数字信号处理

Digital Signal Processing

第 5 章 FIR 数字滤波器设计和实现

第5章： FIR 数字滤波器设计和实现

5.1 概述：FIR数字滤波器

- FIR (finite impulse response filter, FIR)

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_{N-1} x(n-N+1)$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(k) x(n-k)$$

$$b_k = h(k)$$

5.1 概述：FIR DF 零极点

- FIR 系统定义：一个数字滤波器 **DF** 的输出 **y(n)**，如果仅取决于有限个过去的输入和现在的输入 x(n), x(n-1),. ......, x(n-N+1)，则称之为 **FIR DF**。

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_{N-1} x(n-N+1)$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k)$$

- FIR 滤波器的单位冲激响应：

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(k) x(n-k) \qquad b_k = h(k)$$

- FIR 滤波器的系统函数：

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \ldots\ldots b_{N-1}}{z^{N-1}}$$

⇒ 在 Z 平面上有 N-1 个零点；在原点处有一个（N-1）阶极点，永远稳定。

5.1 概述：FIR DF 频率响应

- FIR DF 的频率响应为：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega} = \mathrm{H_r}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\omega)}$$

$H_r(\omega)$：振幅响应，它是一个取值可正可负的实函数。

$\theta(\omega) = \arg[H(e^{jw})]$ 为数字滤波器的相位响应。

FIR 滤波器的最重要特点是能实现线性相位。具有线性相移特性的 FIR 滤波器是 FIR 滤波器中应用最广泛的一种。

5.1 概述：IIR 和 FIR 比较

- **IIR与FIR性能特性比较**
  - **IIR数字滤波器：**
    - 幅频特性较好；相频特性较差（难以实现线性相位）；
    - 有稳定性问题；
  - **FIR数字滤波器：**
    - 可以严格线性相位，又可任意幅度特性
    - 因果稳定系统
    - 可用 **FFT** 计算 **(**计算两个有限长序列的线性卷积**)**
    - 阶次比 **IIR** 滤波器要高得多（同样性能）

5.1 概述：IIR 和 FIR 比较

IIR 与 FIR 设计方法比较

- IIR DF：
  - 无限冲激响应，H(Z) 是 z^{-1} 的有理分式，借助于模拟滤波器设计方法，阶数低（同样性能要求）。其优异的幅频特性是以非线性相位为代价的。
  - 缺点：模拟原型法只能设计特定类型的滤波器，不能逼近任意的频响。

- **FIR DF：**
  - 有限冲激响应，系统函数 H(Z) 是 z^{-1} 的多项式，采用直接设计法逼近要求的频率响应。设计灵活性强
  - 缺点：① 设计方法复杂；② 延迟大；③ 阶数高。

  (运算量比较大，因而在实现上需要比较多的运算单元和存储单元)

- **FIR DF 的技术要求：**
  - 通带频率ω_p，阻带频率ω_s 及最大衰减α_p，最小衰减α_s
  - 很重要的一条是保证 H(z) 具有**线性相位**。

5.1 概述：IIR 和 FIR 比较

- **FIR 数字滤波器**
  - 设计 FIR 滤波器的任务：
    - 给定要求的频率特性，按一定的最佳逼近准则，得到 h(n) 及阶数 N。
  - 三种设计方法：
    1. 窗函数加权法
    2. 频率采样法
    3. FIR DF 的 优化设计-- 切比雪夫等波纹逼近法

5.1 概述：相位失真

- 信号通过线性滤波器时，其幅度和相位可能会发生改变，滤波器幅频特性 $|H(\omega)|$ 和相频特性 $\theta(\omega)$ 可能会随频率的变化而改变。
  - 如：输入正弦信号 $A\cos(n\omega_0)$
    则：输出为 $|H(\omega_0)|\ A\cos(n\omega_0+\theta)$，其中相移 $\theta=\theta(\omega_0)$

    输出频率和输入频率相同，但幅度和相位都发生了变化

  - 输出信号比输入信号滞后的样点数 n (位移) 可由下式求得:
    设：$n\omega_0+\theta=0$

$$n=-\frac{\theta}{\omega_0}=-\frac{\theta(\omega_0)}{\omega_0}$$ —滤波器在数字频率 ω_0 处的相位延迟（位移）

- 由于相位延迟 n 的不同，最终产生了相位失真。
- 确保不产生相位失真的办法：使**不同频率**的信号通过滤波器时有**相同的延迟 n**。

5.1 概述：相位失真

- 对不同的频率有恒定的相移θ，不同的相位延迟 n，会产生相位失真.

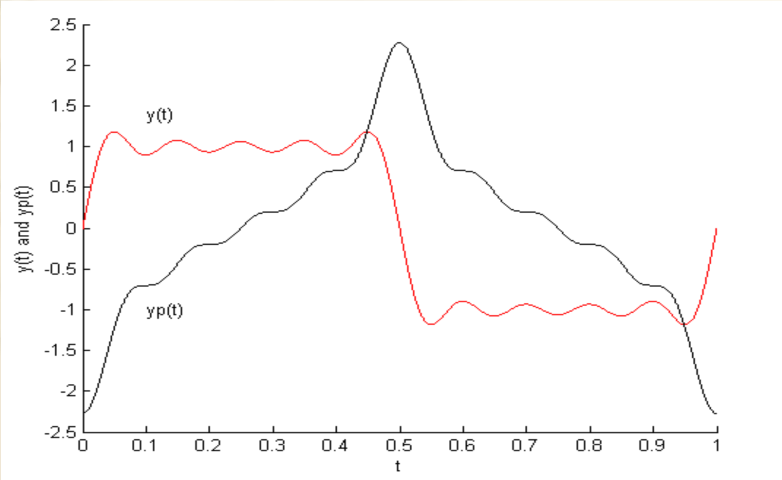
如：方波 y(t) 可以用无数奇次谐波的正弦波的叠加来得到：

$$y(t)=\frac{4}{\pi}[\sin(\Omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\Omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\Omega t)+\frac{1}{7}\sin(7\Omega t)+\frac{1}{9}\sin(9\Omega t)+\cdots$$

若每个正弦波相移π/2 弧度：

$$y_p(t)=\frac{4}{\pi}[\cos(\Omega t)+\frac{1}{3}\cos(3\Omega t)+\frac{1}{5}\cos(5\Omega t)+\frac{1}{7}\cos(7\Omega t)+\frac{1}{9}\cos(9\Omega t)+\cdots]$$

可见相移之后正弦波之和已不再是方波。



确保所有频率具有相同相位延迟的简单方法：随着频率的变化而改变相位，使滤波器具有线性相位特性，即使所有频率的相位延迟保持恒定，这种方法可通过使系统的相位函数θ(ω)为频率ω的线性函数来实现。

5.2 线性相移FIR DF 约束条件和频率响应

- 三个内容：
  - ❶ 约束条件
    - 恒延时滤波
    - h(n) 偶对称：恒相延时和恒群延时同时成立
    - h(n) 奇对称：仅恒群延时成立
  - ❷ 频率响应
    - Type I：h(n) 偶对称、N 为奇数
    - Type II：h(n) 偶对称、N 为偶数
    - Type III：h(n) 奇对称、N 为奇数
    - Type IV：h(n) 奇对称、N 为偶数
  - ❸ FIR DF 零极点分布

5.2.1 线性相移FIR DF 约束条件：恒延时滤波

恒延时滤波

- 滤波器的延时分为**相延时**和**群延时**两种

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-jn\omega}=\pm|H(e^{j\omega})|e^{j\beta(\omega)}=H_r(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

令 $\theta(\omega)=\arg[H(e^{j\omega})]$

相延时：$\tau_p(\omega)=-\dfrac{\theta(\omega)}{\omega}$

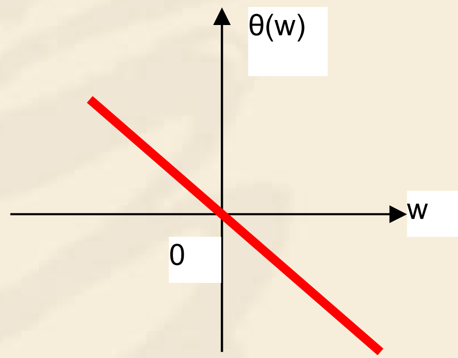
群延时：$\tau_g(\omega)=-\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}$

恒延时滤波器：$\tau_p(\omega)$ 或 $\tau_g(\omega)$ 是不随ω变化的常量，这时滤波器具有线性相位特性。

5.2.1 线性相移FIR DF 约束条件：恒延时

- **恒相延时和恒群延时同时成立**
  - 要使τ_p、τ_g 都不随 ω 变化,θ(ω) 必须是一条过原点直线

$$\theta(\omega) = -\tau\omega$$ （负号是因为系统必有时延）



由于 FIR 滤波器的传递函数为：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\omega}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)[\cos n\omega - j\sin n\omega]$$

故:

$$\theta(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})] = \arctan\left[-\frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin n\omega}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos n\omega}\right] = -\tau\omega$$

5.2.1 线性相移FIR DF 约束条件：恒延时

于是:

$$\tan(\tau\omega)=\frac{\sin\tau\omega}{\cos\tau\omega}=\frac{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin n\omega}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos n\omega}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\tau\omega\cos n\omega=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\tau\omega\sin n\omega$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin(\tau\omega-n\omega)=0$$

$$h(0)\sin(\tau\omega)+h(1)\sin[\tau\omega-\omega]+\cdots h(N\text{-}1)\sin[\tau\omega\text{-}(N\text{-}1)\omega]=0$$

$$\{h(0)\sin(\tau\omega)+h(N\text{-}1)\sin[\tau\omega\text{-}(N\text{-}1)\omega]\}+\{h(1)\sin[\tau\omega-\omega]+$$

$$h(N\text{-}2)\sin[\tau\omega-(N\text{-}2)\omega]\}+\cdots$$

$$+\{h(n)\sin[\tau\omega\text{-}n\omega]+h(N\text{-}1\text{-}n)\sin[\tau\omega-(N\text{-}1\text{-}n)\omega]\}+\cdots=0$$

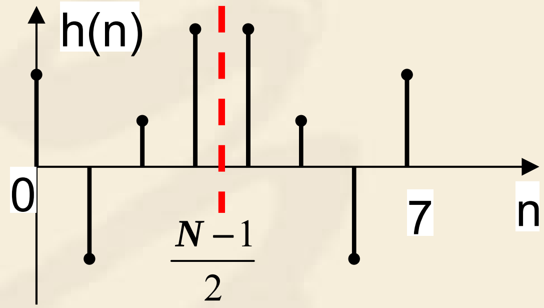
5.2.1 线性相移FIR DF 约束条件：恒延时

可以证明，当 $h(0)\sin(\tau\omega)+h(N-1)\sin\left[\tau\omega-(N-1)\omega\right]=0$

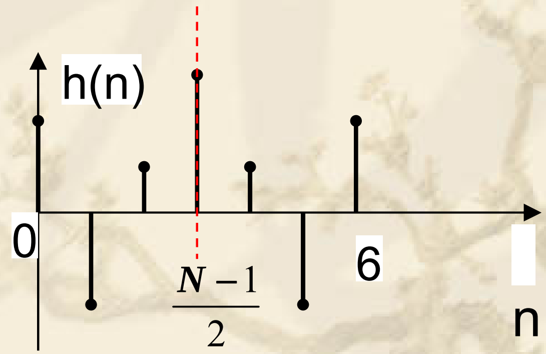
$$\tau=\frac{N-1}{2} \quad 且 \quad h(n)=h[(N-1)-n] \quad (0\le n\le N-1)$$

上式成立，此时

$$\tau_p(\omega)=\tau_g(\omega)=\tau=\frac{N-1}{2}$$



h(n) 为偶对称，N 为偶数



h(n) 为偶对称，N 为奇数

恒相延时和恒群延时同时成立时，线性相位滤波器的**必要条件**是：

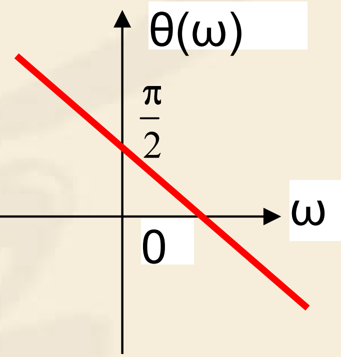
不管 N 为偶数，还是 N 为奇数，系统冲激响应 h(n) 都关于中心点 (N-1)/2 偶对称。当 N 为奇数时对称中心轴位于整数样点上; 当 N 为偶数时对称中心轴位于非整数样点上。

5.2.1 线性相移FIR DF 约束条件：恒群延时

- 只要求恒群延时成立

若只要求群延时$\tau_g(\omega)$ 为一常数，则相移特性为不过原点的直线。

$$\theta(\omega)=\theta_0-\tau\omega=\frac{\pi}{2}-\tau\omega$$



$$H(e^{j\omega})=\mathrm{H_r}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\omega)}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)[\cos\omega n-j\sin\omega n]$$

故

$$\theta(\omega)=\arg[H(e^{j\omega})]=\arctan\left[\frac{-\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\omega n}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\omega n}\right]=\frac{\pi}{2}-\tau\omega$$

于是有：

$$\tan\left[\frac{\pi}{2}-\tau\omega\right]=\cot\left[\tau\omega\right]=\boxed{\frac{-\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\omega n}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\omega n}=\frac{\cos(\tau\omega)}{\sin(\tau\omega)}}$$

5.2.1 线性相移FIR DF 约束条件：恒群延时

故 $$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\omega n\cos\tau\omega = -\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\omega n\sin\tau\omega$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\tau\omega - n\omega) = 0$$

例如

可以证明，当 $$h(0)\cos(\tau\omega) + h(N-1)\cos\left[-\frac{N-1}{2}\omega\right] = 0$$

$$\tau = \frac{N-1}{2} \quad 且 \quad h(n) = -h[(N-1)-n] \quad (0 \le n \le N-1)$$

上式成立，此时

$$\tau_g(\omega) = \tau = \frac{N-1}{2}$$

5.2.1 线性相移FIR DF约束条件：恒群延时

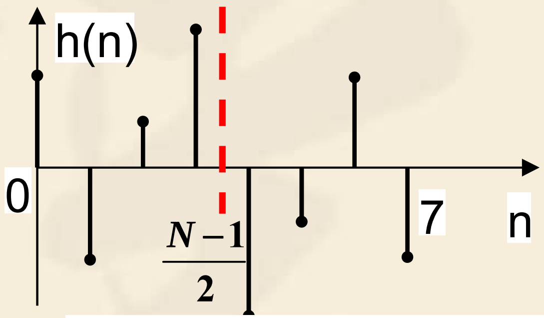
FIR滤波器单独满足恒定群延时的必要条件为：

冲激响应 h(n) 对中心点 (N-1)/2 成奇对称。此时，无论 N 为奇数或偶数，滤波器的相频特性均为线性，并包含有π/2 的固定相移：

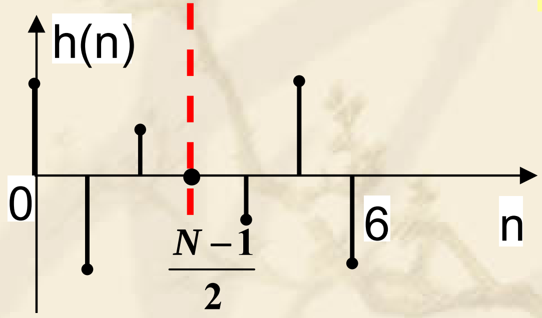
$$\theta(\omega)=\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega$$

因此，信号通过此类滤波器时不仅产生 (N-1)/2 个取样点的延迟，还将产生 90° 的相移，通常这类滤波器又被称为 90° 移相器，并具有很好的应用价值。

当 N 为奇数时 $h\left(\frac{N-1}{2}\right)=-h\left[N-1-\frac{N-1}{2}\right]=-h\left[\frac{N-1}{2}\right]$ 故 $h\left[\frac{N-1}{2}\right]=0$



h(n) 为奇对称，N 为偶数



h(n) 为奇对称，N 为奇数

5.2.1 线性相移 FIR DF 约束条件

- 线性相位约束条件
  - 对于任意给定的值 N，当 FIR 滤波器的 h(n) 相对其中心点 (N-1)/2 是对称时，不管是偶对称还是奇对称，此时滤波器的相移特性是线性的，且群延时都是 τ= (N-1)/2 。
- 偶对称： θ(ω) 为过原点的，斜率为 -τ 的一条直线

$$\begin{cases} \theta_0 = 0,\ \theta(\omega) = -\tau\omega \\ \tau = \dfrac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n) \end{cases}$$

相时延和群时延同时成立

- 奇对称：θ(ω) 对所有的频率成分都有一个 90° 相移。

$$\begin{cases} \theta_0 = \dfrac{\pi}{2},\ \theta(\omega) = \dfrac{\pi}{2} - \tau\omega \\ \tau = \dfrac{N-1}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n) \end{cases}$$

仅群时延同时成立

因此，有四种类型的 FIR DF：

$$\begin{cases} \text{类型 I：} & h(n)\text{偶对称，}N\text{为奇数} \\ \text{类型II：} & h(n)\text{偶对称，}N\text{为偶数} \\ \text{类型III：} & h(n)\text{奇对称，}N\text{为奇数} \\ \text{类型IV：} & h(n)\text{奇对称，}N\text{为偶数} \end{cases}$$

5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：Type I

- h(n) 偶对称，N 为奇数（恒相时延、恒群时延〕
  - 此时，由于 h(n) 序列的长度为奇数，因此滤波器的频率响应函数可进行以下拆分（前后对称部分、中心点）：

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)e^{-jn\omega}+\sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1}h(n)e^{-jn\omega}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

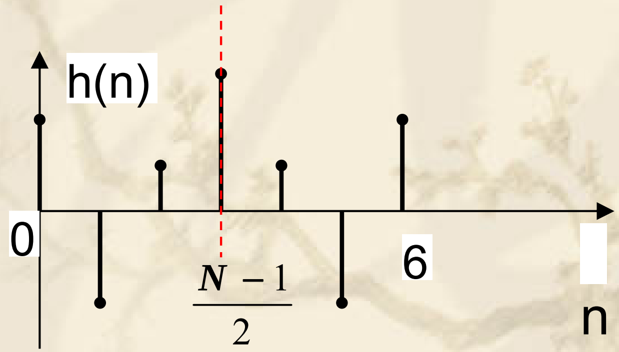
对上式的第二和式作变量替换（n=N-1-m) 后得到:

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)e^{-jn\omega}+\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(N-1-n)e^{-j(N-1)\omega}e^{jn\omega}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

由对称条件

$$h(n)=h(N-1-n)$$

则 $H(e^{j\omega})$ 表示为:



h(n) 为偶对称，N 为奇数

5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：Type I

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)\left[e^{-jn\omega} + e^{-j(N-1)\omega} e^{jn\omega}\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\left\{h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)\left[e^{j\frac{N-1}{2}\omega} e^{-jn\omega} + e^{-j\frac{N-1}{2}w} e^{jn\omega}\right]\right\}$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\left\{h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) 2\cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]\right\}$$

令 $n' = \frac{N-1}{2} - n$

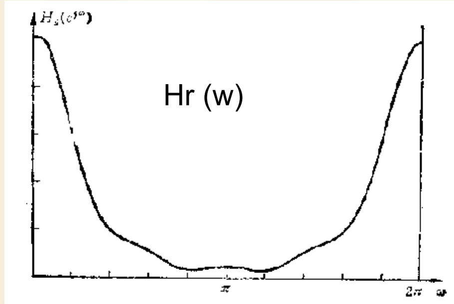
则上式为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\left\{h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n'=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - n'\right)\cos n'\omega\right\}$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos n\omega = e^{j\theta(\omega)} H_r(\omega)$$

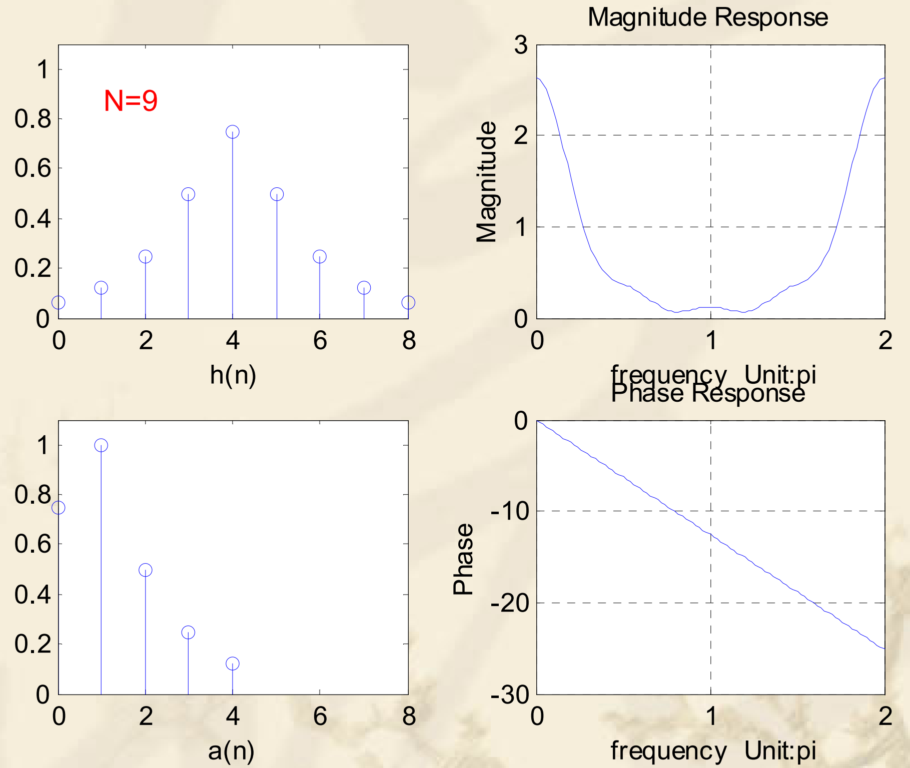
5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：Type I

其中 $$\begin{cases} a(n) = h(\dfrac{N-1}{2}) & n = 0 \\ a(n) = 2h(\dfrac{N-1}{2} - n) & n \neq 0 \end{cases}$$



振幅响应：

$$H_r(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos n\omega$$



相频响应：

$$\theta(\omega) = -\tau\omega = -\frac{N-1}{2}\omega$$

由此可以看出其线性相位特性。由于 cos(nω) 对于 ω=0、π、2π都是偶对称，所以振度响应 $H_r(\omega)$ 对ω=0、π、2π也是偶对称。

5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：Type II

- h(n) 偶对称，N 为偶数（恒相时延、恒群时延〕
  - 由于**h(n)** 序列的长度为偶数，因此滤波器的频率响应函数可拆分成如下两部分（前后对称部分，中心点处无值）：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-jn\omega} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega}$$

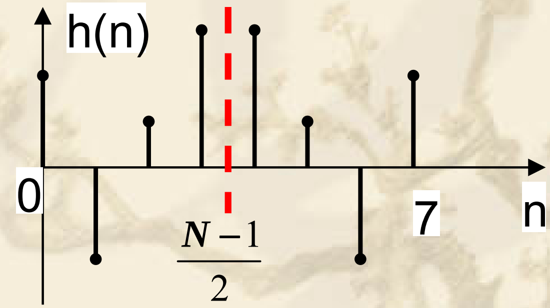
对上式的第二和式作变量替换（n=N-1-m) 后得到:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-jn\omega} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-n)e^{-j(N-1)\omega}e^{jn\omega}$$

由对称条件

$$h(n) = h(N-1-n)$$

则 $H(e^{j\omega})$ 表示为：



h(n) 为偶对称，N 为偶数

5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：Type II

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\left[e^{-jn\omega} + e^{-j(N-1)w} e^{jn\omega}\right]$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) 2\cos[\omega(\frac{N-1}{2} - n)]$$

令 $n' = \frac{N}{2} - n$，则上式为：

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} 2h(\frac{N}{2} - n)\cos[(n - \frac{1}{2})\omega]$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos[(n - \frac{1}{2})\omega] = e^{j\theta(\omega)} H_r(\omega)$$

其中 $b(n) = 2h(\frac{N}{2} - n)$ $\quad n = 1, 2, \ldots\ldots, N/2$

（注意 n 从1 开始，即 b(0)=0，或没有定义）

5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：Type II

振幅响应：

$$H_r(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

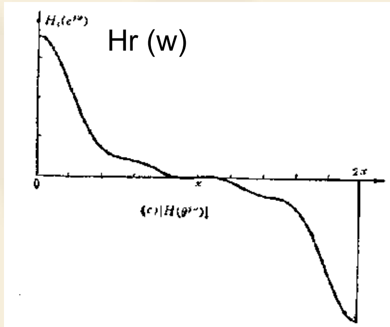
相频响应：

$$\theta(\omega)=-\tau\omega=-\frac{N-1}{2}\omega$$

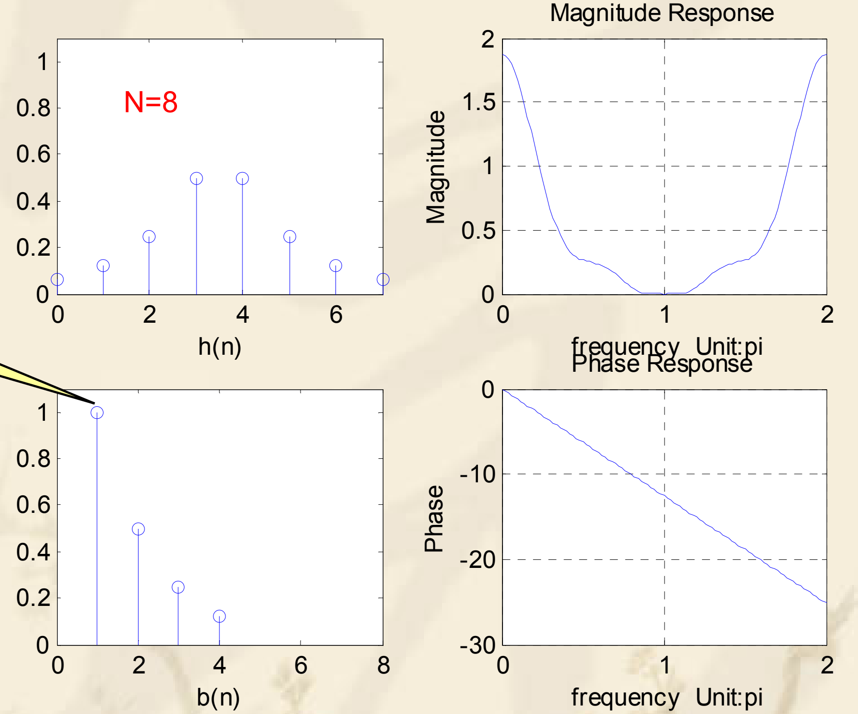
注意：

1) 在 ω = π 处，有：

$$H_r(\pi)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right\}=0$$



n 从1开始



与所设计的 **b(n)** 或 **h(n)** 无关，恒为 **0**。这种类型（即 **h(n)** 偶对称，**N**为偶数）不能用于高通或带阻滤波器。

2）由于 **cos[(n-1/2)ω]** 对于 **ω=π是奇对称**，所以，$\mathbf{H_r(w)}$ 对 **ω=π**也是奇对称；以 ω =0、2π为偶对称。

5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：Type III

- **h(n) 奇对称，N 为奇数（恒群时延〕**
  - **h(n) 长度为奇数，拆分成前后两部分：**

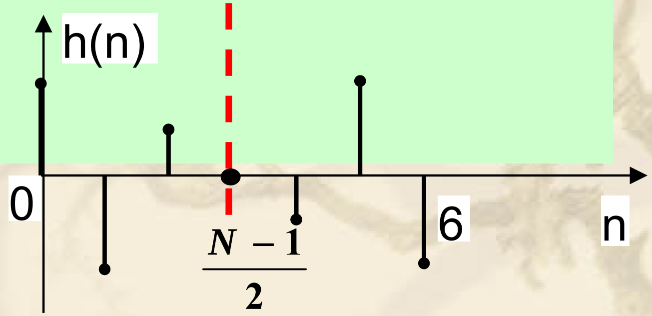
$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)e^{-jn\omega}+\sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1}h(n)e^{-jn\omega}$$

对上式的第二和式作变量替换，并利用对称条件 h(n)=-h(N-1-n)，得:

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)e^{-jn\omega}+\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(N-1-n)e^{-j(N-1)\omega}e^{jn\omega}=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)[e^{-jn\omega}-e^{-j(N-1)\omega}e^{jn\omega}]$$

$$=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)2j\sin[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]=je^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}2h(n)\sin[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]$$

$$=e^{j(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega)}\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}2h(n)\sin\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

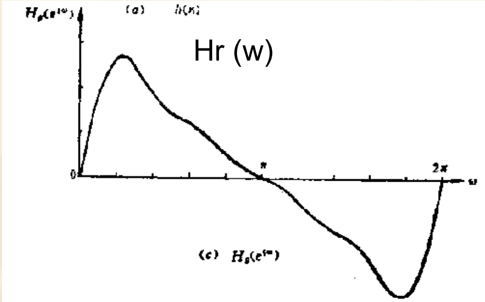


h(n) 为奇对称，N 为奇数

5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：Type III

令 $n' = \dfrac{N-1}{2} - n$ ，则上式为：

$$H(e^{j\omega}) = e^{j[\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega]} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin n\omega = e^{j\theta(\omega)} H_r(\omega)$$



其中 $c(n) = 2h\left(\dfrac{N-1}{2} - n\right)$

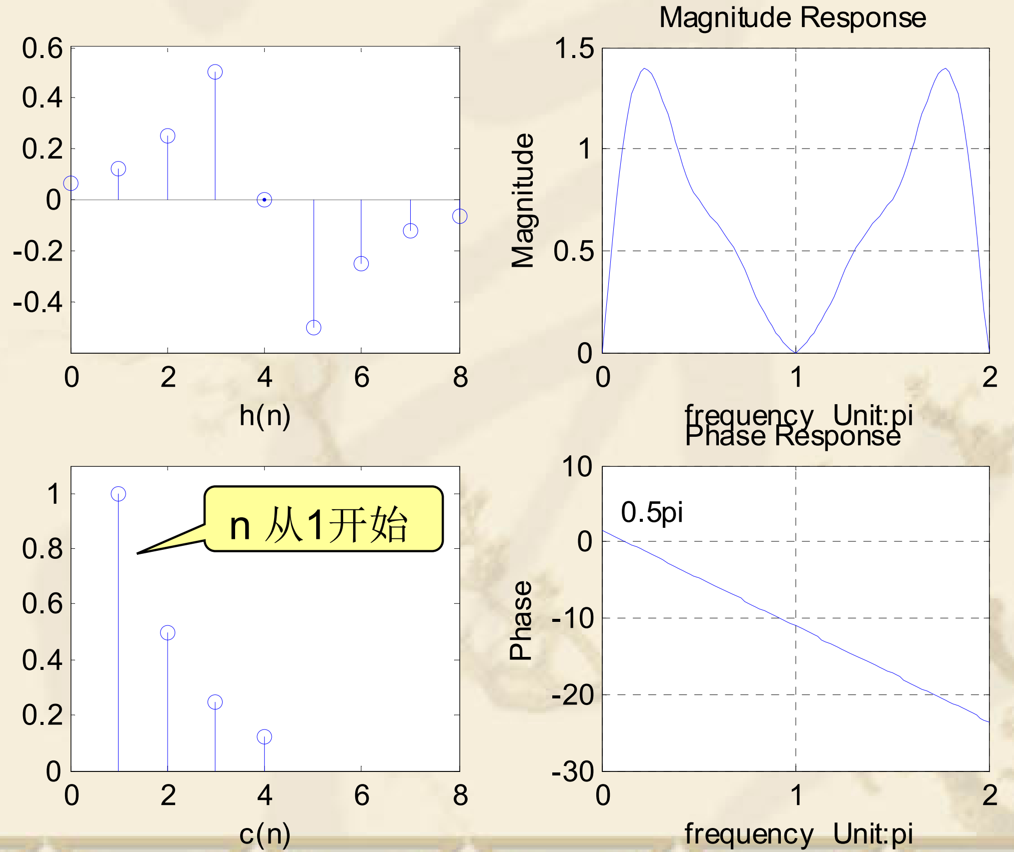
$$n = 1, 2, \ldots\ldots, (N-1)/2$$

振幅响应：

$$H_r(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin(n\omega)$$

相频响应：

$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$$



5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：Type III

注意：

1) 在 ω = 0, π, 2π 处，有：

$$H_r(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin n\omega = 0$$

与 c(n) 或 h(n) 的值无关，因此，这种类型的滤波器**不适用于低通、带阻或高通滤波器设计**，而且，这说明 $jH_r(w)$ 是纯虚数，对于逼近理想**数字希尔伯特变换和微分器**，它是很有用的。理想的希尔伯特变换是一个全通滤波器，它对输入信号产生 90 度的相移，它频繁用于通信系统中的调制。微分器广泛用于模拟和数字系统中对信号求导。

2）由于 sin(nω) 对于 ω=0、π、2 π 都是奇对称，所以，$H_r(w)$ 以ω =0、 π 、2π为奇对称。

5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：Type IV

- **h(n) 奇对称，N 为偶数（恒群时延〕**

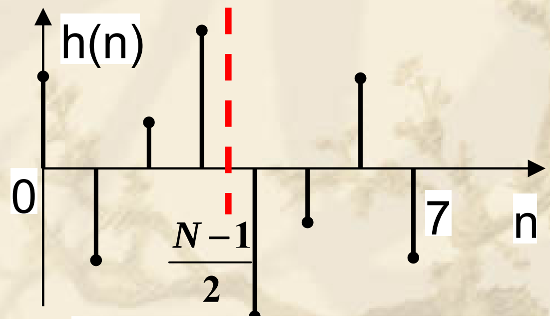
$$H(e^{j\omega}) = e^{j(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}w)}\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n)\sin(n-\frac{1}{2})\omega = e^{j\theta(\omega)}H_r(\omega)$$

其中

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2}-n\right), n = 1,2,3,\ldots,\frac{N}{2}$$

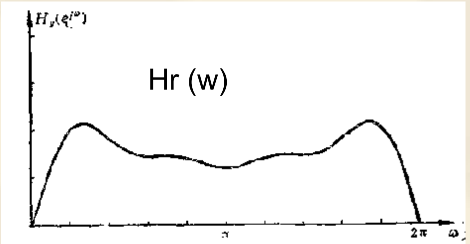
$$H_r(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \mathrm{d}(n)\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right)$$

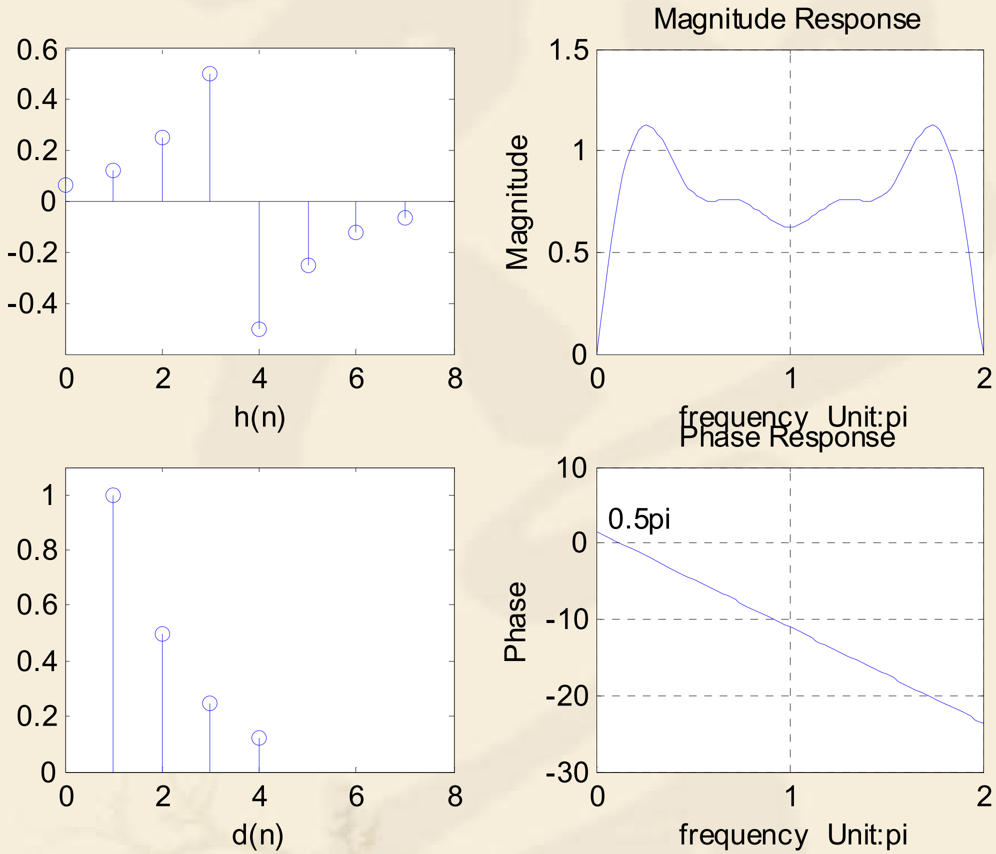
$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$$



h(n) 为奇对称，N 为偶数

5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：Type IV





注意：

1) 在 ω =0 处，有：

$$H_r(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n)\sin(n-\frac{1}{2})\omega = 0$$

与 **d(n)** 或 **h(n)** 的取值无关，因此传输函数 **H(z)** 在 **z = 1** 处为零点。显然，这种类型**不能用于实现低通、带阻滤波器**。又有 ，所以这类滤波器适用于设计希尔伯特变换和微分器。

2）由于 **sin[(n-1/2)ω]** 在 **ω=π**处偶对称，在**0**、**2π** 是奇对称，所以，**H_r(w)** 以**ω =π** 偶对称，**0**、**2π**为奇对称。

5.2.2 线性相移 FIR DF 频率响应：小结

一般形式：

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\theta(\omega)} H_r(\omega)$$

($H_r(\omega)$ 为 ω 的实函数)

偶对称：

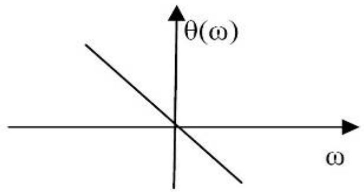
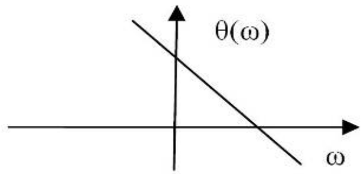
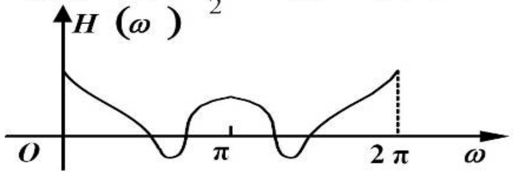
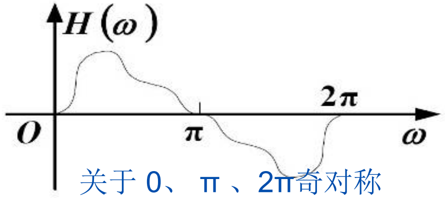
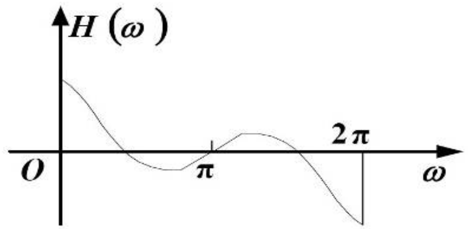
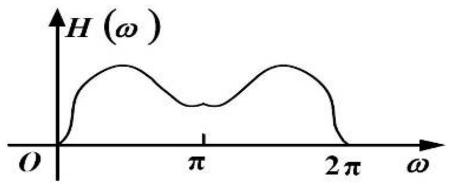
$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

（两个恒时延条件，恒相延时）

奇对称：

$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$$

（一个恒时延条件,恒群延时）

	偶对称 $h(n) = h(N-1-n)$	奇对称 $h(n) = -h(N-1-n)$
相位函数	$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$ 	$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$ 
N为奇数	**I** 幅度函数： $H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos(n\omega)$ $a(n) = h(\frac{N-1}{2})$ $n = 0$ $a(n) = 2h(\frac{N-1}{2} - n)$ $n \neq 0$  关于 0、π、2π偶对称	**III** 幅度函数： $H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin(n\omega)$ $c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right)$ n=1, 2, …, (N-1)/2  关于 0、 π 、2π奇对称 不能设计低通、高通、带阻滤波器
N为偶数	**II** 幅度函数： $H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left[(n-\frac{1}{2})\omega\right]$ $b(n)=2h(\frac{N}{2}-n)$， n=1, 2, …N/2  关于π奇对称；0、2π偶对称 不能设计高通、带阻滤波器	**IV** 幅度函数： $H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n)\sin(n-\frac{1}{2})\omega$ $d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right)$ n=1, 2, …, N/2  关于π 偶对称，0、2π奇对称 不能设计低通、带阻滤波器

5.2.3 线性相移 FIR DF 零极点分布

■ 一般的 FIR DF 的零、极点：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=z^{-(N-1)}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{(N-1)-n}=\frac{f(z)}{z^{N-1}}$$

❶ 在z=0处，有一个（N-1）阶的极点，故滤波器稳定；

❷ 其零点要求 f(z)=0，根据代数理论，它为 N-1阶多项式，应有 N-1 个根，所以有 N-1 个零点。如果 h(n)为实数值，其根肯定是共轭对称的。

5.2.3 线性相移 FIR DF 零极点分布

❖ 线性相移 FIR DF 的零极点：

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \qquad n = 0,\ldots\ldots, N-1$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n) z^{-n}$$

令：m=N-1-n

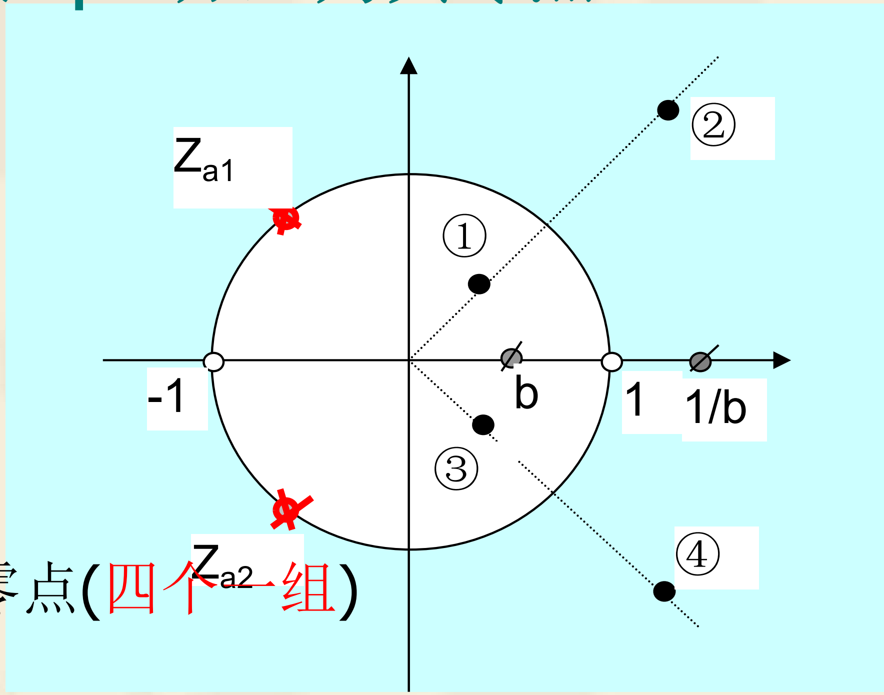
$$H(z) = \pm \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{-(N-1-m)} = \pm z^{-(N-1)} \boxed{\sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{m}} = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

于是：$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$

✓ 如果 z_i 是 H(z) 的零点，即 $H(z_i) = 0$
则 $H(z^{-1}) = 0$，即 z_i^{-1} 亦为 H(z) 的零点。

5.2.3 线性相移 FIR DF 零极点分布

- 上面提到 z_i 肯定是共轭的，故 z_i^* 亦必为其零点
- 于是零点有：



$$z_i,\quad z_i^*,\quad \frac{1}{z_i},\quad \frac{1}{z_i^*}$$

总结：

1) 一般情况， $z_i = r_i e^{j\omega_i}$，有四个零点(四个一组)

$$z_i = r_i e^{j\omega_i} \qquad z_i^* = r_i e^{-j\omega_i} \qquad z_i^{-1} = r_i^{-1} e^{-j\omega_i} \qquad (z_i^*)^{-1} = r_i^{-1} e^{j\omega_i}$$

2) r=1，单位圆上的零点： $z_i = e^{j\omega_i}$ $z_i = e^{-j\omega_i}$ (共轭对，两个一组)

3) 位于实轴上的实数：b, 1/b (实轴上的倒数对，两个 一组)。

4) $z_i = \pm 1$：单零点 $\quad z_i^* = z_i^{-1} = \left(z_i^*\right)^{-1} = z_i$

5.3 FIR DF 窗口法（傅里叶级数法）

思路：

理想数字滤波器

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-jn\omega}$$

⇨ $h_d(n)$ 无限长，且非因果

设计的 FIR 数字滤波器

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega}$$

⇨ $h(n)$ 有限长，且因果

$$\Rightarrow h_d(n) \xrightarrow[\text{截短}]{\text{窗函数}} h(n)$$

要求： 线性相位

尽可能降低逼近误差

5.3.1 窗口法：基本原理

- 设所要求的 **DF** 的频率响应是 $H_d(e^{j\omega})$，**需要注意：它可能是低通、高通、带通和带阻 FIR DF，没有特指某种类型的数字滤波器。**
- 不管是何种 **FIR DF**，它的频率响应是频域中的周期函数，周期为 **2π**，所以它可以展开为傅氏级数形式：

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-jn\omega}$$

式中 $h_d(n)$ 是傅里叶系数，也是单位取样响应序列。
由傅里叶级数理论可得：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

5.3.1 窗口法：基本原理

因此，所要求的 DF 的系统函数便可求得：

$$H_d(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d(n)z^{-n}$$

- 显然，$H_d(z)$ 是非因果的，且 $h_d(n)$ 的持续时间为 -∞～ +∞，物理上不可实现。

- 我们可以采用<u>逼近</u> $H_d(e^{j\omega})$ 的方法

❶ 首先把 $h_d(n)$ 先截短为有限项，把 $h_d(n)$ 截为2M+1项，得：

$$H_d(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d(n)z^{-n} \Rightarrow H_1(z)=\sum_{n=-M}^{M}h_d(n)z^{-n}$$

5.3.1 窗口法：基本原理

❷ 然后把截短后的 $h_d(n)$ 右移，使之变成因果性的序列。

令 $H(z)$ 等于 $H_1(z)$ 乘以 z^{-M} 得：

$$H(z)=z^{-M}H_1(z)=\sum_{n=-M}^{M}h_d(n)z^{-(n+M)}=\sum_{n=0}^{2M}h_d(n-M)z^{-n}$$

$$M=\frac{N-1}{2}$$

❸ 令 $h(n)=h_d(n-M)$, $n=0, 1, 2, \ldots\ldots, 2M$，则

$$H(z)=\sum_{n=0}^{2M}h(n)z^{-n}$$

⇩ 频率响应 $z=e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{2M}h(n)e^{-jn\omega}$$

- 显然
  - H(z) 是物理可实现的
  - 其冲激响应 h(n) 的持续时间也是有限的
  - 选择 $h_d(n)=\pm h_d(N-1-n)$，保证H(z) 具有线性相位。

5.3.2 窗口法：性能分析

❖ $|H(e^{j\omega})|$ 对 $|H_d(e^{j\omega})|$ 的逼近

对 $h_d(n)$ 的截短必然产生误差，即以 $|H(e^{j\omega})|$ 近似 $|H_d(e^{j\omega})|$ 。

定义逼近误差为均方误差：

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

而 $H_d(e^{j\omega})$ 可以展开为：

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-jn\omega} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega)$$

式中:

$$a_0 = 2h_d(0); \quad a_n = h_d(n) + h_d(-n)$$

$$b_n = j[h_d(-n) - h_d(n)]$$

5.3.2 窗口法：性能分析

因为 $|H(e^{j\omega})|$ 是对 $h_d(n)$ 截短而产生的，假定：

$$H(e^{j\omega})=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}A_n\cos(n\omega)+\sum_{n=1}^{M}B_n\sin(n\omega)$$

即当 $|n|>M$ 时，$A_n=0$， $B_n=0$。

所以把上述两式代入逼近误差中，利用三角函数的正交性可得：

$$\varepsilon^2=\frac{(a_0-A_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{M}(a_n-A_n)^2+\sum_{n=1}^{M}(b_n-B_n)^2+\boxed{\sum_{n=M+1}^{\infty}(a_n+b_n)^2}$$

由于上式中每一项都是正的，所以，只有当

$$A_0=a_0,A_n=a_n,B_n=b_n,n=1,2,\ldots\ldots,M \text{ 时}$$

$$\varepsilon^2=\min \text{ 最小。}$$

5.3.2 窗口法：性能分析

说明：

① 当用 $|H(e^{j\omega})|\approx|H_d(e^{j\omega})|$ 时，要使 $\varepsilon^2=\min$， $|H(e^{j\omega})|$ 的截短后的单位取样响应 $h(n)$ 的系数必须等于所要求的幅频响应 $|H_d(e^{j\omega})|$展成傅里叶级数的系数 $h_d(n)$。

② 有限项傅氏级数是在最小均方意义上对原信号的最佳逼近

其逼近误差为： $$\varepsilon^2=\sum_{n>|M|}h_d^{\,2}(n)$$

截短的长度 M 越大，逼近误差ε^2 愈小（因为 $h_d(n)$ 值愈小）。

5.3.2 窗口法：性能分析

■ 将 $h_d(n)$ 截短：

$$h(n)=\begin{cases} h_d(n), & |n|\le M \\ 0, & else \end{cases}$$

相当于将 $h_d(n)$ 与一窗函数 $w_R(n)$ 相乘，即

$$h(n)=h_d(n)w_R(n)$$

其中

$$w_R(n)=\begin{cases} 1, & |n|\le M \\ 0, & else \end{cases}$$

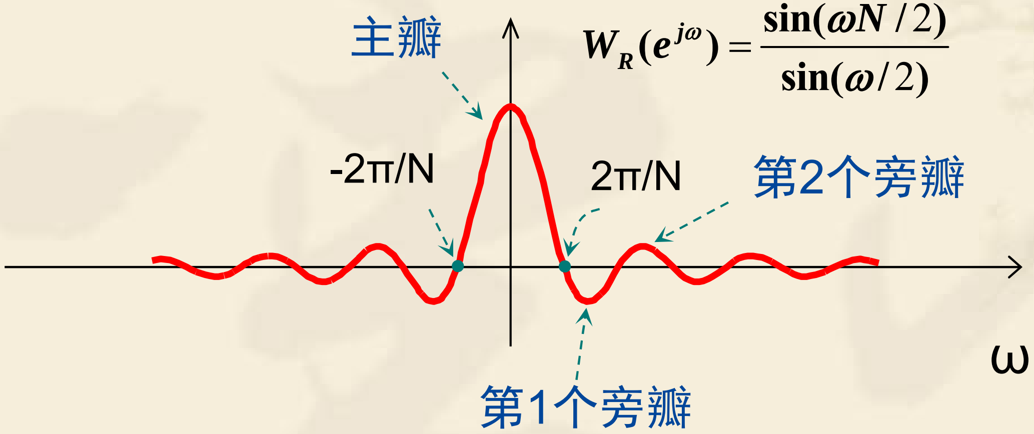
在一定意义上来看，窗函数决定了我们能够“看到”多少个原来的冲激响应，“窗”这个用词的含义也就在此。

5.3.2 窗口法：性能分析

- 窗函数的频谱：

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-M}^{M} e^{-jn\omega} = \frac{e^{jM\omega}-e^{-jM\omega}e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{2M+1}{2}\omega}-e^{-j\frac{2M+1}{2}\omega}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)} = \frac{\sin\frac{(2M+1)\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$



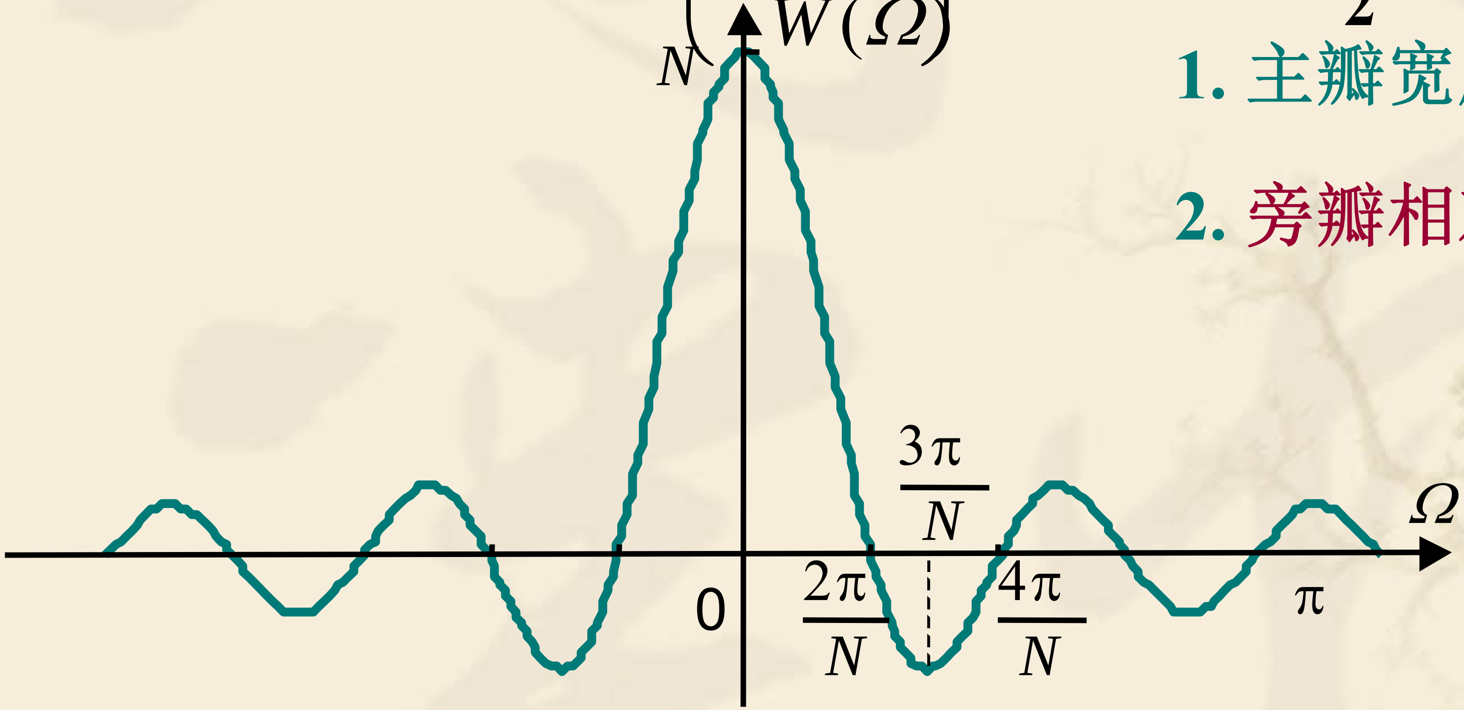
此矩形窗谱为一钟形偶函数，在 ω＝±2π/N 之间为其主瓣，主瓣宽度 Δω = 4π/N，在主瓣两侧有无数幅度逐渐减小的旁瓣，见图所示。

5.3.2 窗口法：性能分析

- 窗函数的频谱

$$W_R(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}w_R(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=-M}^{M}e^{-jn\omega}=\frac{e^{jM\omega}-e^{-jM\omega}e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{2M+1}{2}\omega}-e^{-j\frac{2M+1}{2}\omega}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}=\frac{\sin\frac{(2M+1)\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}=\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$



1. 主瓣宽度 $4\pi/N$

2. 旁瓣相对衰减为常数

$$A=20\lg\frac{\left|W(\frac{3\pi}{N})\right|}{|W(0)|}$$

$=-13\text{dB}$

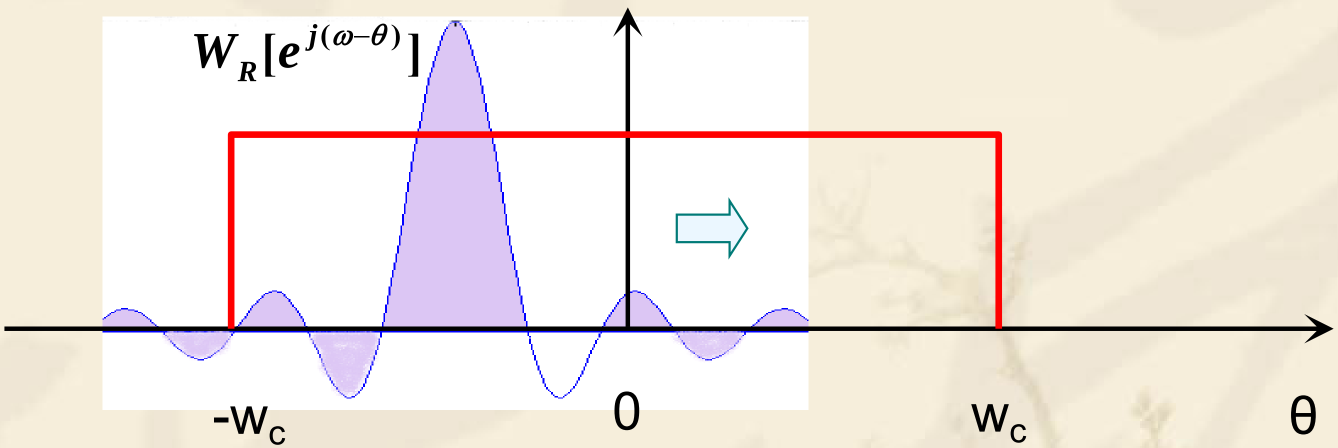
5.3.2 窗口法：性能分析

- 截短，根据时域相乘映射为频域卷积，得：

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\left[H_d(e^{j\omega})*W_R(e^{j\omega})\right]$$

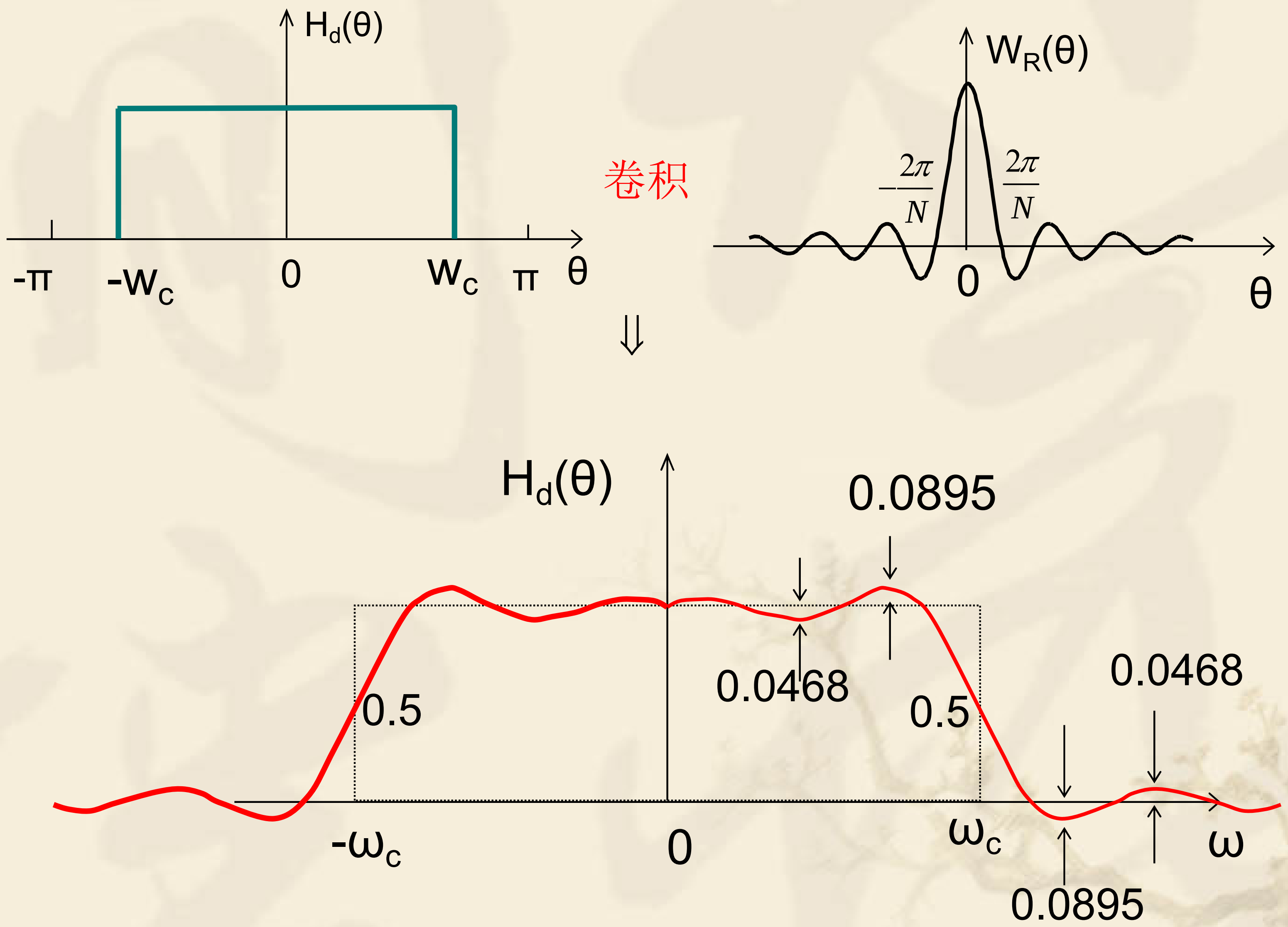
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\theta})W_R[e^{j(\omega-\theta)}]d\theta$$

为便于分析，我们假定 $|H_d(e^{jw})|$ 是理想低通滤波器 LPF。



式中积分等于θ由 $-\omega_c$ 到 ω_c 区间内 $W_N[e^{j(w-\theta)}]$ 下的面积，随着ω变化，窗函数的主瓣和不同正负、不同大小的旁瓣移入和移出积分区间，使得此面积发生变化， 也即 $|H(e^{jw})|$ 的大小产生波动。

5.3.2 窗口法：性能分析


H_d(θ)
-π
-w_c
0
w_c
π
θ
卷积
W_R(θ)
2π/N
-2π/N
0
θ
⇓
H_d(θ)
0.0895
0.0468
0.5
0.5
0.0468
-ω_c
0
ω_c
ω
0.0895

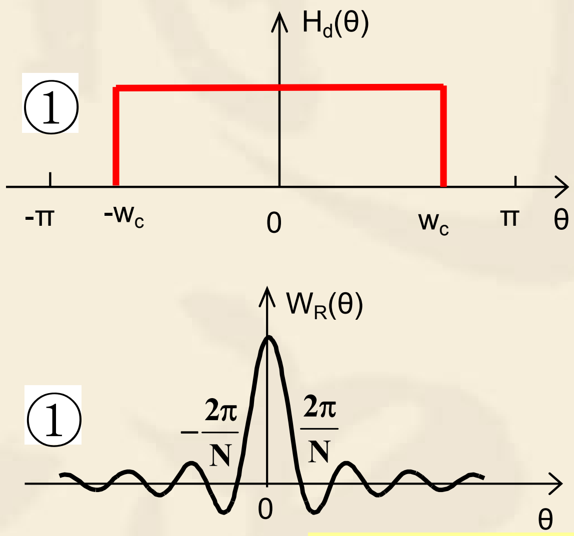
5.3.2 窗口法：性能分析

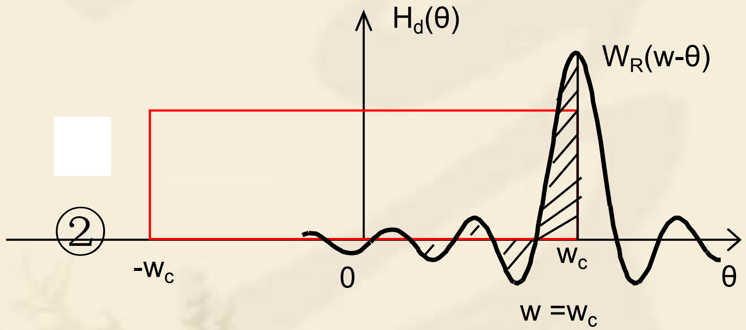
❖ 现在分析几个特殊频率点的滤波器性能：

❶ ω= 0 时：

$$H_1(e^{j0})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}W_R(\theta)d\theta$$

由于一般情况下都满足 $\omega_c >> 2\pi / N$，因此，H(0) 的值近似等于窗谱函数 $W_R(e^{jw})$ 与θ轴围出的整个面积。





❷ ω=ω_c 时：

$$H_1(e^{j\omega_c})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}w_R(\omega_c-\theta)d\theta\approx\frac{H_1(e^{j0})}{2}$$

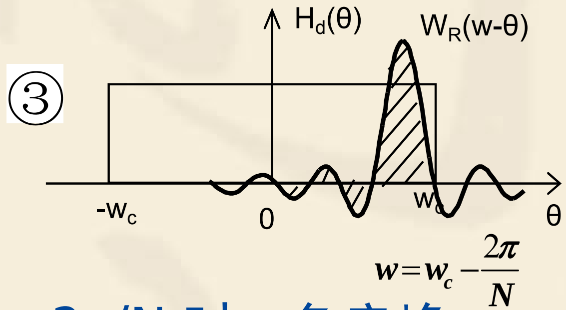
此时窗谱主瓣一半在积分区间内一半在区间外，因此，窗谱曲线围出的面积，近似为ω=0 时所围面积的一半，即 $H_1(\omega_c)\approx\frac{1}{2}H_1(0)$。

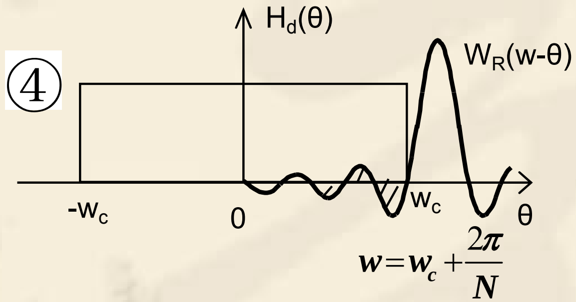
5.3.2 窗口法：性能分析

❸ ω=ω$_c$ - 2π/N 时，正肩峰

$$H_1(\omega_c-\frac{2\pi}{N})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}w_R(\omega_c-\frac{2\pi}{N}-\theta)d\theta=1.0895H_1(0)=Max$$

此时窗谱主瓣全部处于积分区间内，而其中一个最大负瓣刚好移出积分区间，这时得到最大值，形成正肩峰。之后，随着**ω**值的不断增大，**H(e^{jw})** 的值迅速减小，此时进入滤波器过渡带。



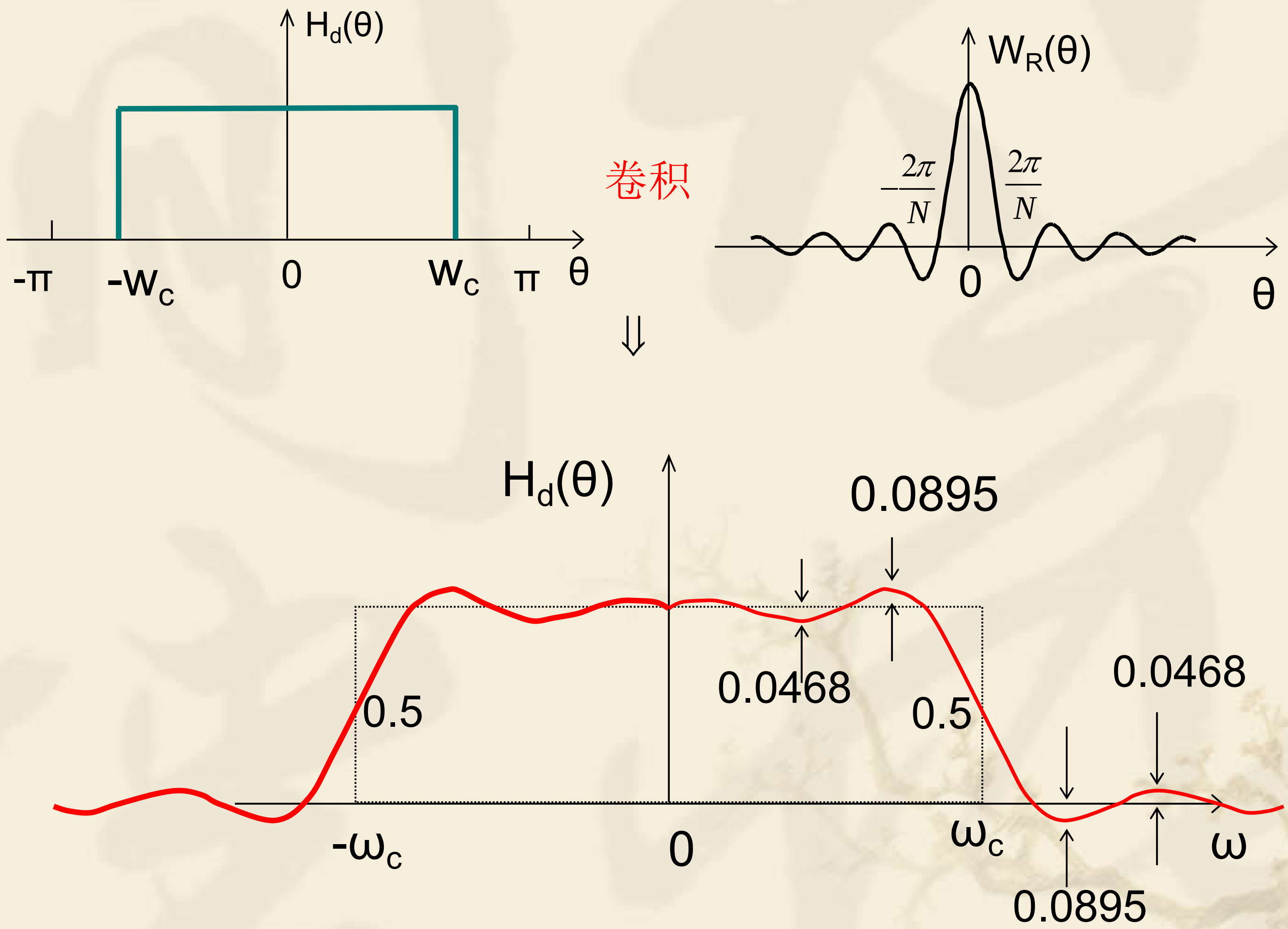


❹ ω=ω$_c$ + 2π/N 时，负肩峰

$$H_1(\omega_c+\frac{2\pi}{N})=-0.0895H_1(0)=Min$$

此时窗谱主瓣刚好全部移出积分区间，而其中一个最大负瓣仍全部处于区间内，因此得到最小值，形成负肩峰。之后，随着**ω**值的继续增大， **H(e^{jw})** 的值振荡并不断减小，形成滤波器阻带波动。

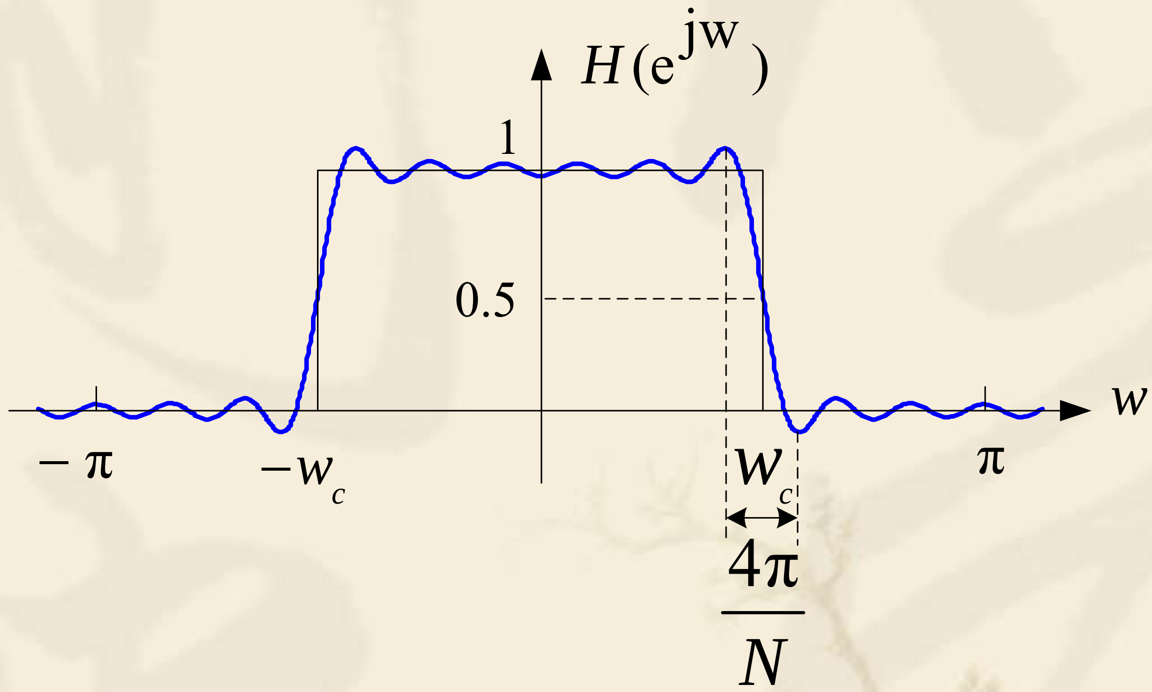
5.3.2 窗口法：性能分析



$H_d(\theta)$
$-\pi$
$-w_c$
0
w_c
π
θ
卷积
$W_R(\theta)$
$-\frac{2\pi}{N}$
$\frac{2\pi}{N}$
0
θ
⇓
$H_d(\theta)$
0.0895
0.0468
0.5
0.5
0.0468
$-\omega_c$
0
ω_c
ω
0.0895

5.3.2 窗口法：性能分析

- 矩形窗设计FIR滤波器的频率响应



矩形窗截断产生的波峰大约是9%，故用矩形窗设计出的滤波器阻带最大衰减 **20lg(9%)≈-21dB**

5.3.2 窗口法：性能分析

- 结论

1. 窗函数的主瓣宽度决定了$H(e^{j\omega})$过渡带的宽度，窗函数长度N增大， 过渡带减小。

2. 旁瓣的大小决定了FIR滤波器在阻带的衰减

用矩形窗设计出的滤波器阻带最大衰减为

$$20\lg(9\%)\approx-21\text{dB}$$

- 如何提高阻带衰减?

选用旁瓣幅度较小的窗函数

5.3.2 窗口法：性能分析

■ 加窗处理对理想矩形频率响应的影响：

❶ 理想滤波器的不连续点演化为过渡带

过渡带：**正负肩峰之间的频带**。其宽度等于窗口频谱的主瓣宽度。

对于矩形窗 $W_R(e^{j\omega})$, 此宽度为 $4\pi/N$。

❷ 通带与阻带内出现起伏波动

肩峰及波动：这是由窗函数的旁瓣引起的。

旁瓣越多，波动越快、越多。相对值越大，波动越厉害，肩峰越强。

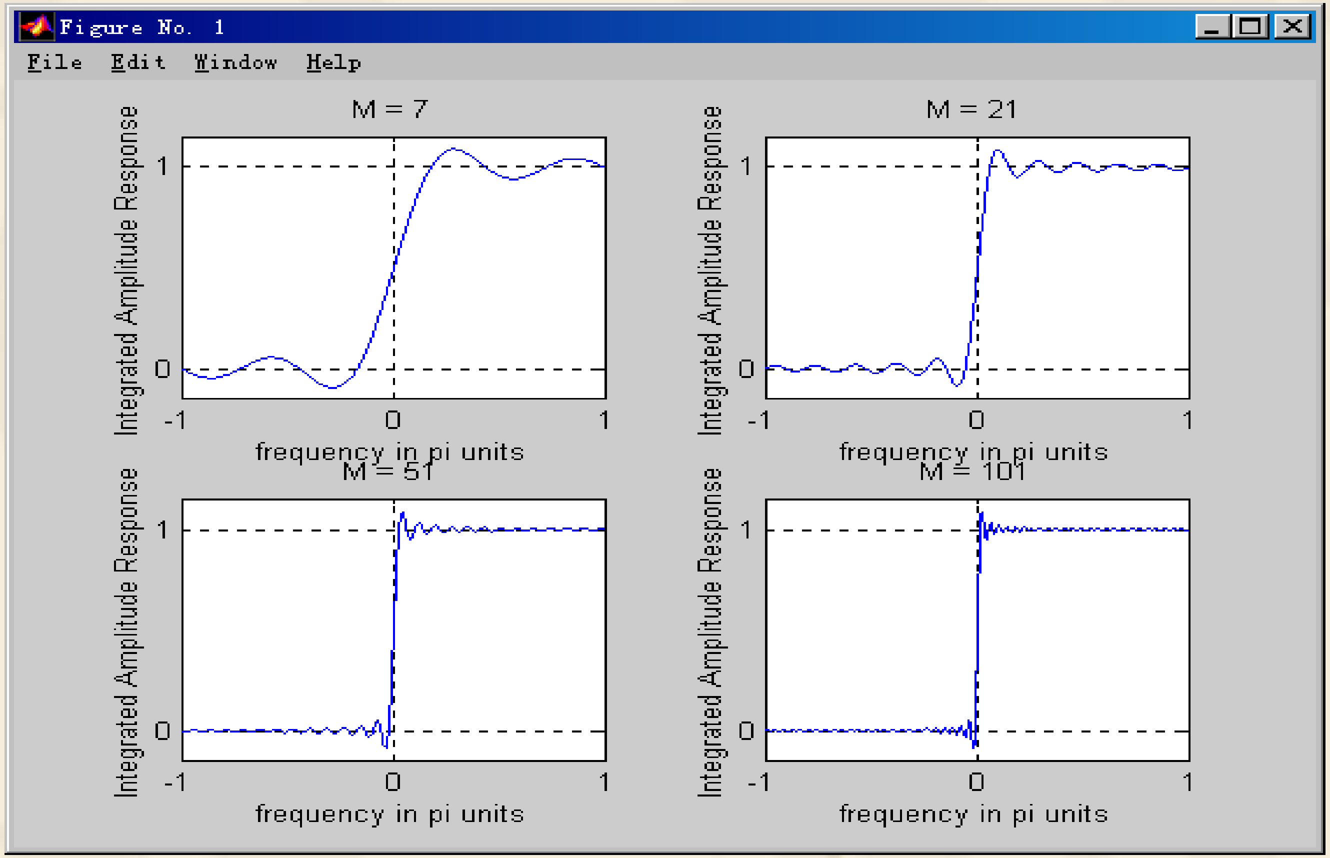
肩峰和波动与所选窗函数的形状有关，要改善阻带的衰减特性只能通过改变窗函数的形状。

❸ Gibbs 现象

- 在对 $h_d(n)$ 截短时，由于窗函数的频谱具有旁瓣，这些旁瓣在与 $H_d(e^{j\omega})$ 卷积时产生了通带内与阻带内的波动，称为**吉布斯现象**。
- 长度 N 的改变只能改变 ω 坐标的比例及窗函数 $W_R(e^{jw})$ 的绝对大小，但不能改变肩峰和波动的相对大小（因为不能改变窗函数主瓣和旁瓣的相对比例，波动是由旁瓣引起的），即增加 N，只能使通、阻带内振荡加快，过渡带减小，但相对振荡幅度却不减小。

5.3.2 窗口法：Gibbs 效应

Gibbs现象：



设计要求：

① 主瓣宽度尽可能窄，是过渡带陡峭（N的计算）

② 最大旁瓣相对于主瓣尽可能小，能量尽量集中在主瓣内，使得肩峰和波动小。（窗的选择）

5.3.3 窗口法：常用窗函数

- 设计FIR DF时，窗函数不仅可以影响过渡带宽度，还能影响肩峰和波动的大小(阻带的衰减)，因此，选择窗函数应使其频谱：
  - ❶ 主瓣宽度尽量小，以使过渡带尽量陡。
  - ❷ 旁瓣相对于主瓣越小越好，这样可使肩峰和波动减小，即能量尽可能集中于主瓣内。
  - 对于窗函数，这两个要求是相互矛盾的，要根据需要进行折衷的选择，

- 为了定量地比较各种窗函数的性能，给出三个频域指标：
  - ❶ 过渡带宽$\Delta\omega=\frac{2\pi}{N}$（最大可能的频率分辨力）
  - ❷ 最大旁瓣峰值 A(dB)，A 越小，由旁瓣引起的谱失真越小
  - ❸ 第一旁瓣所决定的阻带衰减
  - 一个好的窗口，应该有最小的 B、A 及最大的 D。

5.3.3 窗口法：基本窗函数_矩形窗

- 以下介绍的窗函数
  - 均为偶对称函数，都具有线性相位特性。
  - 设窗的宽度为N，窗函数的对称中心点在(N-1)/2处。因此，均为因果函数。
- 矩形窗
  - 最简单的窗函数，从阻带衰减的角度看，其性能最差。

$$w(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & else\end{cases}$$

  - 它的频率响应函数为：

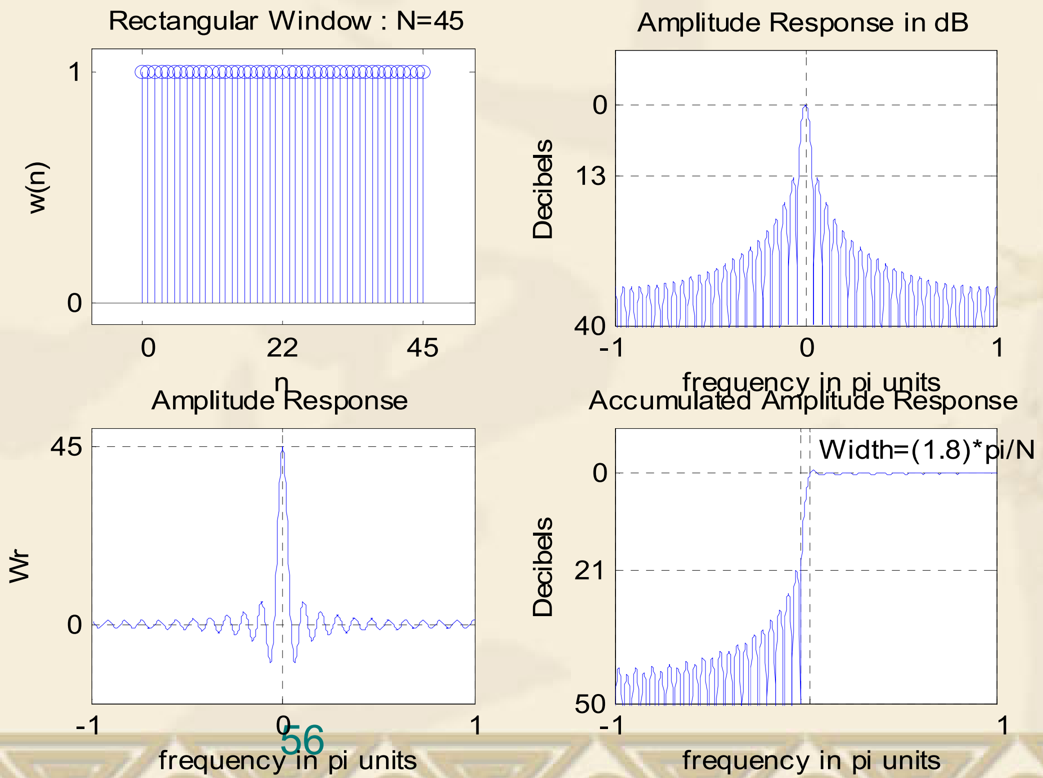
$$W(\omega)=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \xrightarrow{\text{振幅响应}} W_r(\omega)=\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

5.3.3 窗口法：基本窗函数_矩形窗

- 为了对过渡带和阻带衰减进行精确分析，对窗振幅响应进行连续积分（或累积振幅响应），即

$$H_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\omega+\omega_c} W_r(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\omega+\omega_c} \frac{\sin\left(\dfrac{N\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)}d\lambda \quad , \qquad N >> 1$$

- 矩形窗函数 w(n) 以及它的振幅响应、累积振幅响应如下图所示。



■性能指标

- 过渡带宽：

  B=0.89Δω

- 最大旁瓣峰值

  A= -13dB

- 第一旁瓣衰减-21dB

在 Matlab 中，实现矩形窗的函数为 w = boxcar(n)。

5.3.3 窗口法：基本窗函数_矩形窗

- **振幅响应**
  - 在 ω = ω_1 处具有第一个零点：

$$\frac{\omega_1 N}{2} = \pi \quad 或 \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{N} = \Delta\omega$$

  - 因而主瓣的宽度为 2Δω，所以过渡带宽也近似为 2Δω。
  - 大约在 ω = 3π/N 处，出现第一个旁瓣（即主旁瓣），其幅度为：

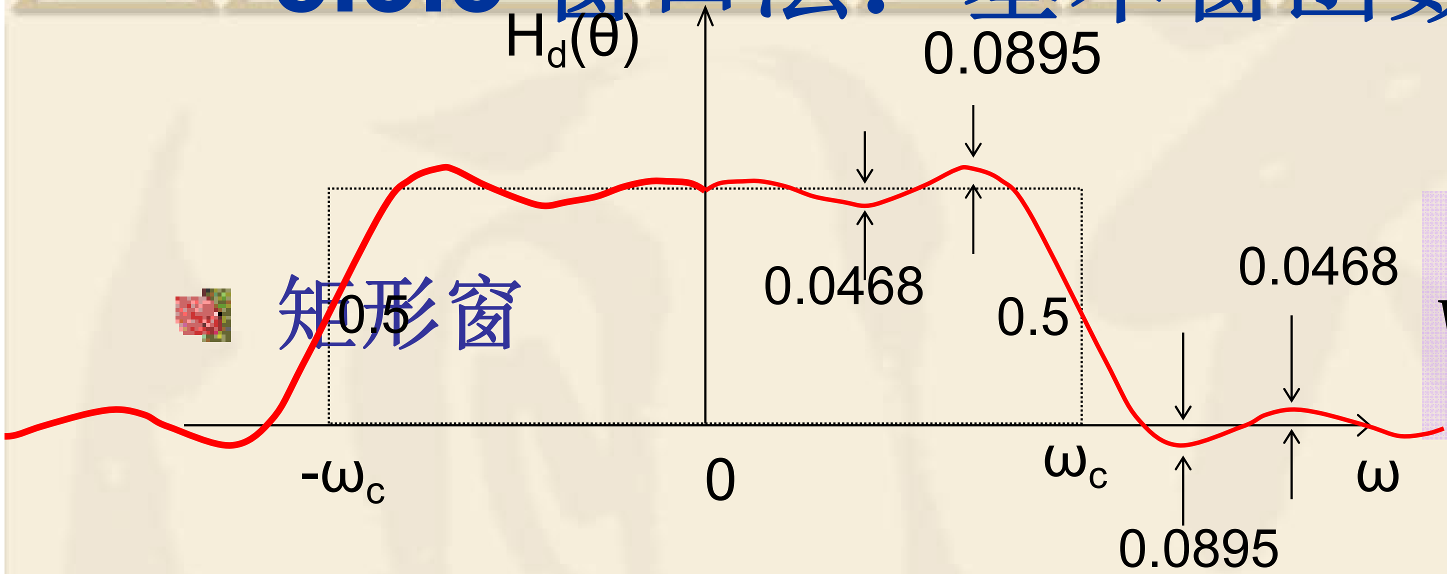
$$\left|W_r(\frac{3\pi}{N})\right| = \left|\frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2N})}\right| \approx \frac{2N}{3\pi}\text{，}M \ge 1 \text{ 时}$$

  - 将它与主瓣振幅 N 比较，则最大旁瓣峰值A(dB) 为 A= -13db。
- **累积振幅响应**
  - 第一个旁瓣为 21dB，这个 21dB 的阻带衰减与窗长度 N 无关。
  - 根据最小阻带衰减，可以精确地计算出过渡带宽为：
  - 它大约是近似带宽的一半。

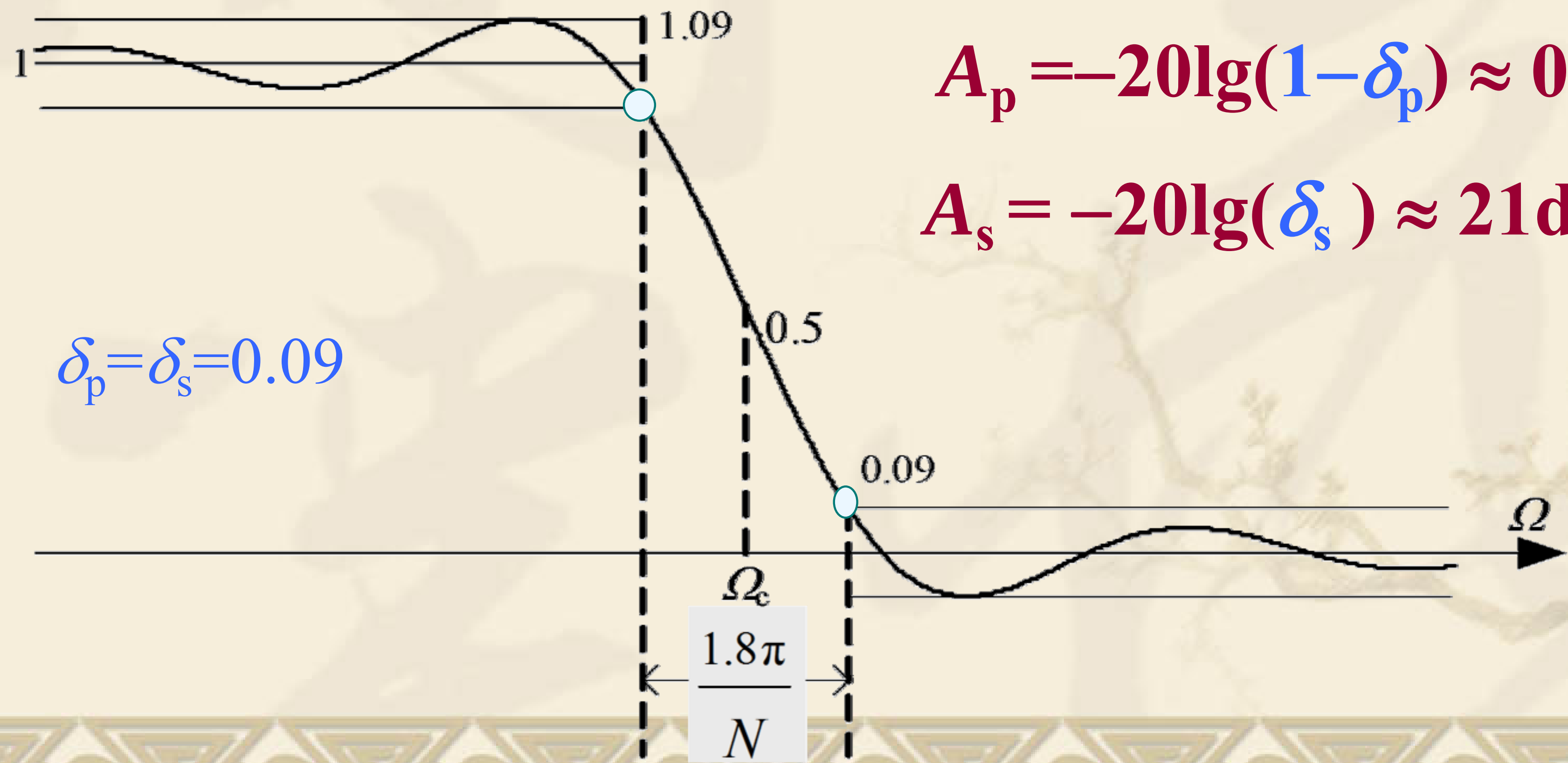
$$\omega_s - \omega_p = \frac{1.8\pi}{N}$$

5.3.3 窗口法：基本窗函数_矩形窗

- 矩形窗



$$w[k]=\begin{cases}1 & 0\le k\le M\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



$$A_p=-20\lg(1-\delta_p)\approx 0.82\text{dB},$$

$$A_s=-20\lg(\delta_s)\approx 21\text{dB}$$

$\delta_p=\delta_s=0.09$

5.3.3 窗口法：基本窗函数_三角窗

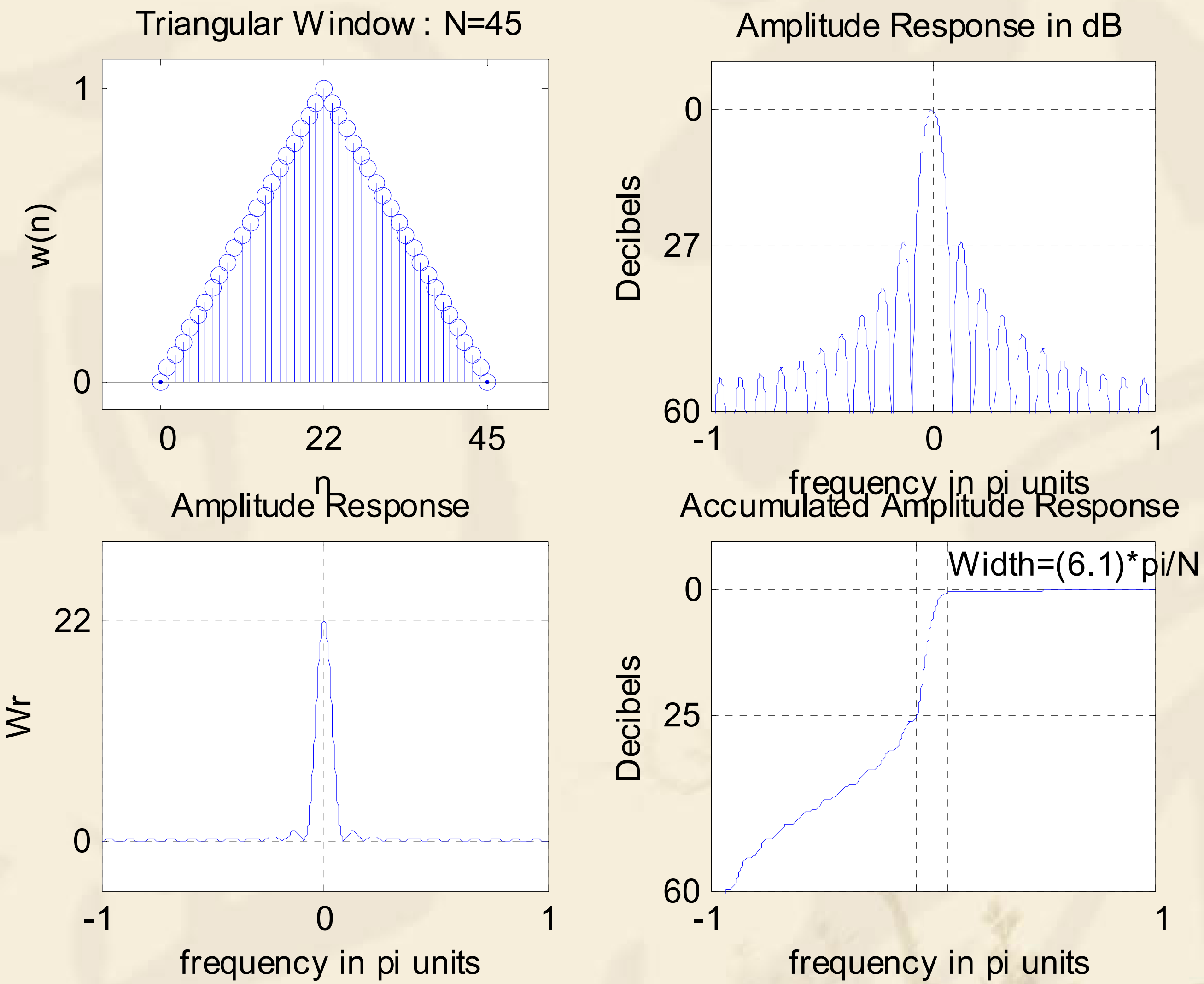
- 三角窗（或 巴特利特 Bartlett 窗）
  - 由于矩形窗从 **0** 到 **1** （或 **1** 到 **0** ）有一个突变的过渡带，这造成了吉布斯现象。**Bartlett** 提出了一种逐渐过渡的三角窗形式，它是两个矩形窗的卷积。

$$w(n)=\begin{cases}\dfrac{2n}{N}, & n=0,1,\ldots,\dfrac{N}{2}\\[2ex] w(N-n), & n=\dfrac{N}{2},\ldots,N-1\end{cases}$$

$$W(\omega)=\frac{2}{N}e^{-j(\frac{N}{2}-1)\omega}\left(\frac{\sin\left(\dfrac{N\omega}{4}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}\right)^2$$

  - **A=-27dB**，近似过渡带宽 **8π/N**，**精确过渡带宽 6.1π/N，最小阻带衰减 25dB**。与矩形窗来比较，阻带衰减性能有所改善，但代价是过渡带的加宽。

5.3.3 窗口法：基本窗函数_三角窗



5.3.3 窗口法：升余弦窗函数

- 升余弦窗函数
  - 汉宁窗、汉明窗、布莱克曼窗都是升余弦窗的特例。它们都是频率为 **0~ 2п/(N-1)** 和 **4п/(N-1)** 的余弦序列的组合。升余弦窗的频率特性比矩形窗有很大改善。

$$w(n) = A - B\cos(n) + C\cos(2n)$$

  - 其中 **A**、**B**、**C** 为常数。

❶ 当 A = 0.5，B=0.5，C=0 时，为汉宁 (Hanning)窗。

Matlab 中，w = hanning(n)

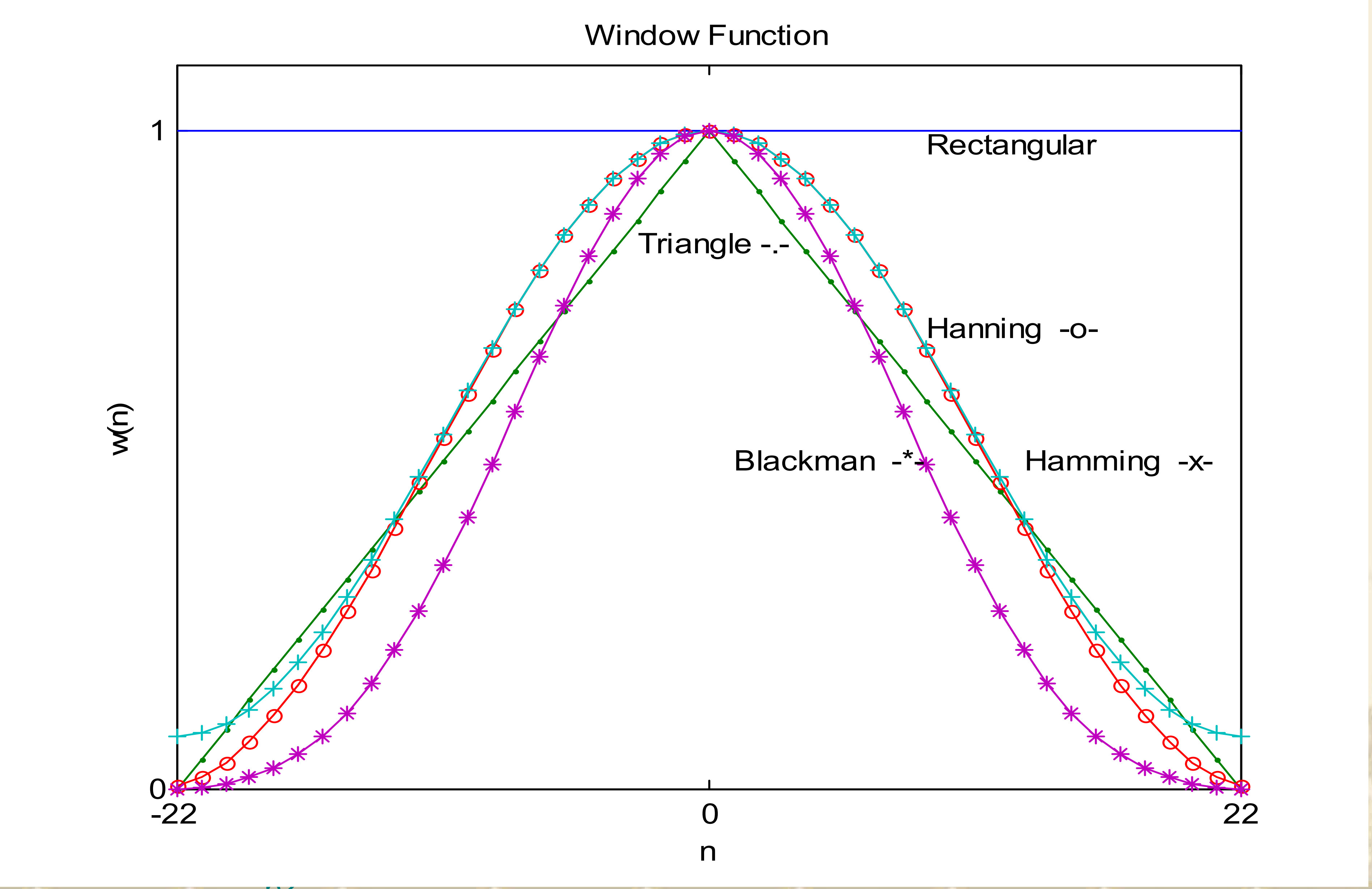
❷ 当 A = 0.54，B=0.46，C=0 时，为汉明 (Hamming) 窗。

Matlab 中，w = hamming(n)

❸ 当 A = 0.42，B=0.5，C=0.08 时，为布莱克曼窗。

Matlab 中，w = blackman(n)

5.3.3 窗口法：升余弦窗函数



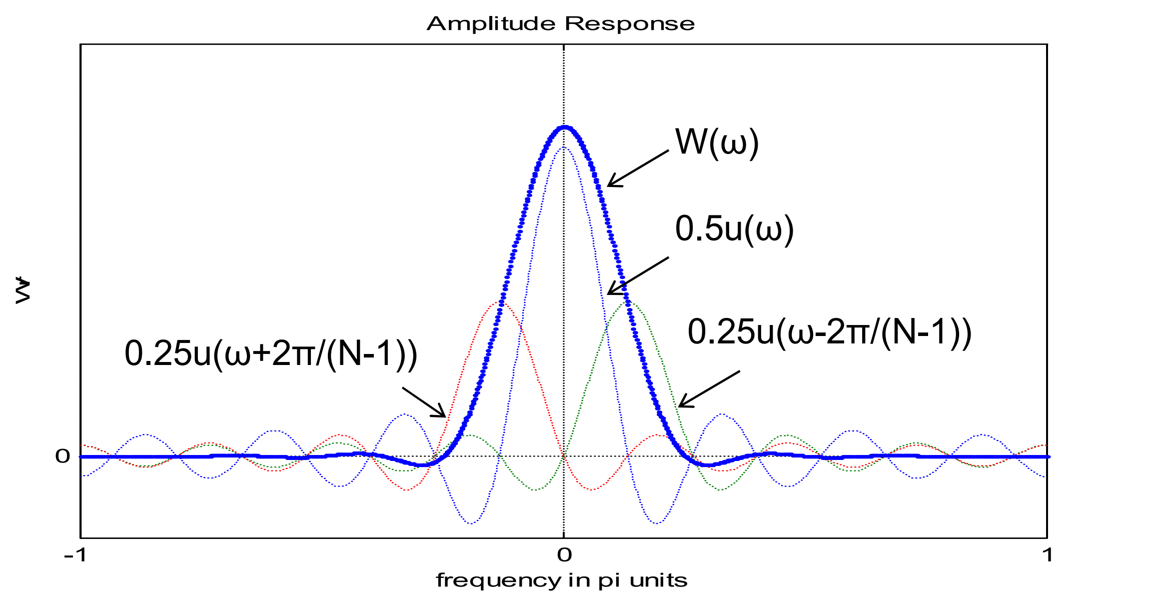
5.3.3 窗口法：升余弦窗函数_汉宁窗

❖ Hanning 窗（升余弦窗）

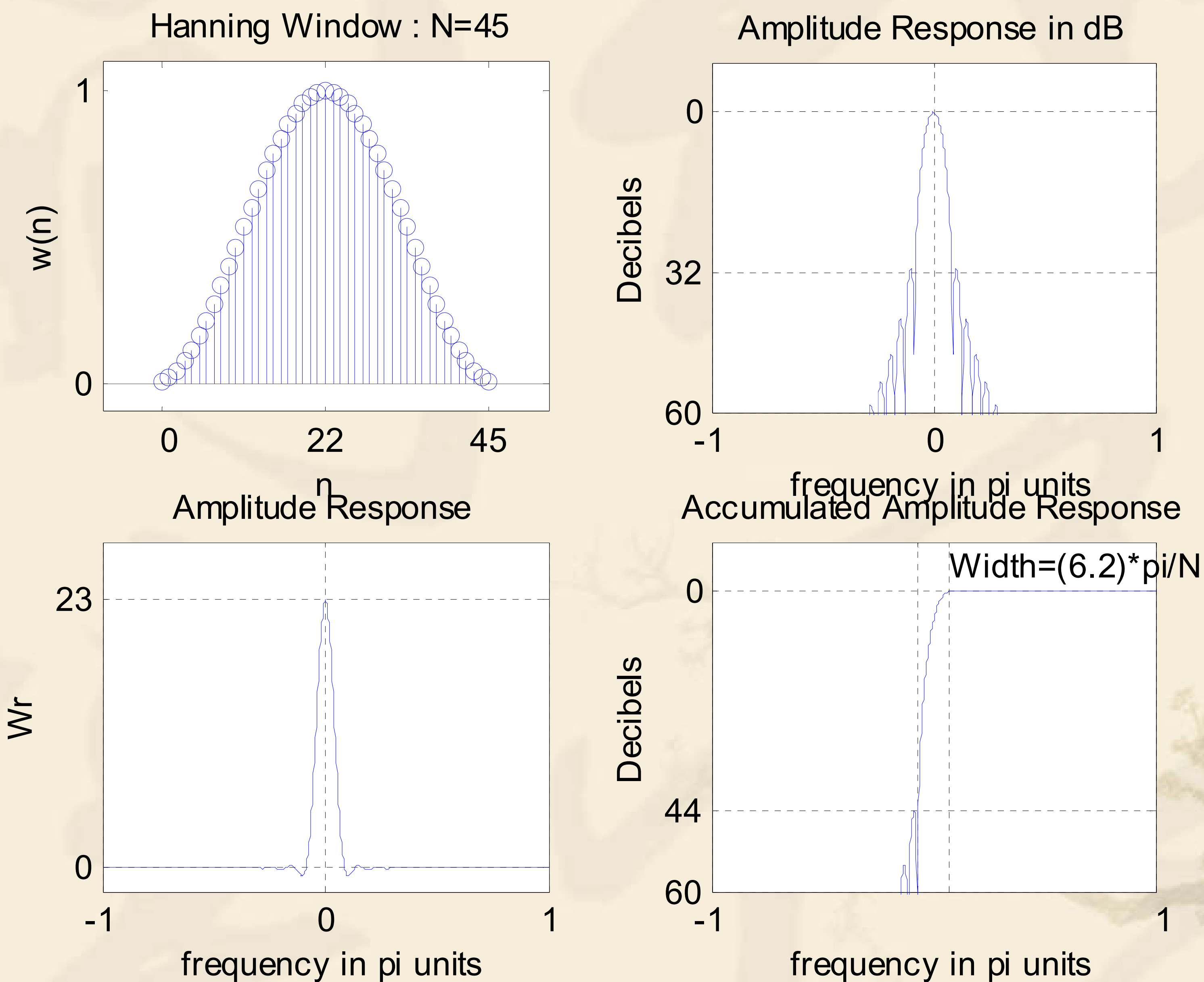
$$w(n)=\sin^2\left(\frac{n\pi}{N-1}\right)=0.5-0.5\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right)\qquad n=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$W(\omega)=0.5u(\omega)+0.25\left[u\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)+u\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\right]$$

A=-32db，近似过渡带宽 8π/N，精确过渡带宽 6.2π/N，最小阻带衰减 44dB。与矩形窗来比，最小阻带衰减性能明显提高，但过渡带也明显增大。



5.3.3 窗口法：升余弦窗函数_汉宁窗

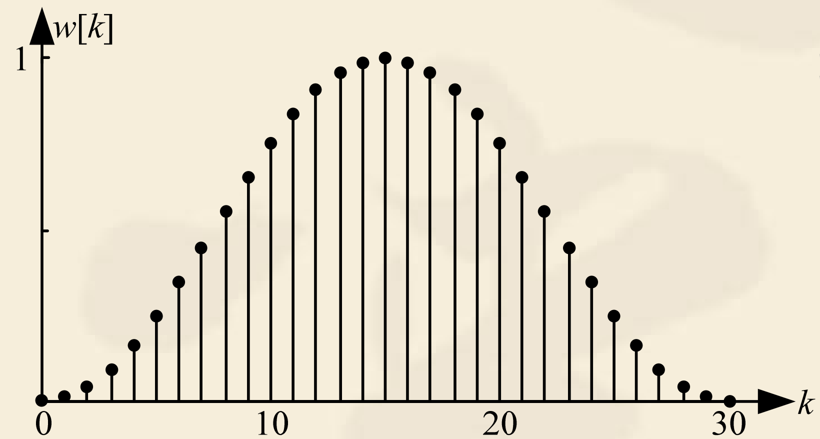


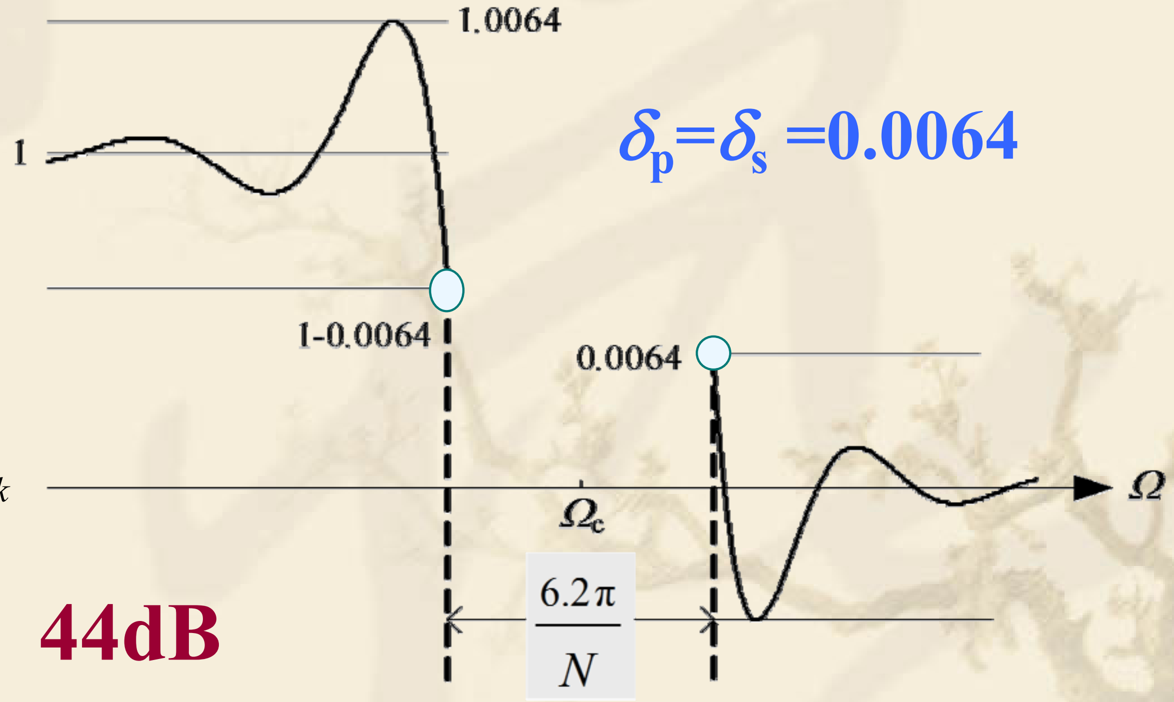
5.3.3 窗口法：升余弦窗函数_汉宁窗

- **Hann(汉宁)窗(w=hanning(M+1))**

$$w[k]=\begin{cases}0.5-0.5\cos(2\pi k/M) & 0\le k\le M\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

近似过渡带宽 8π/N





$\delta_p=\delta_s$ =0.0064

$A_p\approx$ 0.056dB, $A_s\approx$ 44dB

5.3.3 窗口法：升余弦窗函数_汉明窗

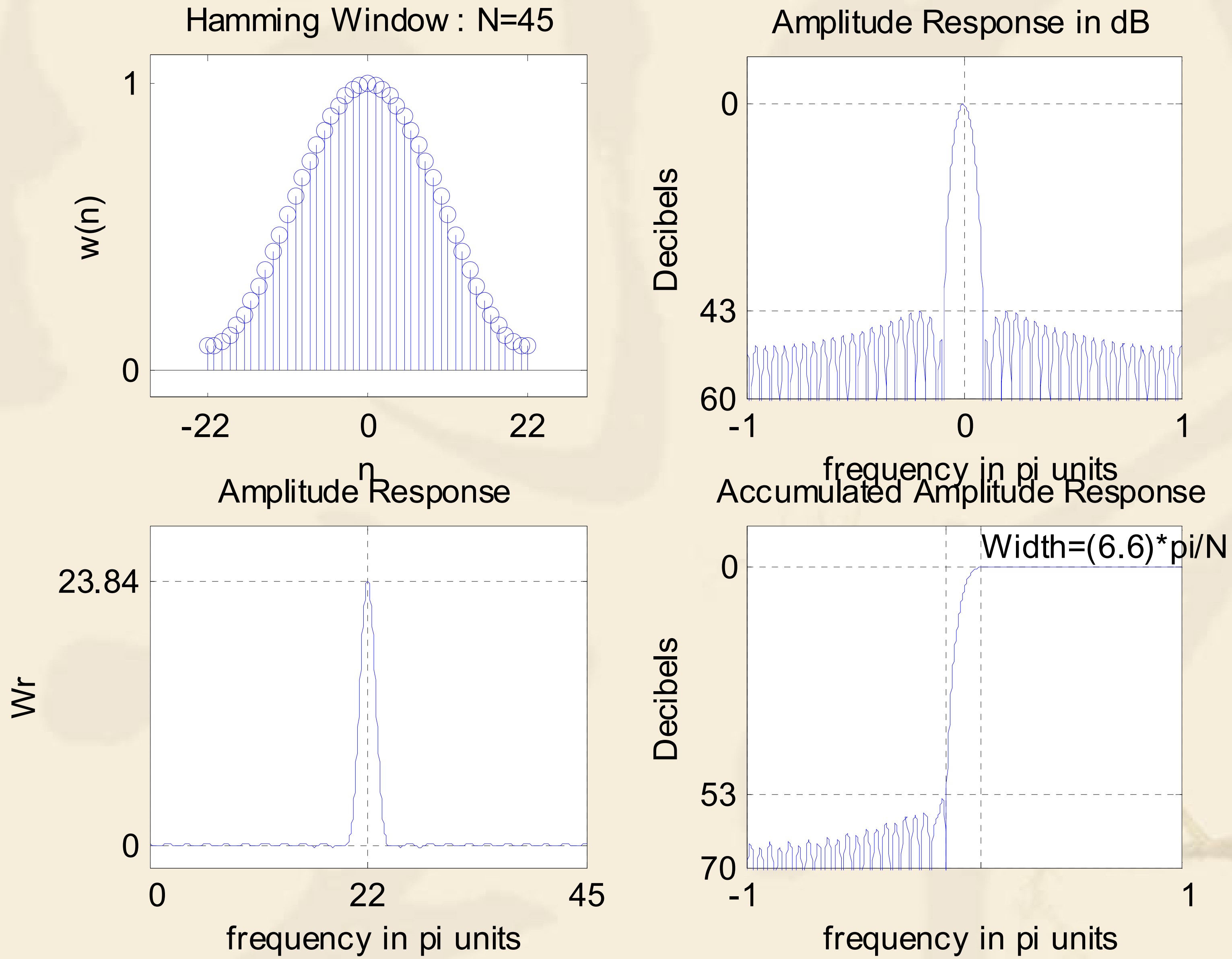
■ **Hamming 窗（改进的升余弦窗）**

$$w(n)=0.54-0.46\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \qquad n=0,1,2,...,N-1$$

$$W(\omega)=0.54u(\omega)+0.23u\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)+0.23u\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)$$

A=-43dB, 近似过渡带宽 8π/N，精确过渡带宽6.6π/N，最小阻带衰减53dB。通过这一系数调整，使能量的 99.963% 都集中在了窗谱的主瓣内。

5.3.3 窗口法：升余弦窗函数_汉明窗



Richard Wesley Hamming

Richard W Hamming photo

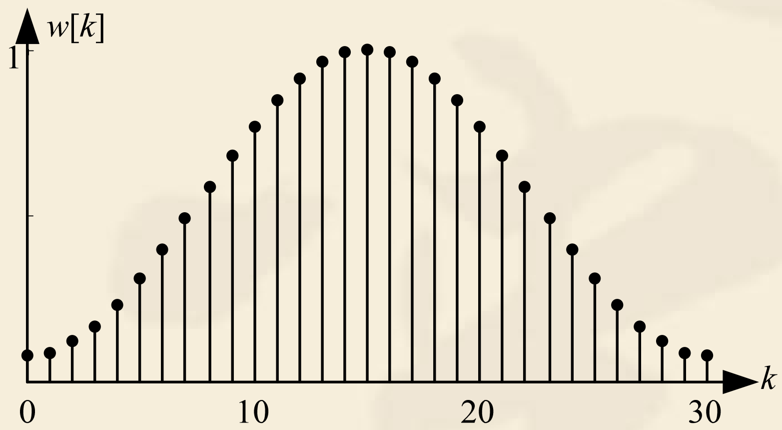
Born	February 11, 1915 Chicago, Illinois
Died	January 7, 1998 (aged 82) Monterey, California
Residence	United States
Nationality	American
Fields	Mathematics
Institutions	University of Louisville Manhattan Project Bell Telephone Laboratories Naval Postgraduate School
Alma mater	University of Chicago University of Nebraska University of Illinois at Urbana-Champaign
Doctoral advisor	Waldemar Trjitzinsky
Known for	Hamming code Hamming window Hamming numbers Sphere-packing Hamming distance Association for Computing Machinery
Influenced	David J. Farber
Notable awards	Turing Award (1968)

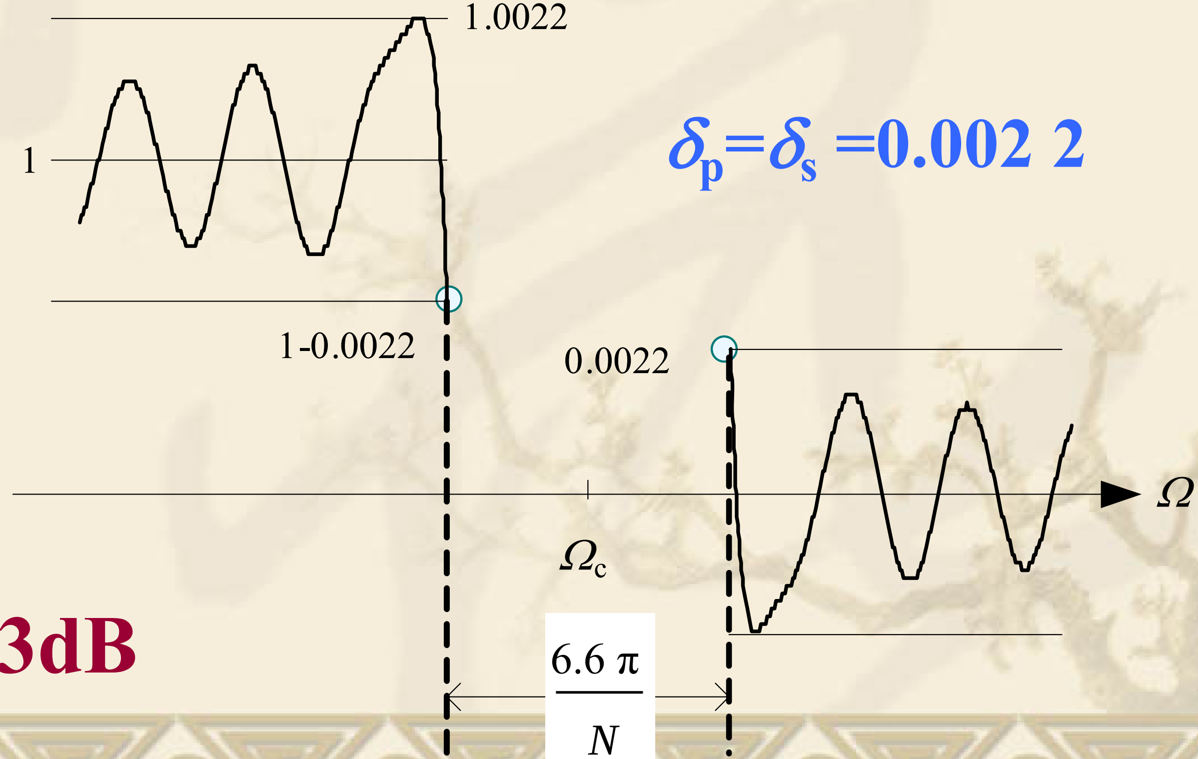
5.3.3 窗口法：升余弦窗函数_汉明窗

- **Hamming(汉明)窗w=hamming(M+1))**

$$w[k]=\begin{cases}0.54-0.46\cos(2\pi k/M) & 0\le k\le M\\ 0 & 其他\end{cases}$$

近似过渡带宽 8π/N





$\delta_p=\delta_s=0.002\ 2$

$A_p\approx$ **0.019dB,** $A_s\approx$ **53dB**

5.3.3 窗口法：升余弦窗函数_布莱克曼窗

Blackman 窗（二阶升余弦窗）

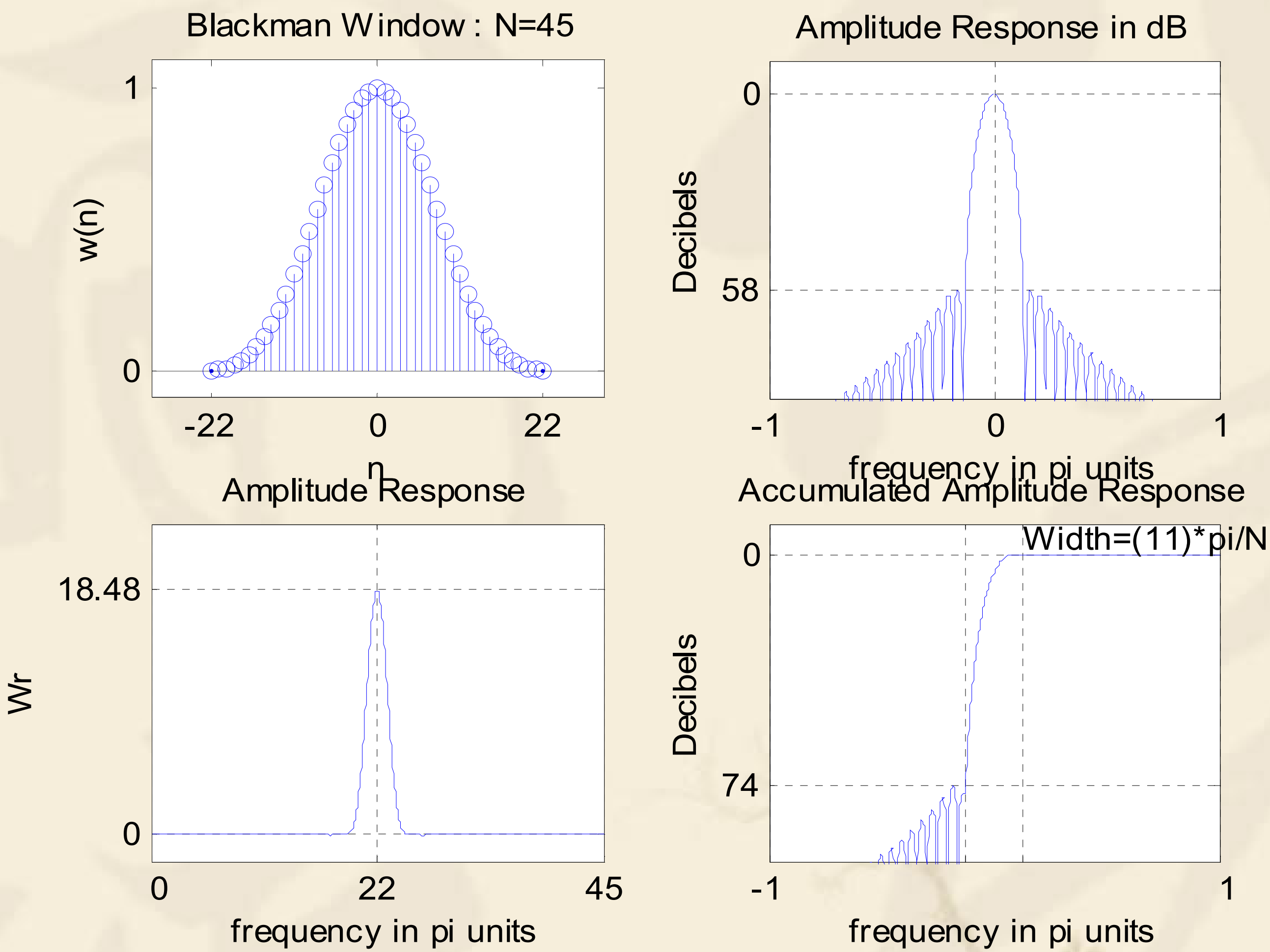
$$w(n) = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{2\pi}{N-1}2n\right) \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$W(\omega) = 0.42u(\omega) + 0.25\left[u\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + u\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\right]$$

$$+0.04\left[u\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right) + u\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right)\right]$$

A=-58db, 近似过渡带宽 12π/N，精确过渡带宽11π/N，最小阻带衰减74dB。通过增加余弦的二次谐波分量，能够进一步抑制旁瓣，但主瓣宽度却比矩形窗谱的主瓣宽度大三倍。

5.3.3 窗口法：升余弦窗函数_布莱克曼窗



比较以上窗函数，可以看到，矩形窗函数具有最窄的主瓣B，但也有最大的旁瓣峰值 A 和最慢的衰减速度 D。

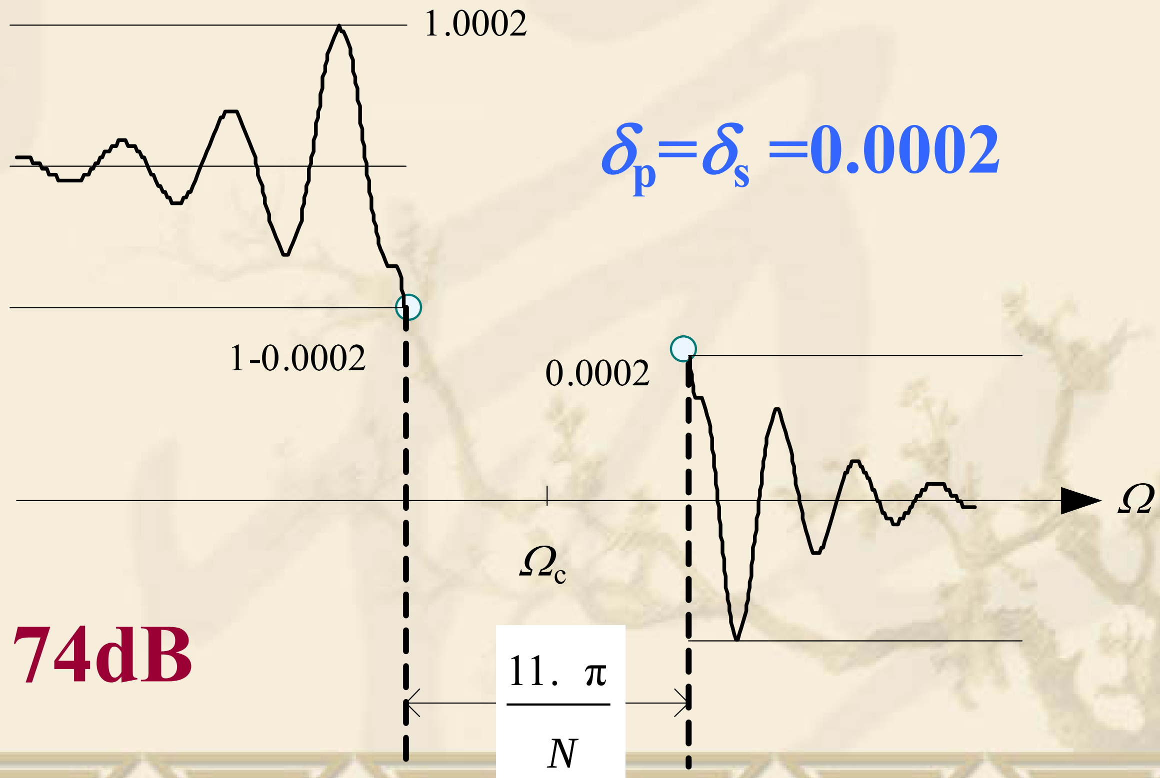
汉宁窗主瓣稍宽，但有着较小的旁瓣和较大的衰减速度，因而被认为是较好的窗口。

5.3.3 窗口法：升余弦窗函数_布莱克曼窗

- **Blackman窗(w=blackman(M+1))**

$$w[k]=\begin{cases}0.42-0.5\cos(2\pi k/M)+0.08\cos(4\pi k/M) & 0\le k\le M\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

近似过渡带宽 12π/N



$\delta_p=\delta_s=0.0002$

$A_p\approx$ **0.0017dB**，$A_s\approx$ **74dB**

5.3.3 窗口法：凯瑟窗函数

- 凯瑟（Kaiser）窗
  - 上面讨论的几种窗函数以牺牲主瓣宽度，换取旁瓣抑制；
  - **Kaiser** 窗全面反映了这种主瓣和旁瓣衰减之间的互换关系；
    - 定义了一组可调的由零阶贝塞尔 **Bessel** 函数构成的窗函数；
    - 通过**调整参数β**可以在主瓣宽度和旁瓣衰减之间自由选择它们的比重。从而实现以同一种窗类型来满足不同窗性能需求的目的。
  - **Kaiser** 窗函数由 **J.F. Kaiser** 提出，由下式给出：

$$w(n)=\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(1-\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)},\qquad 0\le n\le N-1$$

- 其中 I_0 是修正过的零阶贝塞尔 Bessel 函数
- β是用来调整窗形状的参数，β依赖于参数 N。

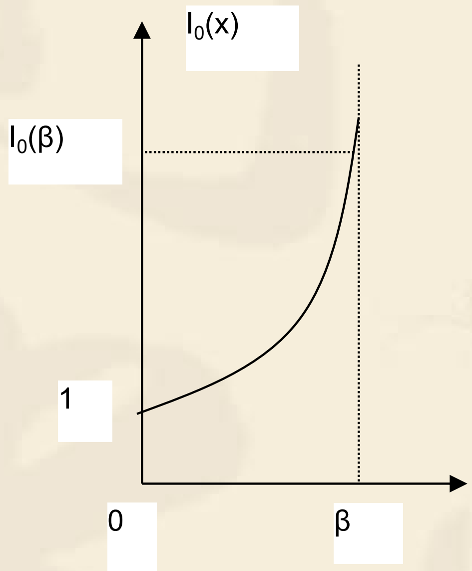
5.3.3 窗口法：凯瑟窗函数

对于相同的 N，Kaiser 窗可以提供不同的过渡带宽，这是其他窗函数做不到的。

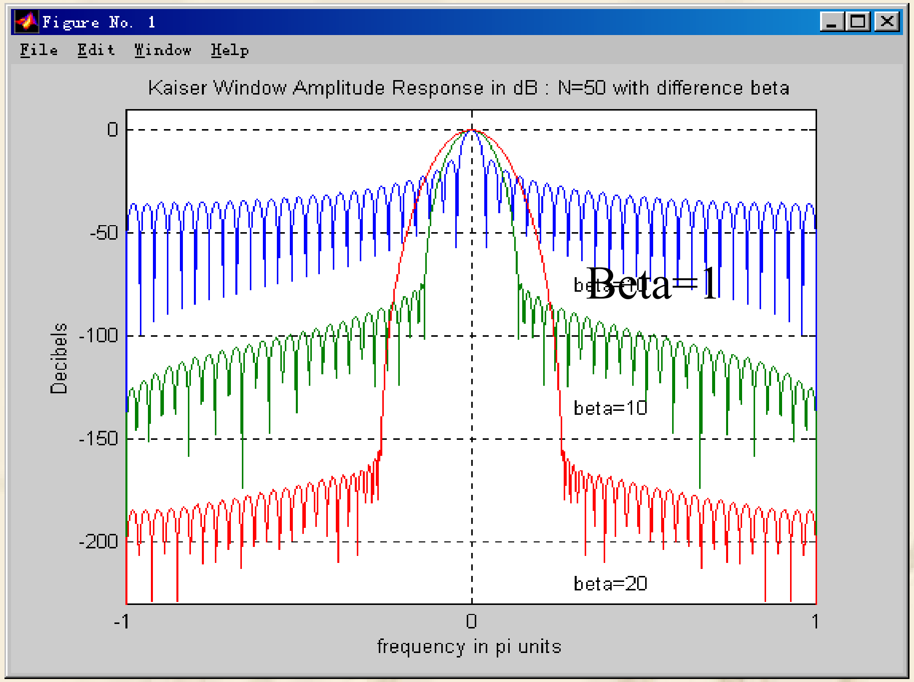
通过调整参数β，就可以方便地完成对过渡带宽度和阻带衰减的调整。

参数β越高，其频谱的旁瓣越小，但主瓣宽度也相应增加。

弗里德里希·威廉·贝塞尔
（Friedrich Wilhelm Bessel）
1784年—1846 年
德国天文学家及数学家



零阶贝塞尔函数

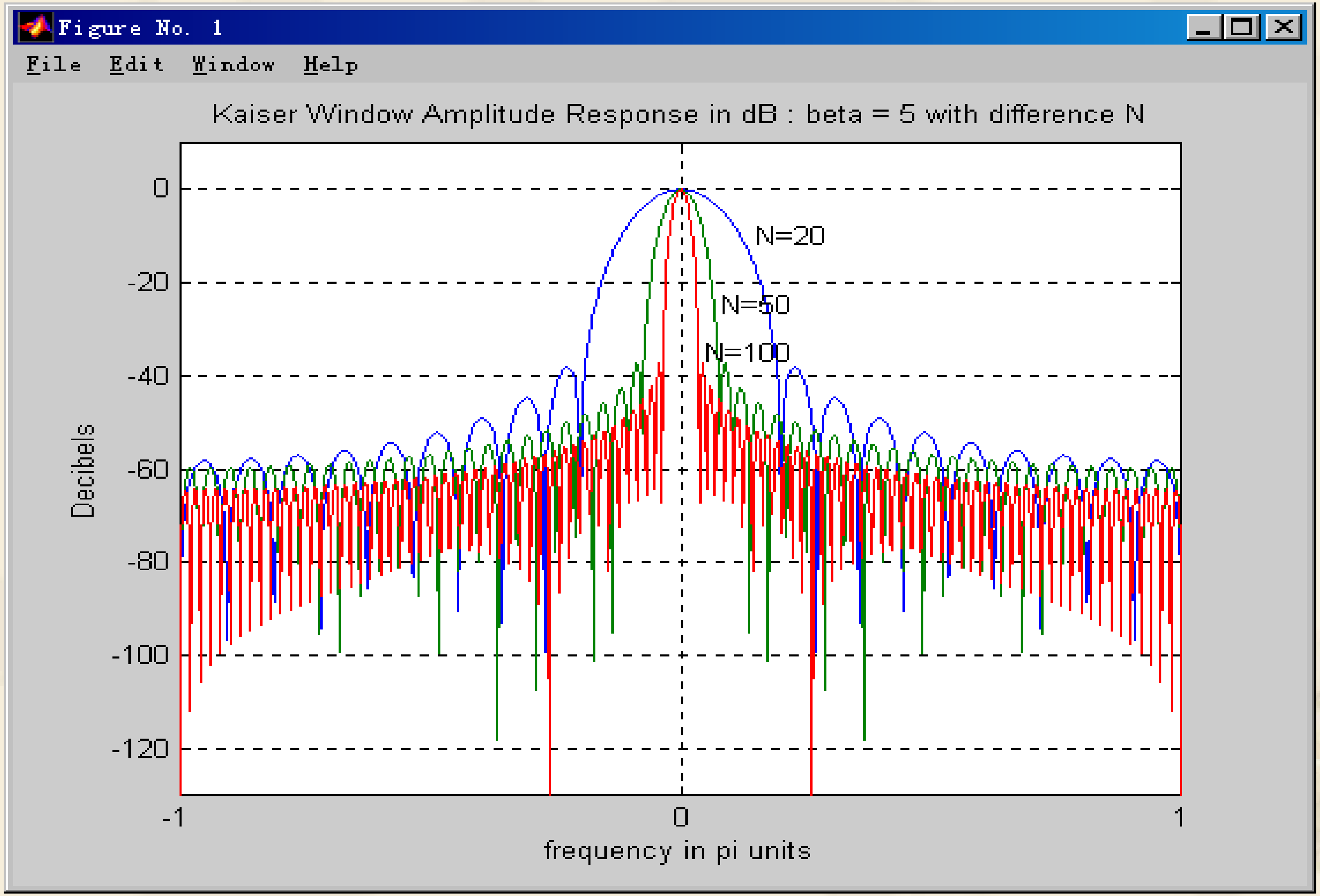


Kaiser 窗函数依参数β 而变化

Matlab 中，函数 w = kaiser(n, beta) 实现 Kaiser 窗

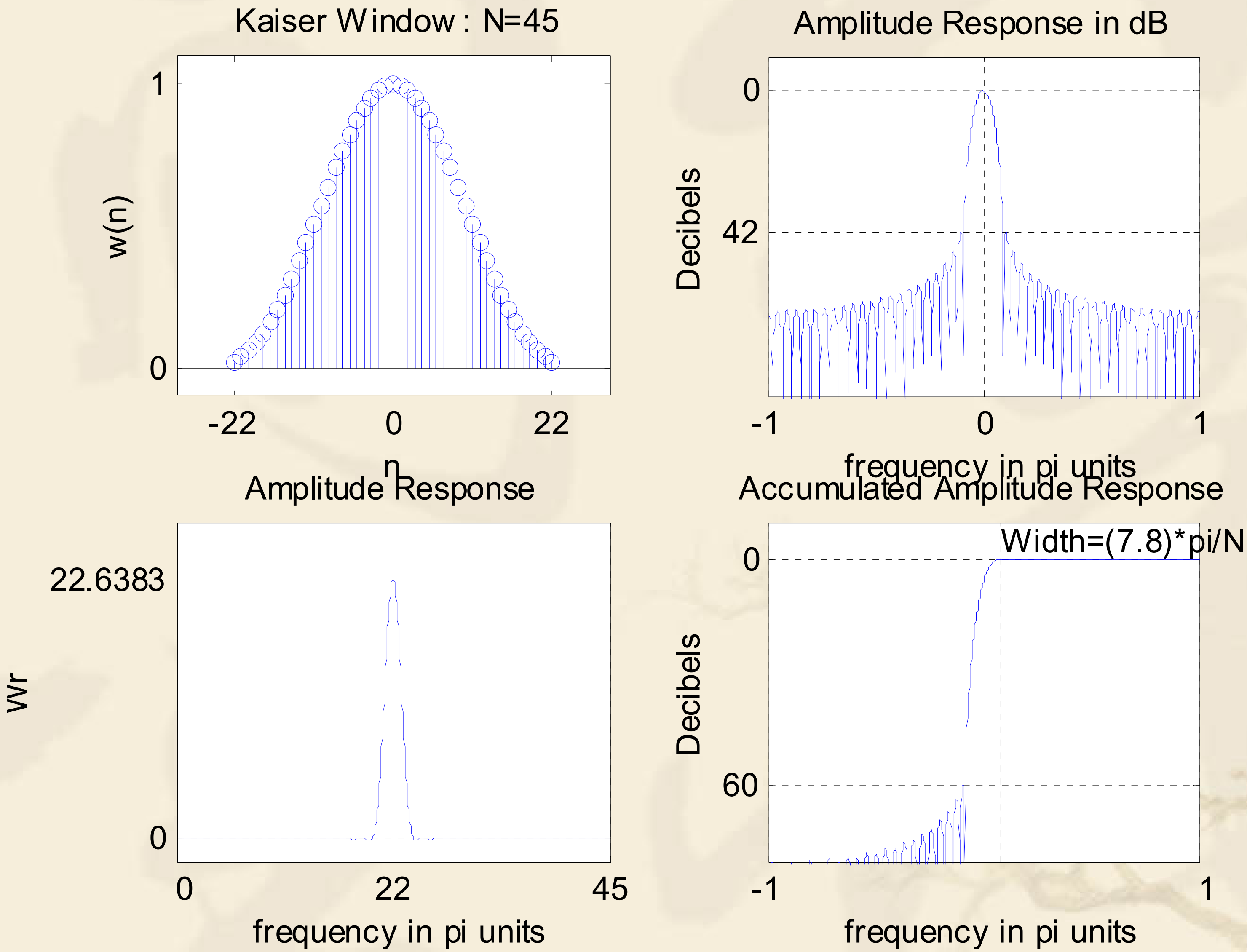
5.3.3 窗口法：凯瑟窗函数

下面图固定β，当窗的长度变化时，相应的旁瓣的高度保持不变。



5.3.3 窗口法：凯瑟窗函数

β = 5.658，则过渡带宽等于 7.8pi/N，最小阻带衰减为 60dB，如下图所示：



5.3.3 窗口法：凯瑟窗函数

- 凯瑟窗的计算
  - 由于 **Bessel** 函数的复杂性，这种窗的设计公式很难推导，为此，**Kaiser** 提出了经验公式。
  - 给定 ω_p、ω_s、R_p 和 A_s，参数β定义如下：

$$\beta=\begin{cases}0.1102(A_s-8.7), & A_s>50\\ 0.5842(A_s-21)^{0.4}+0.07886(A_s-21), & 21\le A_s\le 50\\ 0, & A_s<21\end{cases}$$

  - 对于过渡带宽 $\Delta\omega=\omega_s-\omega_p$ (rad/s)，滤波器阶数为

$$N=\frac{A_s-7.95}{2.285\Delta\omega}+1 \qquad N=\frac{A_s-7.95}{14.36\Delta f}+1$$

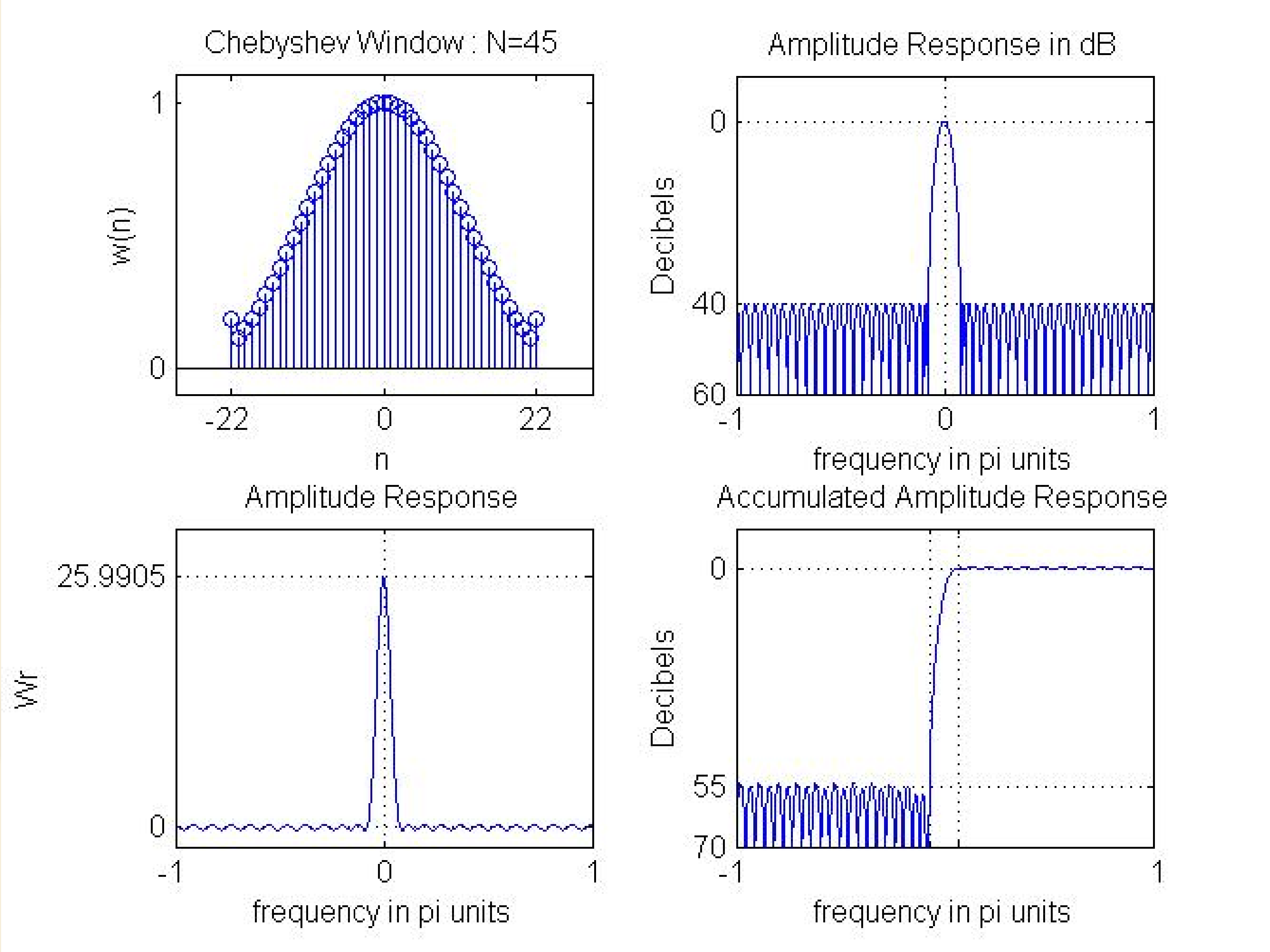
  - 需要强调的是：阶数为 N 的滤波器大致能满足要求，但最后的结果还必须要演算以便证明这一点。
  - 在 Matlab 中，函数 w = kaiser(n, beta) 实现 Kaiser 窗。

5.3.3 窗口法：切比雪夫窗函数

- 切比雪夫（Chebyshev）窗
  - 在给定旁瓣高度下，Chebyshev 窗的主瓣宽度最小，具有等波动性，也就是说，其所有的旁瓣都具有相等的高度。
  - Matlab函数w = chebwin(n,r)
    - 以窗长度 n 和旁瓣高度 rdB 为参数计算切比雪夫窗。
    - Chebyshev 仅对奇数长度的窗有定义，若 n 为偶数，函数w = chebwin(n,r) 先将它加 1，然后设计长为 n+1 的切比雪夫窗。
    - 其傅里叶变换的旁瓣幅度低于主瓣 r dB。
- 其它窗函数
  - Papoulis窗、Parzen窗、Poisson窗、Cauchy窗、Gaussian窗、Bartlett-Hann、Blackman-Harris、Nuttall's Blackman-Harris 、Bohman、Flat Top window、Hann、Parzen (de la Valle-Poussin)、Tapered cosine 等。
  - Matlab 窗设计和分析工具 (WinTool) 具有 GUI 界面，可以用来设计和分析窗函数，其用法：

```
>>  wintool
```

5.3.3 窗口法：切比雪夫窗函数



5.3.3 窗口法：常用窗函数的性能指标

窗函数	旁瓣峰值衰减（dB）	窗函数主瓣宽度	加窗后滤波器过渡带宽（△ω）	加窗后滤波器阻带最小衰减（dB）
矩形窗	-13	4π/N	1.8π/N	-21
汉宁窗(升余弦窗)	-31	8π/N	6.2π/N	-44
汉明窗(改进升余弦窗)	-41	8π/N	6.6π/N	-53
布莱克曼窗(二阶升余弦窗)	-57	12π/N	11π/N	-74
凯塞（β=7.865）	-57	10π/N	10π/N	-80

5.3.4 窗口法：设计步骤

❖ FIR DF 窗口法设计步骤

性能要求 → $H_d(e^{j\omega})$

❶ 把 $H_d(e^{j\omega})$ 展成傅里叶级数，得到 $h_d(n)$；

❷ 把 $h_d(n)$ 自然截短到所需的长度 $N=2\tau+1$；

❸ 将截短后 $h_d(n)$ 右移 τ 个取样间隔，得 $h(n)$；

❹ **将 $h(n)$ 乘以合适的窗函数，即得所需的滤波器的冲激响应**，这时窗函数以 $n=\tau$ 对称（当然窗函数也可直接加在 $h_d(n)$ 上，这时窗函数以原点为对称）；

❺ 利用 $h(n)$，既可用硬件构成滤波器的系统函数 $H(z)$，也可直接用计算机软件实现滤波。

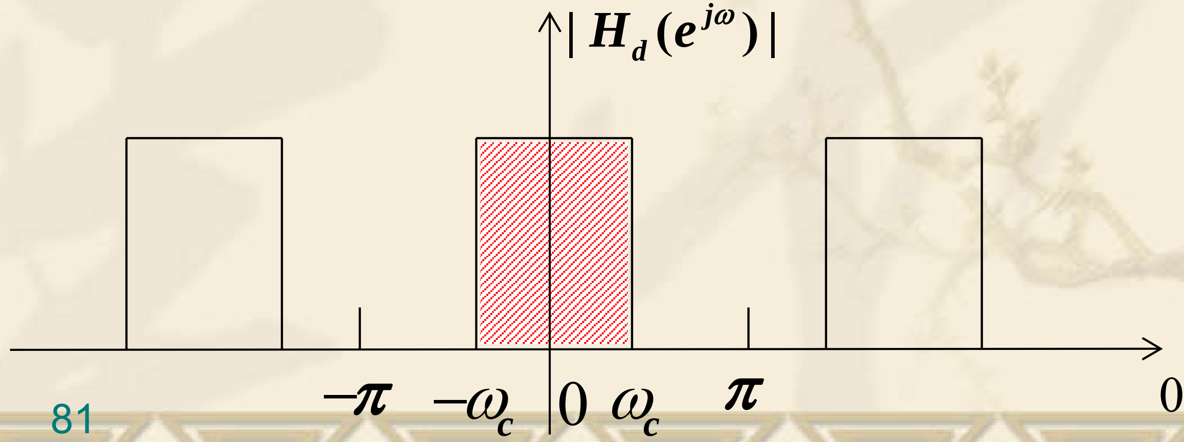
5.3.4 窗口法：设计步骤_数字低通

- 数字低通滤波器的设计
  - 下面通过一个例题来阐述低通滤波器设计所涉及的一些问题。

例5.1 一个理想低通数字滤波器的频率响应如图所示，为：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \le \pi \end{cases}$$

假定 **ω_c=0.25π**，分别取 **N =11、21、31**的线性相位 **FIR**，观察加窗后对滤波器幅频特性的影响。



5.3.4 窗口法：设计步骤_数字低通

解: 由于 $H_d(e^{j\omega})$ 是一个实周期函数，把它展成为付氏级数：

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-jn\omega}$$

式中

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_d(e^{j\omega})\cdot e^{jn\omega}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1\cdot e^{jn\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{jn2\pi}\left(e^{jn\omega_c} - e^{-jn\omega_c}\right) = \frac{\sin\left(n\omega_c\right)}{n\pi}$$

将 $h_d(n)$ 截短为 N，并将截短后的 $h_d(n)$ 移位，得：

$$h(n) = h_d(n-\tau) = \frac{\sin(n-\tau)\omega_c}{(n-\tau)\pi}, \tau = \frac{N-1}{2}$$

5.3.4 窗口法：设计步骤_ 数字低通

然后乘以窗函数 $w_R(n)$，得到最后得 h(n)。

对于 $\omega_c = 0.25\pi$，由上式得：

$$h(n) = h_d(n-\tau) = \frac{\sin[(n-\tau)\times 0.25\pi]}{(n-\tau)\pi}$$

当 N=11 时,τ = 5，求得

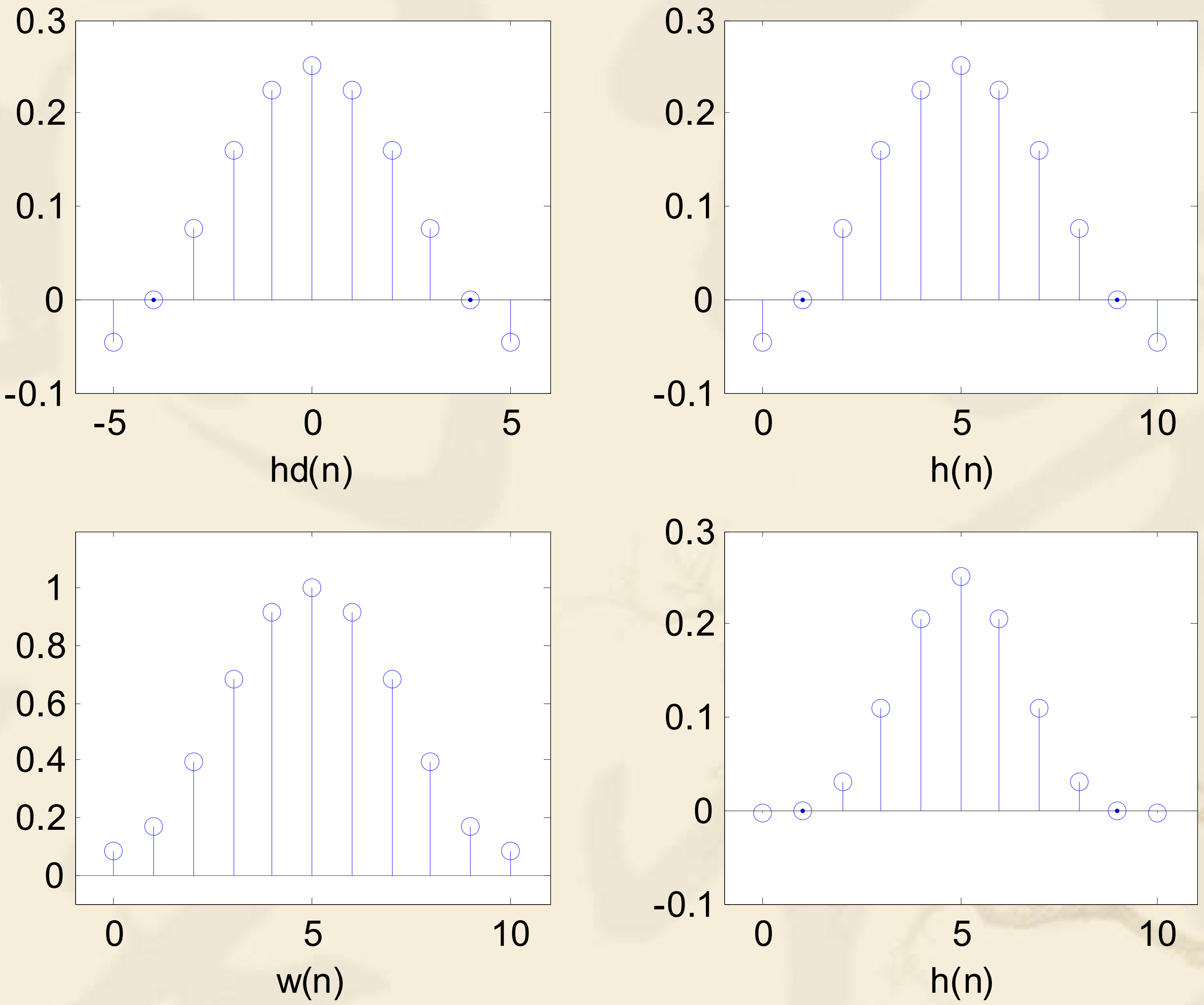
（当 $\omega_c=\pi$，就得到一个全通滤波器）

h(0) = h(10) = -0.045，h(1) = h(9) = 0，h(2) = h(8) = 0.075，h(3) = h(7) = 0.1592，h(4) = h(7) = 0.2251，h(5) = 0.25。

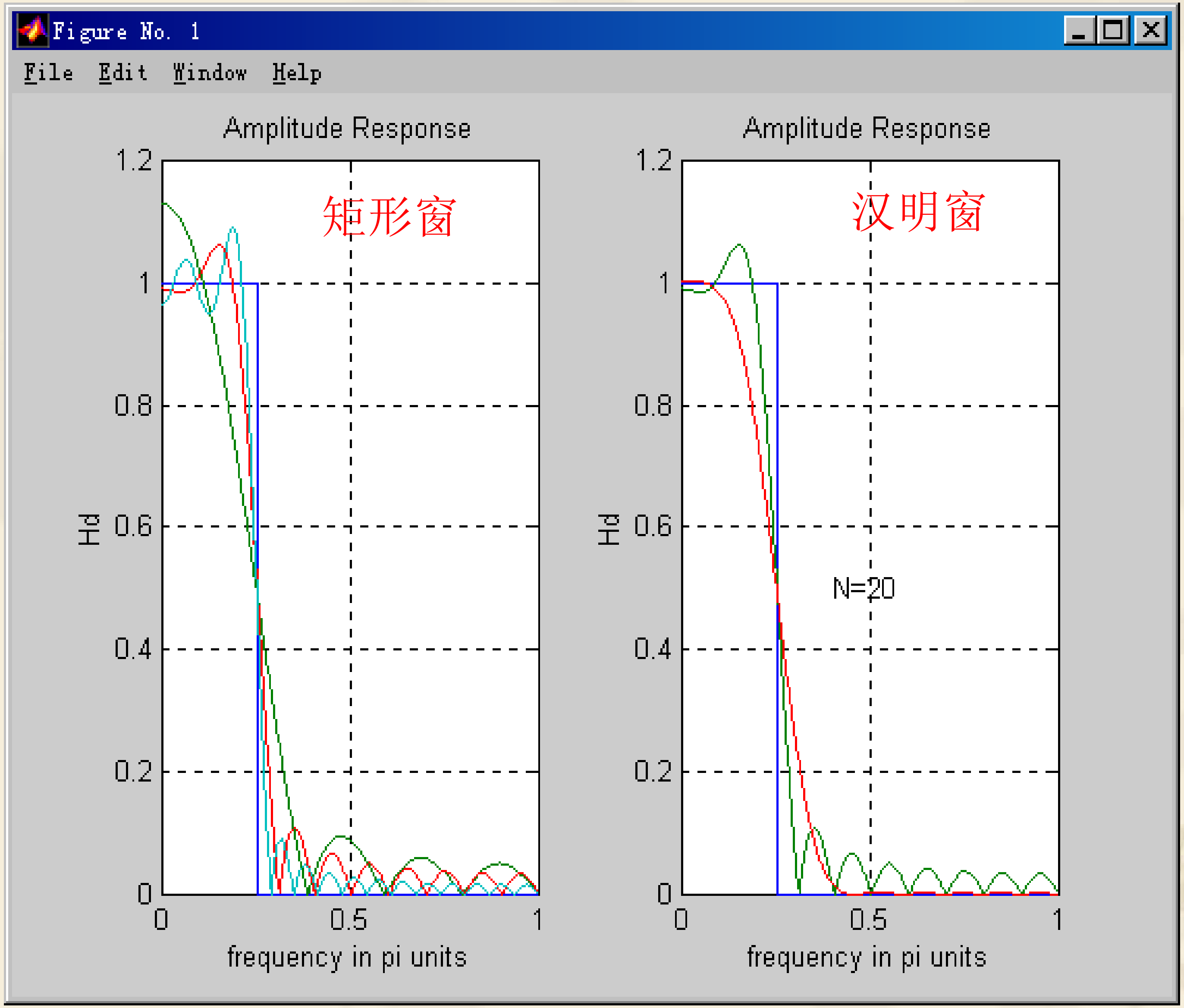
当 N=11 时，乘以汉明窗：

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \qquad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

5.3.4 窗口法：设计步骤_ 数字低通



5.3.4 窗口法：设计步骤_数字低通



- 当 N 取不同值时，$H(e^{j\omega})$ 都不同程度上近似于$H_d(e^{j\omega})$。N 过小时，过渡带较宽，波动较少；当 N 增加时，通带接近于0.25pi，过渡带变窄，波纹增加。

- 由图中还可以看到，使用汉明窗后，通带内的振荡基本消失，阻带内的纹波也大大减小，从这一点上来说，滤波器的性能得到了改善，但是，这是以过渡带的加宽为代价的。

5.3.4 窗口法：设计步骤_数字低通

- 适用范围
  - 对于能用解析式表达，且傅里叶级数的系数容易求解的滤波器：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega \Rightarrow h_{LP}(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin(n-\tau)w_c}{(n-\tau)\pi} & n\neq\tau\\ \dfrac{w_c}{\pi} & n=\tau\end{cases}$$

  此时，窗函数法是设计 **FIR DF** 较为方便的一个方法
  - 如果 $h_d(n)$ 不易求，则使用该方法较为困难
- 窗函数
  - 用窗口法设计 **FIR DF**，一个重要问题是选用何种窗函数 **w(n)** 进行截短，以及截短的长度 **N**。
  - **窗函数的选择：阻带衰减指标**
    - **满足设计给定的阻带衰减和其它滤波器性能要求；**
    - 能量尽量集中于主瓣内；
    - 个人的经验及喜好有关。

5.3.4 窗口法：设计步骤_数字低通

- **窗函数长度 N 的选择：过渡带宽指标**
  - 采用试验方法，即逐渐增大 M，直至 $H(e^{j\omega})$ 在通带和阻带内部达到指标要求。
  - 若对 $|H_d(e^{j\omega})|$的过渡带提出了具体要求，因为 FIR DF 的过渡带等于窗函数的主瓣宽度，那么通过查表计算 N：

$$N=\left\lceil \frac{\text{相应的窗函数的主瓣宽度或精确过渡带}}{\text{要求的滤波器过渡带}} \right\rceil \quad ---> \text{上取整}$$

  - 例如 5.2→6，5.8→6。
  - 注意：

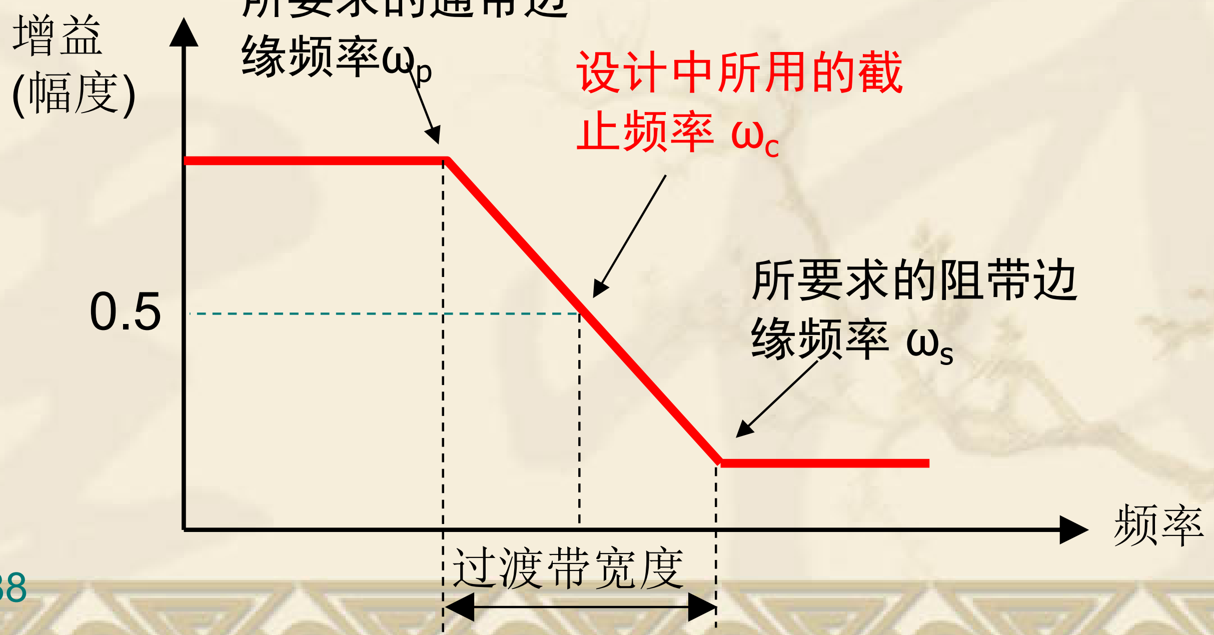
    1）根据所要设计线性相位 FIR DF类型来决定最终 N 取奇数还是偶数。

    2）一般选择 N 为奇数。

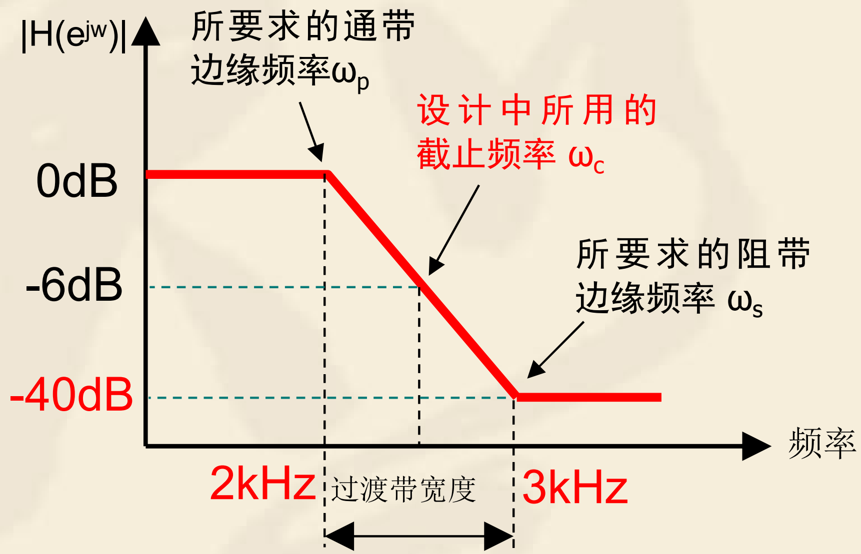
5.3.4 窗口法：设计步骤_数字低通

- **截止频率 ω_c 的确定：**
  - **截止频率 ω_c 对应于明确的0.5增益点，而不再标志某个增益点。**
  - 对于非理想滤波器，其截止频率 ω_c 不采用通带边缘频率 ω_p 或阻带边缘频率 ω_s， 而使用过渡带的中点（即通带边缘和阻带边缘之间的中点。因此，窗函数法不能精确确定其通带和阻带的边缘频率）：

$$\omega_c = \omega_p + \frac{\text{过渡带宽度}}{2} = \omega_p + \frac{\omega_s - \omega_p}{2} = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$$



5.3.4 窗口法：设计步骤_数字低通



例5.2 根据下列指标设计一个线性相位 **FIR低通滤波器**

通带边缘频率 f_p=2kHz

阻带边缘频率 f_{stop}=3kHz

阻带衰减 40dB

取样频率 f_s=10kHz

解：

(1) 求对应的理想数字频率：

过渡带宽 = 3kHz – 2kHz = 1kHz。

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{f_c}{f_s} = \frac{2\pi \times 1}{10} = 0.2\pi$$

转换为数字频率过渡带：

$$f_c = \frac{f_p + f_{stop}}{2} = 2.5kHz$$

截止频率：

$$\omega_c = 2\pi \frac{f_c}{f_s} = 0.5\pi$$

数字截止频率：

5.3.4 窗口法：设计步骤_数字低通

(2) 设理想线性相位滤波器为：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\tau}, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & 其它\end{cases}$$

由此可得脉冲响应：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\omega\tau}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin\left[(n-\tau)w_c\right]}{(n-\tau)\pi}=\frac{\sin(n-\tau)0.5\pi}{(n-\tau)\pi}$$

(3) 由阻带衰减确定窗函数：因为阻带衰减 40dB，通过查表知道，可以选择 Hanning 窗：

$$w(n)=0.5-0.5\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right)\qquad n=0,1,2,\cdots,N-1$$

(4) 由过渡带宽确定窗口长度：

$$N=\frac{6.2\pi}{\Delta\omega}=\frac{6.2\pi}{0.2\pi}=31$$

则此滤波器的脉冲响应为：

τ＝(N-1)/2=15

$$h(n)=\frac{\sin[(n-15)\times0.5\pi]}{(n-15)\pi}\times w(n)$$

5.3.4 窗口法：设计步骤_数字低通

计算得：

$h_d(n)$ =

-0.0212	0.0000	0.0245	-0.0000	-0.0289	0.0000
0.0354	-0.0000	-0.0455	0.0000	0.0637	-0.0000
-0.1061	0.0000	0.3183	0.5	0.3183	0.0000
-0.1061	-0.0000	0.0637	0.0000	-0.0455	-0.0000
0.0354	0.0000	-0.0289	-0.0000	0.0245	0.0000
-0.0212					

w(n) =

0	0.0109	0.0432	0.0955	0.1654	0.2500
0.3455	0.4477	0.5523	0.6545	0.7500	0.8346
0.9045	0.9568	0.9891	1.0000	0.9891	0.9568
0.9045	0.8346	0.7500	0.6545	0.5523	0.4477
0.3455	0.2500	0.1654	0.0955	0.0432	0.0109
0					

5.3.4 窗口法：设计步骤_ 数字低通

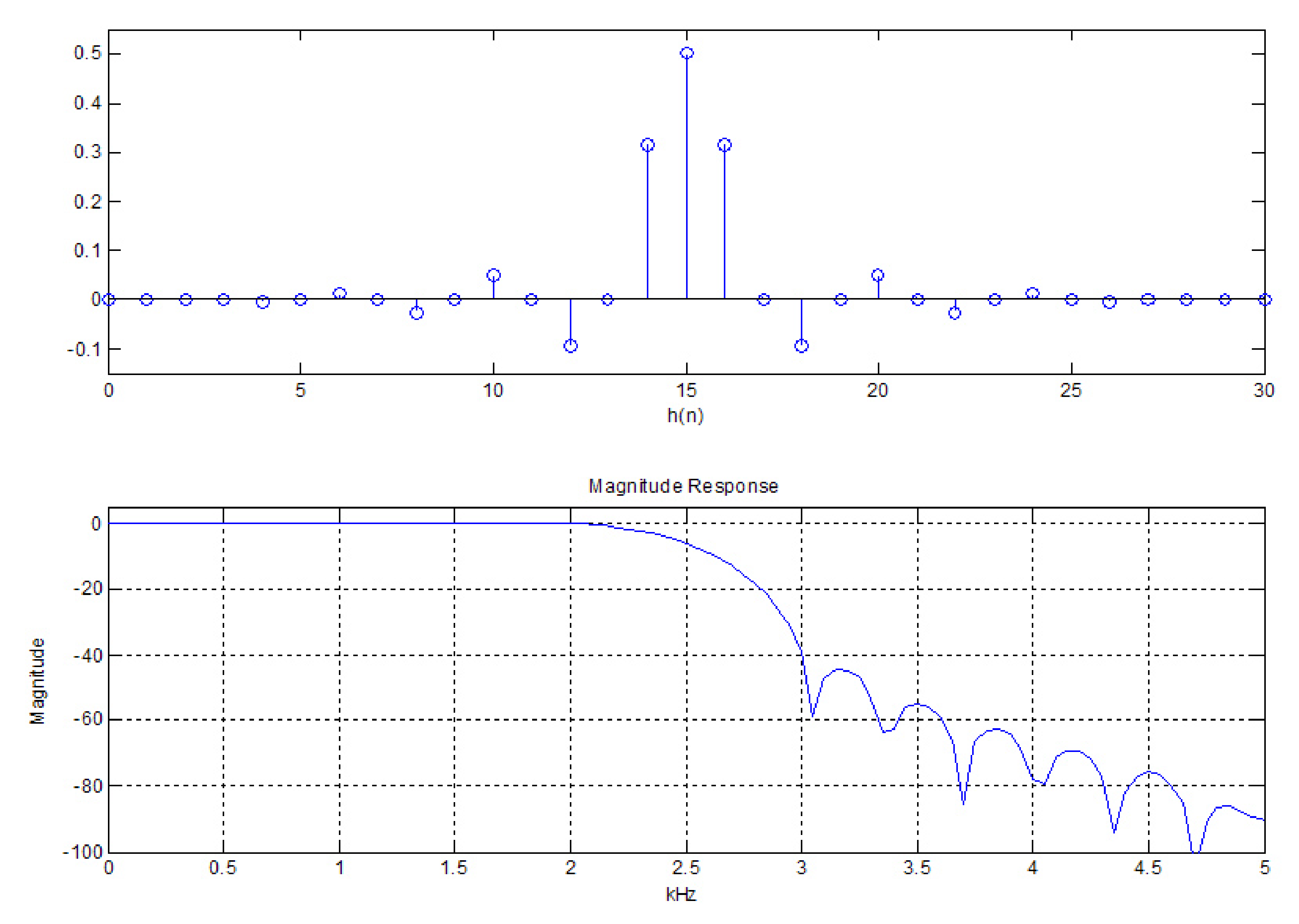
h(n) =

0	0.0000	0.0011	-0.0000	-0.0048	0.0000	0.0122
-0.0000	-0.0251	0.0000	0.0477	-0.0000		
-0.0960	0.0000	0.3148	0.5000	0.3148	0.0000	
-0.0960	-0.0000	0.0477	0.0000	-0.0251	-0.0000	
0.0122	0.0000	-0.0048	-0.0000	0.0011	0.0000	
0						

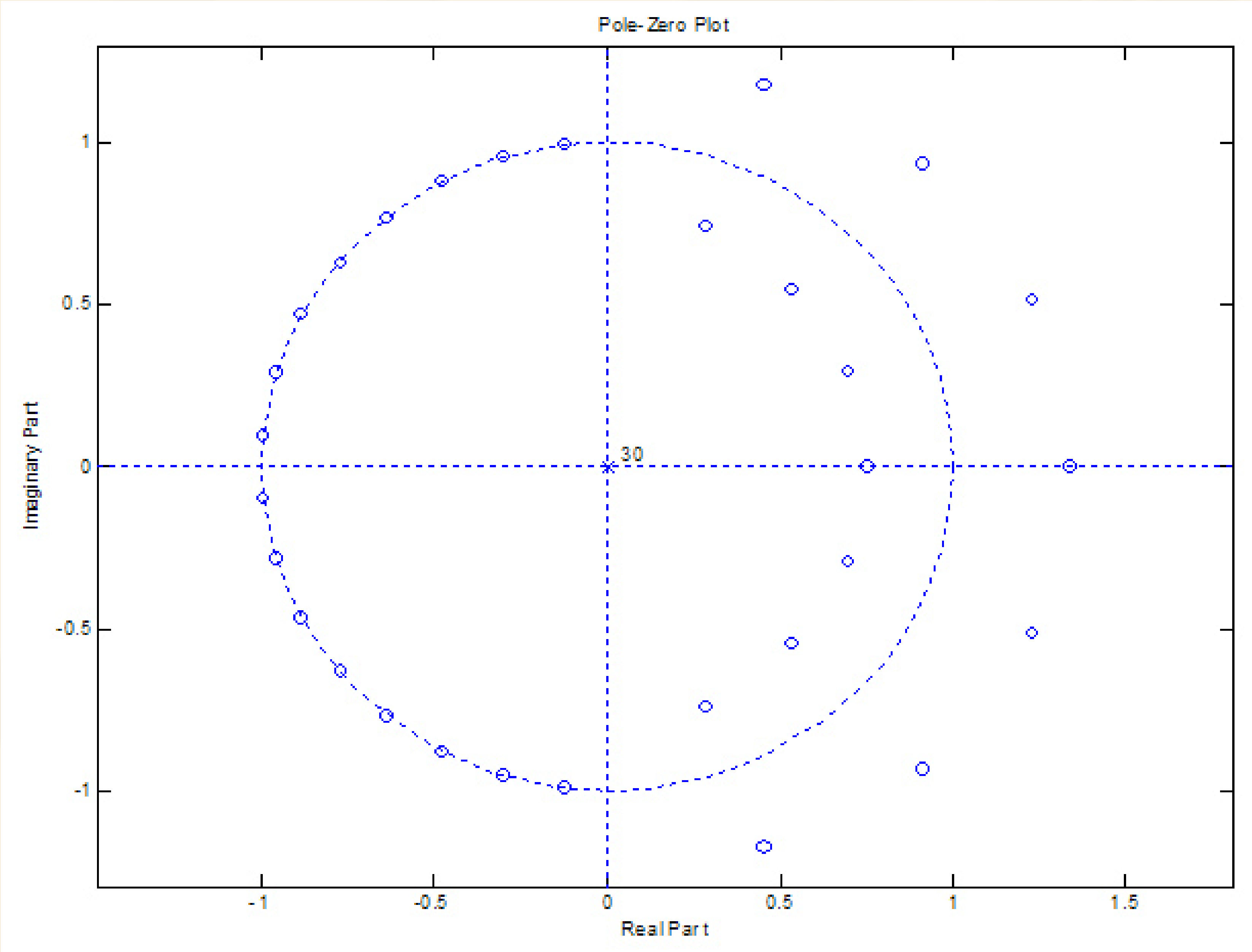
- 由 h(n) 可以得到 H(z)、$H(e^{jw})$ 和差分方程，其中差分方程为：

$$
\begin{aligned}
y(n) = {} & 0.0011x(n-2) - 0.0048x(n-4) + 0.0122x(n-6) \\
& - 0.0251x(n-8) + 0.0477x(n-10) - 0.0960x(n-12) \\
& + 0.3148x(n-14) + 0.5x(n-15) + 0.3148x(n-16) \\
& - 0.0960x(n-18) + 0.0477x(n-20) - 0.0251x(n-22) \\
& + 0.0122x(n-24) - 0.0048x(n-26) + 0.0011x(n-28)
\end{aligned}
$$

5.3.4 窗口法：设计步骤_数字低通

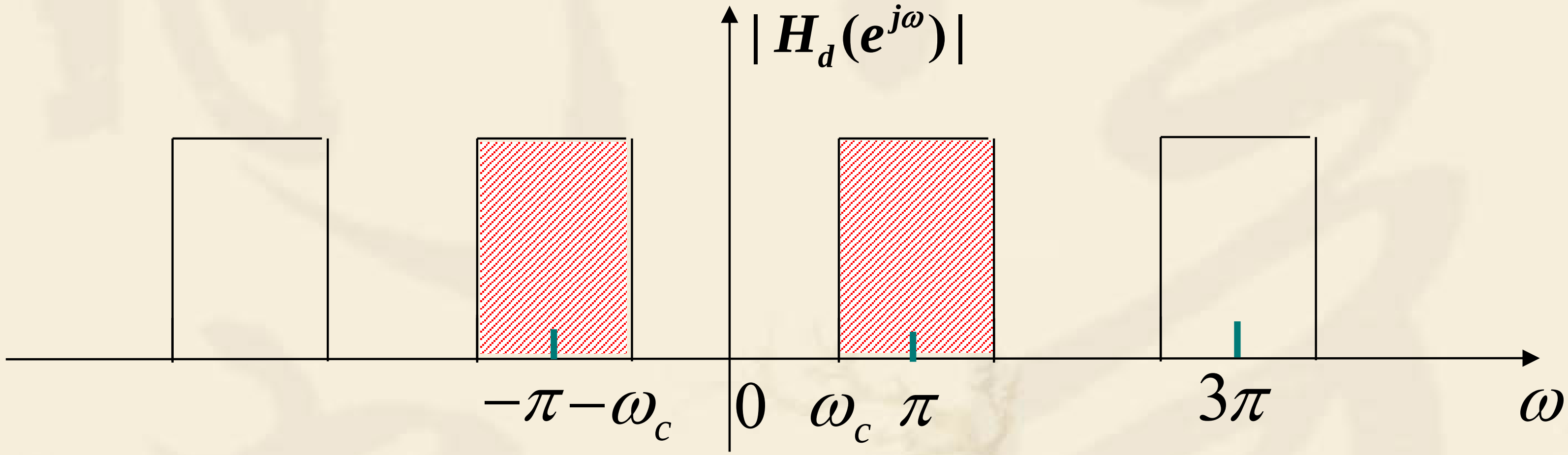


5.3.4 窗口法：设计步骤_数字低通



5.3.4 窗口法：设计步骤_数字高通

- 数字高通、带通和带阻滤波器，只需要改变付氏级数系数中积分的上、下限即可。
- 数字高通滤波器



令其时域右移 M 位后的幅频特性为：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega M} & \omega_c\le|\omega|\le\pi \\ 0 & 0\le|\omega|<\omega_c\end{cases}$$

（频域为 $e^{-jM\omega}$，表示时域右移 M 位）

5.3.4 窗口法：设计步骤_数字高通

则

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\omega_c}e^{j(n-M)\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c}^{\pi}e^{j(n-M)\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{j2(n-M)\pi}\left[\left(e^{-j(n-M)\omega_c}-e^{-j(n-M)\pi}\right)+\left(e^{j(n-M)\pi}-e^{j(n-M)\omega_c}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{j2(n-M)\pi}[\cos(n-M)\omega_c-j\sin(n-M)\omega_c-\cos(n-M)\pi$$

$$+j\sin(n-M)\pi+\cos(n-M)\pi+j\sin(n-M)\pi-\cos(n-M)\omega_c$$

$$-j\sin(n-M)\omega_c]$$

求得

$$h_d(n)=\frac{\sin[(n-M)\pi]-\sin[(n-M)\omega_c]}{(n-M)\pi}$$

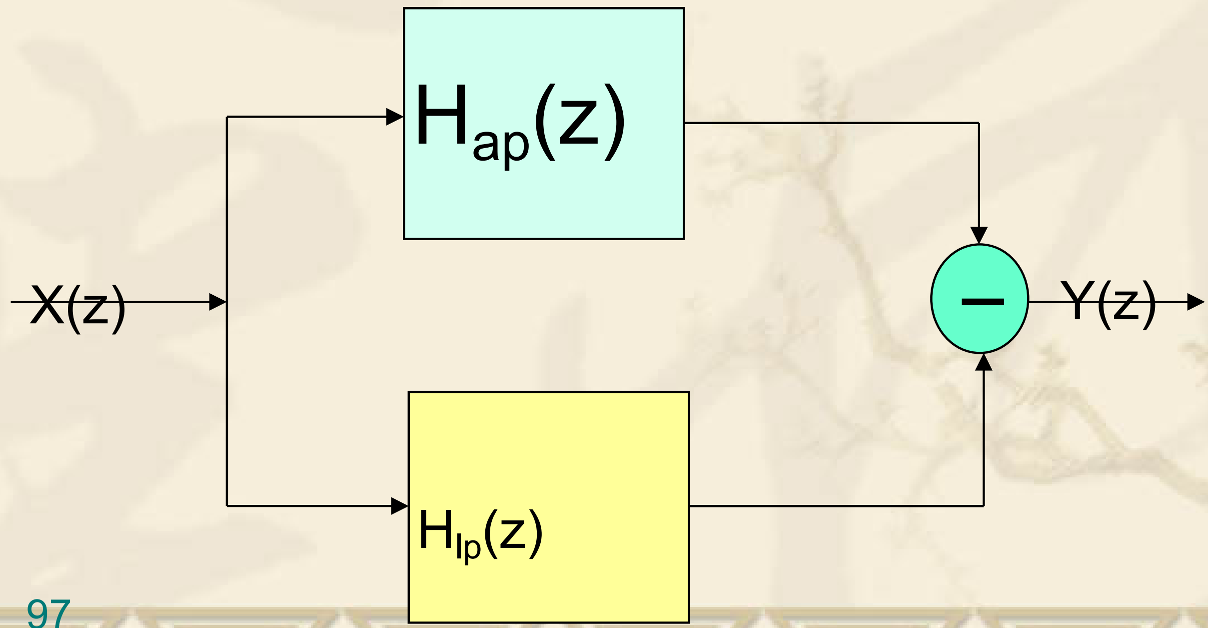
$$=\frac{\sin[(n-M)\pi]}{(n-M)\pi}-\frac{\sin[(n-M)\omega_c]}{(n-M)\pi}=h_{ap}(n)-h_{lp}(n)$$

5.3.4 窗口法：设计步骤_数字高通

从这个结果可以看出：一个高通滤波器相当于用一个全通滤波器（即$\omega_c=\pi$）减去一个低通滤波器。

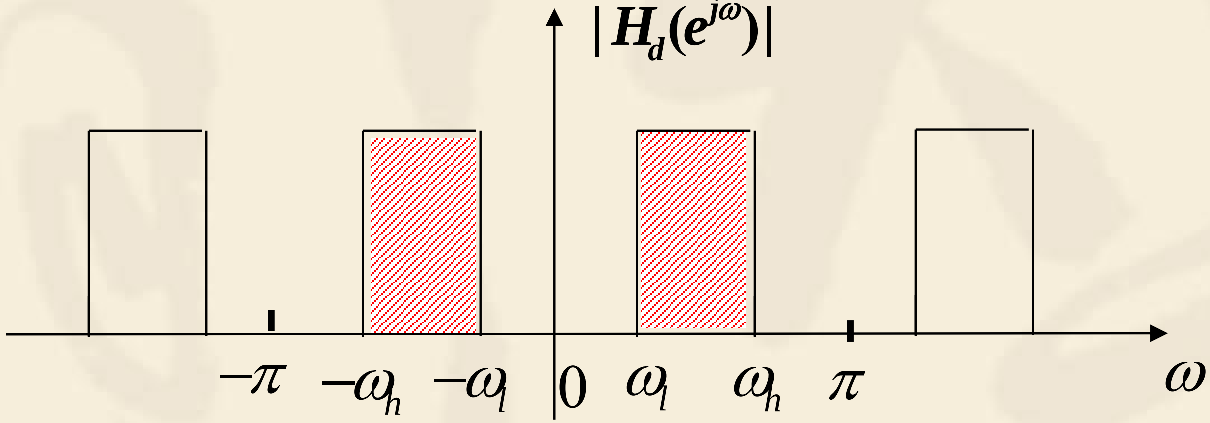
传输函数：$H_{hp}(z)=H_{ap}(z)-H_{lp}(z)$

脉冲响应：$h_{hp}(n)=h_{ap}(n)-h_{lp}(n)$



5.3.4 窗口法：设计步骤_数字带通

- 数字带通滤波器



令其幅频特性为：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M} & \omega_l \le |\omega| \le \omega_h \\ 0 & others \end{cases}$$

（频域为 e-jMω，表示时域右移 M 位）

则

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_h}^{-\omega_l} e^{j(n-M)\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_l}^{\omega_h} e^{j(n-M)\omega} d\omega$$

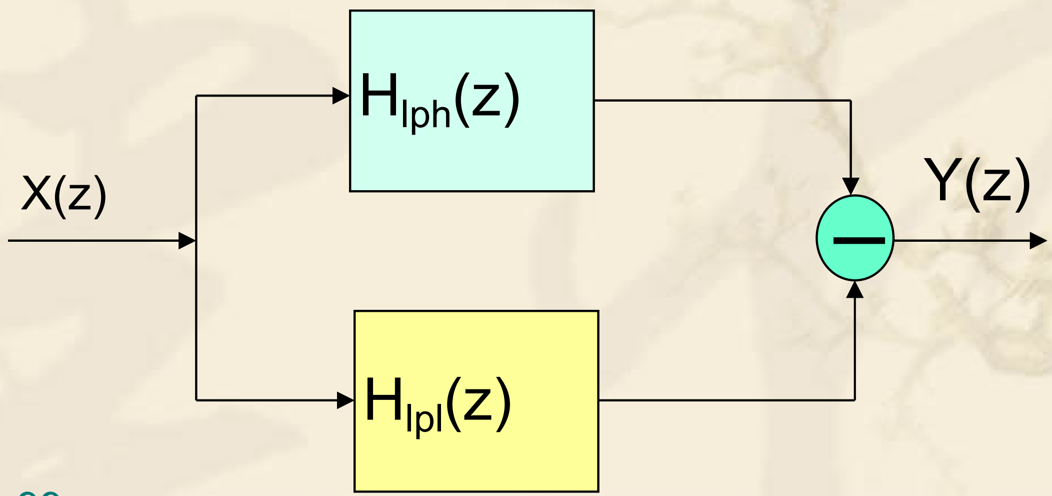
5.3.4 窗口法：设计步骤_数字带通

求得
$$h_d(n)=\frac{\sin[(n-M)\omega_h]-\sin[(n-M)\omega_l]}{(n-M)\pi}$$

从这个结果可以看出：一个带通滤波器相当于两个低通滤波器相减，其中一个截止频率为 ω_h，另一个为 ω_l。

传输函数： $H_{bp}(z)=H_{lph}(z)-H_{lpl}(z)$

脉冲函数： $h_{bp}(n)=h_{lph}(n)-h_{lpl}(n)$



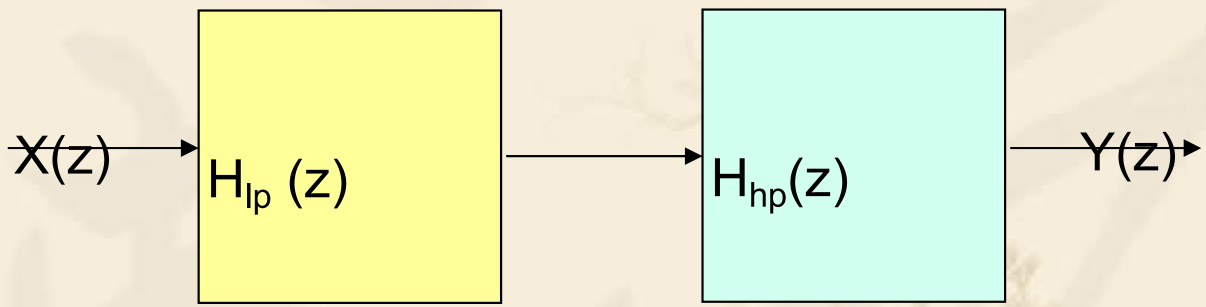
5.3.4 窗口法：设计步骤_数字带通

或者一个带通滤波器相当于一个低通滤波器和一个高通滤波器相乘，即先经过一个 LP DF，再经过一个 HP DF。

传输函数：$H_{bp}(z) = H_{lp}(z) H_{hp}(z)$

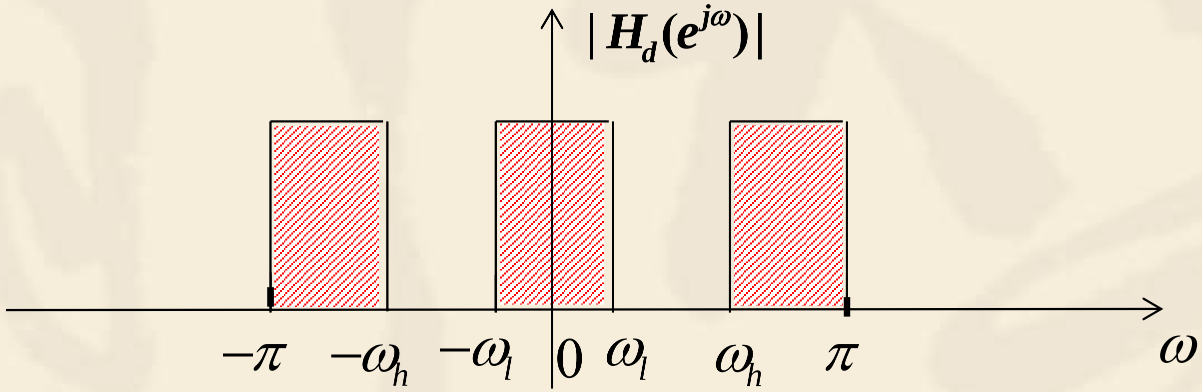
脉冲函数：$h_{bp}(n) = h_{lp}(n) * h_{hp}(n)$

（频域相乘，时域卷积）



5.3.4 窗口法：设计步骤_数字带阻

■ 数字带阻滤波器



令其幅频特性为：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega M} & |\omega|\le\omega_l,\quad \omega_h\le|\omega|\le\pi,\quad -\pi\le|\omega|\le-\omega_h \\ 0 & others \end{cases}$$

（频域为 $e^{-jM\omega}$，表示时域右移 M 位）

则

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\omega_h}e^{j(n-M)\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_l}^{\omega_l}e^{j(n-M)\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_h}^{\pi}e^{j(n-M)\omega}d\omega$$

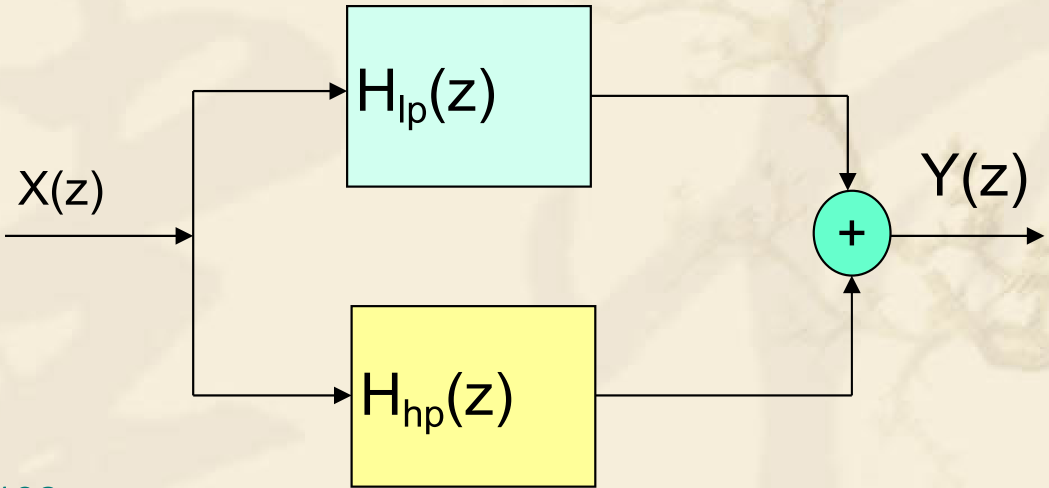
5.3.4 窗口法：设计步骤_数字带阻

求得 $$h_d(n)=\frac{\sin[(n-M)\omega_l]+\sin[(n-M)\pi]-\sin[(n-M)\omega_h]}{(n-M)\pi}$$

从这个结果可以看出：一个带阻滤波器相当于一个低通滤波器加上一个高通滤波器，低通滤波器的截止频率为 ω_l，高通在 ω_h。

传输函数： $H_{bp}(z)=H_{lp}(z)+H_{hp}(z)$

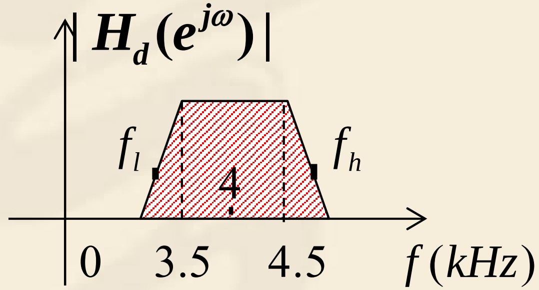
脉冲函数： $h_{bp}(n)=h_{lp}(n)+h_{hp}(n)$



5.3.4 窗口法：设计步骤

例5.4 假设取样频率为 22kHz，设计一个线性相位 FIR 带通滤波器，中心频率为 4kHz，通带边缘在 3.5kHz 和 4.5kHz，过渡带宽为 500Hz，阻带衰减 50dB。

解：



过渡带宽：500Hz，转换为数字频率为：

$$\Delta\omega = 2\pi\frac{f_c}{f_s} = \frac{2\pi\times 0.5}{22} = 0.0455\pi$$

截止频率：

$$f_l = f_{lc} - 0.5/2 = 3.5 - 0.25 = 3.25kHz$$

$$f_h = f_{hc} + 0.5/2 = 4.5 + 0.25 = 4.75kHz$$

数字截止频率：

$$\omega_l = 2\pi\frac{f_l}{f_s} = 0.3045\pi \qquad \omega_h = 2\pi\frac{f_h}{f_s} = 0.4318\pi$$

5.3.4 窗口法：设计步骤

脉冲响应：

$$h_d(n)=\frac{\sin[(n-M)\omega_h]-\sin[(n-M)\omega_l]}{(n-M)\pi}$$

窗函数：因为阻带衰减 50dB，可以选择 Hamming 窗，即

$$w(n)=0.54-0.46\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right)\qquad n=0,1,2,\cdots,N-1$$

并且窗口长度为：

$$N=\left\lceil\frac{6.6\pi}{0.0455\pi}\right\rceil=146$$

，一般 N 取奇数，因此 N＝147，M=73

则此滤波器的脉冲响应为：

$$h(n)=\frac{\sin[(n-73)\times 0.4318\pi]-\sin[(n-73)\times 0.3045\pi]}{(n-73)\pi}\times w(n)$$

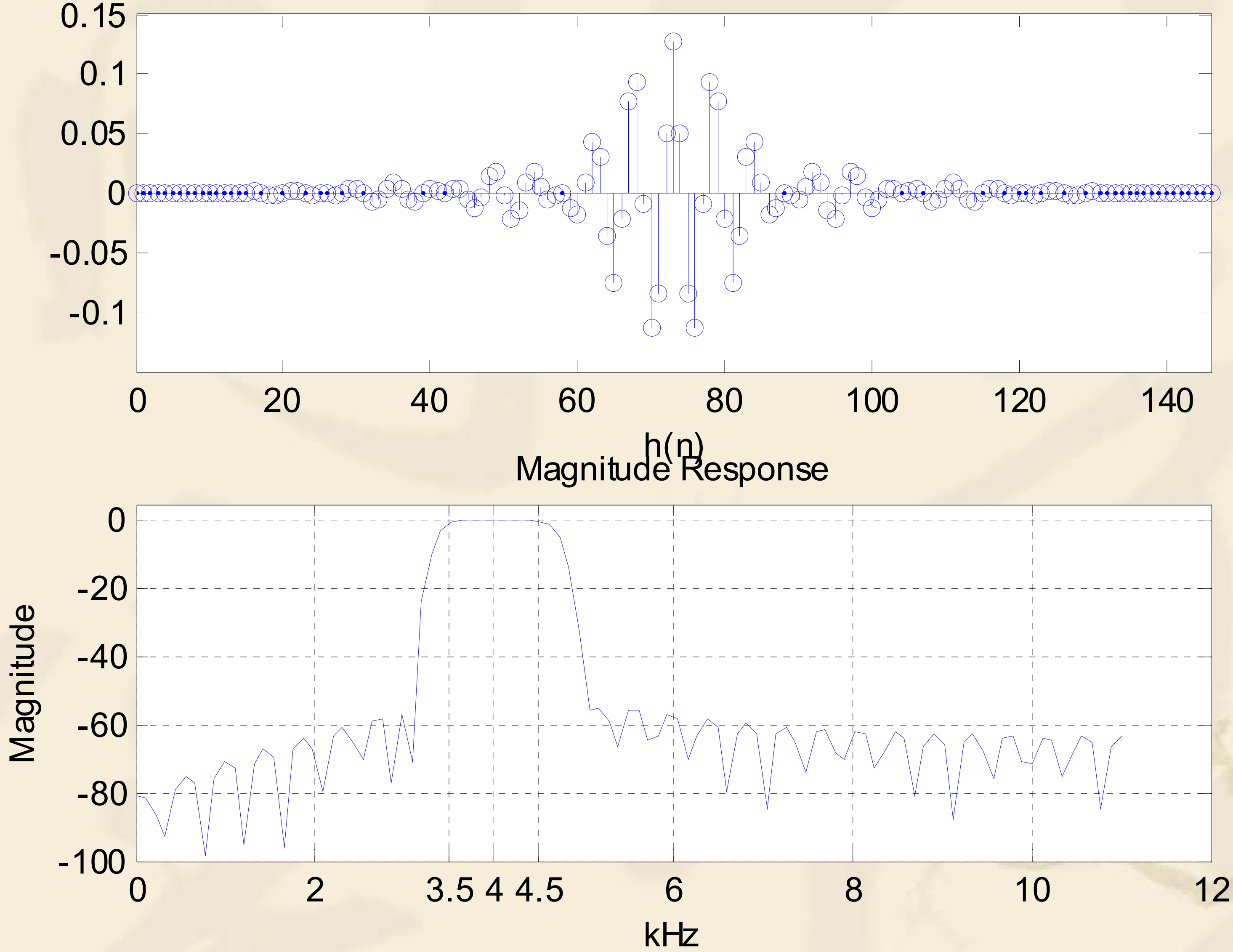
5.3.4 窗口法：设计步骤

计算得：

h(n) =

-0.0006	-0.0000	0.0007	0.0006	-0.0002	-0.0007	-0.0003
0.0003	0.0004	0.0001	-0.0000	0.0002	-0.0001	-0.0008
-0.0008	0.0007	0.0019	0.0008	-0.0017	-0.0024	-0.0001
0.0023	0.0018	-0.0006	-0.0014	-0.0004	-0.0001	-0.0011
-0.0005	0.0027	0.0039	-0.0007	-0.0063	-0.0048	0.0035
……						
-0.0097	0.0930	0.0771	-0.0210	-0.0763	-0.0368	0.0299
0.0439	0.0086	-0.0184	-0.0124	0.0004	-0.0019	-0.0058
0.0053	0.0175	0.0084	-0.0145	-0.0212	-0.0022	0.0178
0.0149	-0.0036	-0.0129	-0.0057	0.0037	0.0039	0.0003
0.0011	0.0033	-0.0003	-0.0064	-0.0054	0.0031	0.0083
0.0035	-0.0048	-0.0063	-0.0007	0.0039	0.0027	-0.0005
-0.0011	-0.0001	-0.0004	-0.0014	-0.0006	0.0018	0.0023
-0.0001	-0.0024	-0.0017	0.0008	0.0019	0.0007	-0.0008
-0.0008	-0.0001	0.0002	-0.0000	0.0001	0.0004	0.0003
-0.0003	-0.0007	-0.0002	0.0006	0.0007	-0.0000	-0.0006

5.3.4 窗口法：设计步骤


0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
20
40
60
80
100
120
140
h(n)
Magnitude Response
0
-20
-40
-60
-80
-100
Magnitude
0
2
3.5 4 4.5
6
8
10
12
kHz

5.3.5 窗口法：Matlab 实现

- FIR DF Matlab 设计函数
  - b=fir1(n,wn,options)，单带 FIR 滤波器
  - b = fir2(n,f,m,options)，多带 FIR 滤波器
  - 两者可设计低通、高通、带通、带阻和通用多带 FIR 滤波器
- Fir1 具有以下多种形式：

```
b = fir1(n,wn)
b = fir1(n,wn,'ftype')
b = fir1(n,wn,window)
b = fir1(n,wn,'ftype',window)
b = fir1(...,'noscale')
```

- 参数
  - 向量 b 是 n 阶 FIR 滤波器的系数
  - 截止频率 wn 是从 0 到 1 之间的数，1 对应着奈氏频率。
  - 对于高通滤波器，ftype 为 ‘high’；带阻滤波器 ‘ftype’ 为 ‘stop’

5.4 频率取样法

窗函数法:时域内，以有限长单位取样响应 h(n) 去逼近要求的单位取样响应。

$$H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{DTFT^{-1}} h_d(n) \xrightarrow{\times\ w(n)} h(n) \xrightarrow{DTFT} H(e^{j\omega})$$

1）时域设计方法;

2）过渡带宽度以及阻带衰减受制于窗函数的形状及长度，达到所要求的性能指标不一定方便。

频率取样法:频域内，以有限个频响取样，去逼近要求的频率响应的方法。

$$H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{sampling}} H(k) \xrightarrow{\text{interpolation}} \begin{matrix} H(z) \\ H(e^{j\omega}) \end{matrix}$$

1）频域设计方法;

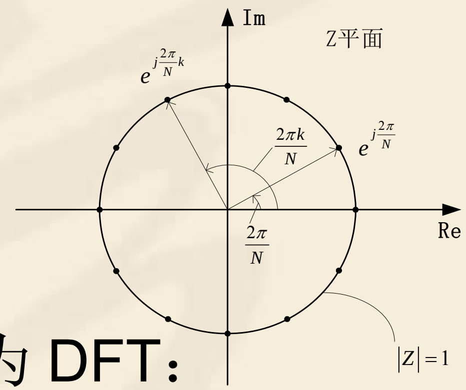
2）更直接和方便。

5.4.1 频率取样法：频域取样和内插

❖ $|H(e^{j\omega})|$和 $|H_d(e^{j\omega})|$ 的关系

- 在前面第三章 DFT 和 Z 变换的关系讲述中，已经阐述过离散时间信号 h(n) 的 Z 变换 H(z) 可以通过内插公式由其 DFT 变换值 H(k) 得到。
- 设 h(n) 为有限长N，则

$$H(z)=Z[h(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$



Z 变换在单位圆上等间隔取样（频率取样），则为 DFT：

$$H(k)=DFT[h(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)W_N^{nk}=H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=H(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

反之，则有： $H(k)\xrightarrow{IDFT}h(n)$

即

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\qquad n=0,1,2,\cdots,N-1$$

5.4.1 频率取样法：频域取样和内插

下面研究系统的系统函数 H(z) 用离散傅氏变换 H(k) 内插表示：

$$H(z)=Z[h(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}[IDFT\{H(k)\}]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)W_N^{-nk}]z^{-n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)[\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-nk}z^{-n}]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\frac{1-W_N^{-Nk}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}\qquad(\because W_N^{-Nk}=1)$$

即

$$H(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\underbrace{\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}}_{\text{内插函数}}=\underbrace{\frac{1-z^{-N}}{N}}_{\text{梳状滤波器}}\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}}_{\text{无耗并联谐振器}}$$

5.4.1 频率取样法：频域取样和内插

而 H(k) 又为 $H(e^{j\omega})$ 频率响应取样，即

$$H(k)=H(z)|_{z=W_N^{-k}}=H(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$$

即对要求的 $H_d(e^{j\omega})$ 取样，确定 H(k) 的值：

$$H(k)=H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k})\qquad k=0,1,2,\ldots,N-1$$

因此，FIR DF 频率取样法的设计过程为：

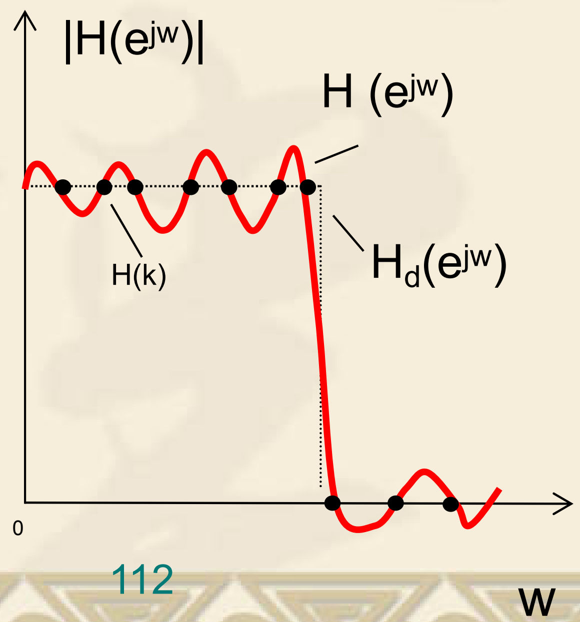
$$H_d(e^{j\omega})\xrightarrow{\text{取样}}H(K)\xrightarrow{\text{内插}}H(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

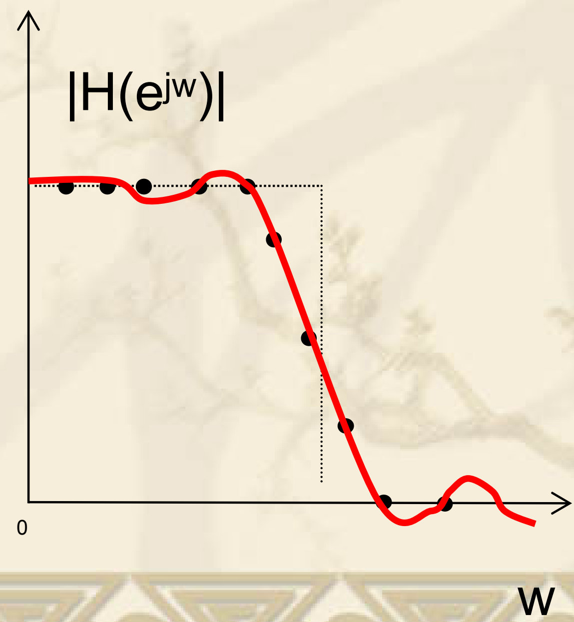
5.4.1 频率取样法：频域取样和内插

这样 $H(z)$ 是要求的 $H_d(z)$ 的近似，至少在这些取样频率上，二者具有相同的频响。即

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = H(k) = H_d(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$$

但在两个取样点之间，则是近似，由内插函数确定。因此，存在着逼近误差，误差的大小取决于理想频率响应的曲线形状和取样点数 N 的大小。在函数的不连续点附近会产生肩峰和波动。





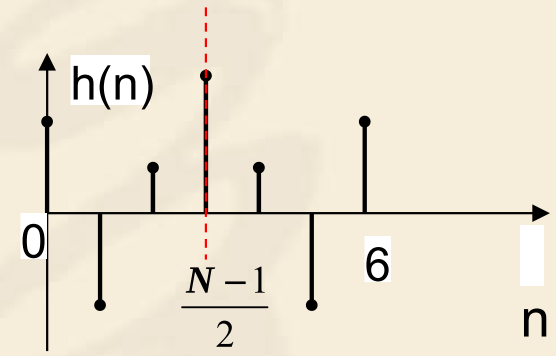
5.4.2 频率取样法：线性相位约束条件

■ 对 H(k) 的约束条件

为了保证所设计的 FIR DF 是线性相位，必须对 H(k) 提出一些约束条件，而不能任意指定。

例如：对于 Tpye I 线性相位的 FIR DF，h(n) 是偶对称、N 为奇数，其频率响应为：

$$H(e^{j\omega}) = H_r(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

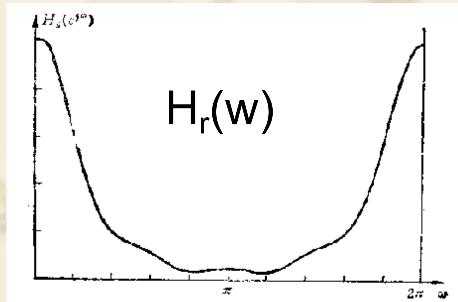


h(n) 为偶对称，N 为奇数

其中，

$$H_r(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos n\omega$$

所以 $H_r(\omega)$ 是 $\omega=\pi$ 的偶函数，且以 2π 为周期。即：



$$H_r(\omega) = H_r(-\omega) = H_r(2\pi-\omega)$$

5.4.2 频率取样法：线性相位约束条件

令： $H(k)=H_k e^{j\theta_k}$

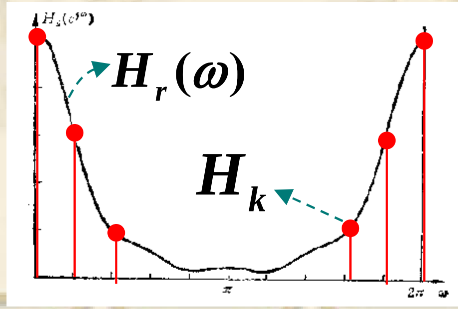
又因为： $H(k)=H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=H_r(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=H_r(\frac{2\pi}{N}k)e^{-j\frac{N-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}k}$

所以： $H_k=H_r(\frac{2\pi}{N}k),\quad \theta_k=-\frac{N-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}k=-k\pi(1-\frac{1}{N})$

因为： $H_r(\omega)=H_r(-\omega)=H_r(2\pi-\omega)\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$

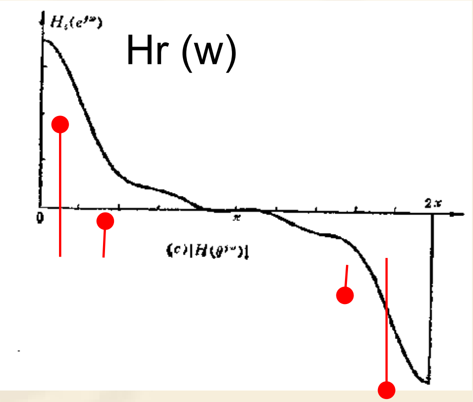
所以： $H_r(\frac{2\pi}{N}k)=H_r(2\pi-\frac{2\pi}{N}k)=H_r(\frac{2\pi}{N}N-\frac{2\pi}{N}k)=H_r\left[\frac{2\pi}{N}(N-k)\right]$

$$\begin{cases} H_k=H_{N-k} \\ \theta_k=-k\pi(1-\frac{1}{N}) \end{cases}$$



5.4.2 频率取样法：线性相位约束条件

对于 Type II FIR DF，即 h(n) 偶对称、N 为偶数，其频率响应仍可表示为：



$$H(e^{j\omega}) = H_r(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

但是，其振幅函数 $H_r(w)$ 是 ω=π奇对称的

$$H_r(\omega) = -H_r(2\pi - \omega)$$

所以，这时的 H_k 也应满足奇对称要求：

$$H_k = -H_{N-k}$$

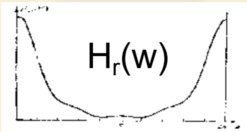
$$\begin{cases} H_k = -H_{N-k} \\ \theta_k = -k\pi(1-\frac{1}{N}) = -\frac{(N-1)k\pi}{N} \end{cases}$$

而相位要求与第一类完全一样，

$$\theta_k = -k\pi(1-\frac{1}{N}) = -\frac{(N-1)k\pi}{N}$$

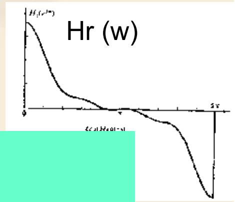
5.4.2 频率取样法：线性相位约束条件

Type I (h(n) 偶对称，N为奇数) 线性相位 FIR DF 的约束条件：



$$\begin{cases} H_k = H_{N-k} \\ \theta_k = -k\pi(1-\dfrac{1}{N}) = -\dfrac{(N-1)k\pi}{N} \end{cases}$$

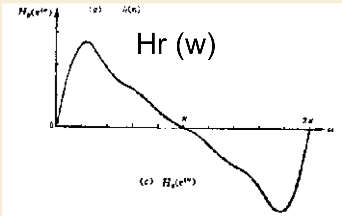
$$\begin{cases} H_k = -H_{N-k} \\ \theta_k = -k\pi(1-\dfrac{1}{N}) = -\dfrac{(N-1)k\pi}{N} \end{cases}$$



不能设计高通、带阻滤波器

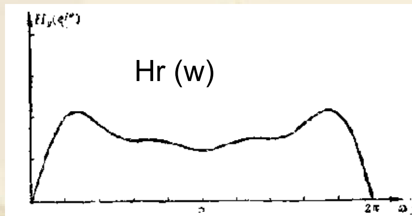
Type II (h(n) 偶对称，N为偶数) 线性相位 FIR DF 的约束条件：

Type III (h(n) 奇对称，N为奇数) 线性相位 FIR DF 的约束条件：



$$\begin{cases} H_k = -H_{N-k} \\ \theta_k = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{(N-1)k\pi}{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_k = H_{N-k} \\ \theta_k = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{(N-1)k\pi}{N} \end{cases}$$



Type IV (h(n) 奇对称，N为偶数) 线性相位 FIR DF 的约束条件：

5.4.2 频率取样法：设计步骤

■ 频率采样法设计步骤：

1) $H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\tau\omega}$，其中 $H_d(\omega)$ 是实函数

2) 取样 $H(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = H_k e^{j\theta_k} \Rightarrow$

$$H_k = \pm H_{N-k} = H_d(\frac{2\pi k}{N})$$

$$\theta_k = -\frac{N-1}{2}\frac{2\pi k}{N}, \theta_k = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\frac{2\pi k}{N}$$

$$k = 0,1,2,\ldots, N-1$$

3) 内 插

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1}H(k)\phi(\omega - \frac{2\pi}{N}k), \qquad \phi(\omega) = \frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{N\sin\frac{\omega}{2}} e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

5.4.2 频率取样法：设计步骤

例5.11 利用频率取样法，设计一个低通 FIR 数字滤波器，其理想频率特性为：

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & 0 \le \omega \le \omega_c \\ 0 & others \end{cases}$$

已知 $\omega_c = 0.5\pi$，取样点数为奇数 N = 33，要求滤波器具有线性相位。

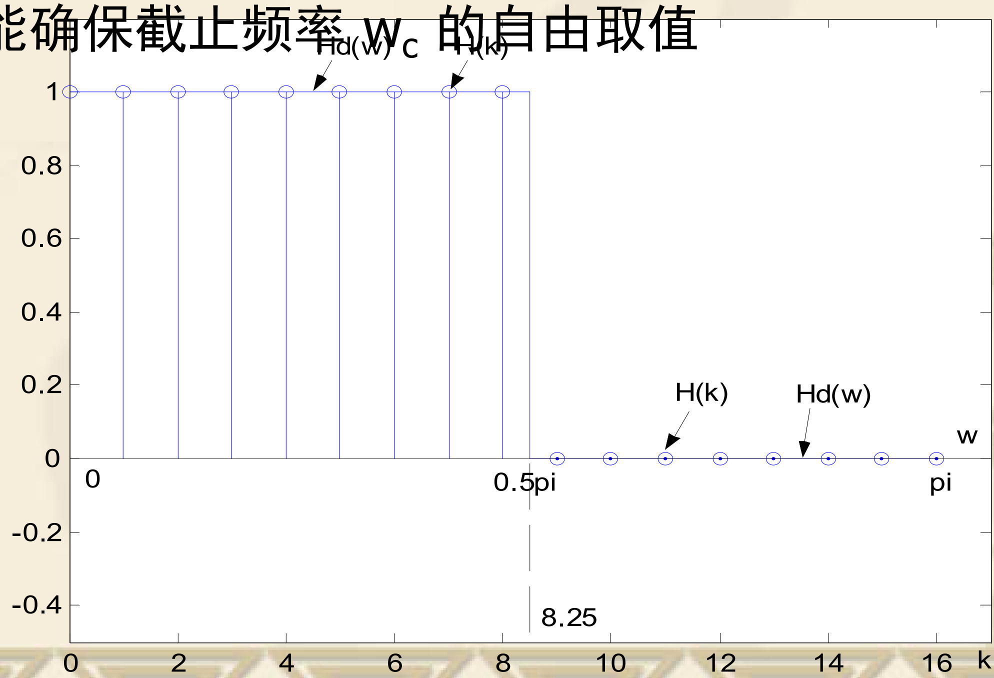
解：

根据指标，可画出频率取样后的 H(k) 序列如下图。由于对称性，此处只画出了 $0 \le k \le 16$ 区间。

取样频率只能等于 2π/N 的整数倍，因而不能确保截止频率 w_c 的自由取值

N=33，则 $\dfrac{2\pi}{N} = \Delta\omega, \dfrac{\omega_c}{\Delta\omega}$

$$H_k = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le Int\left[\dfrac{N\omega_c}{2\pi}\right] = 8 \\ 0 & 9 \le k \le \dfrac{N-1}{2} = 16 \end{cases}$$



5.4.2 频率取样法：设计步骤

将这些 H(k) 值带入前面的 H(z) 内插表达式，得：

$$H(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N{}^{-k}z^{-1}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N{}^{-k}z^{-1}}\qquad 0\le k\le 32$$

将这些值带入 $H(e^{j\omega})$ 表达式，得：

$$H(e^{j\omega})=e^{-j16\omega}\left\{\frac{\sin(\frac{33}{2}\omega)}{33\sin(\frac{\omega}{2})}+\sum_{k=1}^{8}\left[\frac{\sin\left[33\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{33}\right)\right]}{33\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{33}\right)}+\frac{\sin\left[33\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)\right]}{33\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)}\right]\right\}$$

按此式计算 $20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$，得到幅频特性，其过渡带宽为2π/33，而最小阻带衰减则约为 –20dB。性能一般。

两种方法可使设计的滤波器性能较好

1. 增加过渡带取样—— 改善阻带衰减的方法

   通带外安排一至几个非零取样

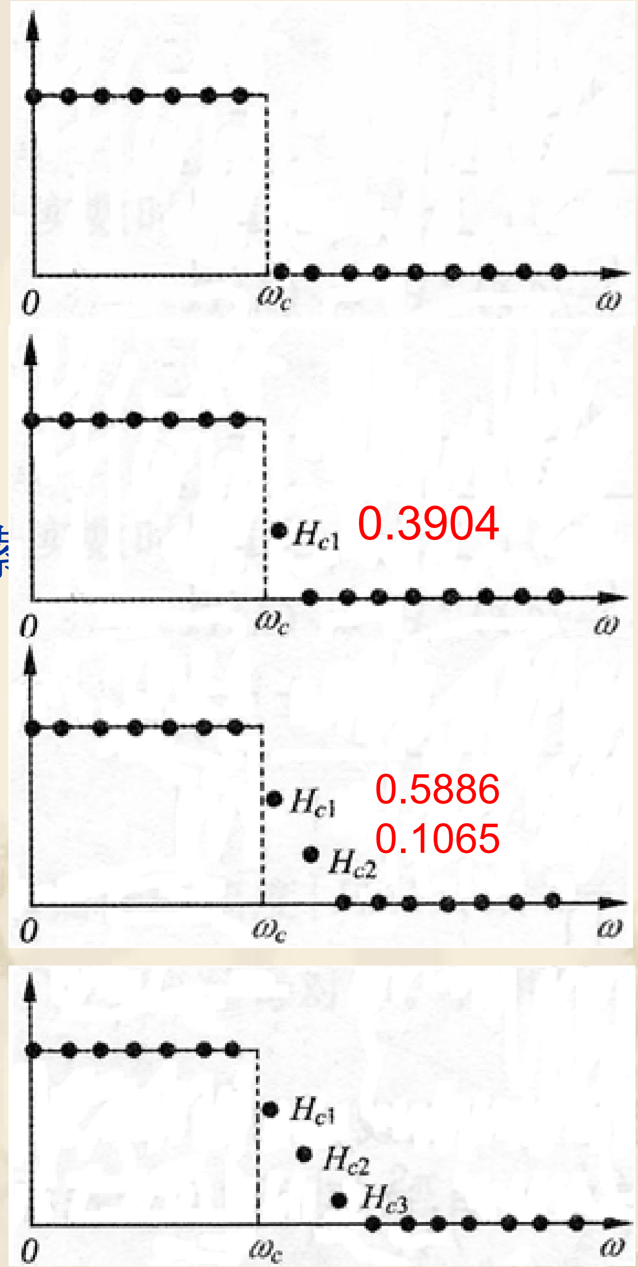
即，减缓通、阻带边界两取样之间的数值突变，

因而阻带起伏振荡减轻，最小衰减增大

过渡带取样数值介于0 和1之间，可由计算机搜索

过渡带取样数	阻带最小衰减	过渡带宽度
0	-20dB	$2\pi / N$
1	-44~-54dB	$2\pi / N \times 2$
2	-65~-75dB	$2\pi / N \times 3$
3	-85~-95dB	$2\pi / N \times 4$

代价：过渡带变宽



1. 增加过渡带取样—— 改善阻带衰减的方法

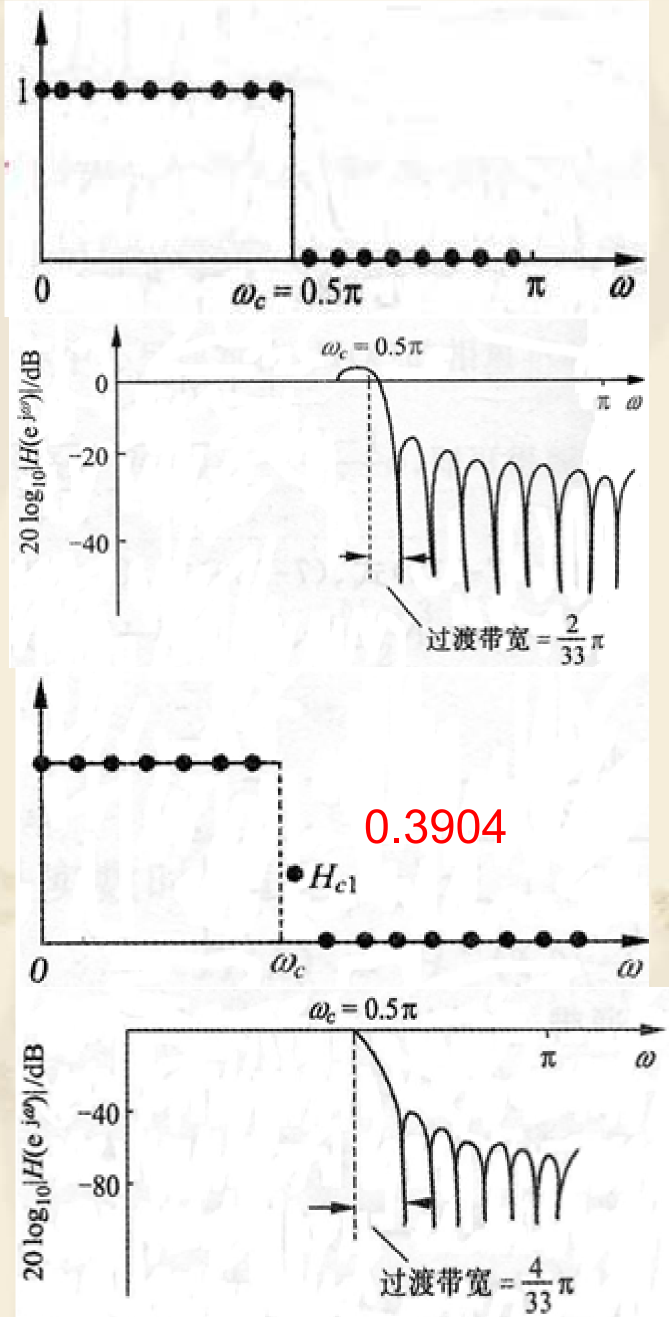
前例 *N=33*

原来，无过渡带取样

$$
H_k=\begin{cases}1e^{-j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k} & 0\le k\le 8\\ 0 & 9\le k\le 24\\ 1e^{-j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}(N-k)} & 25\le k\le 32\end{cases}
$$

现在，加一点过渡带取样

$$
H_k=\begin{cases}1e^{-j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k} & 0\le k\le 8\\ 0.3904e^{-j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k} & k=9\\ 0 & 10\le k\le 23\\ 0.3904e^{j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k} & k=24\\ 1e^{-j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}(N-k)} & 25\le k\le 32\end{cases}
$$



2. 增加取样点密度—— 改善过渡带宽度的方法

若希望加大阻带衰减的同时不使过渡带过宽，可加大**N**

前例 $w_c = 0.5\pi$

现在，以**N=65**进行取样，并加两个过渡带取样

$$|H(k)| = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le 16 \\ 0.5886, & k = 17 \\ 0.1065 & k=18 \\ 0 & 19 \le k \le 46 \\ 0.1065 & k = 47 \\ 0.5886 & k = 48 \\ 1, & 49 \le k \le 64 \end{cases}$$

过渡带宽 $\frac{38\pi}{65} - \frac{32\pi}{65} = \frac{6\pi}{65}$

	阻带最小衰减
$N = 33$，不加过渡带取样过渡带宽 $\frac{2\pi}{33}$	$-20dB$
$N = 33$，加1个过渡带取样过渡带宽 $\frac{2\pi}{33} \times 2$	$-44 - 54dB$
$N = 33$，加2个过渡带取样过渡带宽 $\frac{2\pi}{33} \times 3$	$-65 - 75dB$
$N = 65$，加2个过渡带取样过渡带宽 $\frac{6\pi}{65}$	$-65 - 75dB$

代价：**h(n)**和**H(k)**长度增加，滤波 运算量增大

例5.12 利用频率取样法，设计一个带通 FIR 数字滤波器，其通带频率范围为500Hz-700Hz, 取样频率为fs=3300Hz, 阶次N=33.

- 解：N为奇数，

$$H_d(k)=\begin{cases} e^{-j\frac{32}{33}k\pi} & k=5,6,7,26,27,28 \\ 0 & k=0\sim 4,8\sim 25,29\sim 32k\le 32 \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}H_d(k)\phi(\omega-\frac{2\pi}{N}k),\qquad \phi(\omega)=\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{N\sin\frac{\omega}{2}}\ e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

5.4.2 频率取样法：小结

■ 性能分析：

1) 在取样点处，$H(e^{j\omega})$ 和 $H_d(e^{j\omega})$ 相同

2) 在非取样点处， $H(e^{j\omega})$ 和 $H_d(e^{j\omega})$ 存在偏差

（各取样点间由内插函数延伸迭加而形成）

✧所要求的特性越平缓，内插值越接近要求值，逼近也越好。

✧反之，则内插值与要求值间误差较大，且在不连续点处出现肩峰与起伏。

✧改善方法：增加过渡点个数

3) 出现过渡带；

通带和阻带内存在波动；

阻带的衰减特性较差；

4) 线性相位特征可得到保障

5) 抽样点 N 取的越大，近似程度越好。

5.4.2 频率取样法：小结

6) 在不连续点的边缘，增加一些过渡取样值

（这些增加的取样值的最佳值可由计算机仿真），提高逼近质量，减少逼近误差，即减少在通带边缘由于取样值的陡然变化而引起的起伏振荡，增大了阻带最小衰减。但这样做增加了过渡带。

7) 优点：

- 在频域直接设计，并且适合于最优化设计；
- 原理简单，计算简单，若 $N=2^r$，则可借助于 FFT 计算；
- 通过改变阶数 N 和设置过渡点，通常都能取得满意的结果。

8) 缺点：

不能精确地确定其通带和阻带的边缘频率。因为取样频率只能等于 $2\pi/N$ 的整数倍，因而不能确保截止频率 w_c 的自由取值，要想实现自由选择截止频率，必须增加取样点数 N，但这增加计算量。

9) Matlab 函数

- b = intfilt(r,l,alpha)
- b = intfilt(r,n,'Lagrange')
- 用内插方法实现线性相位 FIR 滤波器。

5.5* FIR DF 优化设计：概述

- 前面介绍了两种 **FIR DF** 的设计方法：
  - 窗口法：时域内逼近对所要求的滤波特性
  - 频率取样法：频域内逼近对所要求的滤波特性

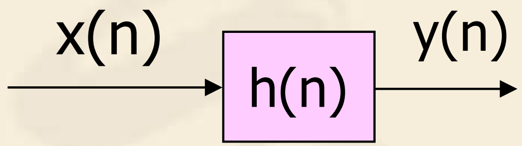
- 从数值逼近的理论看，对某个函数 **f(x)** 的逼近一般有下述三种方法：
  1. 最小平方逼近法——付氏级数法（窗函数法）
  2. 插值法——频率取样法
  3. 一致逼近法——切比雪夫法

5.6.1 FIR DF 实现结构：直接型

- 直接型（横截型、卷积型）

差分方程 $y(n)=\sum_{i=0}^{N-1}a_i x(n-i)$

系统函数 $H(z)=\sum_{i=0}^{N-1}a_i z^{-i}$



令输入信号： $x(n)=\delta(n)$

则输出为系统的单位冲激响应 **h(n)**：

$$h(n)=a_0\delta(n)+a_1\delta(n-1)+\cdots\cdots$$

因此： $h(0)=a_0,\ \ h(1)=a_1,\cdots\cdots h(N-1)=a_{N-1}$

即 $h(n)=a_n$

FIR DF 单位冲击响应等于抽头系数

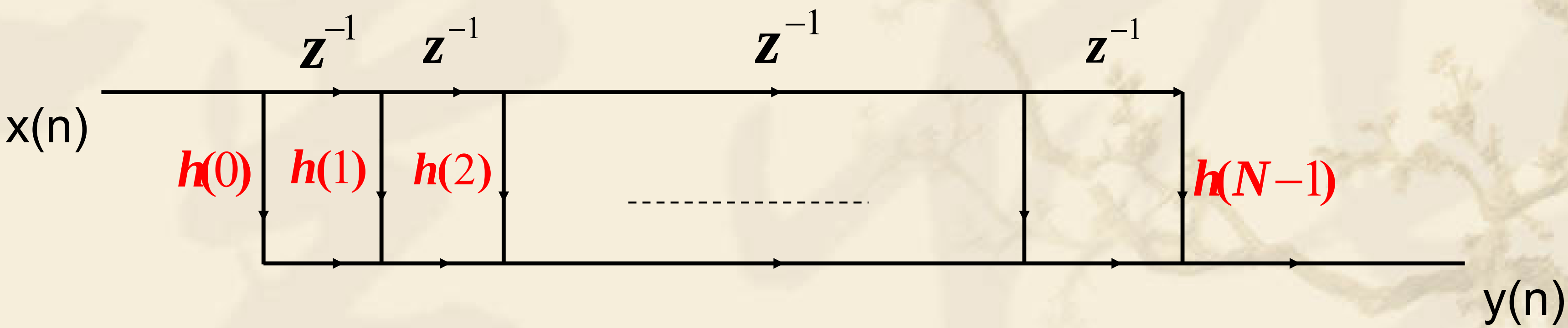
5.6.1 FIR DF 实现结构：直接型

所以

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N-1}a_i x(n-i)=a_0 x(n)+a_1 x(n-1)+\ldots\ldots$$

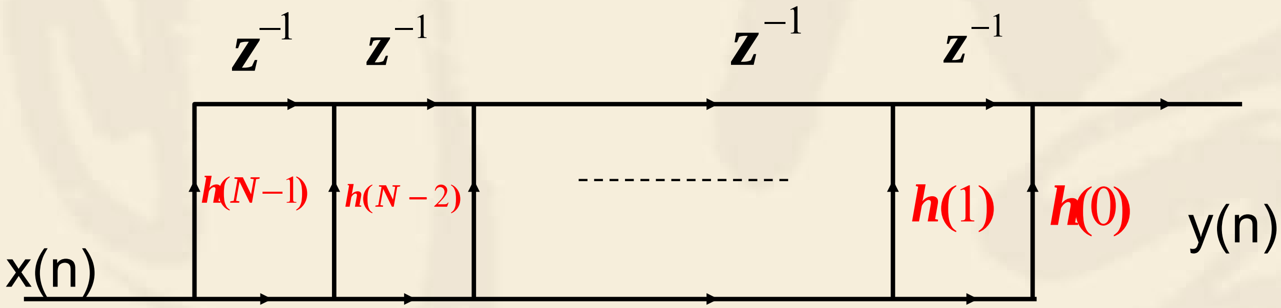
$$=\sum_{i=0}^{N-1}h(i)x(n-i)=h(n)*x(n)$$

由此式可以直接得到 FIR DF 的直接型结构。由于此结构实际上直接表达了上述的 h(n) 与x(n) 之间的卷积关系，因此又称为卷积型结构，或横截型结构。



5.6.1 FIR DF 实现结构：横截型

利用转置定理，上述网络结构可变为：



5.6.2 FIR DF 实现结构：级联型

❖ 级联型

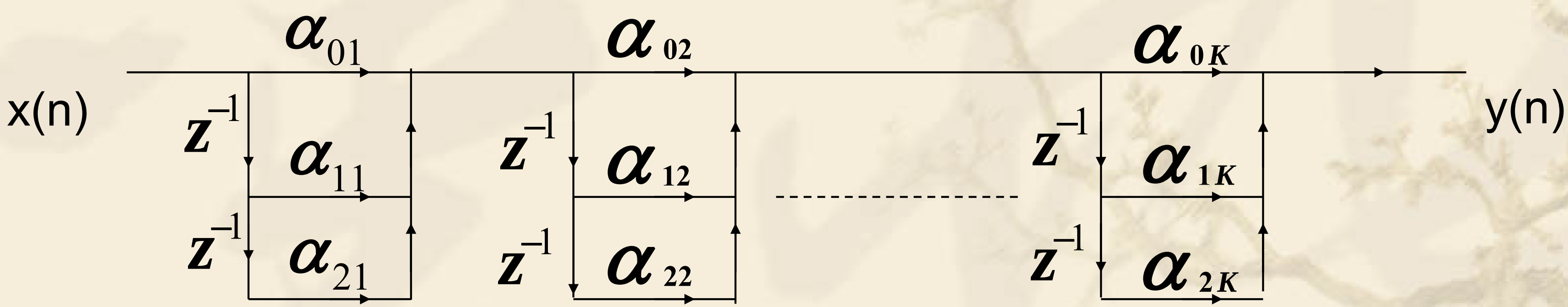
系统函数 H(z) 可写成按零点表示的二阶因式的形式

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\prod_{i=0}^{K}[\alpha_{0i}+\alpha_{1i}z^{-1}+\alpha_{2i}z^{-2}]$$

若 N 为偶数，则 K = N/2；

若 N 为奇数，则 K = (N+1)/2，且其中有一个因式中的 $a_{2i}=0$。

它的网络结构可采用二阶级联形式：



5.6.2 FIR DF 实现结构：级联型

- 特点：
  - ❶ 在级联结构中，抽头系数a的个数比直接型 h(n) 多，因此，所需乘法器也多。（缺点）
  - ❷ 每一个子网络控制一对零点，零点可独立调整，系统特性随零点变化的灵敏度优于直接型的。（优点）
- Matlab 实现
  - FIR 级联型滤波器可以继续使用前面 IIR 级联型中描述的 Matlab 函数；
  - [z,p,k] = tf2zp(num,den) 和 sos = zp2sos(z,p,k)
    - 只是把分母矢量 den 置为 1；
    - 需要注意一点，函数 tf2zp(num,den) 要求分母 den 的长度要大于等于分子num的长度，且第一个系数不能为 0，因此，如果分子 num 的长度为 N 的话，则分母 den 需要在 1 后面补上 N-1 个零，即 num = [1,0,0,……,0]。
    - 类似地，用函数 sos2tf 可从级联型得到直接型的表达式。

5.6.2 FIR DF 实现结构：级联型

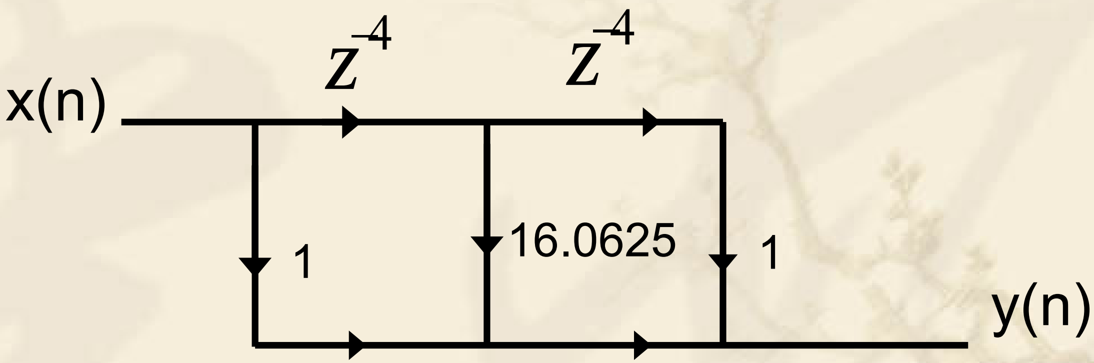
例5.18　FIR 滤波器由下列系统函数给定：

$$H(z) = 1 + 16.0625 z^{-4} + z^{-8}$$

求出并画出直接型和级联型结构。

解：

直接型：
$$y(n) = x(n) + 16.\frac{1}{16} x(n-4) + x(n-8)$$



只需要 1 个乘法器

5.6.2 FIR DF 实现结构：级联型

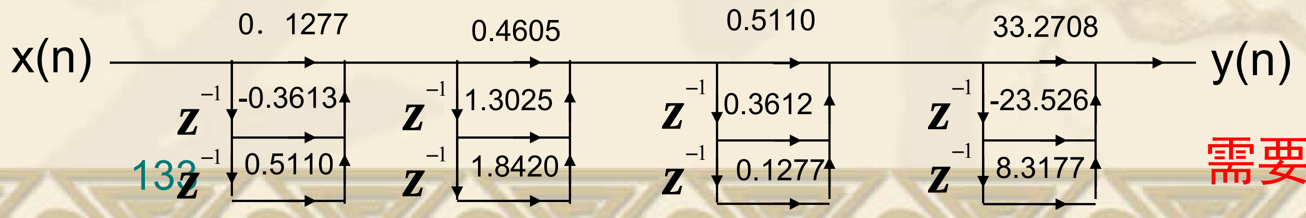
级联型：

```
% FIR Cascade form conversion
b = [1,0,0,0,16.0625,0,0,0,1];
a = [1,0,0,0,0,0,0,0,0];              % 长度为 9，和分子多项式 b 的长度一样
[z,p,k] = tf2zp(b,a);                 % 传输函数转换为零极点形式
format short;
sos = zp2sos(z,p,k)                   %零极点转换为二次因式
format long;
delta = impseq(0,0,7);
hcas = casfilt(sos,delta)；           % 级联滤波器的输出计算，为了验证变换结果正确与否
hdir = filter(b,a,delta)；            % 直接计算滤波器的输出
```

运行结果如下：

sos =

0.1277	-0.3613	0.5110	1.0000	0	0
0.4605	1.3025	1.8420	1.0000	0	0
0.5110	0.3613	0.1277	1.0000	0	0
33.2708	-23.5260	8.3177	1.0000	0	0



需要 12 个乘法器

5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

❖ 网络结构

FIR DF 是非递归型，上面的直接型、级联型结构也都是非递归型的，但也可以采用递归型算法来实现 FIR DF，这就是频率取样型。

在前面第三章 DFT 和前面 FIR DF 的频率取样法设计中，已经推导得到 h(n) 的 Z 变换，也即滤波器的系统函数 H(z)，可以用 h(n) 的 DFT H(k) 内插表示，即：

$$H(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

设

$$H_e(z)=1-z^{-N}$$

$$H_k(z)=\frac{H(k)}{1-W_N^{-K}z^{-1}}$$

则 H(z) 可以写成：

$$H(z)=\frac{1}{N}H_e(z)[\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)]$$

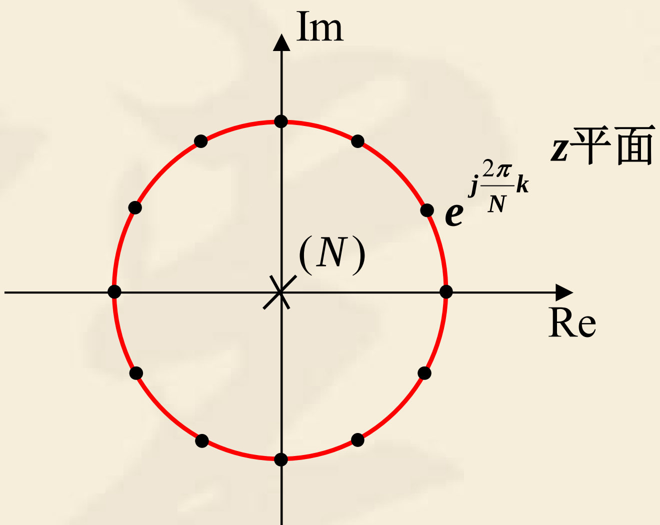
此式表明，此系统由 $H_e(z)$ 和 $\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)$ 两个子网络级联而成。

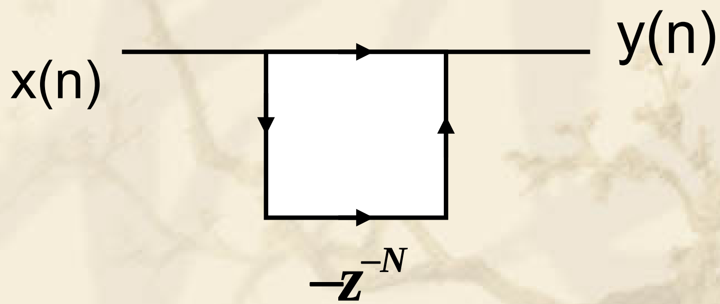
5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

- 第 1 个子网络：$H_e(z)$ 是 N 阶梳状滤波器。

$$H_e(z)=1-z^{-N}=\frac{z^N-1}{z^N}$$

所以，$H_e(z)$ 在 z = 0 有 N 阶极点，而零点是 1 的 N 次方根，均匀的分布于单位园上，$z_k=e^{j\frac{2\pi}{N}k},k=0,1,\cdots,N-1$。其实现结构如图所示。





5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

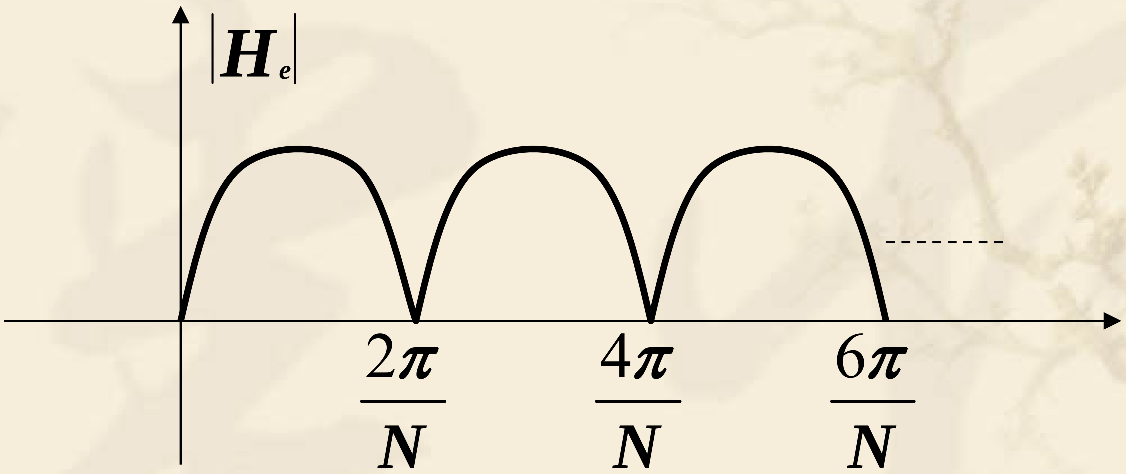
子网络 $H_e(z)$ 的频率响应为：

$$H_e(e^{j\omega}) = 1 - e^{-jN\omega}$$

故其幅频响应为：

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|1 - conN\omega + j\sin N\omega\right| = 2\left|\sin(\frac{N\omega}{2})\right|$$

具有这种幅频特性的滤波器通常被称为梳状滤波器。



5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

❖ 第 2 个子网络：

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

是 N 个一阶网络的并联。它在单位圆上有 N 个极点：

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

另外，由于

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z\cdot H(k)}{z-W_N^{-k}} = z\sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{z-W_N^{-k}}$$

若对上式进行通分求和，化为有理分式形式，可知分子含有因子z和z的N-1次多项式，因此该并联网络在z = 0有一阶零点，在有限 z 平面上有N-1个零点。

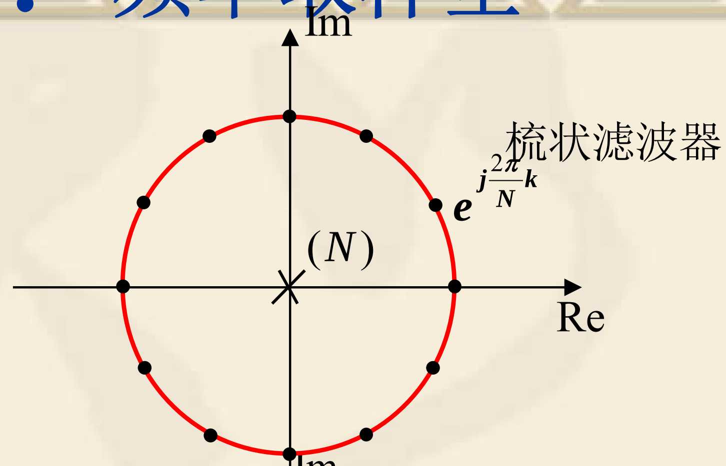
此并联网络在频率处 $\omega=\frac{2\pi}{N}k$（极点）的幅频响应为无穷大，故此并联网络等效于一个无耗并联谐振器，其谐振频率为 $\omega=\frac{2\pi}{N}k,\ \ k=0,1,\cdots,N-1$ 。

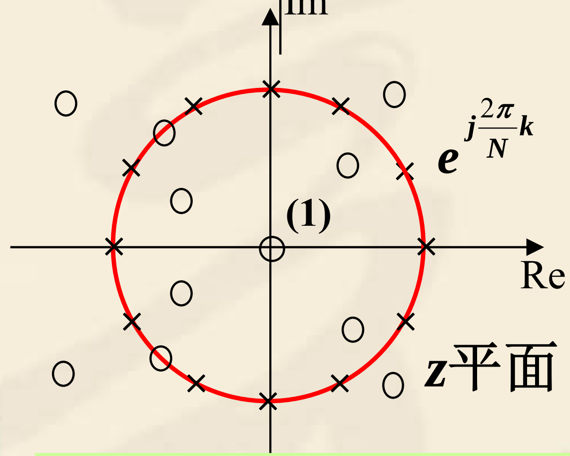
5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

1) 单位圆上，并联谐振器极点各自正好抵消梳状滤波器一个零点。

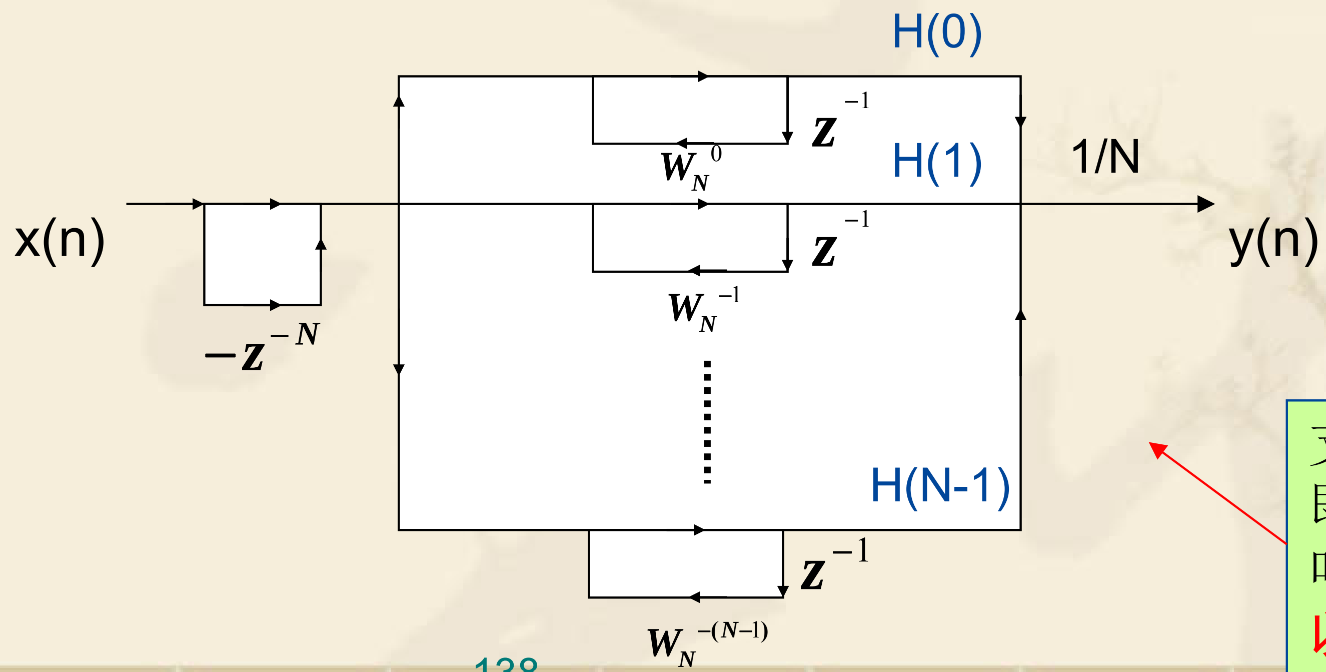
2) 并联谐振器在z = 0处的一阶零点抵消了梳状滤波器在z = 0处的一个极点，这样在 z=0 处的极点正好保留了 (N-1) 个。

因此，因此，**级联的结果保留了 FIR DF 原有的零极点，** 即在 z = 0 的 N-1 阶极点和有限 z平面上的 N-1 个零点。





$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$



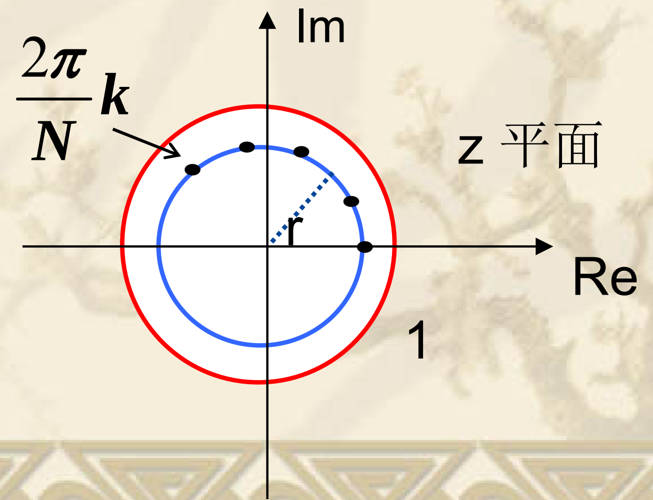
支路系数就是频率取样值，即冲激响应 h(n) 的离散傅里叶变换 DFT[h(n)]，**因而可以直接控制滤波器的频率响应。**

5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

- 稳定性问题
  - 理论上，频率取样型结构在单位圆上的零极点恰好相互抵消。
  - 但在实际中，单位圆上的零极点抵消不完全。原因：
    - 梳状滤波器 $H_e(z)$ 的零点能够靠延时来准确地实现；
    - 并联谐振器在单位圆上的极点是靠复数乘法来实现的，故不能准确实现。
    - 结果：零极点抵消不完全，滤波器会出现不稳定现象，因此，应当对上面所述的网络结构进行修正。
- 修正方法：
  - 将单位圆上的零点和极点都移到半径 r 约小于 1 的圆上，用 rz^{-1} 来代替$H_e(z)$ 和 $H_k(z)$ 中的 z^{-1}，r 上取样 $H_r(k) \approx H(k)$，得：

$$H(z)=\frac{(1-r^N z^{-N})}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_r(k)}{1-W_N^{-k} r z^{-1}}$$

$$\approx \frac{1}{N}H_{er}(z)\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-rW_N^{-k} z^{-1}}$$

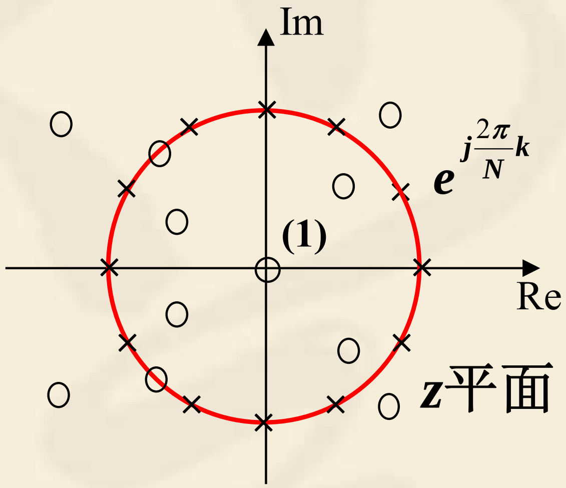


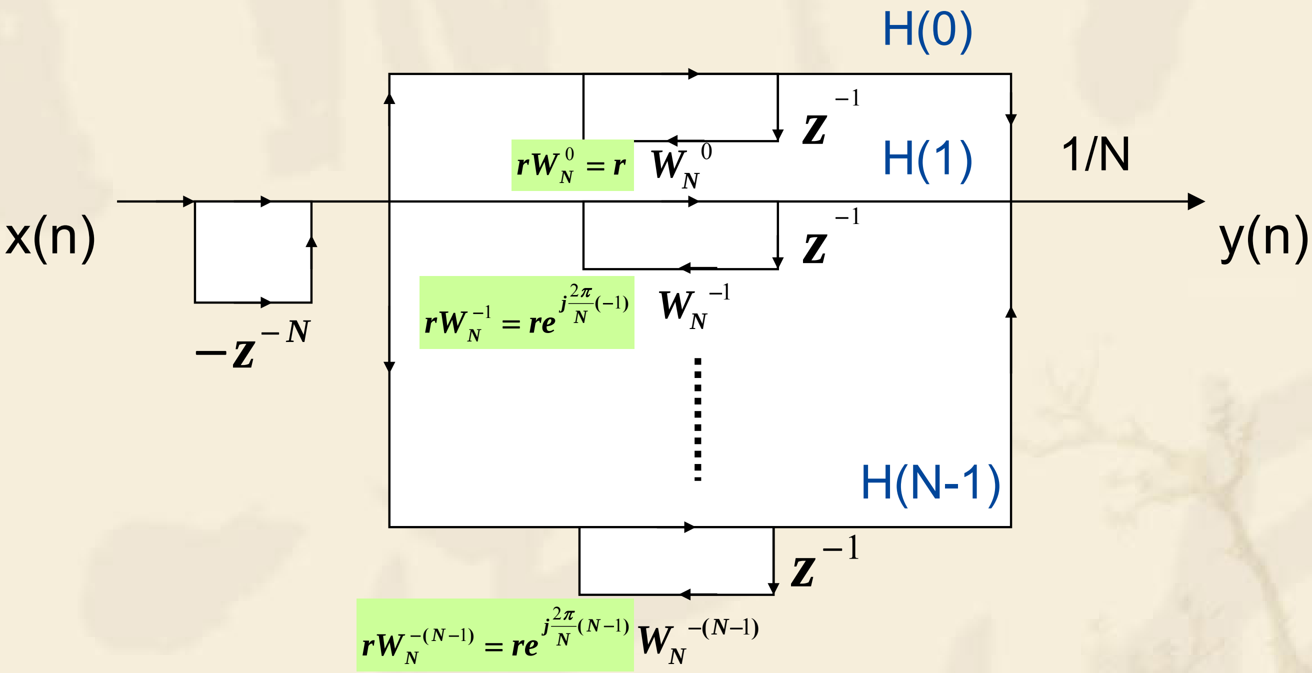
5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

- 即使偏移后的零点、极点无法完全对消，也不会造成不稳定。

$$z_k = re^{j\frac{2\pi}{N}k} = rW_N^{-k}, k = 0,1,\ldots N-1$$

$$H_r(k) = H(z)|_{z=re^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$





5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

❖ 子网络合并

一般地，旋转因子 W_N^k 和离散傅里叶变换 H(k) 都是复数，所以上面讨论的频率取样型结构是复数运算。实际中 h(n) 为实序列，利用W_N^k 和 H(k) 的周期性和对称性，可以将其转化为实数运算，即

$$\begin{cases} ① & W_N^{-(N-k)} = W_N^{k} = W_N^{*(-k)} \\ ② & h(n)\text{是实函数，}\quad H^*(k) = H(N-k) \end{cases}$$

可以将第 k 及第 N-k 个谐振器合并为一个二阶网络：

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - rW_N^{-(N-k)}z^{-1}}$$

N 为偶数时

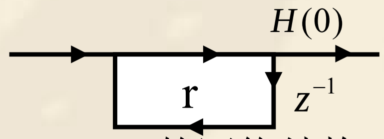
$$H(z) = \frac{1}{N}(1 - r^N z^{-N})\left[\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} H_k(z) + H_0(z) + H_{\frac{N}{2}}(z)\right]$$

N 为奇数时

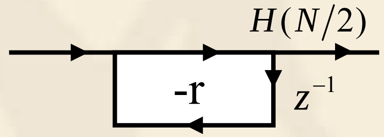
$$H(z) = \frac{1}{N}(1 - r^N z^{-N})\left[\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} H_k(z) + H_0(z)\right]$$

5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

其中 $H_0(z)=\dfrac{H(0)}{1-rz^{-1}}$　　$H_{\frac{N}{2}}(z)=\dfrac{H(\frac{N}{2})}{1+rz^{-1}}$

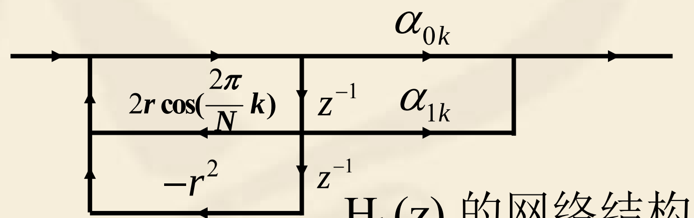


$H_0(z)$ 的网络结构



$H_{N/2}(z)$ 的网络结构

$$H_k(z)=\frac{\alpha_{0k}+\alpha_{1k}z^{-1}}{1-z^{-1}2r\cos[\frac{2\pi}{N}k]+r^2z^{-2}}$$



$H_k(z)$ 的网络结构

这里 $\alpha_{0k}=2\mathrm{Re}[H(k)]=2\mathrm{Re}[|H(k)|e^{j\theta(k)}]=2|H(k)|\cos[\theta(k)]$

$$\alpha_{1k}=-2r\,\mathrm{Re}[H(k)W_N^{\;k}]=-2r\,\mathrm{Re}[|H(k)|e^{j\theta(k)}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}]$$

$$=-2r\,\mathrm{Re}[|H(k)|e^{j[\theta(k)-\frac{2\pi}{N}k]}]=-2r|H(k)|\cos[\theta(k)-\frac{2\pi}{N}k]$$

$$H(0)=H(k)|_{k=0}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)W_N^{\;nk}|_{k=0}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)$$

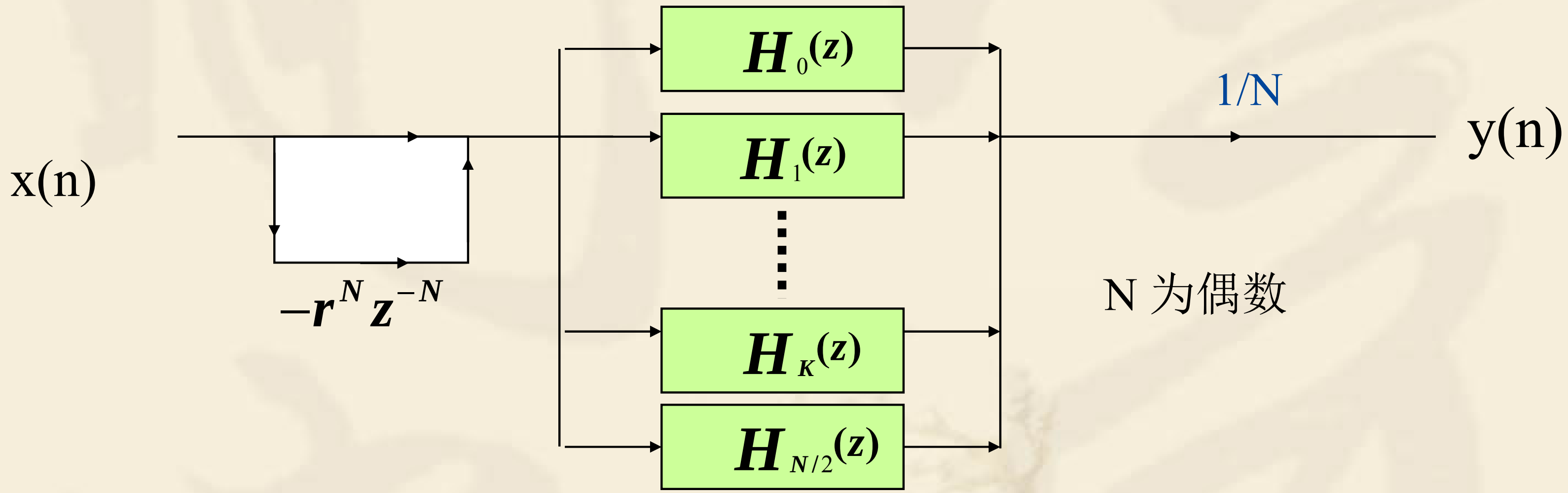
$$H(\frac{N}{2})=H(k)|_{k=\frac{N}{2}}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)W_N^{\;nk}|_{k=\frac{N}{2}}=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n h(n)$$

$H_k(z)$ 是有限 Q 值的二阶谐振器，其谐振频率为 $\omega_k=\dfrac{2\pi k}{N}$。

$H_k(z)$、$H_0(z)$、$H_{N/2}(z)$ 的网络结构分别如图所示。

5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

因此，合并后的 FIR 滤波器频率取样型完整网络结构如下图所示（图中 N 为偶数）：



5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

例5.19 设 $h(n)=\frac{1}{9}\{1,2,3,2,1\}$，求出并画出频率取样型结构。

解： N =5 是奇数，有 1 个一阶网络和2个二阶网络。若取 r =0.9，根据公式得：

$$H(z)=\frac{1}{9}(1+2z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4})$$

$$H(k)=H(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}}=\frac{1}{9}\left[1+2e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+3e^{-j\frac{4\pi}{5}k}+2e^{-j\frac{6\pi}{5}k}+e^{-j\frac{8\pi}{5}k}\right]$$

因而

$H(0)=1$ $\quad H(1)=-0.2353-0.1710j$ $\quad H(2)=0.0131+0.0404j$

$$H_0(z)=\frac{H(0)}{1-rz^{-1}}=\frac{1}{1-0.9z^{-1}}$$

K＝1时

$$\alpha_{01}=2\,\mathrm{Re}[H(1)]=2\times(-0.2353)=-0.4706$$

$$\alpha_{11}=-2r\,\mathrm{Re}[H(1)W_N{}^{k}]=-2\times0.9\times\mathrm{Re}[(-0.2353-0.1710j)\times e^{-j\frac{2\pi}{5}}]$$
$$=-2\times0.9\times\mathrm{Re}[-0.2353+0.1709j]=0.4236$$

5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

$$H_1(z)=\frac{\alpha_{01}+\alpha_{11}z^{-1}}{1-z^{-1}2r\cos[\frac{2\pi}{N}k]+r^2z^{-2}}=\frac{-0.4706+0.4236z^{-1}}{1-z^{-1}2\times 0.9\times\cos[\frac{2\pi}{5}]+0.9^2z^{-2}}=\frac{-0.4706+0.4236z^{-1}}{1-0.5562z^{-1}+0.81z^{-2}}$$

K＝2时

$$\alpha_{02}=2\,\mathrm{Re}[H(2)]=2\times(0.0131)=0.0262$$

$$\begin{aligned}\alpha_{12}&=-2r\,\mathrm{Re}[H(2)W_N^{\ k}]=-2\times 0.9\times\mathrm{Re}[(0.0131+0.0404j)\times e^{-j\frac{4\pi}{5}}]\\&=-2\times 0.9\times\mathrm{Re}[0.0131-0.0404j]=-0.0237\end{aligned}$$

$$H_2(z)=\frac{\alpha_{02}+\alpha_{12}z^{-1}}{1-z^{-1}2r\cos[\frac{2\pi}{N}k]+r^2z^{-2}}=\frac{0.0262-0.0237z^{-1}}{1-z^{-1}2\times 0.9\times\cos[\frac{4\pi}{5}]+0.9^2z^{-2}}=\frac{0.0262-0.0237z^{-1}}{1+1.4562z^{-1}+0.81z^{-2}}$$

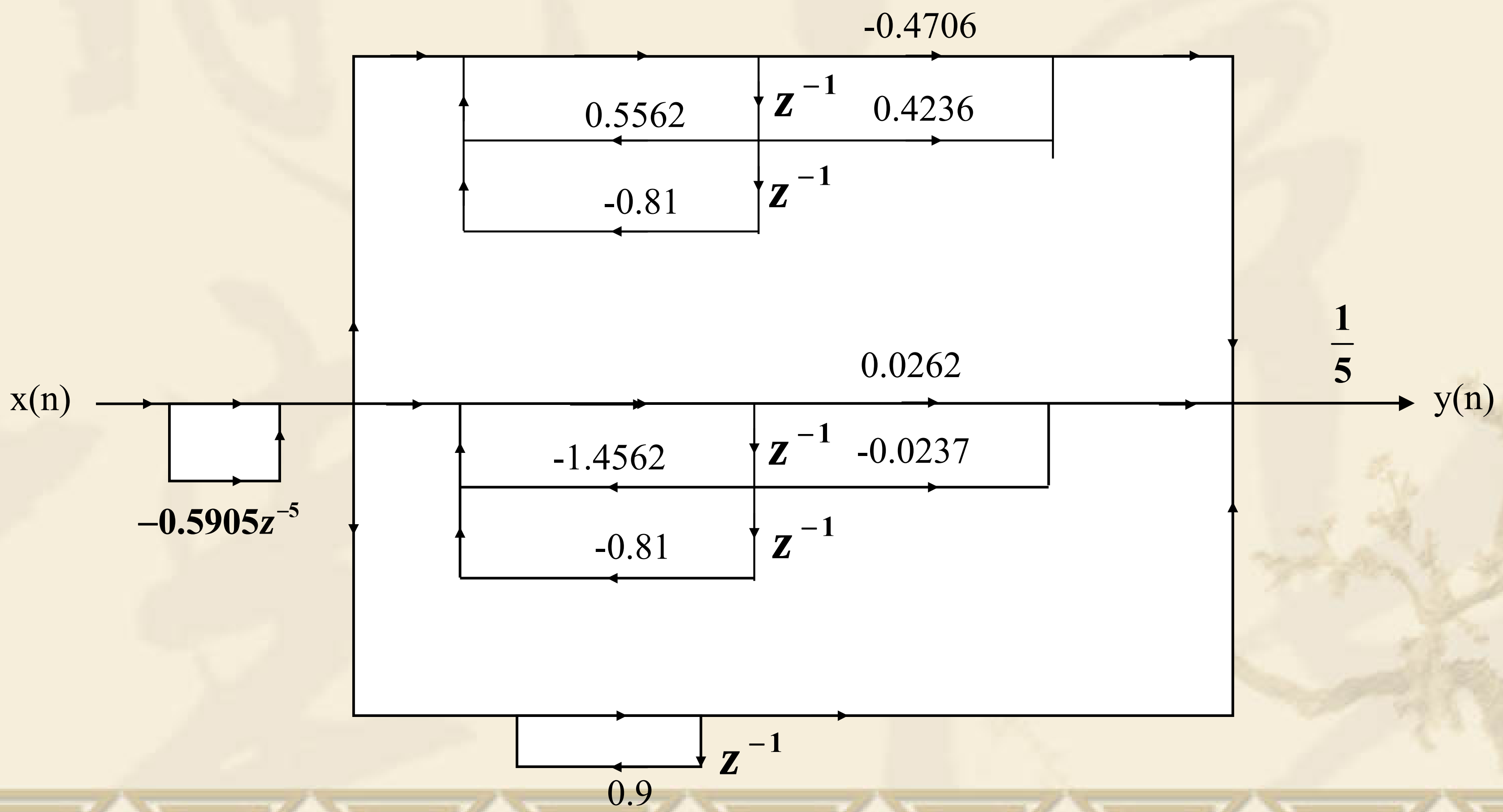
最后

$$\begin{aligned}H(z)&=\frac{1}{N}(1-r^Nz^{-N})[\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}H_k(z)+H_0(z)]=\frac{1-0.9^5z^{-5}}{5}\left[\sum_{k=1}^{2}H_k(z)+H_0(z)\right]\\&=\frac{1-0.5905z^{-5}}{5}\left[\frac{-0.4706+0.4236z^{-1}}{1-0.5562z^{-1}+0.81z^{-2}}+\frac{0.0262-0.0237z^{-1}}{1+1.4562z^{-1}+0.81z^{-2}}+\frac{1}{1-0.9z^{-1}}\right]\end{aligned}$$

5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

$$H(z)=\frac{1}{N}(1-r^N z^{-N})[\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}H_k(z)+H_0(z)]=\frac{1-0.9^5 z^{-5}}{5}\left[\sum_{k=1}^{2}H_k(z)+H_0(z)\right]$$

$$=\frac{1-0.5905z^{-5}}{5}\left[\frac{-0.4706+0.4236z^{-1}}{1-0.5562z^{-1}+0.81z^{-2}}+\frac{0.0262-0.0237z^{-1}}{1+1.4562z^{-1}+0.81z^{-2}}+\frac{1}{1-0.9z^{-1}}\right]$$



5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

❖ Matlab 实现

给定脉冲响应 h(n) 或者 DFT H(k)，必须求出上述二阶谐振表达式中系数。下面的 Matlab 函数 [C,B,A] = dir2fs(h) 把直接形式的 h(n) 表达式转换成频率取样型表达式。注意此函数没有修正单位圆上的极点，即 r=1。

```
function [C,B,A] = dir2fs(h)
% Direct form to Frequency Sampling form conversion
% -------------------------------------------------
% [C,B,A] = dir2fs(h)
% C = Row vector containing gains for parallel sections
% B = Matrix containing numerator coefficients arranged in rows
% A = Matrix containing denominator coefficients arranged in rows
% h = impulse response vector of an FIR filter
%
M = length(h);
H = fft(h,M);
magH = abs(H); phaH = angle(H)';
% check even or odd M
if (M == 2*floor(M/2))
     L = M/2-1;   % M is even
    A1 = [1,-1,0;1,1,0];
    C1 = [real(H(1)),real(H(L+2))];
else
     L = (M-1)/2; % M is odd
    A1 = [1,-1,0];
    C1 = [real(H(1))];
end
k = [1:L]';
% initialize B and A arrays
B = zeros(L,2); A = ones(L,3);
% compute denominator coefficients
A(1:L,2) = -2*cos(2*pi*k/M); A = [A;A1];
% compute numerator coefficients
B(1:L,1) = cos(phaH(2:L+1));
B(1:L,2) = -cos(phaH(2:L+1)-(2*pi*k/M));
% compute gain coefficients
C = [2*magH(2:L+1),C1]';
```

5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型

例5.20 设$h(n)=\frac{1}{9}\{1,2,3,2,1\}$,求出并画出频率取样型结构

解：° Matlab 程序

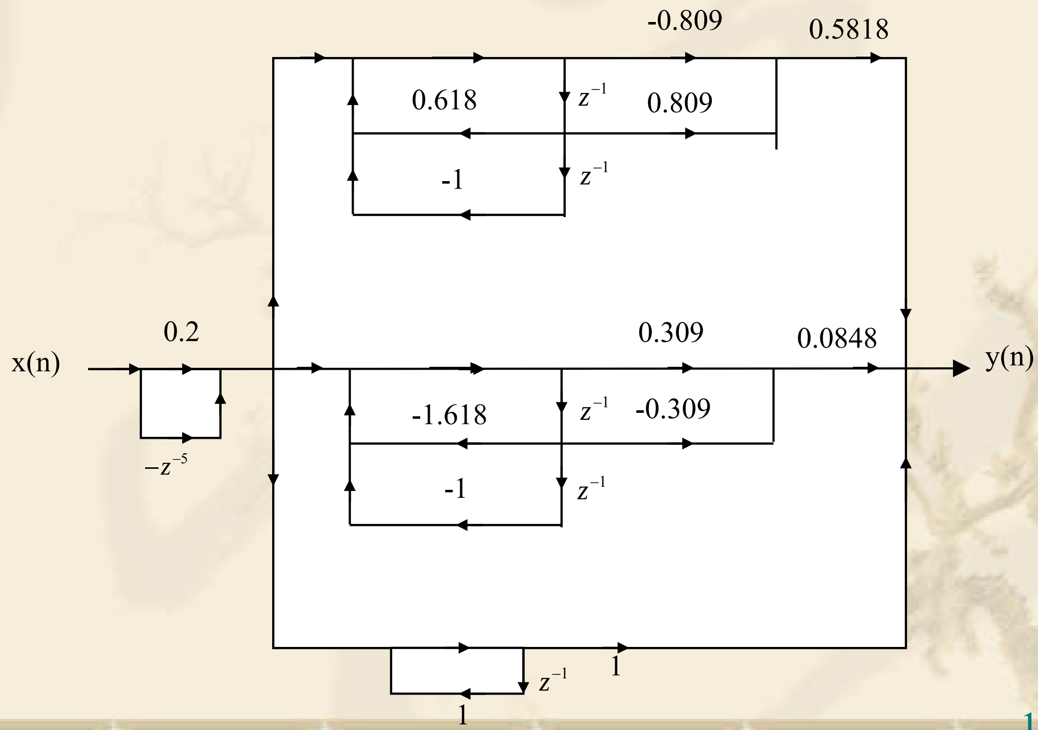
```
% FIR Frequency Sampling Form
%     given h(n)

format short;
h = [1,2,3,2,1]/9;
[C,B,A] = dir2fs(h)

运行结果如下：
C =
    0.5818
    0.0849
    1.0000
B =
   -0.8090    0.8090
    0.3090   -0.3090
A =
    1.0000   -0.6180    1.0000
    1.0000    1.6180    1.0000
    1.0000   -1.0000         0
```

由于 N =5 是奇数，因此，只有 1 个一阶网络，并且 r=1。从而

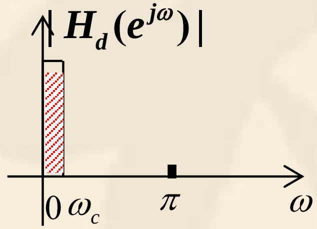
$$H(z)=\frac{1-z^{-5}}{5}\left[0.5818\frac{-0.809+0.809z^{-1}}{1-0.618z^{-1}+z^{-2}}+0.0849\frac{0.309-0.309z^{-1}}{1+1.618z^{-1}+z^{-2}}+\frac{1}{1-z^{-1}}\right]$$

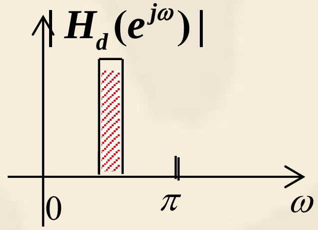


5.6.3 FIR DF 实现结构：频率取样型特点

❶ **缺点：**

- 需要较多的存储器
- 乘法运算量较大
- 结构较复杂



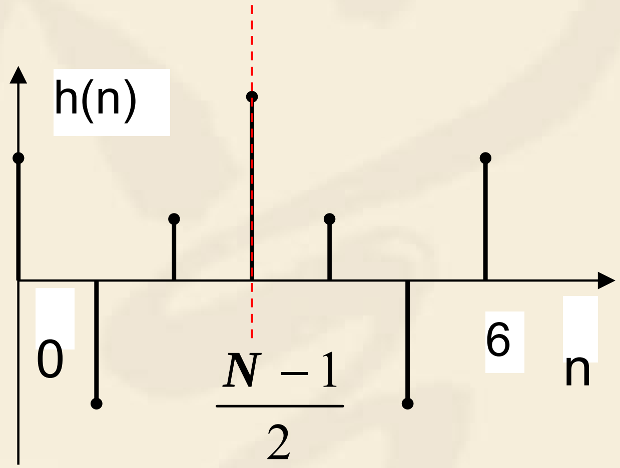


❷ **优点：**

- 在窄带情况下，例如窄带低通或带通滤波器，大部分的频率取样值 **H(k)** 均为 **0**，从而可以减少 **H(k)** 的数量，减少运算量。
- 结构适于模块化，适合于各个子网络 **H(k)** 的时分复用处理；
- 在**FIR DF** 长度相等的情况下，不需要改变整个结构及其它系数，仅需要改变部分系数就可以得到不同的滤波器；
- 并行结构，计算快，时延小。

5.6.4 线性相位 FIR DF 实现结构

线性相移 FIR 滤波器的冲激响应 h(n) 满足偶对称或奇对称，由对称性可将线性相位 FIR 数字滤波器的结构加以简化。



h(n) 为偶对称，N 为奇数

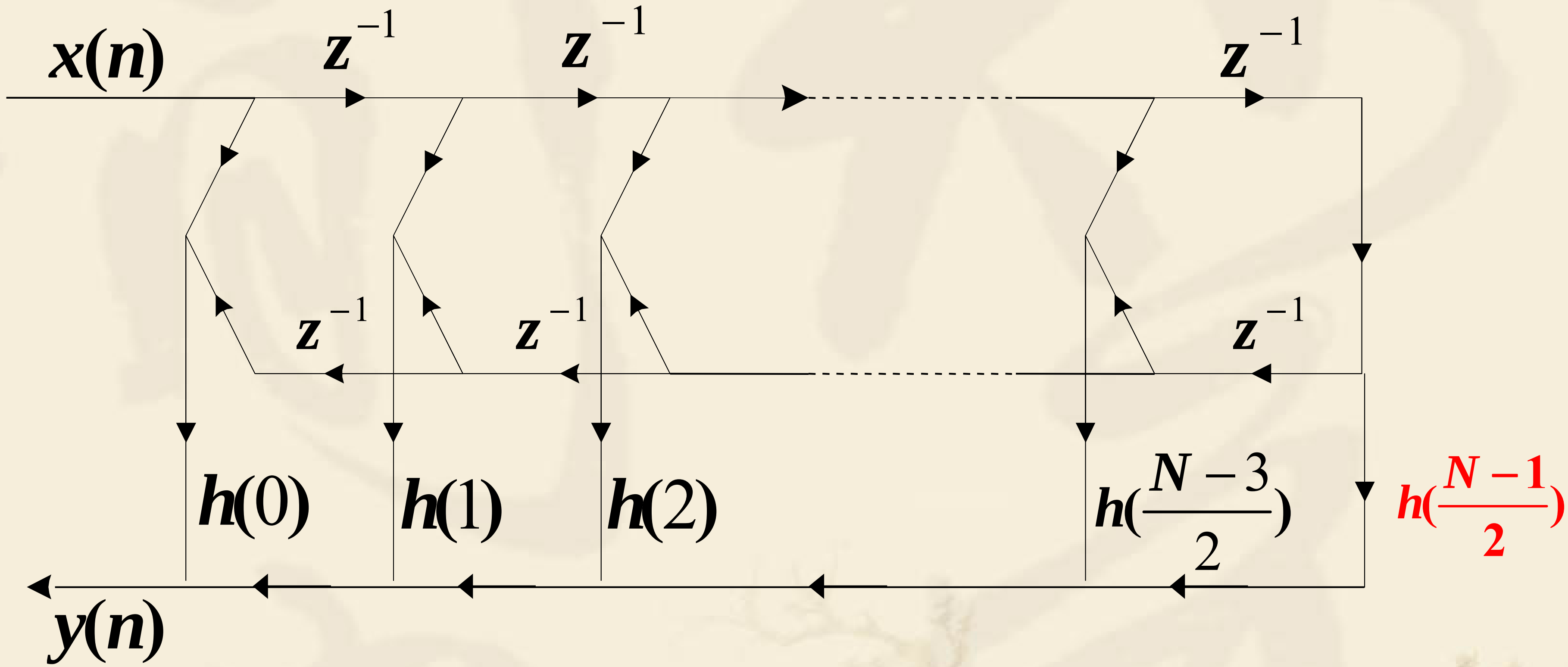
- **h(n) 偶对称，N 为奇数**

$$h(n)=h(N-1-n)$$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)z^{-n}+\sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1}h(n)z^{-n}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}$$

5.6.4 线性相位 FIR DF 实现结构



与直接型结构相比，乘法器少了一半（原来是 先乘后加，现在是先加后乘）。

$$h(n)\cdot z^{-n}+h(n)\cdot z^{-(N-1-n)} \Rightarrow h(n)\cdot(z^{-n}+z^{-(N-1-n)})$$

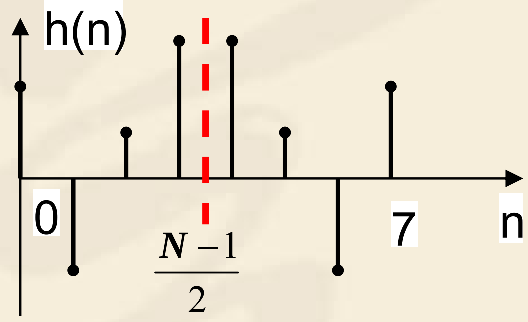
5.6.4 线性相位 FIR DF 实现结构

- **h(n) 偶对称，N 为偶数**　　$h(n)=h(N-1-n)$

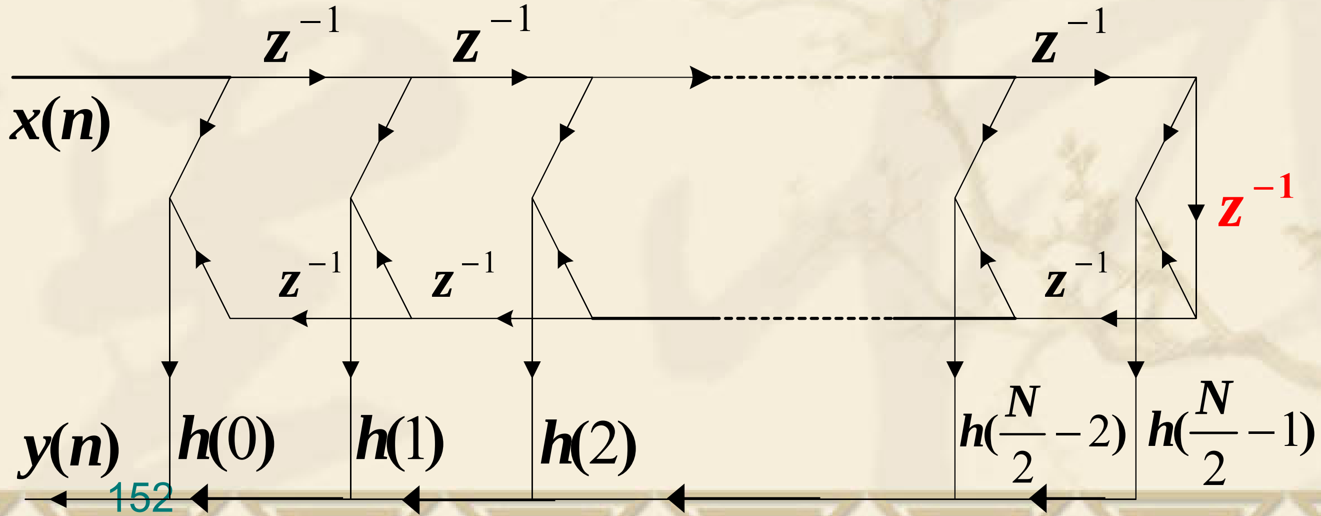
$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N/2-1}h(n)z^{-n}+\sum_{n=N/2}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}h(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{N/2-1}h(N-1-n)z^{-(N-1-n)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}h(n)[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}]$$



h(n) 为偶对称，N 为偶数



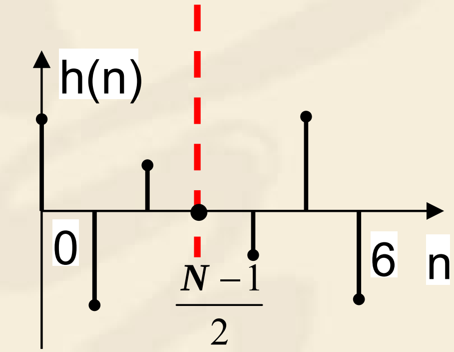
5.6.4 线性相位 FIR DF 实现结构

- **h(n) 奇对称，N 为奇数** $h(n) = -h(N-1-n)$

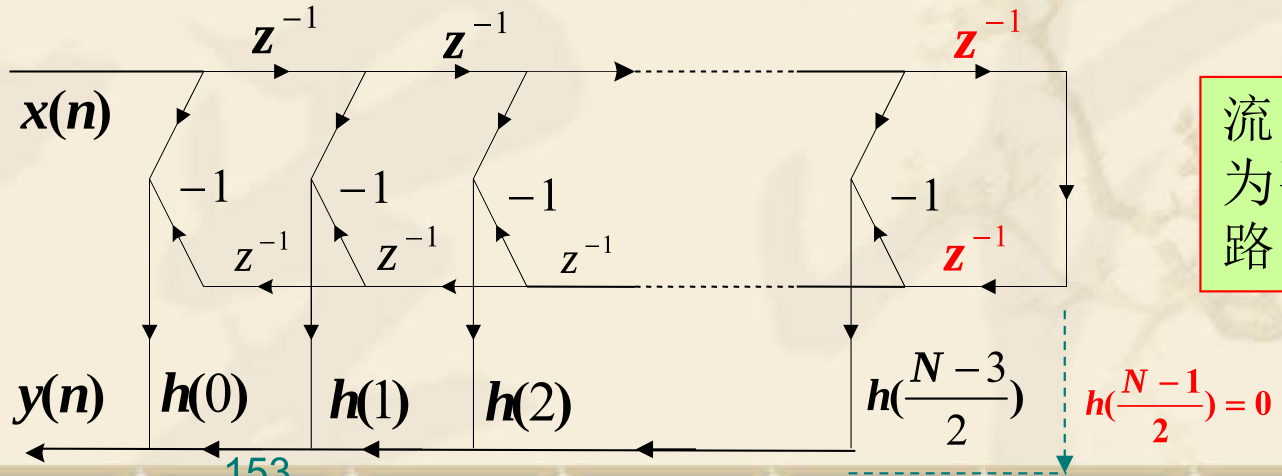
$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(N-1-n)z^{-(N-1-n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)[z^{-n} - z^{-(N-1-n)}]$$



h(n) 为奇对称，N 为奇数



流图是将下面一排变为减号，同时去掉支路 h(N-1)/2

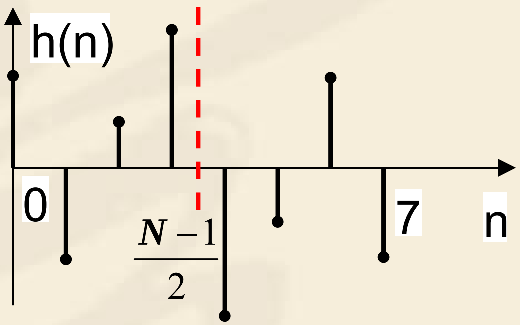
5.6.4 线性相位 FIR DF 实现结构

- **h(n) 奇对称，N 为偶数** $h(n) = -h(N-1-n)$

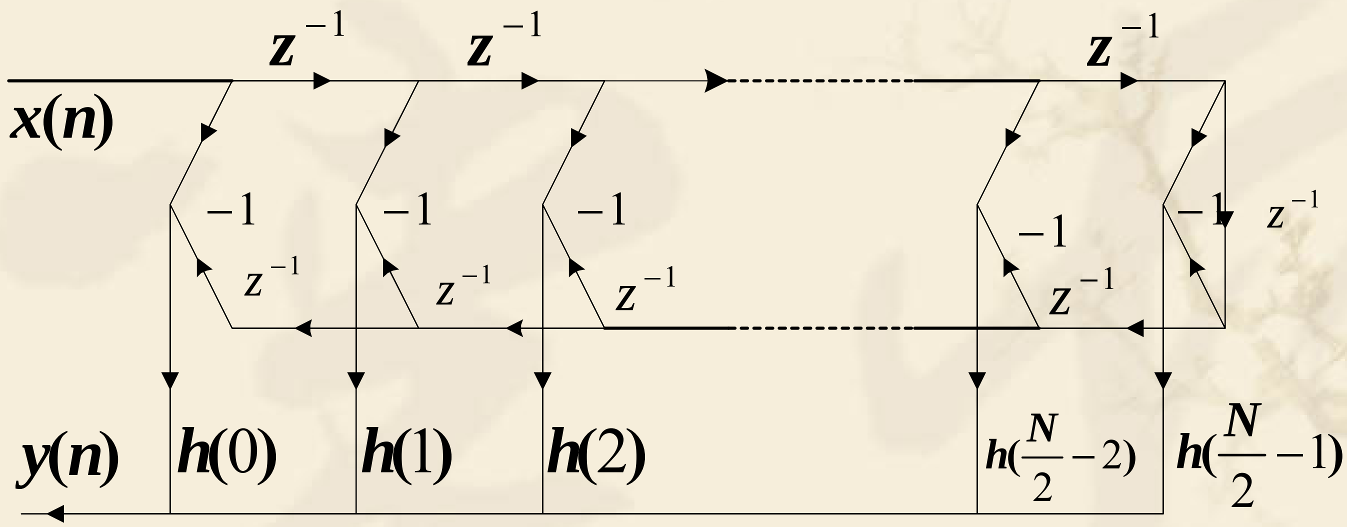
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} h(N-1-n)z^{-(N-1-n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)[z^{-n} - z^{-(N-1-n)}]$$



h(n) 为奇对称，N 为偶数



流图是将偶对称时N为偶数的流图的下面一排变为减号

5.6.5* 格型滤波器结构

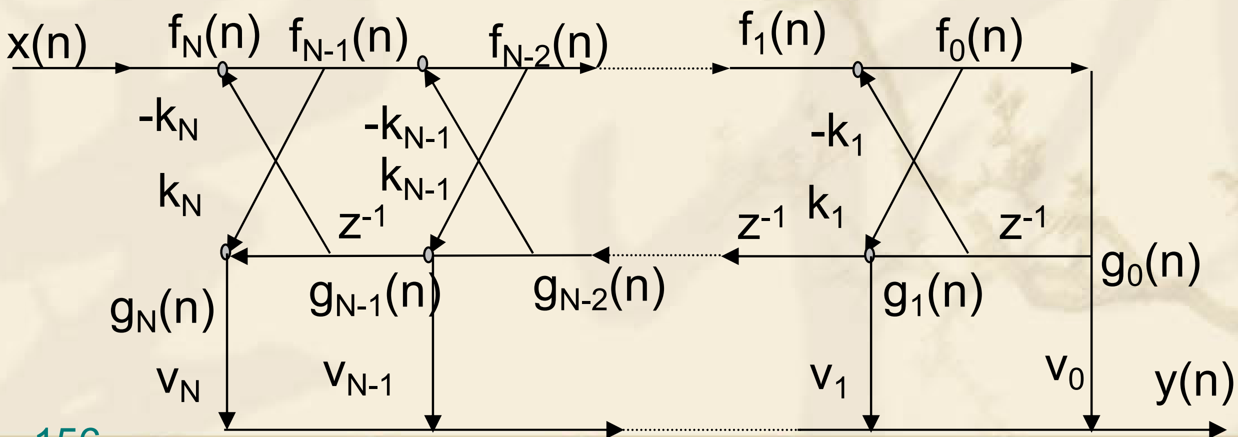
- 格型滤波器
  - 实时性要求比较高的应用中，格型滤波器比其它 FIR 或 IIR滤波器结构更具有优越性（模块化；对系数效应的敏感度低）
  - 应用：广泛应用于数字语音处理和自适应滤波器实现中。
  - FIR 滤波器的格型结构描述的是全零点格型
  - IIR 滤波器描述的是全极点或格型梯形结构

5.6.5* 格型滤波器结构：格型梯形滤波器

- 格型梯形滤波器
  - 一般的 **IIR**滤波器既包含零点，又包括极点，它可用全极点格型作为基本构造模块，以格型结构实现。假定 **IIR** 滤波器的系统函数为：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_M(k)z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_N(k)z^{-k}}=\frac{B_M(z)}{A_N(z)}$$

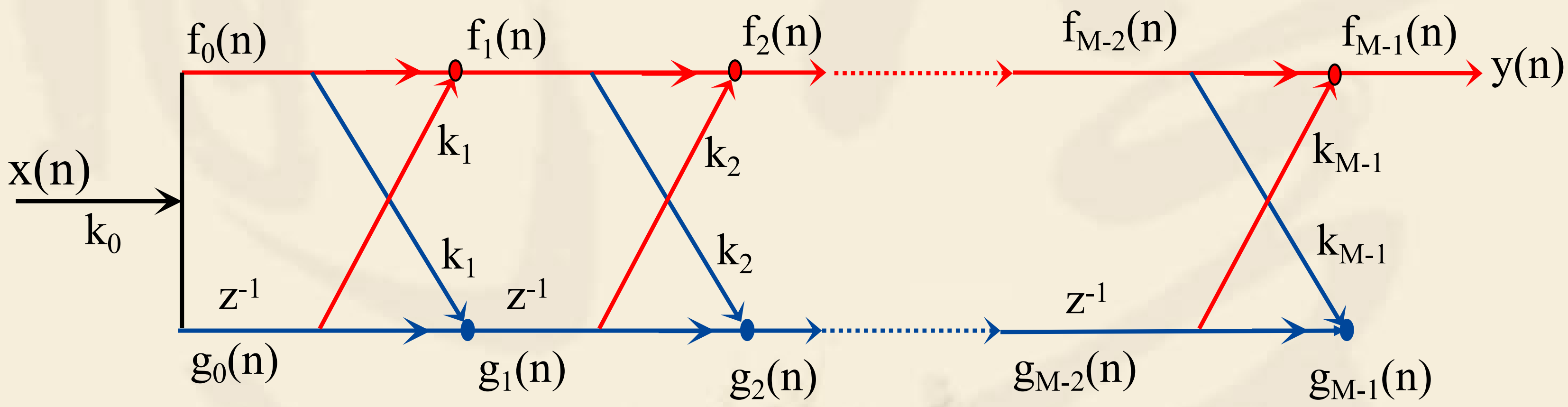
  - 为构造一个格型梯形结构，首先用上式的分母实现全极点格型，然后，增加一个梯形部分。把输出看作 **$\{g_m(n)\}$** 的加权线性组合，其结果为具有格型梯形结构的零点-极点 **IIR** 滤波器。



5.6.5* 格型滤波器结构：全零点格型滤波器

❖ 全零点格型滤波器

- 对于用一组多项式系数 a_m 描述的 （M-1）阶全零点 FIR 滤波器，其 M-1 级格型滤波器结构如下图所示。



- 每一级的输入和输出通过如下的递归关系得到：

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + k_m g_{m-1}(n-1), \qquad m = 1,2,\cdots,M-1$$
$$g_m(n) = k_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1), \qquad m = 1,2,\cdots,M-1$$

其中，参数 k_m 称为滤波器的反射系数，它们是格型滤波器的系数，给定这些反射系数，就可以按上图所示的结构实现格型数字滤波器。

5.6.5* 格型滤波器结构：全零点格型滤波器

- 相应的格型结构的系数可通过如下的递归关系得到：

$$k_n = a_n(n)$$

$$a_{n-1}(m) = \frac{a_n(m) - k_n a_n(n-m)}{1-k_n^2}, \qquad m = 1,2,\cdots,n-1$$

- 如果 $f_m(n)$ 和 $g_m(n)$ 的初始值为滤波器输入 x(n) 的倍数（乘以 k_0），则 M-1 级格型滤波器的输出与（M-1）阶 FIR 滤波器输出一致，即：

$$f_0(n) = g_0(n) = K_0 x(n)$$

$$y(n) = f_{M-1}(n)$$

5.6.5* 格型滤波器结构：全零点格型滤波器

- Matlab 实现
  - 函数 k = poly2rc(a)
    - 输入直接形式的系数 $\{a_n\}$，返回相应的发射系数 k_m。a_n 必须是实数，a_1 不能为零，k 是长度为 M-1 的列矢量。
    - 需要注意的是 poly2rc(a) 函数对所有的系数除以 a_1（以 a(1) 为标准归一化处理），即 $k_0 = a_1$。
    - 滤波器反射系数的大小提供了一个简单的判断滤波器稳定性的方法，若一个多项式相应的所有映射系数均小于 1，则多项式的所有根均在单位园之内，滤波器是稳定的。
  - 函数k = tf2latc(num)
    - 得到格型 FIR 滤波器的反射系数 k，也是以 num(1) 归一化。
  - 函数 a = rc2poly(k)
    - 用来从滤波器的反射系数计算多项式因子。
  - num = latc2tf(k,'fir') 和 num = latc2tf(k)
    - 从反射系数 k 得到该滤波器的直接形式（或传递函数）。
  - [f,g] = latcfilt(k,x)
    - 实现格型滤波器，k 是反射系数，f 是前向格型滤波器结果，g 是反向滤波器输出结果。但需要注意的是最后的结果还要乘以系数 k0。

本章小结

FIR 数字滤波器设计和实现

- 掌握线性相位 FIR 数字滤波器的特点
- 掌握窗函数设计法（矩形窗、汉宁窗、汉明窗）
- 理解频率抽样设计法
- 掌握 FIR 数字滤波器的实现结构