1. 设$\{X(t);-\infty < t < \infty\}$是宽平稳过程，若自相关函数$R_X(\tau) = 2\delta(\tau) + 2$，则谱密度$S_X(\omega) =$ ___(7)___ ,$\{X(t)\}$的均值各态历经当且仅当均值$\mu_X =$ ___(8)___ 。

(7) $2 + 4\pi\delta(\omega)$ (8) $\pm\sqrt{2}$

2. 设 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是宽平稳过程，若均值函数 $\mu_X = 2$，自相关函数 $R_X(\tau) = e^{-|\tau|} + a$，则 $\{X(t)\}$ 的谱密度 $S_X(\omega) =$ ________________，均值各态历经当且仅当均值 $a =$ ________________。

- $\dfrac{2}{1+\omega^2} + 2\pi a\delta(\omega)$　　4

3. 设$\{B(t);t\geq 0\}$是标准布朗运动，$A\sim N(1,1)$, 且A与$\{B(t);t\geq 0\}$独立。

设$X(t)=A[B(t+1)-B(t)]$，$t\geq 0$。

(1) 计算$\{X(t)\}$的均值函数和自相关函数, 并证明它是宽平稳过程;

(2) 判断$\{X(t)\}$的均值是否具有各态历经性，并说明理由。

- $(1)\mu_X(t)=EX(t)=0$

$$R_X(t,t+\tau)=EX(t)X(t+\tau)=\begin{cases}2(1-|\tau|), & |\tau|\le 1;\\ 0, & |\tau|>1.\end{cases}$$

因为$\mu_X(t)$是常数,$R_X(t,t+\tau)$只与τ有关，所以$\{X(t)\}$是宽平稳过程。

$(2)\lim\limits_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=0=\mu_X^2$,所以均值具有各态历经性

4. 设 $X(t)=A\cos(t+\Theta)+B, -\infty<t<\infty$，这里 A,B,Θ 相互独立,

$A\sim N(1,1)$，$\Theta\sim U(0,2\pi)$， B 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}|x|, & -1<x<1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(1) 计算 $\{X(t)\}$ 的均值函数和自相关函数，并证明它是一个宽平稳过程;

(2) 计算时间的均值 $<X(t)>$ 和时间的相关函数 $<X(t)X(t+\tau)>$；

(3) 判断过程 $\{X(t)\}$ 的均值和自相关函数有没有各态历经性。

（1） $\mu_X(t)=0$

$$R_X(t,t+\tau)=\frac{1}{2}+\cos\tau$$

因为 $\mu_X(t)$ 是常数， $R_X(t,t+\tau)$ 只与 τ 有关，所以是宽平稳

（2） $<X(t)>=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt=B$

$$<X(t)X(t+\tau)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt=\frac{A^2}{2}\cos\tau+B^2$$

（3）都不具有

5．设 $X(t)=A\cos(t+2\pi B)$，$-\infty<t<\infty$，这里 A,B 相互独立同服从区间

（0，1）上的均匀分布。(1)计算 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 的均值函数和自相关函数，并证明它是一个宽平稳过程；(2)计算 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 的时间均值 $<X(t)>$ 和时间相关函数 $<X(t)X(t+\tau)>$，判断 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 是否为各态历经过程，说明理由。

(公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.)

（1） $E(A)=0, E(A^2)=\dfrac{1}{3}$， $\mu_X(t)=0$， $R_X(t,t+\tau)=\dfrac{\cos\tau}{6}$，

(2) $<X(t)>=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(A\cos(t+2\pi B)dt=0$；

$\because P(<X(t)>=\mu_X)=1, \therefore$ 均值具各态历经性。

$<X(t)X(t+\tau)>=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A^2\cos(t+2\pi B)\cos(t+\tau+2\pi B)dt=\dfrac{A^2\cos\tau}{2}$；

$\because P(<X(t)X(t+\tau>=\dfrac{\cos\tau}{6})\neq 1, \therefore$ 相关函数不具各态历经性，不是各态历经过程。