

量子信息基础

# 第七章：量子测量

金潮渊

浙江大学信息与电子工程学院

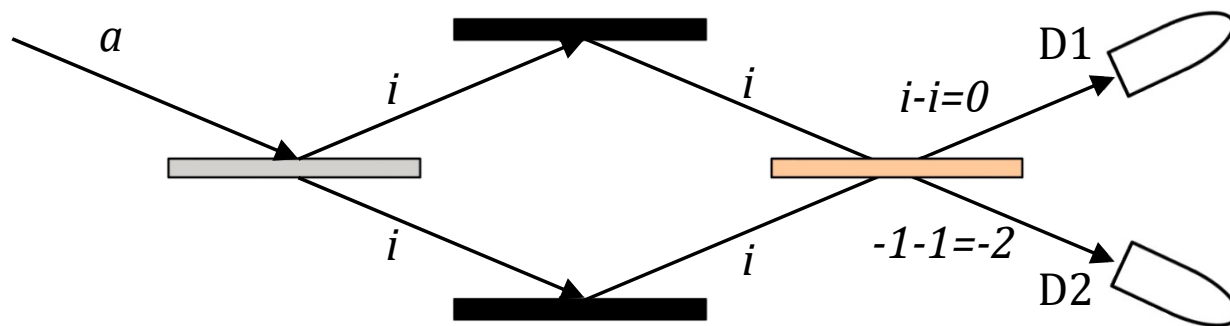


## C7-3 关联光学和量子成像



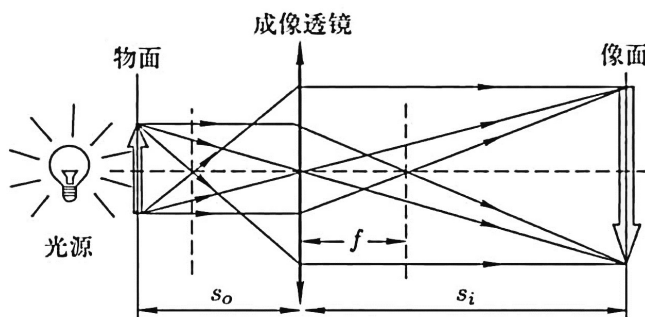
# 课程回顾

- 单个光子入射到半透片，可以看作广义的杨氏双缝实验，也是最简单的“which way”实验或者路径纠缠的量子比特实验。
- 符合测量造成的坍缩，使得两个光子的每个偏振模式都不再守恒，尽管表面上看并不存在改变入射光子偏振状态的作用。因此，量子测量的实验结果不仅仅依赖于初态和相互作用过程，而且依赖于测量方案的选择。不同的测量方案将选定不同的坍缩类型，产生不同的末态，即测量选择了末态！
- 从事后以延迟的方式选择光子路径的实验安排，被称作“延迟选择”。“延迟选择”是由量子非定域性导致的结果。



# 光学成像

- 几何光学已给出物平面和像平面的点对点关系，光被处理为光线，由特殊的传播规律决定成像形式。
- 经典成像理论（物理光学），将光处理为波动（电磁场）。光从物面经由介质空间传播到像面，发生干涉。物面上特定点发出的光，经过光学系统后，其中等光程的分量将到达像面同一点，干涉相长，其余不等光程分量在其他位置相消，也即成像。



$$\frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_o} = \frac{1}{f}$$

物-像满足高斯薄透镜成像公式

- 物-像点对点关系来源：对于完美点对点关系，光强分布可用数学公式描述：

$$I(\rho_i) = \int_{\text{obj}} d\rho_o |A(\rho_o)|^2 \delta(\rho_o + \frac{\rho_i}{m})$$

# 经典成像系统的限制

- 对于有限尺寸圆形透镜，无法得到完美物像关系，退化为点-斑对应关系，上式的delta函数用点扩散函数（艾里斑）取代。非相干光成像（模平方卷积）：

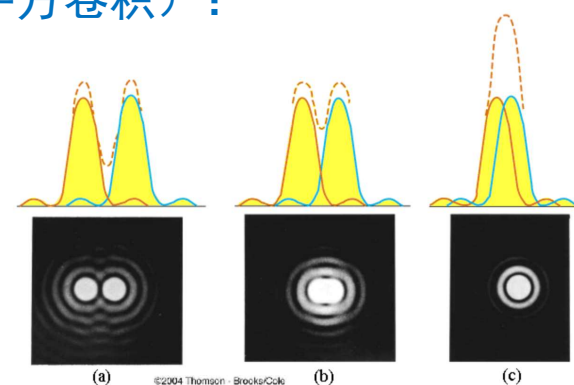
$$I(\boldsymbol{\rho}_i) = \int_{\text{obj}} d\boldsymbol{\rho}_0 |A(\boldsymbol{\rho}_0)|^2 \underset{\text{数值孔径}}{\text{somb}^2\left(\frac{R}{s_o} \frac{\omega}{c} \left|\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}\right|\right)}$$

- 相干光照明（卷积后模平方，与概率幅叠加定理类比）：

$$I(\boldsymbol{\rho}_i) = \left| \int_{\text{obj}} d\boldsymbol{\rho}_0 A(\boldsymbol{\rho}_0) e^{i\frac{\omega}{2cs_o}|\boldsymbol{\rho}_0|^2} \text{somb}\left(\frac{R}{s_o} \frac{\omega}{c} \left|\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m}\right|\right) \right|^2$$

- 点扩散函数决定了点光源在像平面上的最小尺度，决定了成像系统分辨率。Somb函数越窄，系统分辨率越高。（提高频率，缩短波长）物面上两个点源，在像面上的点扩散函数可能相互重叠，其第一极小值不能与另一个斑的极大值重合，可以得到光学系统角度分辨率极限值：

$$\Delta\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$



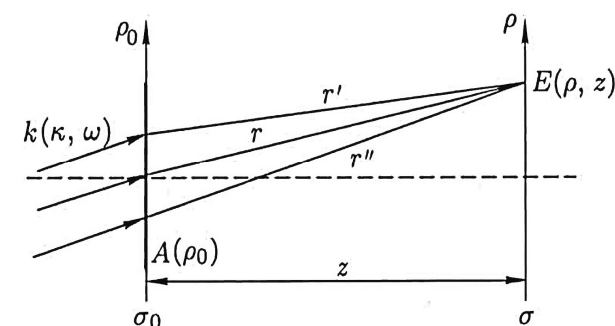
# 纠缠态和偶光子对

- 不能分解为子系统的直积形式的态，称为纠缠态。对于纠缠系统中的单个子体系，单独测量动量或坐标是不确定的，但是如果测量到其中一个子系统的动量或者坐标，那么另一个系统的动量或者坐标随即确定，无论相距多远。处于纠缠态的一对光子，称作偶光子（biphoton）。不同于双粒子，后者可以处于直积态、纠缠态、随机态等。

$$|\Psi\rangle = \Psi_0 \sum_{s,i} \delta(\omega_s + \omega_i - \omega_p) \delta(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}_i) |0\rangle$$

- 式中 $\omega_j$ ， $\mathbf{k}_j$ 分别是信号光、闲频光或泵浦光的频率、波矢。  
当 $\omega_s = \omega_i = \frac{1}{2}\omega_p$ 时，称为简并参量下转换（SPDC）。偶光子的空间关联函数：

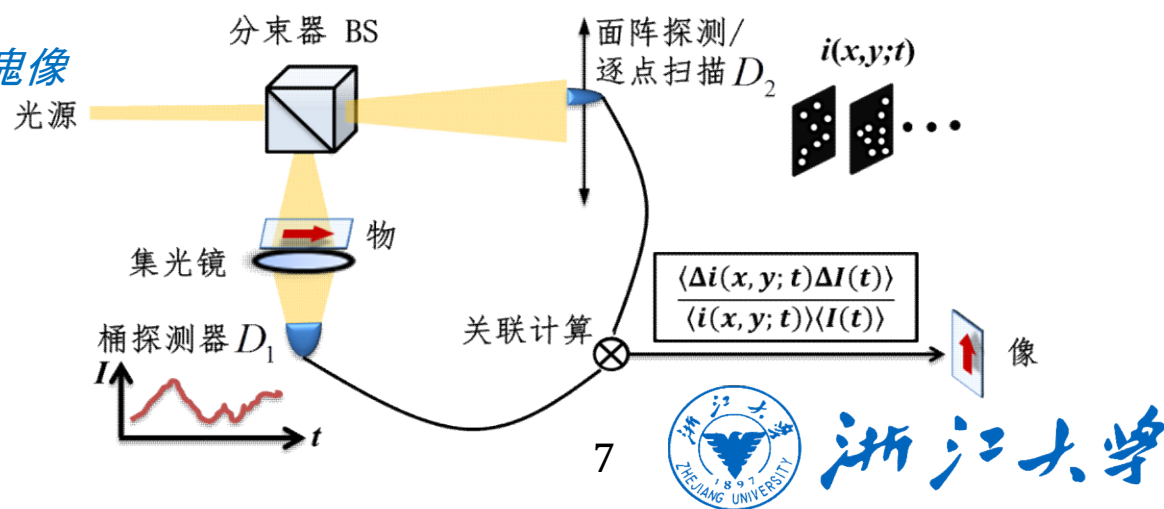
$$\Psi(\rho_1, z_1; \rho_2, z_2) = \Psi_0 \int d\mathbf{k}_s d\mathbf{k}_i \delta(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i) * g(\mathbf{k}_s, \omega_s; \rho_1, z_1) * g(\mathbf{k}_i, \omega_i; \rho_2, z_2)$$



G: 从物面传播到做测量的面的格林函数（光学传递函数，略）

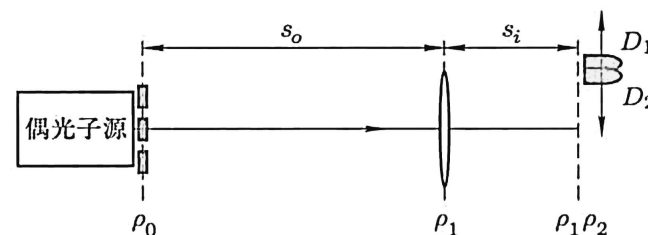
# 量子关联成像(ghost imaging)

- 量子关联成像（鬼成像）是一种非直接成像方式，间接重构出图像。
- 鬼成像的突出特性是能够“离物成像”：成像将照明光场分为两路，一路经过物体后用没有空间分辨率的桶探测器收集，另一路不与物体接触，直接由面阵探测器采集，两路测量结果再经关联计算重构出物体图像。这两路结果中的任一路都无法单独重构图像，而关联后就能得到正确结果，这种出人意料的成像方式因之得名“鬼成像”。
- 鬼成像并不一定需要使用具有纠缠性质的量子光源，不使用量子光源的鬼成像实验是否蕴含非局域量子关联，至今尚无定论。从实用角度而言，鬼成像已被实证具有如下特征：
  - 可以突破经典衍射极限，提高成像分辨率
  - 可以用非局域方式生成经典方法无法看到的鬼像
  - 具有抗扰动性



# 偶光子成像-实像面

- 偶光子成像与经典成像不同之处：
  - 经典光源替换为纠缠光子源
  - 对光强分布的测量改为对 $G^2(r_1, t_1, r_2, t_2)$ 的联合测量



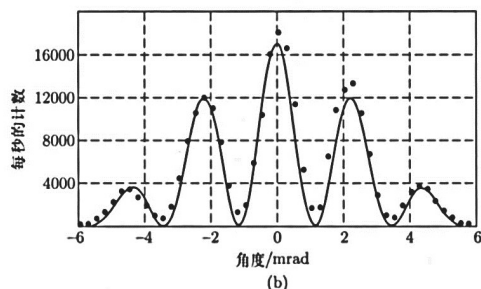
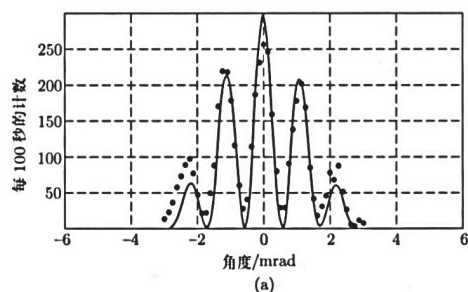
- 将光学成像装置对应的格林函数代入P5的偶光子关联函数中（假设 $s_o$ ,  $s_i$ 满足物像关系），并假设发生简并参量下转换，可推导得到：

$$G^2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}) \propto \left| \int_{\text{obj}} d\boldsymbol{\rho}_o A^2(\boldsymbol{\rho}_o) e^{i \frac{\omega}{2c} |\boldsymbol{\rho}_o|^2} \text{somb} \left( \frac{R}{s_o} \frac{2\omega}{c} \left| \boldsymbol{\rho}_o + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{m} \right| \right) \right|^2$$

- 在像平面得到物体相干成像，放大倍数为 $m$ 。点扩散函数由信号光+闲频频率（=泵浦光频率）决定，因此比单独用信号或者闲频光照射物体，可得到提升1倍的空间分辨率。



# 偶光子成像-傅里叶面



- 如果在傅里叶面做相关测量，得到的条纹间距是单独用信号或者闲频光照明时的1/2。

$$G^2(\rho, \rho) \propto \left| \int_{\text{obj}} d\rho_o A^2(\rho_o) e^{-i\frac{\omega_p}{cf}\rho_o\rho} \right|^2 \propto \left| \mathcal{F}\left[\frac{\omega_p}{cf}\rho\right] \{A^2(\rho_o)\} \right|^2$$

物体孔径的傅里叶变换

- D'Angelo等人的实验是历史上首次演示量子光刻原理，他们测量的是傅里叶变换面上的符合计数强度随空间的变化，可以证明，再使用一个成像透镜，将在像面上的到两倍分辨率的像（双缝尺寸整体/2）
- 偶光子成像能突破衍射极限的关键在于：产生联合探测的双光子振幅叠加，也即两路格林函数的乘积。在‘量子光刻’实验中，光子对总是从光源的同一个维持出射，透过同一条狭缝，在同一个空间位置被测量。因此累计的相位差是单独一个光子的2倍。偶光子衍射（干涉）决定成像分辨率。
- 将偶光子态拓展到N光子纠缠态，将使点扩散函数的空间尺寸缩减到单个光子时的1/N倍，原则上可以实现超分辨。

# 鬼成像(1): 步骤

- Pittman等人于1995年成功演示了SPDC偶光子态的非局域坐标-坐标和动量-动量关联测试，起初衷是研究偶光子对在坐标和动量上的EPR关联。实验装置如下图所示：

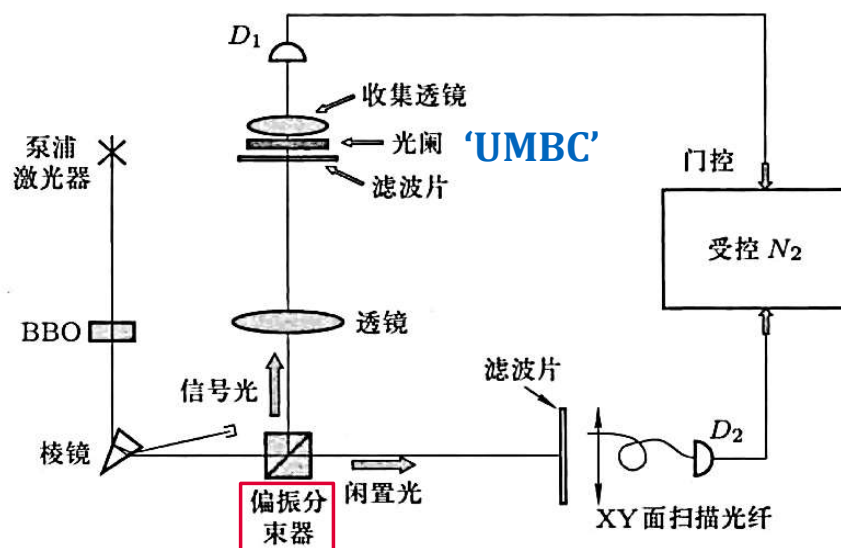
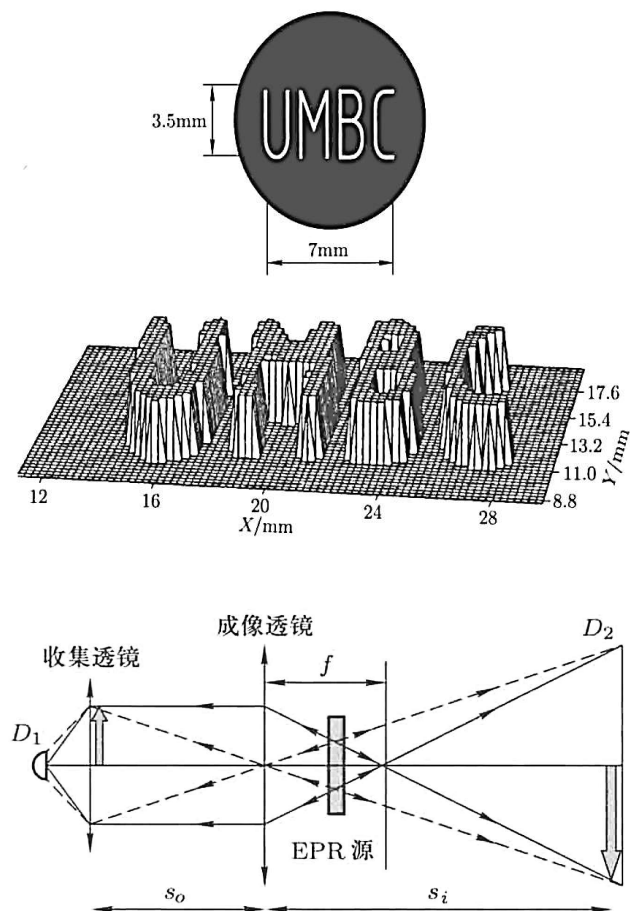


图 11.2.1 “鬼”成像的实验装置示意图.

- Pump 光入射到BBO晶体，产生一堆正交偏振信号，频率近简并； $\omega_s \cong \omega_i \cong \omega_p/2$
- 利用棱镜过滤信号光；
- 利用偏振分束器分开信号和闲频光；
- 信号通过 $f=400$ 的透镜后，照射到透过型模板（物）上；
- 通过开孔的信号光被桶探测器（ $D_1$ +透镜）收集；
- 闲频光实用可以横向移动的单点探测器（ $D_2$ +扫描光纤）收集；
- 对 $D_1$ 和 $D_2$ 的信号进行符合计数。

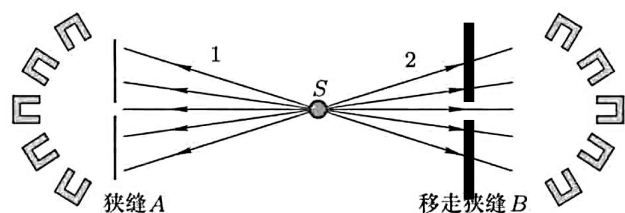
## 鬼成像(2): 结果



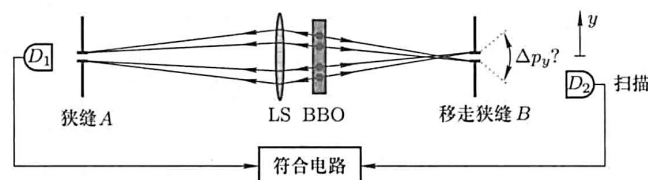
- 上图为放置在信号光路的实际开孔物体“UMBC”（马里兰巴尔的摩），像尺寸3.5\*7mm；
- 中图为关联计数随闲频光路扫描位置的变化关系，尺寸为7\*14mm；对信号或者闲频光单独测量，D2在面内几乎是常数；
- 下图为鬼成像装置的展开图：以非线性晶体输出面为折返点，将实验光路展开；
- D2观测结果相当于在D1处实用一个点光源反向照明，非线性晶体输出面用反射镜取代，在光纤处得到的经典像。物像关系满足高斯薄透镜成像公式。
- 物平面上的几何光点来自于双光子光源所有可能的双光子振幅交点；像平面是另一个可能的交点。物/像平面上的光子信号不仅具有成像共轭性，更具有点对点的时间、空间关联性。

$$G^2(\rho, \rho) \propto \left| \int_{\text{obj}} d\rho_o A(\rho_o) \delta\left(\rho_o + \frac{\rho_2}{m}\right) \right|^2 = \left| A\left(-\frac{\rho_2}{m}\right) \right|^2$$

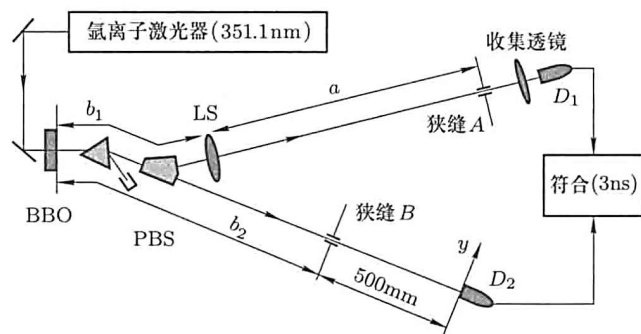
# 鬼成像(3): 测不准原理



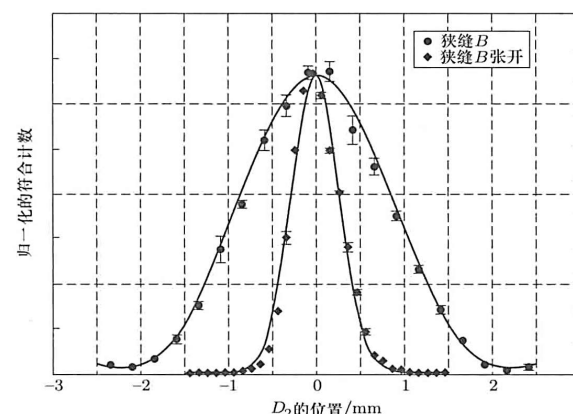
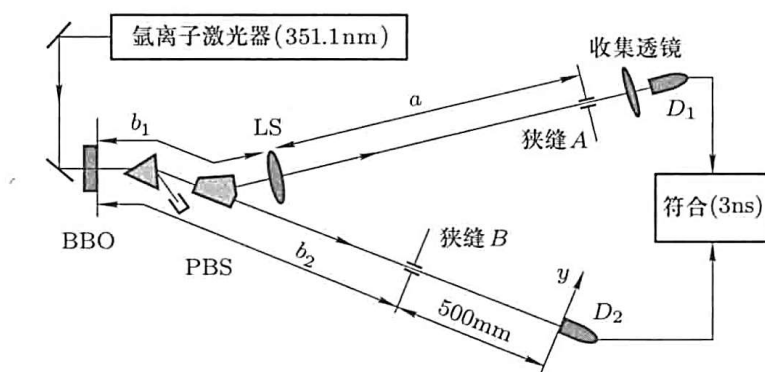
- Popper在1930s提出假想实验，认为通过对偶粒子纠缠系统的关联测量，粒子可以同时具有确定的位置和动量。
- 当狭缝A和B同时存在时，粒子1和2分别在AB处发生衍射，狭缝越窄，衍射越明显；当B去掉时，粒子2的位置仍然比较确定，是否会引起更大的 $\Delta p_y$ 。如果不会，那么意味着对于粒子2， $\Delta p_y * \Delta y < h$ ，违反测不准原理。



- 1998年Kim等利用偶光子鬼成像装置检验了Popper的思想实验。
- 泵浦光束较宽，强化相位匹配条件。狭缝AB满足鬼成像物像关系。
- 测量1：狭缝A和B的宽度都设置为0.16mm，扫描y，D2呈现典型的衍射图案，满足 $\Delta p_y * \Delta y = h$ ;
- 测量2：狭缝B敞开，扫描y，结果比测量1窄的多。违背了不确定性原理？NO!
- 注意：在整个扫描范围内，D2的计数速率接近为常数。



## 鬼成像(4): 测不准原理



- 当 $A=0.16\text{mm}$ ,  $B=\infty$ 时,  $D1$ 和 $D2$ 的关联测试结果仍然可以由类似鬼成像的公式给出, 但是需要加入从狭缝 $B$ 所在位置到 $D2$ 处的自由传播。相当于在观察狭缝 $A$ 的模糊的双光子像。计算结果与实验吻合。
- 注意, 基于偶光子的关联测量的量子理论, 给出了与实验吻合的结果, 也即  $\Delta p_y * \Delta y < h$ 。
- 测量结果时基于光子1和2的联合测量。观测2的 $\Delta p_y$ 较小的结果, 必须以 $D1$ 探测到光子1为前提。显然 $D1$ 是否探测到信号, 对 $D2$ 结果被‘挑选’出来是有影响的。
- 单量子系统必须遵循不确定性关系, 但是纠缠偶粒子系统的行为不遵从单粒子规律, 这是产生悖论的根源所在。



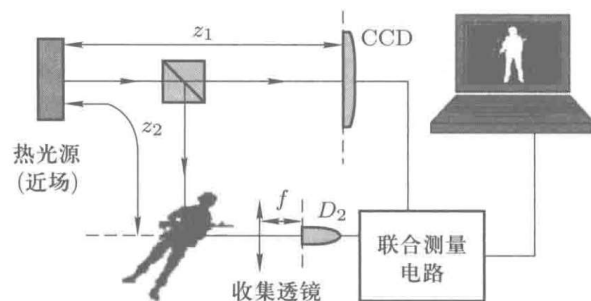
# 热光鬼成像

- 在偶光子鬼成像的实验演示10之后，Valencia等人发现这种点对点成像关系不是纠缠光源的特有属性。在混沌热光中随机分布的任意光子对，也可以呈现这种特性。该类实验被称作热光鬼成像。混沌热光的空间二阶关联函数如下：

$$g^2(\rho_o, \rho_i) = 1 + \delta(\rho_o, \rho_i)$$

- 式中 $\rho_o, \rho_i$ 分别是物平面和像平面的横向坐标。光源到像平面、物平面的直接距离相等。
- 关联测量的结果正比于孔径函数（物）与二阶关联函数的卷积：

$$\int_{\text{obj}} d\rho_2 |A(\rho_2)|^2 g^2(\rho_1, \rho_2) = 1 + |A(\rho_1)|^2$$



$$|A(\rho_2)|^2$$

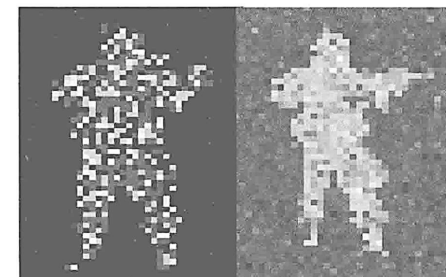
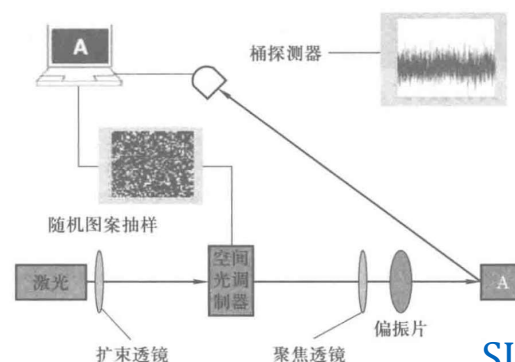
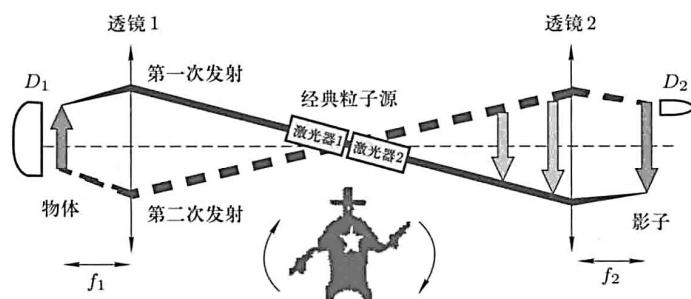


$$1 + |A(\rho_1)|^2$$

显然**bunching**特征越强，热光鬼成像的**对比度越高**。理想情况下当其中一个光子到达 $D_2$ ，预示了在CCD上某处，探测到另一个光子的概率翻倍。

# 鬼成像的经典模拟

- 偶光子鬼成像和热光鬼成像都利用了光源自身的二阶关联统计特性，该特性非纠缠源独有，个人认为本质上是量子的。
- 对于偶光子或者热光，光子可以在任何位置被探测到，也即产生时未知去往哪里。属于非确定性光源。
- 我们可以制备人造经典光源，赋予其物-像一一对应关系。该类光源在发出时就确定了传播到哪里，系确定性光源。以下举几个例子：



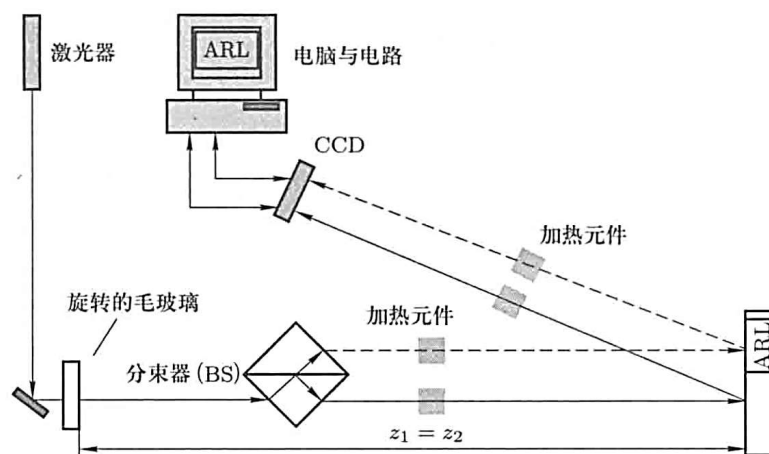
SLM的作用是控制单个照明像素

- 关联激光束：一同旋转的背对背激光束，两束激光反向传播。
- $D_1$ 没有空间分辨能力， $D_2$ 进行扫描。 $D_1D_2$ 做关联测试。

- 计算鬼成像：实用确定性光源，因此可以取消关联测试。
- 光子产生时，指定其传播到物体上的指定点，记录桶探测器的强度。
- 多次测量后，统计上可以估算处物体的反射随空间的函数。

# 鬼成像的抗扰动特性

- 在光程中引入的涨落型折射率扰动，不会影响鬼成像的质量。在卫星成像、遥感等领域，可以克服大气扰动的影响。



$$G^2(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{\rho}_2, z_2) = \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \left| \frac{1}{\sqrt{2}} [g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, \mathbf{k}) e^{i\phi_2} g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, \mathbf{k}') e^{i\phi_1} + g_2(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, \mathbf{k}') e^{i\phi_2} g_1(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, \mathbf{k})] e^{i\phi_1} \right|^2$$

双光子振幅干涉不受扰动影响

- 在典型热光无透镜鬼成像装置中引入加热元件模拟折射率扰动。



# 小结

---

- 量子成像技术是通过纠缠光子系统和混沌热辐射的非平庸二阶或高阶相干测量，复制物像，是物像空间的点对点成像关联的结果。
- 本节主要介绍了两类鬼成像。包括利用了偶光子态非局域点对点关联和热光的二阶关联

$$\left| \delta \left( \rho_o + \frac{\rho_i}{m} \right) \right|^2 \quad |1 + \delta (\rho_o - \rho_i)|^2$$

- 量子成像具有三个奇异特性：1.突破衍射极限；2.以非局域方式复制物像关系；3.抗扰动。都来源于多光子干涉。
- 本节还分析了Popper的假想实验。利用鬼成像可以验证Popper的假想实验，Popper的预测结果与实验相同，也与量子力学的预测相同。产生佯谬的根源在于他将单粒子的测不准原理直接套用在双粒子系统上。



# 参考文献

---

- 关联光学和量子成像的内容主要参考：
  - 史砚华著，许平译，量子光学导论—单光子和双光子物理，高等教育出版社（2016）. 第11章。
  - 成像理论，光学传播函数，量子纠缠和相干理论等：第1-4，9-10章

