第八周作业

第五章 根轨迹分析法 习题五 P.202-205

5-8；5-9；5-10； 5-11； 5-12； 5-14。

5-8 设单位负反馈控制系统的开环传递函数如下，要求：

(1) 确定 $G(s)=\dfrac{K^*(s+z)}{s^2(s+10)(s+20)}$ 产生纯虚根为 $\pm j1$ 的 z 值和 K^*值；

(2) 概略绘出 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$ 的闭环根轨迹图（要求确定根轨迹的分离点、起始角和与虚轴的交点）。

解：

（1）该系统的闭环特征方程为：

$$s^4+30s^3+200s^2+K^*s+K^*z=0$$

将系统纯虚根 $\pm j1$ 代入闭环特征方程可得：

$$\begin{cases}1-j30-200+jK^*+K^*z=0\\1+j30-200-jK^*+K^*z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K^*=30\\z=\dfrac{199}{30}\end{cases}$$

（2）

① 系统无开环有限零点，系统的开环有限极点为：$p_1=0$，$p_2=-1$，$p_3=-3.5$，$p_{4,5}=-3\pm j2$

② 实轴上的根轨迹区间为：[-∞, -3.5]，[-1 0]

③ 根轨迹渐近线有 n-m=5 条，根轨迹渐近线与实轴的交点为：$\sigma_a=\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}p_i=-2.1$，与实轴的交角为：$\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}=\dfrac{(2k+1)\pi}{5}=\pm36°,\pm108°,180°$

④ 根轨迹的分离点方程：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{d+3.5}+\dfrac{1}{d+3+j2}+\dfrac{1}{d+3-j2}=0$，用试探法求得分离点为：$d\approx-0.4$，分离角为：$\dfrac{(2k+1)\pi}{l}=\pm\dfrac{\pi}{2}$

⑤ 根轨迹的起始角：

$$\theta_{p_4}=180°+(-\sum_{\substack{j=1\\j\neq4}}^{5}\angle(p_4-p_j)=180°-(146°+136°+76°+90°)=-268°,\quad \theta_{p_5}=268°$$

⑥ 根轨迹与虚轴的交点：系统闭环特征方程为

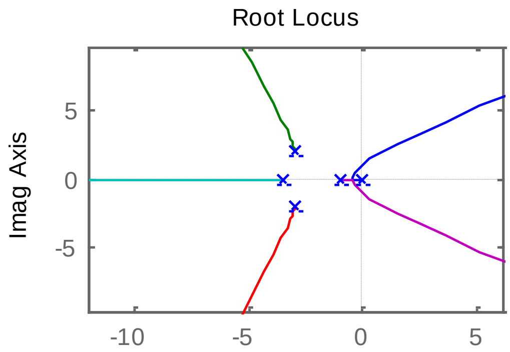
$$D(s)=s^5+10.5s^4+43.5s^3+79.5s^2+45.5s+K^*=0$$

将 $s=j\omega$ 代入，并使 $\mathrm{Re}[D(j\omega)]=0,\mathrm{Im}[D(j\omega)]=0$，得

$$\begin{cases}\omega_1=0\\K^*=0\end{cases}\quad\begin{cases}\omega_{2,3}=\pm1.034\\K^*=73.04\end{cases}\quad\begin{cases}\omega_{4,5}=\pm6.514\\K^*=-15530\end{cases}$$

因为$\omega=\omega_{4,5}$时，K*<0，所以$\omega_{4,5}$不是所求根轨迹与虚轴的交点，根轨迹和虚轴的交点为 ω_1 和 $\omega_{2,3}$。

系统的闭环根轨迹图如图所示：



5-9 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为：$G(s)=\dfrac{K(1-s)}{s(s+2)}$，试绘制其根轨迹图，并求出使系统产生重实根和纯虚根的 K 值。

解：

开环零点：$z_1=1$，开环极点 $p_1=0$，$p_2=-2$

因为开环传递函数分子的最高次幂的系数为负，所以其根轨迹图为零度根轨迹。

（1） 实轴上的根轨迹：[-2 0]，[1 ∞]

（2） 渐近线夹角：0 º

（3） 根轨迹的分离点 d：$\dfrac{1}{d-1}=\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}$ $\quad d=1\pm\sqrt{3}$ $\quad d_1=2.732\ d_2=-0.73$

分离角：$\pm\dfrac{\pi}{2}$

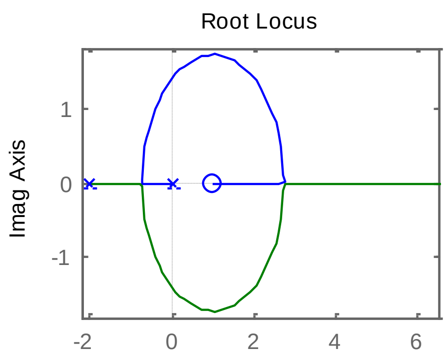
（4） 根轨迹与虚轴的交点：

闭环系统特征方程：$s^2+(2-K)s+K=0$，将 $s=j\omega$ 代入闭环系统的特征方程，得：

$$\begin{cases}K=\omega^2\\(2-K)\omega=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\omega=0\\K=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{2}\\K=2\end{cases}$$

所以系统产生纯虚根的 K 为：$K^*=2$

系统产生重实根的 K 为：$K_1=\dfrac{|d_1||d_1+2|}{|d_1-1|}=0.536\quad K_2=\dfrac{|d_2||d_2+2|}{|d_1-1|}=7.464$



5-10 设系统开环传递函数为$G(s)=\dfrac{30(s+b)}{s(s+10)}$，试画出 b 从零变到无穷时的根轨迹图。

解：系统闭环传递函数的特征方程为：$D(s)=s^2+40s+30b=0$，进行等效变换

$$1+\frac{30b}{s(s+40)}=0$$

等效开环传递函数为：$G_1(s)=\dfrac{30b}{s(s+40)}$

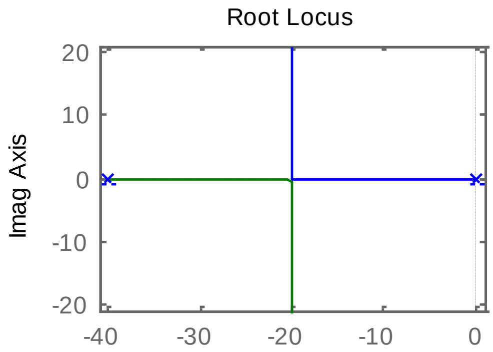
无开环有限零点，开环有限极点：$p_1=0,\ p_2=-40$

实轴上的根轨迹为：[-40, 0]

根轨迹有 2 条渐近线，$\sigma_a=\dfrac{-40}{2}=-20$，$\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}=\pm\dfrac{\pi}{2}$

根轨迹的分离点 d：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+40}=0$，d= -20，分离角 ±90 °

根轨迹图如图所示：



5-11 设控制系统如图 5-42 所示。

(1) 绘制系统的根轨迹；

(2) 用根轨迹法确定使系统稳定的 K 取值范围；

(3) 使系统阶跃响应不出现超调的 K 的最大值。

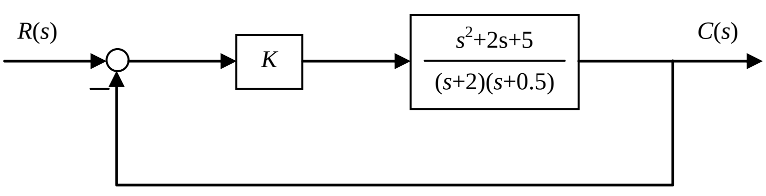


图 5-42 题 5-11 控制系统示意图

解：1）由系统结构图求出系统的开环传递函

$$G(s)H(s)=\frac{K(s^2-2s+5)}{(s+2)(s-0.5)}=\frac{K[(S-1)^2+4]}{(s+2)(s-0.5)}$$

（1）$G(s)H(s)$ 中开环极点：$s_1=-2 \qquad s_2=0.5$

开环零点：$s_1 = 1+2j \qquad s_2 = 1-2j$；

（2）根轨迹关于实轴对称，实轴上的根轨迹区间为[-2,0.5];

（3）趋向无穷远处根轨迹数为：2－2＝0;

（4）根轨迹的渐近线有：0 条；

(5)零点处的入射角为：

$$\phi_{z1} = 180^\circ - 90^\circ + arctg\frac{2}{0.5} + arctg\frac{2}{3} = 90° + 75.96^\circ + 33.69^\circ = -160.35^\circ$$

$$\phi_{z2} = 180^\circ + 90^\circ - arctg\frac{2}{0.5} - arctg\frac{2}{3} = 270° - 75.96^\circ - 33.69^\circ = 160.35^\circ$$

（6）与实轴的分离点与会合点

$$b(s)\frac{da(s)}{ds} - a(s)\frac{db(s)}{ds} = 0$$

已知：$a(s) = s^2 + 1.5s - 1$，$b(s) = s^2 - 2s + 5$

代入解得：$s_1 =$ 3.8380, $s_2 =$ -0.4094

经相位条件检验可知：s_1 不满足条件，舍去。

所以分离点为：$s_2 =$ -0.4094

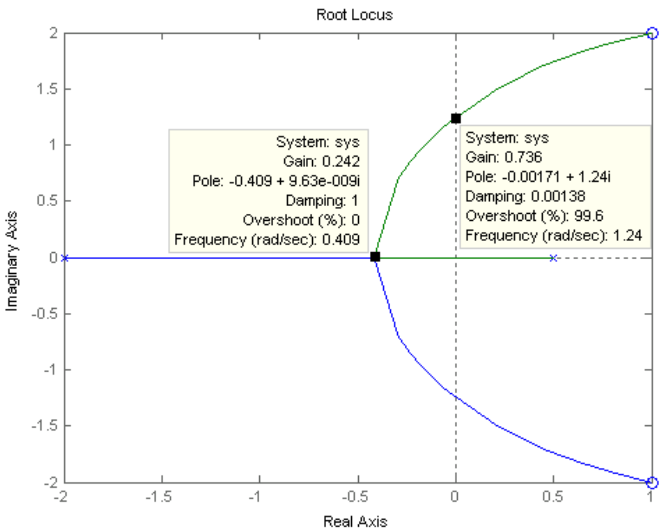
（7）与虚轴交点

令 $s = j\omega$ 代入方程 $1 + G(s)H(s) = 0$，

解得：当 K=0.75 时，根轨迹与虚轴相交与点：$\pm 1.25j$，

当 K=0.2 时，根轨迹于虚轴相交与原点。

综上所述，可得根轨迹草图为：



2）由根轨迹图中可以知道，要使系统稳定，闭环还极点必须在左半平面，
也就是 K 要满足：　　$0.2<K<0.75$
3) 要使系统不出现超调现象，必须满足根轨迹在实轴，也就是说系统没有复数极点，从根轨迹图中，我们可以知道，K 能取到的最大值为 0.242。

5-12 已知单位负反馈系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{s+a}{s^2(s+2)}$。试求 a 从 $0\to\infty$ 的闭环根轨迹，

并求闭环稳定时的 a 的取值范围。

解：　$\because$ G(S)= $\dfrac{s+a}{s^2(s+2)}$　$\therefore$ 1+ G(S)= $\dfrac{s+a}{s^2(s+2)}$ +1=0 $\therefore$

可等效为：$G(S)'=\dfrac{a}{s(s+1)^2}$

画根轨迹步骤如下：

1：系统的开环极点为：$s_1=0$　　$s_{2,3}=-1$(二阶)

2：根轨迹关于实轴对称，实轴上的根轨迹：（-∞，0）

3：渐进线

于实轴交点：$\sigma=\dfrac{p_1+p_2+p_3}{3-0}=\dfrac{-2}{3}$

渐近线倾角为：

$$\phi=\frac{360^\circ l+180^\circ}{3-0}=120^\circ l+60^\circ \quad \text{即有：} \phi_1=60^\circ \qquad \phi_2=180^\circ \qquad \phi_3=-60^\circ$$

4：由相位条件可得极点的出射角：180°　0°

5：与虚轴的交点：把 jw 代入特征方程：

$S^3+2S^2+S+ak=0$

即：$-j\omega_0^3-2\omega_0^2+j\omega_0+a=0$

有实部虚部分别为零：$\omega_0^3-\omega_0=0$　　$a-2\omega_0^2=0$

解之：$\begin{cases}\omega_0=1\\ \alpha=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\omega_0=-1\\ \alpha=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\omega_0=0\\ \alpha=0\end{cases}$

6：与实轴的分离点与会合点

$$b(s)\frac{da(s)}{ds}-a(s)\frac{db(s)}{ds}=0$$

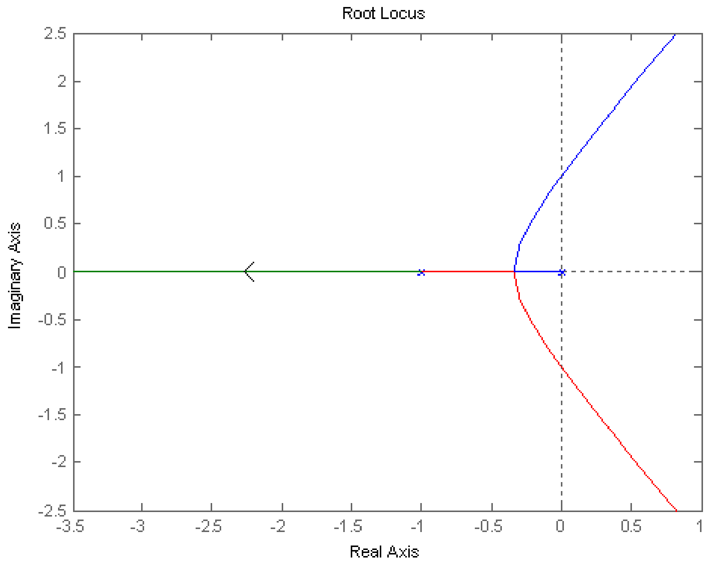
已知：$a(s)=s^3+2s^2+s$，$b(s)=1$

代入解得：$s_1=-1$，$s_2=-\dfrac{1}{3}$

经相位条件检验可知： s_1, s_2 满足条件，

所以分离点为：$s_1 = -1 \qquad s_2 = -\dfrac{1}{3}$

综上所述，可得根轨迹草图为：



由根轨迹图中可以知道，要使系统稳定，闭环极点必须在左半平面，

也就是 α 要满足： $0 < \alpha < 2$

5-14　系统如图 5-43 所示，绘制以 α 为可变参数的根轨迹，并指出系统稳定条件下的 α 值取值范围，以及系统阶跃响应无超调时 α 的取值范围。

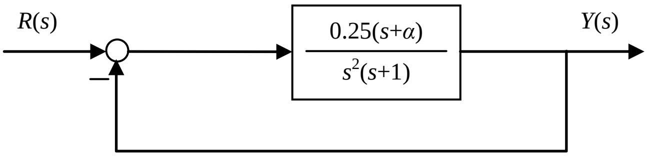
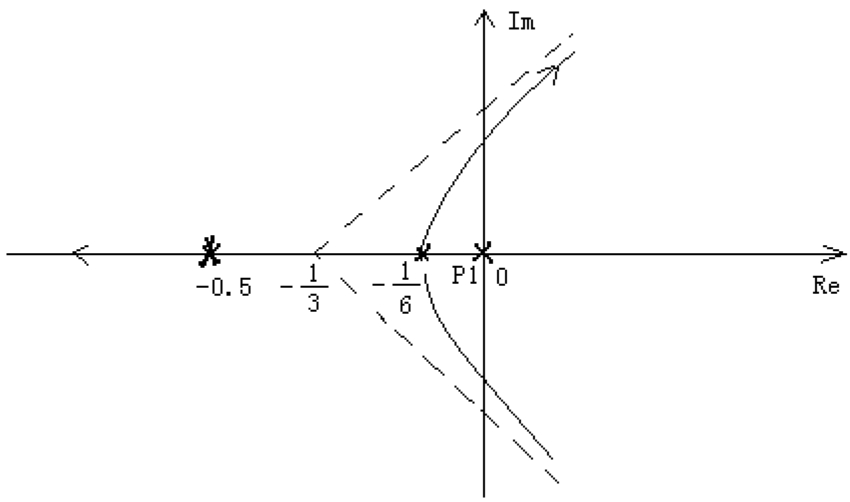


图 5-43　题 5-14 系统框图

解：$\Delta(s) = S^3 + S^2 + 0.25S + 0.25\alpha = 0$

等效开环传递函数：$[G(S)H(S)]e = \dfrac{0.25\alpha}{S(S+0.5)^2}$



（1）　开环极点 P1=0　P2,3=-0.5

（2）　实轴上的根轨迹 $(-\infty,0)$

（3）　渐近线 n-m=3

$$\sigma_a = \frac{-0.5-0.5}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\theta_a = \frac{(2K+1)\cdot 180^\circ}{3} = \begin{cases} +60^\circ \\ -60^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

(4)　分离点：

$$\sum\frac{1}{d-z_i} = \sum\frac{1}{d-p_j} \qquad 0 = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+0.5} + \frac{1}{d+0.5} \qquad d = -\frac{1}{6}$$

(5)　根轨迹与虚轴交点：

S^3	1	0.25
S^2	1	0.25α
S^1	$0.25-0.25\alpha$	
S^0	0.25α	

$\Rightarrow a = 1$时，$S_{1,2} = \pm j0.5$

$\therefore$ 系统稳定条件下 $,0 < a < 1$

临界阻尼（无超调量），此时$S_1 = d_1 = -\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow 0.25a = S(S+0.5)^2\Big|_{S=S_1} = \frac{1}{54}$$

即$0 < a < \frac{2}{27}$