

量子信息基础

第七章：量子测量

金潮渊

浙江大学信息与电子工程学院

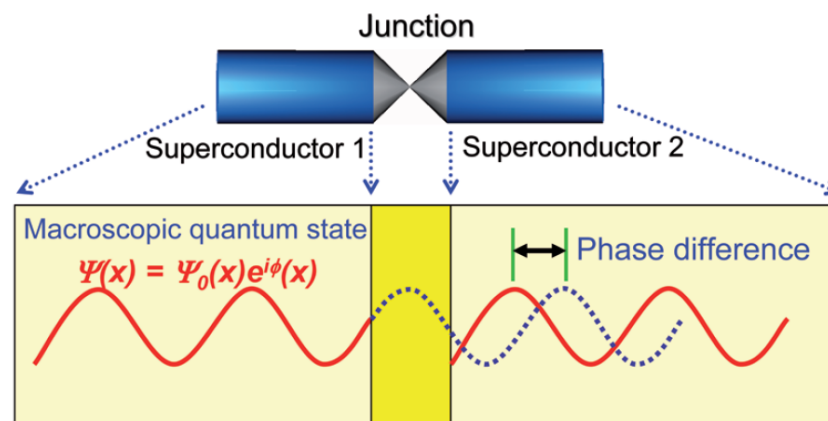


C7-1 退相干和量子极限



课程回顾

- 量子LC回路是超导量子计算的基础。其本质是量子化的微波电磁振荡。
- 超导量子计算使用了一种称为约瑟夫森结的器件，这是当前唯一被发现的、无损的非线性电路元件。
- 量子霸权（Quantum Supremacy），或称量子优越性，是指用量子计算机解决传统计算机实际上解决不了的问题，问题本身未必需要有实际应用。



量子测量

量子测量公设

- 量子测量公设：如果我们知道微观系统的波函数为 $|\psi\rangle$ ，这时算符 \hat{A} 的平均值为 $\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ ，如果 $|\psi\rangle$ 不是 \hat{A} 的本征态，那么获得 $\langle A \rangle$ 需要通过多次测量取平均。每次测量随机获得 \hat{A} 的本征值 A_n 。如果我们把波函数通过本征波函数展开 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$ ，我们知道测量得到 A_n 的几率为 $|c_n|^2$ 。如果持续同样的测量，由于系统的状态已经坍缩到了 $|\psi_n\rangle$ ，所以我们会一直得到同样的 A_n 。
- 量子测量问题的本质困难在于，我们无法利用量子力学的线性算符来建立一个有关“量子测量”的数学模型。假设我们有一个测量算符 \hat{M} ，系统处于的初始态 $|\uparrow\rangle$ 是系统的一个本征态

$$\hat{M}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$$

如果初始态是另外一个本征态 $|\downarrow\rangle$ ，则有

$$\hat{M}|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle$$

假设系统的初始态为两个本征态的线性组合 $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ ，我们使用测量算符

$$\hat{M}(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) = \alpha\hat{M}|\uparrow\rangle + \beta\hat{M}|\downarrow\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$$

这显然和量子测量的过程不符，所以量子力学所使用的线性代数理论本身并不能有效地描述波函数坍缩的过程。



量子测量

- 量子测量理论分为两种基本过程：
 - Unitary过程——决定论的、可逆的、保持相干性的；
 - Reduction过程——随机的、不可逆的、斩断相干性的。
- 量子测量分为三个阶段：纠缠分解、波包坍缩、初态制备
 - 纠缠分解—— $|\psi\rangle$ 按照被测力学量 A 的本征态分解；
 - 波包坍缩—— $|\psi\rangle$ 按照被测力学量 A 的本征态 A_n 以几率 $|c_n|^2$ 随机突变；
 - 初态制备——坍缩后的本征态在新环境哈密顿量下开始新一轮演化。
- 量子实验经常对大量相同量子态组成的量子系综进行重复测量并读出结果。多次重复测量的结果是一个混态，即不同坍缩结果 $|\psi_n\rangle$ 之间不存在任何相位关系，彼此是非相干的。



坍缩阶段

- 量子态在测量过程中的坍缩阶段，表现为一种“深邃的、尚未了结清楚的”过程。这个过程具有四个重要特征：随机性、不可逆性、斩断相干性、空间非定域性。
 - 随机性——原则上无法预见和控制；
 - 不可逆性——测量是熵增的过程？
 - 斩断相干性——切断被测态原有的一切相干性；
 - 非定域性——空间波函数的坍缩是非定域的。
- 在计入测量仪器的条件下，一般认为被测系统和测量仪器组成的大系统的量子状态，其演化总是么正的、可逆的、保持相干性的。也就是说，纯态框架足以描述任何封闭系统的量子状态。
- 对于空间非定域性的探讨，目前基本局限于贝尔不等式思路。缺乏对空间非定域性的准确理解和定量度量。量子测量使系统在其中演化的时间和空间坍缩了。这似乎已被近年来的实验所普遍证实。



期望值(1)

- 力学量测量的期望值可以定义为 $\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ 。
- 一个矩阵所有对角元的和称为矩阵的迹，在幺正变换下矩阵的迹保持不变，这使得我们可以将迹的概念推广到线性算符。对于一个线性算符 \hat{A} ，我们记其迹为 $\text{Tr}(\hat{A})$ ，定义为

$$\text{Tr}(\hat{A}) = \sum_i \langle i | \hat{A} | i \rangle$$

式中 $|i\rangle$ 为希尔伯特空间的一组正交归一矢量基。虽然为了计算算符的迹我们需要选取一个特定的表象，但由于不同的表象之间只相差一个幺正变换，所以算符的迹实际上并不依赖于表象。一个算符的迹就是它在任何一个表象中表示矩阵的迹。对于厄密算符，我们可以将这个表象选为它的本征表象，这时候算符的迹其实就是所有本征值的和。

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_i \langle \psi | \hat{A} | i \rangle \langle i | \psi \rangle = \sum_i \langle i | \psi \rangle \langle \psi | \hat{A} | i \rangle = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \hat{A}) = \text{Tr}(\rho_\psi \hat{A})$$

- 可见，为了计算算符的期望值，我们并不需要知道量子态 $|\psi\rangle$ ，而是只需要知道投影算符 ρ_ψ 。也通常称之为纯态密度算符。



期望值(2)

- 考虑一个二粒子A和B的纠缠系统

$$|\psi\rangle = c_0|0_A 0_B\rangle + c_1|1_A 1_B\rangle = c_0|00\rangle + c_1|11\rangle$$

我们可以写出这个纠缠系统的纯态密度算符

$$\rho_\psi = |c_0|^2|00\rangle\langle 00| + |c_1|^2|11\rangle\langle 11| + c_0 c_1^*|00\rangle\langle 11| + c_1 c_0^*|11\rangle\langle 00|$$

我们称这个密度算符前面的两项为对角项，后面的两项为非对角项。非对角项相应于通常所说的干涉项，它描写了相互叠加的两个态之间的干涉。

- 假如我们忽略B量子比特，仅仅考虑A量子比特的各种测量。

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \text{Tr}_{AB}(\rho_\psi \hat{A})$$

式中 Tr_{AB} 表示在整个系统的二粒子张量积的希尔伯特空间内求迹，有 $\text{Tr}_{AB} = \text{Tr}_A \text{Tr}_B$

$$\text{Tr}_{AB}(\rho_\psi \hat{A}) = \text{Tr}_A(\text{Tr}_B(\rho_\psi) \hat{A}) = \text{Tr}_A(\rho_A \hat{A})$$

其中 $\rho_A = |c_0|^2|0\rangle\langle 0| + |c_1|^2|1\rangle\langle 1|$ 。



退相干

- 以上讨论告诉我们，如果仅仅只关心A量子比特，那就无需知道 $|\psi\rangle$ ，只需知道 ρ_A 。忽略B以后，所有能从A量子比特提取出来的信息都包含在厄密算符 ρ_A 中。我们称 ρ_A 为A量子比特的密度算符。
- 但是 ρ_A 不是前面引入的纯态密度算符，因为现在这个密度算符不能写成 $|\psi_A\rangle\langle\psi_A|$ 这样的形式。我们称这种密度算符为混态密度算符，简称混态。显然

$$\text{Tr}_A(\rho_A) = |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$$

- 在这个例子中，系统所处 $|\psi\rangle = c_0|00\rangle + c_1|11\rangle$ 态显然是一个纠缠态。如果忽略B量子比特 (数学上就是将 ρ_ψ 对B求迹，称作 trace 掉B)，我们将得到一个关于A量子比特的混态密度算符 ρ_A ，称作 ρ_ψ 在A上的约化密度算符。
- 在密度算符 ρ_A 中，量子比特0态与1态间的干涉项消失了，这就叫做**退相干**。在这个例子中，A量子比特的0态与1态退相干的原因有两个：(1) A和B量子比特之间发生了量子纠缠；(2) 我们忽略了B量子比特。
- 回忆一下薛定谔猫思想实验中的“猫态”体现出了混态密度矩阵的特点。



量子测量的唯象模型(1)

- 量子测量中的退相干可以理解为：为了测量量子系统中的可观测量 \hat{A} ，需要建立“测量哈密顿量 H ”。包括被测子系统的可观测量 \hat{A} 和测量仪器的指示器量 \hat{X} 。 A - X 之间建立的耦合关系，在可观测量 \hat{A} 的本征态和指示器的可区分态 x 之间产生的量子纠缠。正是这种量子纠缠，使我们能够通过测量指示器读数测量可观测量 \hat{A} 的本征态。

- 设子系统处在 \hat{A} 的叠加态 $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$ ，而指示器有关变化量的状态为 $|\Phi(x)\rangle$ 。整体系统处在尚未纠缠的可分离态上

$$|\psi\rangle \otimes |\Phi(x)\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \otimes |\Phi(x)\rangle$$

- 由于 H 中 \hat{A} 和影响指示器位置的 \hat{P} 耦合，在经过时间演化之后，这个量子态从可分离态转变为纠缠态

$$U(t) \sum_n c_n |\psi_n\rangle \otimes |\Phi(x)\rangle = \sum_n \{c_n |\psi_n\rangle \otimes |\Phi(x - \lambda E_n t)\rangle\}$$



量子测量的唯象模型(2)

- 唯象地描述，在量子测量过程中， $U(t)$ 先作用到子系统的本征态 ψ_n 上，得到本征值 E_n ，成为作用在仪器可区分态上的一个平移算符。这造成了量子纠缠，使得 \hat{A} 和 \hat{X} 的测量值 x 和 E_n 关联起来。如果对变量 x 的观测精度足以分辨全部本征值 E_n ，那就实现了通过测量 \hat{X} ，导致可区分态坍缩并测到 x_n ，再导致被测量态向相应本征态的关联坍缩，得到相应的本征态 $|\psi_n\rangle$ 和本征值 E_n 。



退相干的物理起源

- 退相干的物理来源比较复杂，一般包括：
 - 由环境耦合造成的退相干；
 - 由量子测量造成的退相干；
 - 量子信息的衰减。
- 单量子比特的量子信息处理过程中，量子信息的衰减具有三种典型的方式：
 - 相位阻尼方式；
 - 退极化方式；
 - 振幅阻尼方式。

标准量子极限(SQL)

- 由于波粒二象性导致的不确定性原理，物理量的测量精度存在下限。比如简谐振子的基态位置 x 的标准量子极限 Δx_{SQL} 。考虑到基态能量为 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ ，平均势能为 $\frac{1}{4}\hbar\omega$

$$\frac{1}{4}\hbar\omega = \frac{1}{2}m\omega^2\langle\Delta x_{\text{SQL}}^2\rangle \quad \therefore \Delta x_{\text{SQL}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

- 对于振子的激发态，振幅为 A ，振幅的不确定度为 $\Delta A \geq \Delta x_{\text{SQL}}$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right) \quad \therefore \Delta E_{\text{SQL}} = m\omega^2 A \Delta A = \hbar\omega\sqrt{N}$$

- 根据位置-动量不确定性原理，可以得到自由粒子的标准量子极限

$$\Delta x_{\text{SQL}} \cdot \Delta p_{\text{SQL}} = \frac{\hbar}{2} \quad \Delta p_{\text{SQL}} = \sqrt{2m\Delta E} = \sqrt{2m\frac{\hbar}{\tau}} \quad \therefore \Delta x_{\text{SQL}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar\tau}{m}}$$

非破坏性量子测量

- 标准量子极限并非绝对的极限。在不违背不确定性原理的情况下，可以改进：
 - 牺牲非对易关系的一方，求得另一方的超精度测量。即压缩态（squeeze state）；
 - 量子非破坏性测量（quantum nondemolition measurement, QND）
- 可观测量 \hat{A} 的QND实验一般是对 \hat{A} 的多次精确而又不改变被测状态的测量。例如对本征态的测量即为QND测量。广义地说，原则上对一个量子系统进行给定的量子测量，总会存在一些力学量，它们不受此给定测量的扰动，在测量中保持不变。这些力学量便是这种测量的QND变量。
- 做QND测量时，不能同时又从被测态中取出与QND变量不对易的其他力学量数值，否则必定因此干扰被测量的量子态。多次重复测量过程中，在测量的间歇期间，不能有与 \hat{A} 不对易的力学量测量污染，否则必定因此干扰被测量的量子态。



QND成立的条件

- 设可观测量 \hat{A} , $|\Phi\rangle$ 为测量仪器的初态, \hat{U} 为被测物体和测量仪器的联合演化算符。QND过程满足:

$$[\hat{A}, \hat{U}]|\Phi\rangle = 0$$

- 在海森堡表象中, 波函数不带有含时演化。令 H_I 代表测量仪器和被测系统的相互作用

$$[\hat{A}(t), H_I] = 0 \quad \text{且有} \quad [\hat{A}(t_1), \hat{A}(t_2)] = 0$$

第一个条件保证测量时没有测量仪器对被测物体的反作用; 第二个条件保证体系自由演化时不被污染。于是测量结果的变化仅仅取决于测量极限SQL。

- QND远不是对任何态的任何物理量测量都能够实现。QND技术允许多次重复测量并且具有大大高于SQL的精度。



海森堡极限

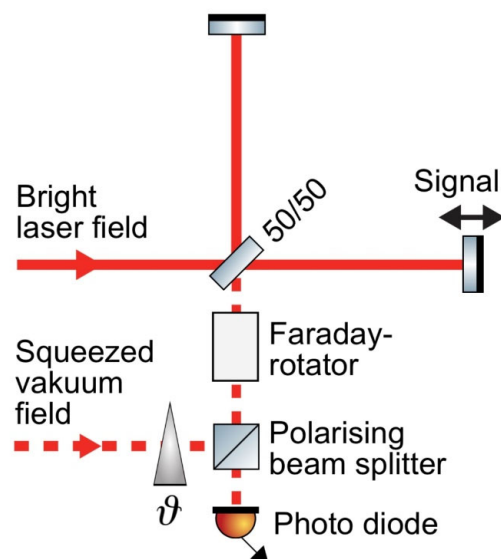
- 在标准量子极限中，能量的不确定度为粒子数的平方根 $N^{\frac{1}{2}}$ ，考虑到能量（粒子数）和相位是一对不可对易的力学量。因此对相位测量的精度受限于 $N^{-\frac{1}{2}}$ 。
- 海森堡极限是一种更加基础的测量极限。简单来说，粒子数（能量）和相位是一对不可对易的力学量。因此对相位测量的精度受限于 N^{-1} 。



压缩态和引力波探测



- 为了克服标准量子极限和海森堡极限，引力波探测装置中引入了压缩态测量。在牺牲粒子数探测精度的条件下，得到了超越海森堡极限的精确相位（对应于光线的传播距离）测量。
- 1984年，加州理工学院与麻省理工学院合作设计与建造了激光干涉引力波天文台（LIGO），并且由基普·索恩、朗纳·德瑞福与莱纳·魏斯共同主持这计划。
- 经过多年的努力，LIGO在2015年9月14日探测到两个黑洞并合所产生的引力波。之后，分别三次探测到两个黑洞并合所产生的引力波。这标志着引力波天文学的诞生。
- 我国正在积极部署“天琴”和“太极”两大太空引力波探测装置。分别对应于地心轨道方案和日心轨道方案。



量子测量

17



浙江大学

量子度量学

- 测量精度的重要性不仅仅局限于验证量子理论的正确性，也有助于发展新的量子精密测量技术。由于经典物理的限制，传统计量学的精度仅仅能够达到标准量子极限（SQL）。
- 随着量子力学的发展，特别是量子信息技术的发展，制备、控制和测量量子态的技术取得了长足的进步。近年来，利用量子态，再加上传统的计量技术和量子力学特性来提高量子测量精度，从而突破标准量子极限 $1/\sqrt{N}$ （ N 代表粒子数）。使用压缩态和量子纠缠进行相位估计，精度可以达到海森堡极限 $1/N$ 。这些进步形成了崭新的度量技术——量子度量学（Quantum metrology）。
- 先行的国际单位制（SI）中的7个基本单位：时间单位秒（s）、长度单位米（m）、发光强度单位坎德拉（cd）、质量单位千克（kg）、电流单位安培（A）、温度单位开尔文（K）以及物质的量单位摩尔（mol），都正在被量子精密测量重新定义。2018年第26届国际计量大会正式通过决议，从2019年开始实施新的国际单位定义，从实物计量标准转向量子计量标准，这标志着精密测量已经进入量子时代。



参考文献

- 退相干和非破坏性量子测量的内容主要参考：
 - 张永德，量子信息物理原理，科学出版社。第1-1和1-4节。
 - 陈童，量子力学新讲，第12章。
 - Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information (10th anniversary edition), Cambridge University Press (2016)。第2.2节。

