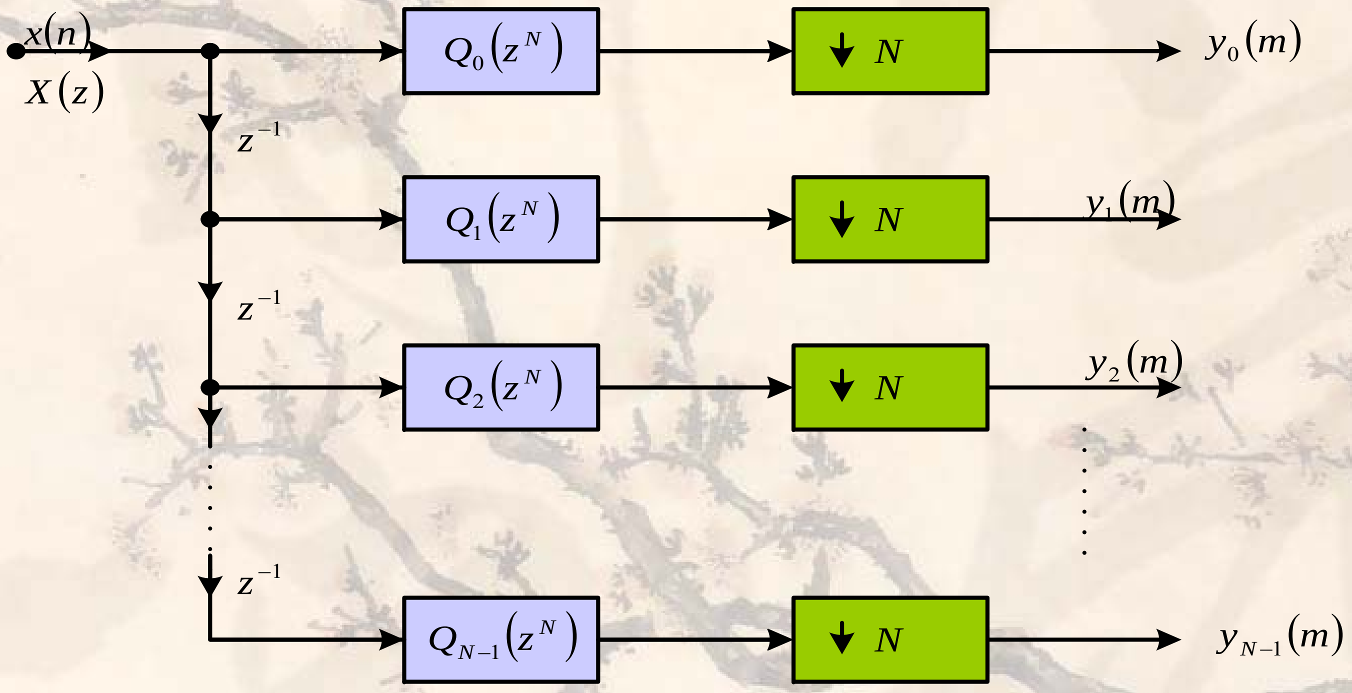
IDFT

由于$H_{Mk}(z)=G_k(z)/X(z)$，故：

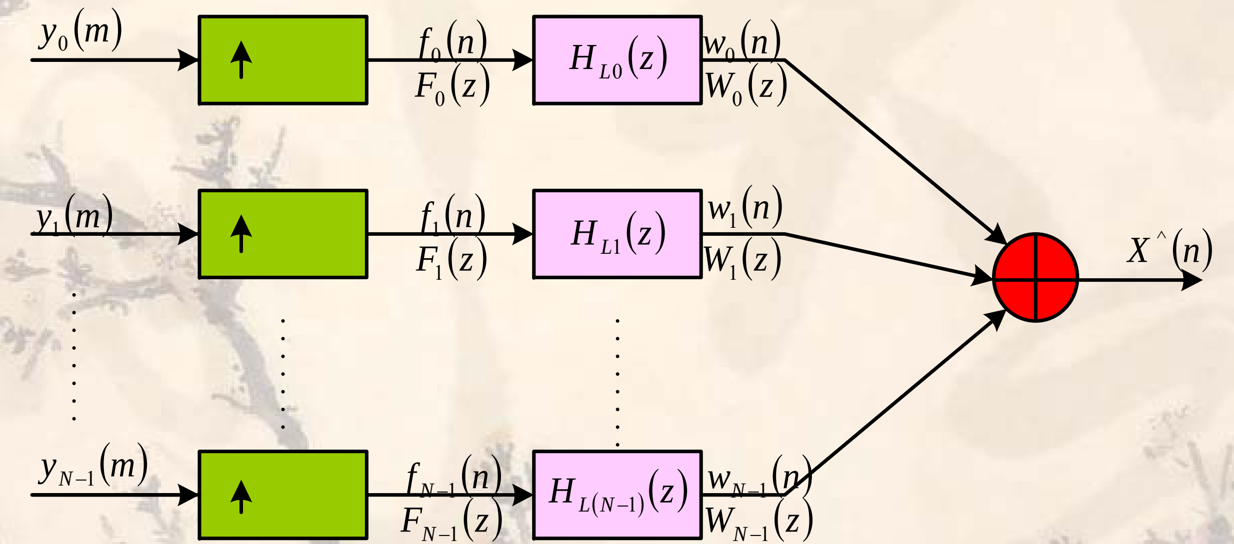
$$G_k(z) = \sum_{i=0}^{N-1} [X(z) z^{-i} Q_i(z^N)] W_N^{-ki}$$ **k=0,1,2,…,N-1**

7.6.1 多率数字滤波器组：分析滤波器组

均匀离散傅立叶变换分析滤波器组（可以采用 **IFFT** 快速算法 ）



7.6.2 多率数字滤波器组：综合滤波器组



- N 个子带信号分别输入 N 个通道，每个通道都进行因子为 N 的插零处理，使各路信号 $f_k(n)$,(k=0,1,…,N-1) 的频谱，在 $-\pi$ 到 π 的一个周期内含有原信号 $y_k(m)$,(k=0,1,…,N-1) 的一个变窄了的频谱及其 N-1 个镜象频谱。

- 窄带滤波器 $H_{Lk}(z)$ 通带的中心频率为 $2\pi k/N$，k=0,1,…,N-1，通带带宽都是 $2\pi/N$ 。

7.6.2 多率数字滤波器组：综合滤波器组

分析：滤波器$H_{L0}(z)$的通带在$-\pi/N$到π/N之间，是一个低通滤波器，而其它的N-1个通道的滤波器都是带通滤波器，它们的频率响应与0通道滤波器的频率响应之间的关系为：

$$H_{Lk}(e^{j\omega}) = H_{L0}[e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)}] \qquad k=1,2,\ldots,N-1$$

冲激响应之间的关系为：

$$h_{Lk}(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} h_{L0}(n) \qquad k=1,2,\ldots,N-1$$

通道滤波器的系统函数之间的关系：

$$H_{Lk}(z) = H_{L0}(zW_N^k) \quad \text{其中} \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \qquad k=0,1,2,\ldots,N-1$$

$W_k(z)=F_k(z)H_{Lk}(z)$，故有：

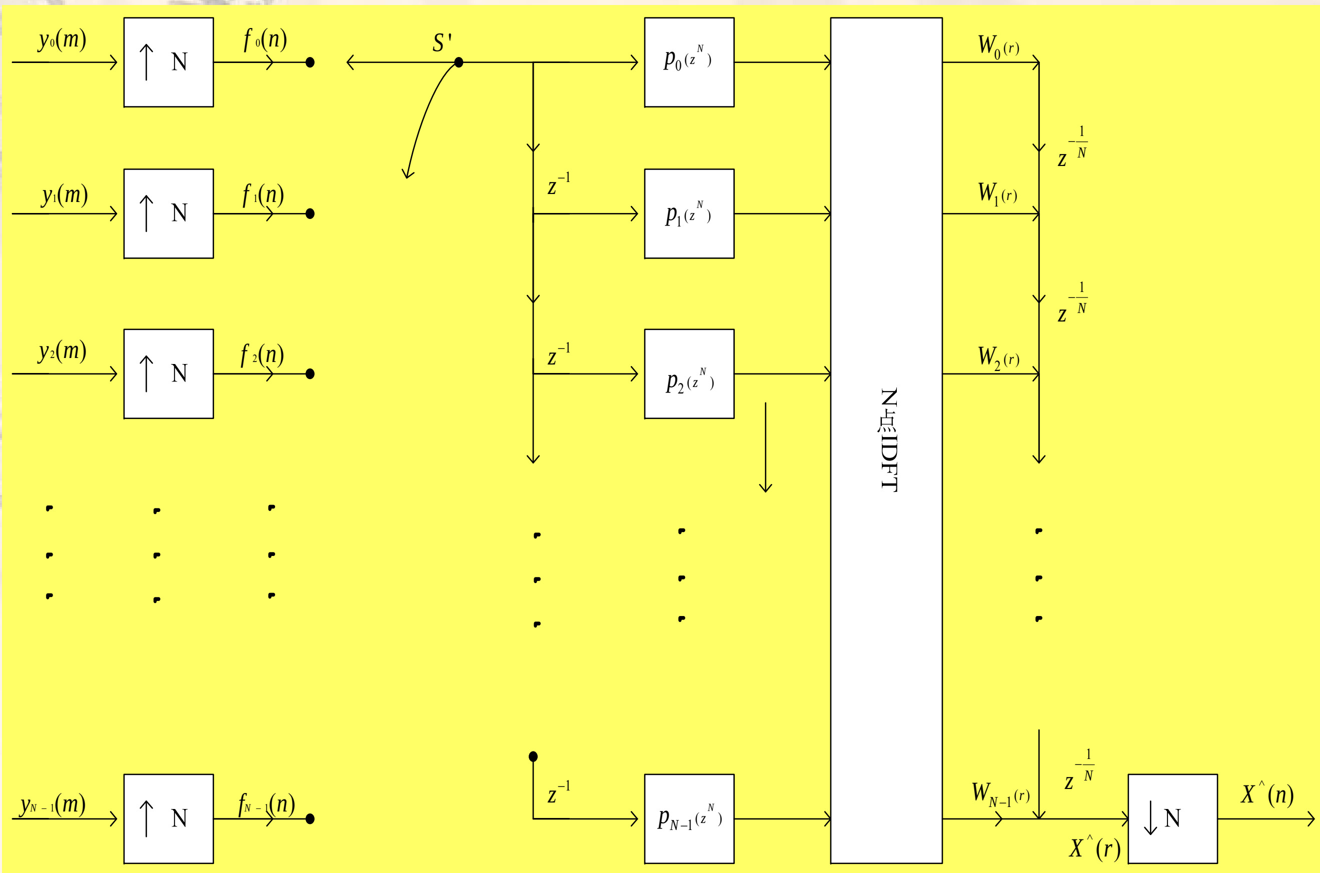
$$W_k(z) = \sum_{i=0}^{N-1}[F_k(z)z^{-i}P_i(z^N)]W_N^{-ki}$$

k=0,1,2,…,N-1

7.6.2 多率数字滤波器组：综合滤波器组

均匀离散傅立叶变换综合滤波器组：

信号$f_k(n)$的抽样间隔为T_x，转换开关S转动的时间间隔是$T=T_x/N$



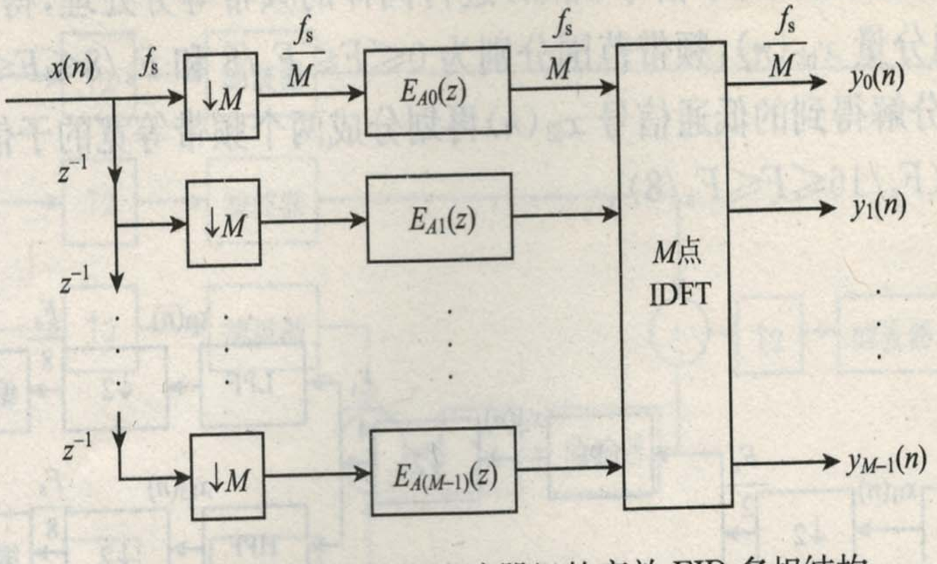


图 7.32 均匀 DFT 分析滤波器组的高效 FIR 多相结构

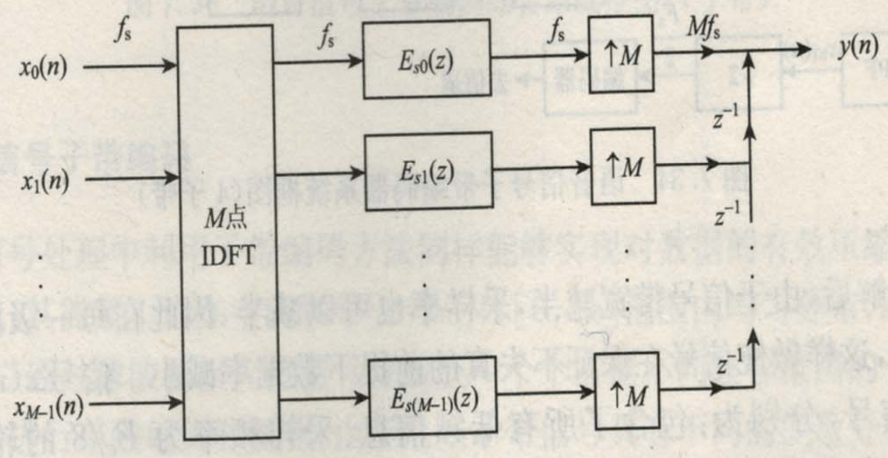


图 7.33 均匀 DFT 综合滤波器组的高效 FIR 多相结构

本章小结

- 掌握整数倍因子抽取实现以及频谱变换关系
- 掌握整数倍因子内插实现以及频谱变换关系
- 掌握有理因子转换抽样频率
- 多抽样率系统的高效实现