夏学期第六周作业：

P.135-138 第三章 连续时间控制系统的时域分析 习题三

3-24; 3-25; 3-28 (1 **)**

P.317-321 第七章 线性离散时间控制系统分析与综合 习题七

7-13; 7-15; 7-17

习题三

3-24 已知状态空间模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-6 & 4\\ -2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{u}(t)=1(t)$。初始条件为 $x_1(0)=2$， $x_2(0)=0$ 。请给出 $\Phi(t)$，$\boldsymbol{x}(t)$以及 $y(t)$。

Solution: (1) Find Φ(t):

$$\Phi(s)=[sI-A]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{4}{(s+2)(s+4)}\\ \dfrac{-2}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{s+6}{(s+2)(s+4)}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=L^{-1}\{[sI-A]^{-1}\}=L^{-1}\{\begin{bmatrix}\frac{s}{(s+2)(s+4)} & \frac{4}{(s+2)(s+4)}\\ \frac{-2}{(s+2)(s+4)} & \frac{s+6}{(s+2)(s+4)}\end{bmatrix}\}$$

$$=\begin{bmatrix}-e^{-2t}+2e^{-4t} & 2e^{-2t}-2e^{-4t}\\ -e^{-2t}+e^{-4t} & 2e^{-2t}-e^{-4t}\end{bmatrix}$$

(2) Find x(t):

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\beta)d\beta$$

$$=\begin{bmatrix}-2e^{-2t}+4e^{-4t}\\ -2e^{-2t}+2e^{-4t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-2\beta}-2e^{-4\beta}\\ 2e^{-2\beta}-4e^{-4\beta}\end{bmatrix})d\beta$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-3e^{-2t}+\frac{9}{2}e^{-4t}\\ \frac{3}{4}-3e^{-2t}+\frac{9}{4}e^{-4t}\end{bmatrix}$$

(3) Find y(t) :

$$y(t)=cx(t)=[1\quad 0]x(t)=x_1(t)=\frac{1}{2}-3e^{-2t}+\frac{9}{2}e^{-4t}$$

3-25　已知线性系统模型为

$$(1)\quad \dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{y}=[1\quad 0]\boldsymbol{x}$$

当 u=1(t)且初始条件为 $x_1(0)=0$ 和 $x_2(0)=1$ 时，要求：(a)采用拉氏变换方法，求出Φ(*s*)。 (b) 给出系统的传递函数 G(s)。 (c)求系统输出 *y*(t)。

Solution: (1)

(a) $\Phi(s)=[sI-A]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+4)} & \frac{1}{(s+1)(s+4)}\\ \frac{2}{(s+1)(s+4)} & \frac{s+2}{(s+1)(s+4)}\end{bmatrix}$

$$X(s)=\Phi(s)x(0)+\Phi(s)BU(s)=\begin{bmatrix}\Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s)\\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s)\\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$=\begin{bmatrix}\Phi_{12}(s)\\ \Phi_{22}(s)\end{bmatrix}+\frac{1}{s}\begin{bmatrix}\Phi_{12}(s)\\ \Phi_{22}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s(s+4)}\\ \frac{s+2}{s(s+4)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4s}-\frac{1}{4(s+4)}\\ \frac{1}{2s}+\frac{1}{2(s+4)}\end{bmatrix}=\frac{1}{s(s+4)}\begin{bmatrix}1\\ s+2\end{bmatrix}$$

(b) Find the transfer function G(s).

$$G(s)=C\Phi(s)B=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\Phi_{12}=\frac{1}{(s+1)(s+4)}$$

(c) Find y(t).

$$y(t)=cx(t)=CL^{-1}\{X(s)\}=L^{-1}\{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{s(s+4)}\begin{bmatrix}1\\ s+1\end{bmatrix}\}=L^{-1}[\frac{1}{s(s+4)}]=\frac{1}{4}(1-e^{-4t})$$

3-28　已知控制系统的状态方程为 $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$，并且当

（1）$\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 时；有 $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ 时；有 $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}\\-e^{-t}\end{bmatrix}$；

试求系统矩阵 $\mathbf{A}$ 及系统状态转移阵。

解：（1）因为 $x(t)=\Phi(t)x(0)$，设 $\Phi(t)=\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{bmatrix}$，故有

$$\begin{bmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_{11}-\phi_{12}\\ \phi_{21}-\phi_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\phi_{11}-\phi_{12}=e^{-2t}\\ \phi_{21}-\phi_{22}=-e^{-2t}\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}2e^{-t}\\-e^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\phi_{11}-\phi_{12}\\ 2\phi_{21}-\phi_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}2\phi_{11}-\phi_{12}=2e^{-t}\\ 2\phi_{21}-\phi_{22}=-e^{-t}\end{matrix}$$

解上述方程，可得

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-t}-2e^{-2t}\\ -e^{-t}+e^{-2t} & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$A=\dot{\Phi}(0)=\begin{bmatrix}-2e^{-t}+2e^{-2t} & -2e^{-t}+4e^{-2t}\\ e^{-t}-2e^{-2t} & -2e^{-2t}\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

习题七

7-13　求解下列 $\mathbf{x}(k)$

$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.15 & -0.8\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u(k),$$

初始条件：$\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, u(k)\equiv 1, k=0,1,2,\cdots\cdots$

解：方法一：递推法

$$\mathbf{x}(1)=\mathbf{Ax}(0)+\mathbf{Bu}(0)$$
$$\mathbf{x}(2)=\mathbf{Ax}(1)+\mathbf{Bu}(1)=\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0)+\mathbf{ABu}(0)+\mathbf{Bu}(1)$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{x}(k)=\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{A}^{k-i-1}\mathbf{Bu}(i)$$

可以逐一计算出 x(1)、x(2)、x(3)……

方法二：Z 变换法

$X(z)=(zI-A)^{-1}[zX(0)+Bu(z)]$；由已知条件：$u(z)=Z[1]=\dfrac{z}{z-1}$

$$(zI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.15 & z+0.8 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{z(z+0.8)+0.15}\begin{bmatrix} z+0.8 & 1 \\ -0.15 & z \end{bmatrix}$$

$$zX(0)+Bu(z)=\begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\frac{z}{z-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{z}{z-1} \\ z \end{bmatrix}=z\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X(z)=(zI-A)^{-1}[zX(0)+Bu(z)]=\frac{z}{z(z+0.8)+0.15}\begin{bmatrix} z+0.8 & 1 \\ -0.15 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{z}{(z+0.3)(z+0.5)}\begin{bmatrix} \dfrac{2z-0.2}{z-1} \\ \dfrac{z^2-z-0.15}{z-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{z(2z-0.2)}{(z-1)(z+0.3)(z+0.5)} \\ \dfrac{z(z^2-z-0.15)}{(z-1)(z+0.3)(z+0.5)} \end{bmatrix}$$

采用反演积分法（留数法）求反 Z 变换，系统有三个单极点：1，－0.3，－0.5
最终结果：

$$x(k)=\begin{bmatrix} \dfrac{12}{13}+\dfrac{40}{13}(-0.3)^k-4(-0.5)^k \\ -\dfrac{1}{13}-\dfrac{12}{13}(-0.3)^k+2(-0.5)^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.923+3.07(-0.3)^k-4(-0.5)^k \\ -0.077-0.923(-0.3)^k+2(-0.5)^k \end{bmatrix}$$

7-15　已知连续状态方程如下，采样周期为 T 秒，求其离散状态方程。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u,\qquad y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}。$$

解：$G(T)=e^{AT}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]_T=L^{-1}\{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1}\}_T=L^{-1}[\dfrac{1}{s^2}\cdot\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}]_T=\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$H(T)=\int_0^T e^{At}\cdot B\cdot dt=\int_0^T\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}dt=\int_0^T\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

故，所求的离散状态方程为：$\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}\mathbf{u}(k)$

7-17 已知离散状态方程如下，求脉冲传递函数 $G(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}$。

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1/2\\ 1\end{bmatrix}u(k)\,,\qquad y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)\,。$$

解：

$$G(z)=C(zI-A)^{-1}\cdot B=[1\quad 0]\cdot\begin{bmatrix}z-1 & -1\\ 0 & z-1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1/2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=[1\quad 0]\cdot\frac{1}{(z-1)^2}\begin{bmatrix}z-1 & 1\\ 0 & z-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2\\ 1\end{bmatrix}=\frac{z+1}{2(z-1)^2}=\frac{z+1}{2(z^2-2z+1)}$$