第七次课作业

15. 设平稳过程 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 的谱密度为 $S_X(\omega) = \dfrac{1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}$ ，求 **{X(t)}** 的自相关函数

解

$$S_X(\omega) = \frac{1}{w^4 + 5w^2 + 6} = \frac{1}{w^2+2} - \frac{1}{w^2+3}$$

$$\therefore\ R_X\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{w^2+2} - \frac{1}{w^2+3})e^{iw\tau}d\tau = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}|\tau|} - \frac{\sqrt{3}}{6}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

17. 设 $X(t) = A\cos t + B\sin t + C, -\infty < t < \infty$，其中**A**，**B**，**C**相互独立且同服从区间 $[-1,1]$ 上的均匀分布

1.证明$\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是平稳过程；

2.计算 $\langle x(t)\rangle$ ，判断 $X(t)$ 的均值是否具有各态历经性，说明理由；

3.求$\{X(t)\}$ 的谱密度 $S_X(\omega)$.

解

(1)

$$\mu_x(t) = E(x(t)) = \cos tE(A) + \sin tE(B) + E(0)$$

$\because A, B, C$ 相互独立且同服从区间 [-1,1] 上的均匀分布

$\mu_x(t) = 0$ 为常数

$$R_X(\tau) = E(X(t)X(t+\tau)) = E((A\cos t + B\sin t + C)(A\cos(t+\tau) + B\sin(t+\tau) + C))$$

$$= E(A^2\frac{\cos\tau}{2} + B^2\frac{\cos\tau}{2} + C^2)$$

$$E(A^2) = D(A) + E^2(A) = D(A) = \frac{1}{3}$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{3}(\cos\tau + 1)$$

$\therefore \{X(t)\}$ 是平稳过程

(2)

$$\langle X(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(A\cos t+B\sin t+C)dt=C$$

$P(\langle X(t)\rangle=0)=0\neq 1$，均值不具有各态历经性

(3)

$$R_X(\tau)=\frac{1}{3}(\cos\tau+1)=\frac{1}{6}(e^{i\tau}+e^{-i\tau})+\frac{1}{3}$$

$$S_X(w)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-iw\tau}d\tau=\frac{\pi}{3}(\delta(w-1)+2\delta(w)+\delta(w+1))$$

18.已知平稳过程 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 的谱密度如下，求$\{X(t)\}$ 的自相关函数

$$S_X(\omega)=\begin{cases}2\delta(\omega)+1-|\omega|, & |\omega|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(w)e^{iw\tau}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}(\int_{-1}^{1}2\delta(w)e^{iw\tau}dw+\int_{-1}^{1}e^{iw\tau}dw-\int_{-1}^{0}(-w)e^{iw\tau}dw-\int_{0}^{1}2we^{iw\tau}dw)$$

$$=\frac{1}{\pi}[1+\frac{2\sin^2(\frac{\tau}{2})}{\tau^2}]$$

20. 设 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 是均值为零的平稳过程， $Y(t)=X(t)\cos(t+\Theta)$，其中$P(\Theta=\frac{\pi}{4})=P(\Theta=-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，且 $\{X(t)\}$ 与 Θ 相互独立，记 $\{X(t)\}$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)$，谱密度为 $S_X(\omega)$，证明：

1.$\{Y(t);-\infty<t<\infty\}$ 是平稳过程，其自相关函数 $R_Y(\tau)=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos\tau$；

2.$Y(t)$ 的谱密度为 $S_Y(\omega)=\frac{1}{4}[S_X(\omega-1)+S_X(\omega+1)]$.

解

(1)

$$\mu_y(y)=E(y(t))=E(X(t)\cos(t+\theta))=0$$

$$R_Y(\tau)=E(X(t)\cos(t+\theta)X(t+\tau)\cos(t+\theta+\tau))=R_X(\tau)\cdot\frac{\cos\tau}{2}$$

$\therefore\{Y(t)\}$ 是平稳过程

(2)

$$S_Y(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau)e^{iw\tau}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2}R_x(\tau)\cdot\frac{e^{i\tau}+e^{-i\tau}}{2})e^{iw\tau}dw$$
$$= \frac{1}{4}(S_X(w-1)+S_X(w+1))$$

22. 设平稳过程$X(t)=\alpha\cos(t+\Theta)$, $Y(t)=\beta\cos(t+\Theta)$, $-\infty<t<\infty$，其中α, β 均为正常数，Θ 服从 $(0,2\pi)$ 上的均匀分布，求互相关系数 $R_{XY}(\tau)$ 和互谱密度 $S_{XY}(\omega)$

解

$$R_{XY}(\tau) = E(X(t)X(t+\tau)) = E(\alpha\cos(t+\theta)\beta\cos(t+\tau+\theta))$$
$$= \alpha\beta E(\cos(t+\theta)\cos(t+\theta+\tau)) = \alpha\beta\cdot\frac{\cos\tau}{2}$$

$$S_{XY}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{iw\tau}d\tau = \frac{1}{2}\alpha\beta\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2}(e^{i\tau}+e^{-i\tau}))e^{iw\tau}d\tau$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\alpha\beta\cdot[\delta(w-1)+\delta(w+1)]$$