第二章

线性时不变系统的时域分析

§2.0 引言

§2.1 连续时间LTI系统的时域分析

§2.2 离散时间LTI系统的时域分析

§2.3 单位冲激/脉冲响应与LTI系统性质

§2.4 LTI系统的微分、差分方程描述

§2.5 LTI系统的响应分解

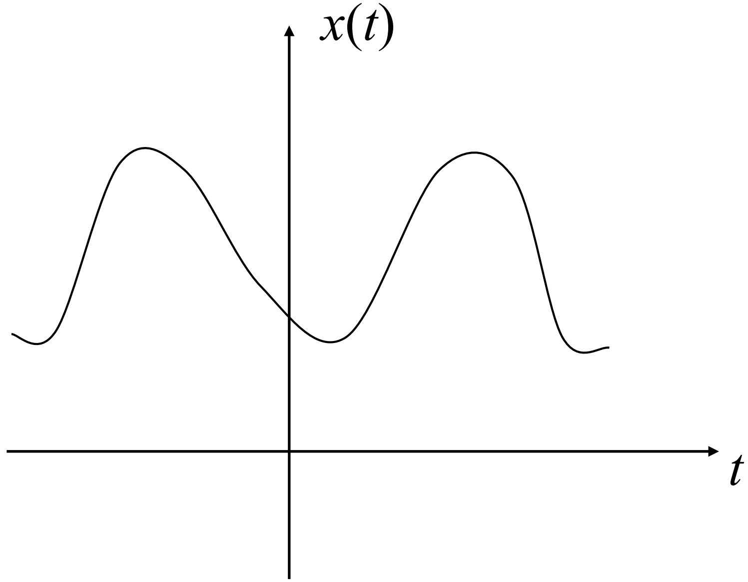
§2.6 LTI系统的框图表示

2.0 引言

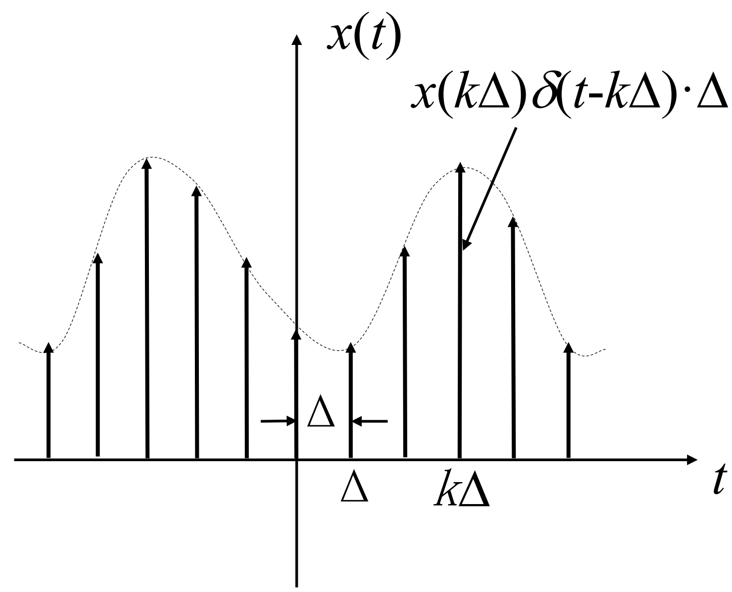
- 本章将讨论一种最基本而又极为有用的LTI系统的分析方法——时域分析方法，即所涉及的信号的自变量都是关于时间t（或n）的一种分析方法。
- 主要目的之一是给出求解LTI系统的一般方法——卷积，并以此为基础进一步讨论LTI系统的有关性质和相关问题。通过本章的讨论，将建立LTI系统的时域分析的理论框架。
- 基本思路：
  利用LTI系统的叠加性和齐次性
  以及用某一基本信号表示一般信号

2.1.1 信号的脉冲分解

任一信号可用无穷多个单位冲激函数的移位、加权之“和”（即积分）来表示。



(a)



(b)

$$x(t) \approx \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \qquad (2.2)$$

冲激函数的线性组合

2.1.1 信号的脉冲分解

当 $\Delta \to 0$ 时，（2.2）式能够精确表示任一信号 $x(t)$，即（2.2）演变为积分的形式（2.3）式。

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\cdot d\tau \qquad (2.3)$$

筛选性质

单位冲激函数的移位、加权之“和”

2.1.1 信号的脉冲分解

如果用以下矩形脉冲近似表示单位冲激函数

$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}, & 0<t<\Delta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

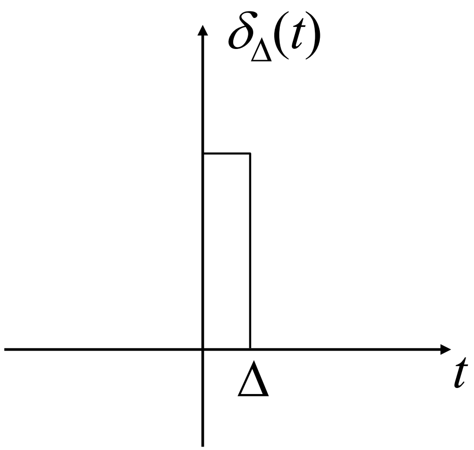


图2-2 $\delta_\Delta(t)$波形

显然

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

$$\delta(t-\Delta k)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t-\Delta k)$$

2.1.1 信号的脉冲分解

用一系列矩形脉冲来近似，得到的以下近似表达：

$$x(t) \approx \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\cdot d\tau$$

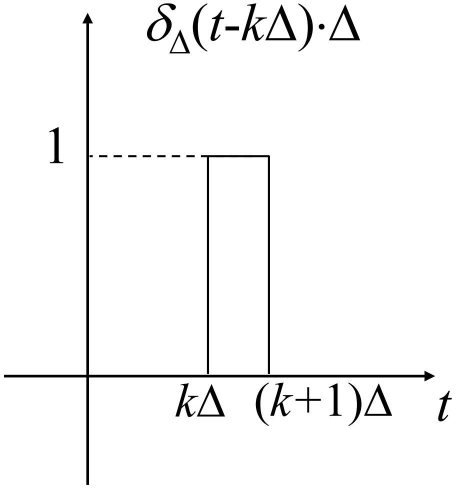


图2-3 $\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$的形式

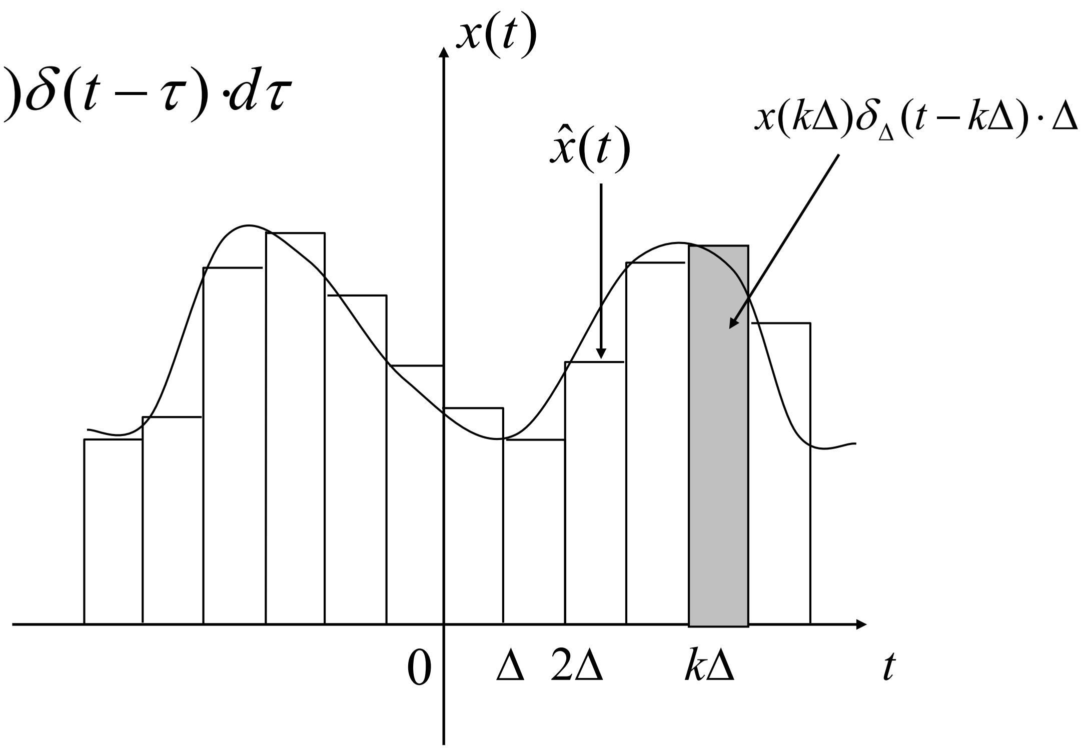


图2-4 用矩形脉冲$x(t)$

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

卷积方法是LTI系统的最基本的分析方法，是用于LTI系统求解对激励信号的响应。

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

- 为了说明其基本原理，考虑以下LTI系统。

$$\delta(t) \to h(t)$$

$$\delta(t - t_0) \to h(t - t_0)$$

其中，$h(t)$ 称为系统的单位冲激响应。

将 $x(t)$ 分解为移位冲激信号的线性组合：

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\cdot d\tau = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

- 根据LTI系统的齐次性，有

$$x(k\Delta)\cdot\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \to x(k\Delta)h(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

- 再根据LTI系统的叠加性，我们有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

- 上式取极限，有

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta(t-k\Delta)\cdot\Delta \to \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

- 表示为积分形式

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\cdot d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau$$

- 因此，响应 $y(t)$ 为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau$$

- 上式的数学运算称为卷积积分，简称卷积，通常记为

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

卷积积分的意义：

1. 原理：将信号分解为移位冲激信号的线性组合，借助系统的单位冲激响应，获得LTI系统对激励的响应解。

2. LTI系统对输入信号的响应过程可以看作是两个信号相互作用的过程：卷积积分运算。

2.1.2 卷积积分与单位冲激响应

3. LTI系统的单位冲激响应可以完全表征系统的特性。

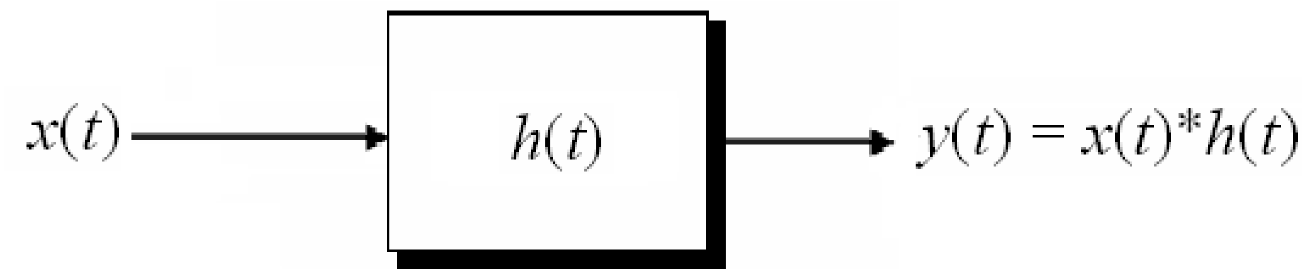


图　LTI系统的单位冲激响应的表示

4. 单位冲激响应给出连续时间LTI系统更一般的描述方法。

例2.1

【例2.1】已知一线性时不变系统的单位冲激响应为

$$h(t)=e^{-at}\cdot u(t)$$

系统的输入信号为一单边指数信号 $x(t)=e^{-bt}u(t)$ ，$a\neq b$

求系统对输入信号的响应输出 $y(t)$ 。

解： 系统的输出 $y(t)$ 为

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-b\tau}\cdot u(\tau)\cdot e^{-a(t-\tau)}\cdot u(t-\tau)\cdot d\tau$$

由于 $\tau<0$ 时，$u(\tau)=0$ ； 以及 $\tau>t$ 时， $u(t-\tau)=0$ 。

所以积分变量 τ 的取值区间应为 $0\leq\tau\leq t$ 。

在此区间内，$u(\tau)=u(t-\tau)=1$

例2.1

故有

$$y(t)=\int_0^t e^{-b\tau}\cdot e^{-a(t-\tau)}\cdot d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-at}\cdot e^{(a-b)\tau}\cdot d\tau$$

$$=e^{-at}\int_0^t e^{(a-b)\tau}\cdot d\tau$$

$$=e^{-at}\left.\frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b}\right|_{\tau=0}^{t}$$

$$=\left(\frac{1}{a-b}e^{-bt}-\frac{1}{a-b}e^{-at}\right)u(t)$$

2.1.3 卷积积分的图示法

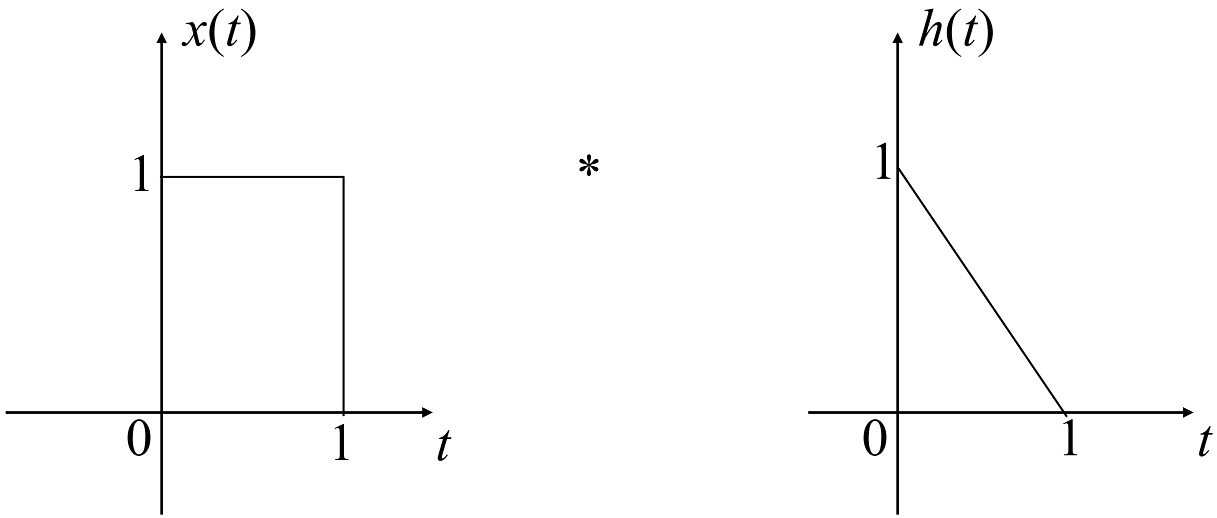


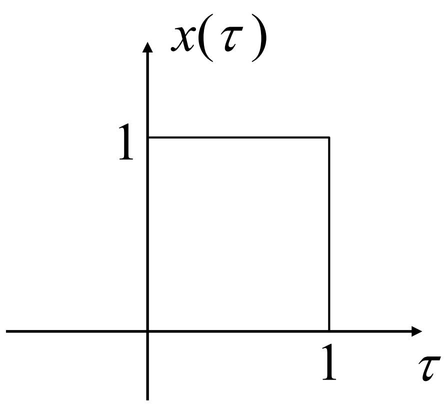
图2-6 $x(t)$和$h(t)$的波形

观察 $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$

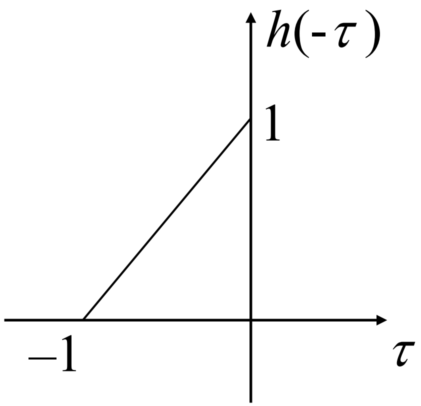
可得卷积的计算的图示法的一般步骤为：

2.1.3 卷积积分的图示法

1. 反转： 卷积积分中 τ 为积分变量，t 为参变量，将函数 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的自变量用 τ 代换，将 $h(\tau)$ 以纵坐标轴为轴线反转得 $h(-\tau)$。



(a)

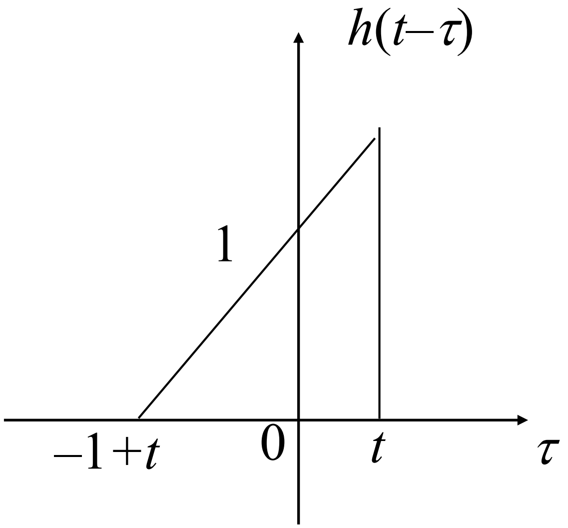


(b)

2.1.3 卷积积分的图示法

2. 平移：为了计算 t时刻的卷积值，将 $h(-\tau)$ 随参变量 t 平移，得 $h(t-\tau)$ 。

若$t>0$，则 $h(-\tau)$沿τ 轴向右平移 t，
若$t<0$，则 $h(-\tau)$沿τ 轴向左平移 t。

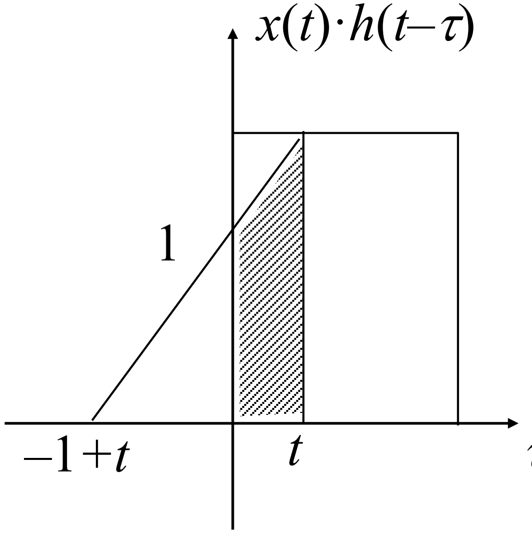


(c)

2.1.3 卷积积分的图示法

3. 相乘：将 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 相乘，得函数 $x(\tau)\cdot h(t-\tau)$

4. 积分:求 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 乘积曲线下的面积，即为t时刻的卷积分值。



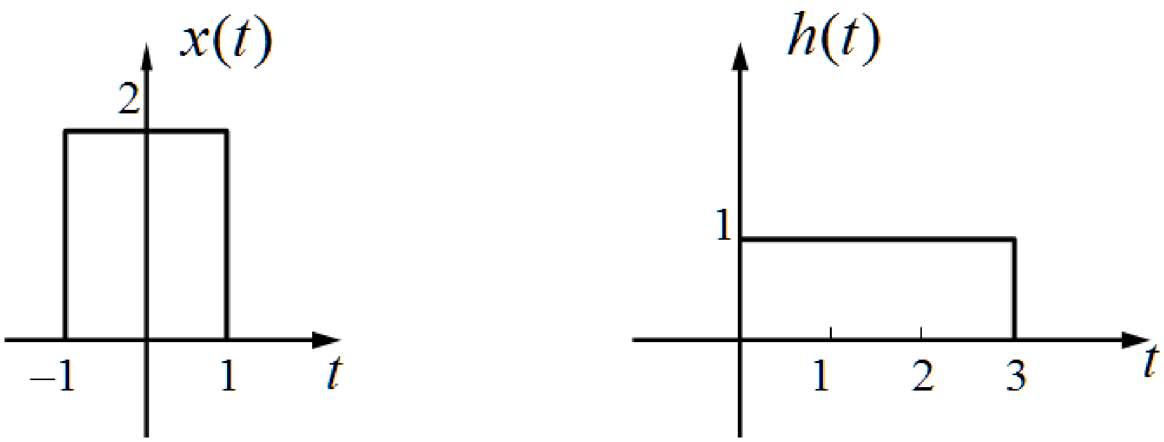
(*d*)

5. 选取不同的t值，重复上述2-4步骤，可计算出不同的时刻t所对应的卷积和值。

例2.2

【例2.2】 已知信号$x(t)$和$h(t)$如图(a)所示， 求卷积积分：

$$y(t)=x(t)*h(t)$$



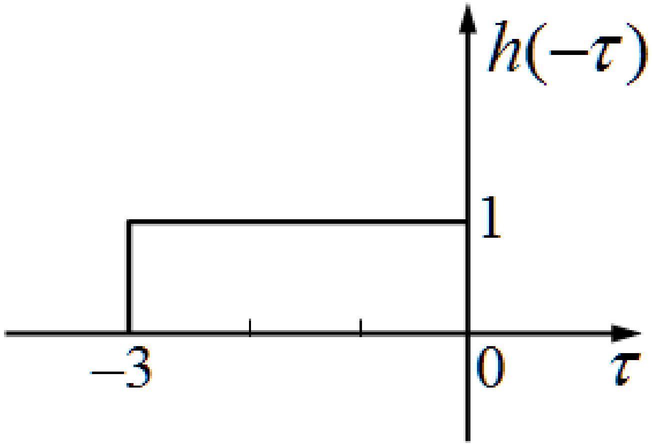
(a)

$h(-\tau)$

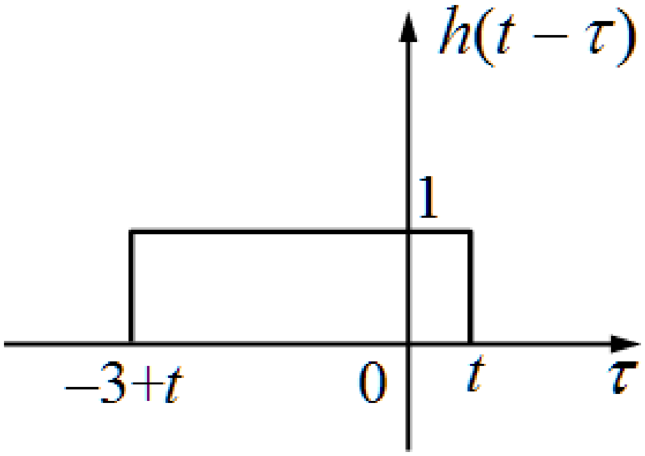
例2.2

解：

1. 先将$x(t)$和$h(t)$的自变量更换为τ，再将$h(\tau)$反转为$h(-\tau)$；沿τ轴平移得$h(t-\tau)$；将$x(\tau)$与$h(t-\tau)$相乘，得曲线 $x(\tau)\cdot h(t-\tau)$。



（b）

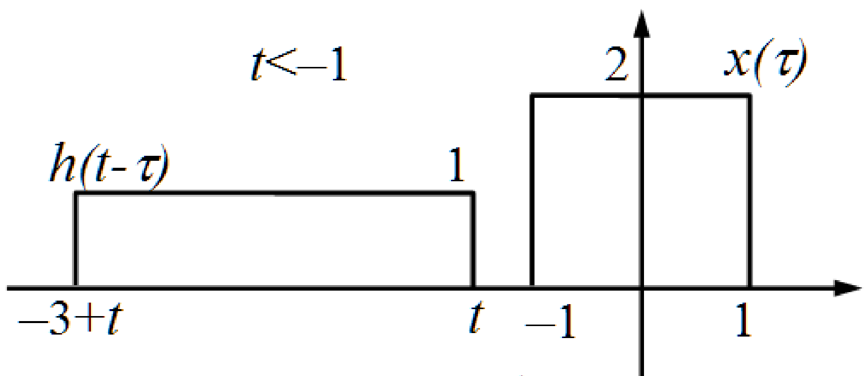


（c）

例2.2

2. 由于$x(\tau)$和$h(\tau)$均为有限时宽信号，因此曲线$x(\tau)h(t-\tau)$的非零区（重叠区）将视t的取值不同而有所不同，因此相乘和积分应随不同t的取值范围分几个区间进行。

（1）当 $t<-1$ 时，由图 (d)所示，知$x(\tau)$与$h(t-\tau)$无重叠部分，乘积为零，所以 $y(t)=x(t)*h(t)=0, \quad t<-1$

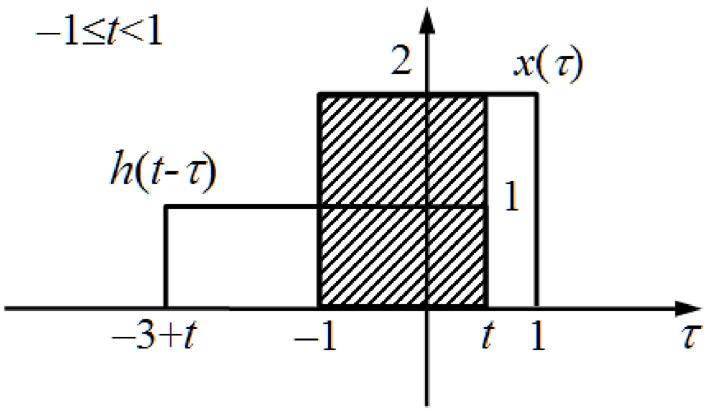


（d）

例2.2

(2) 当 $-1 \le t \le 1$ 时，由图2-8(e)所示，知$x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 的重叠区为$[-1,\ t]$，即乘积 $x(\tau)h(t-\tau)$在区间$[-1,\ -t]$上非零，所以：

$$y(t)=\int_{-1}^{t} x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau=\int_{-1}^{t} 2d\tau=2(t+1)$$

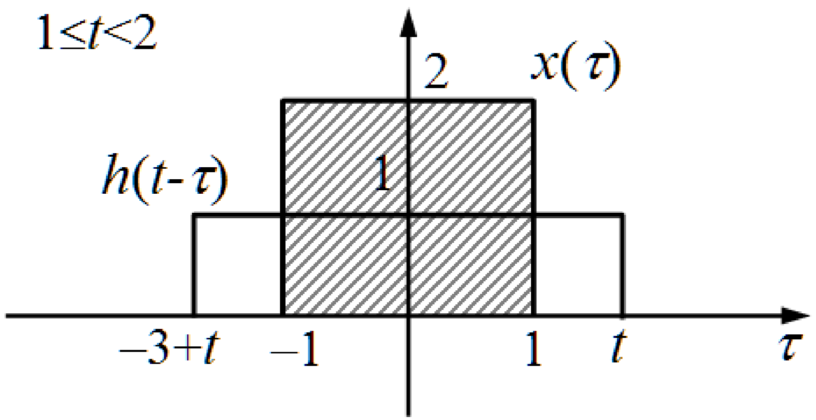


（e）

例2.2

(3) 当 $1 \le t \le 2$ 时，由图2-8(f)所示，知 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 的重叠区为$[-1,\ 1]$，所以：

$$y(t)=\int_{-1}^{1} x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau=\int_{-1}^{1} 2d\tau=4$$

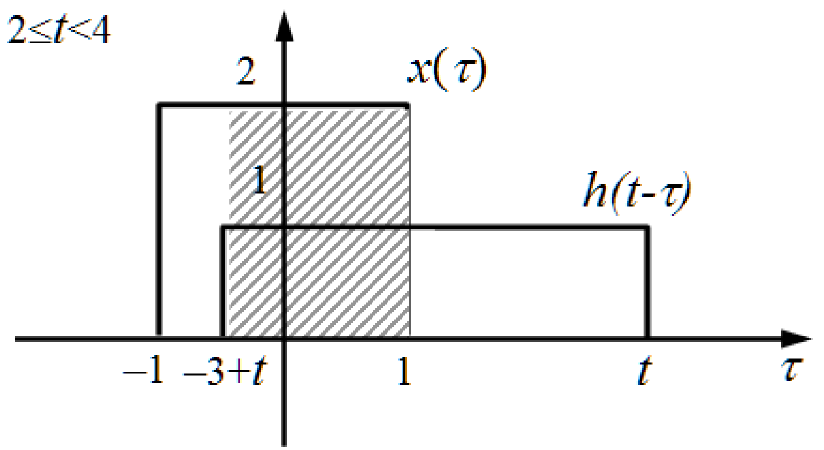


(f)

例2.2

(4)当 $2 \le t \le 4$ 时，由图2-8(g)所示，知 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 的重叠区为 $[-3+t,\ 1]$ ，所以：

$$y(t)=\int_{-3+t}^{1} x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau=\int_{-3+t}^{1} 2d\tau=2(4-t)$$

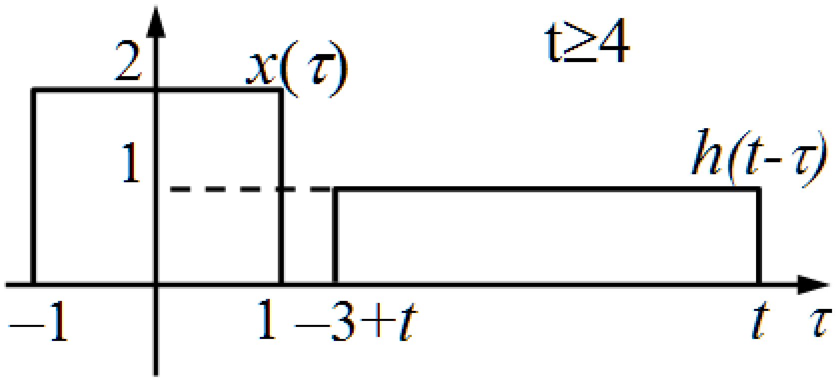


(g)

例2.2

(5)当 $t \geq 4$ 时，由图2-8(h)所示，知 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 无重叠区，所以：

$$y(t) = x(t) * h(t) = 0$$

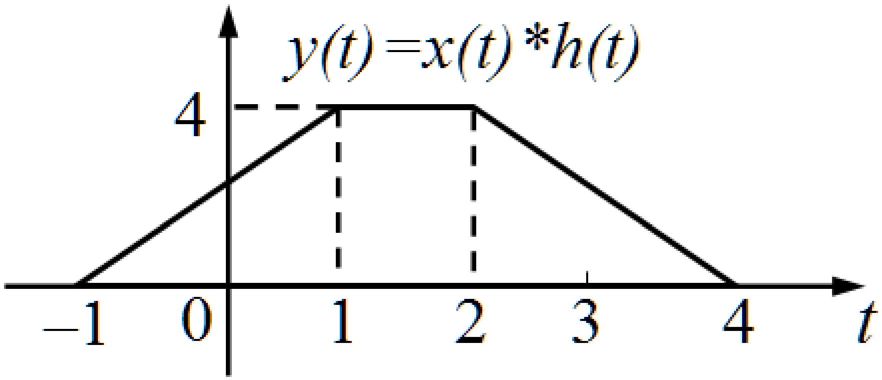


(h)

例2.2

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<-1\\ 2(t+1) & -1\le t\le 1\\ 4 & 1\le t\le 2\\ 2(4-t) & 2\le t\le 4\\ 0 & t\ge 4\end{cases}$$

$y(t)$的波形如图 (i)所示：



（i）

MATLAB演示

【例2-24】计算两矩形窗信号的卷积。

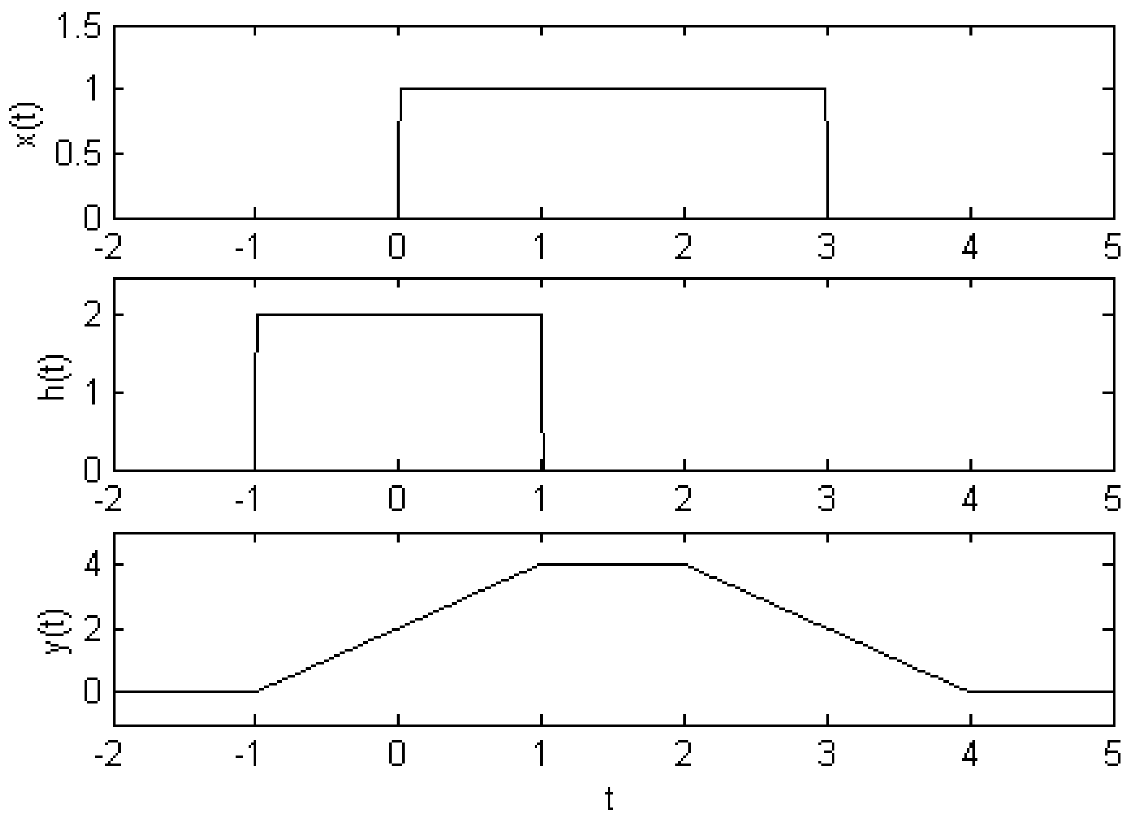


图2-36 例2-24的运行结果图

MATLAB演示

```
T = 0.01; t = -2 : T : 5; L = length(t);
h = 2 * 0.5 * ((sign(t + 1) + 1) - (sign(t - 1) + 1));
x = 0.5 * ((sign(t) + 1) - (sign(t - 3) + 1));
y = conv(T * h, x); t1 = -4 : T : 10;
subplot(3,1,1); plot(t, x);
xlabel('t'); ylabel('x(t)'); axis([-2 5 0 1.5]);
subplot(3,1,2); plot(t, h);
xlabel('t'); ylabel('h(t)'); axis([-2 5 0 2.5]);
subplot(3,1,3); plot(t1, y);
xlabel('t'); ylabel('y(t)'); axis([-2 5 -1 5]);
```

2.1.4 卷积积分的性质

卷积积分有一些有用的性质，掌握这些有用的性质可以简化卷积运算，同时也给信号与系统的分析提供了非常有用的分析方法，从中可以得出不少重要的结果。

2.1.4 卷积积分的性质

一、卷积代数

- 1. 交换律

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\cdot d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)\cdot d\tau$$

即：

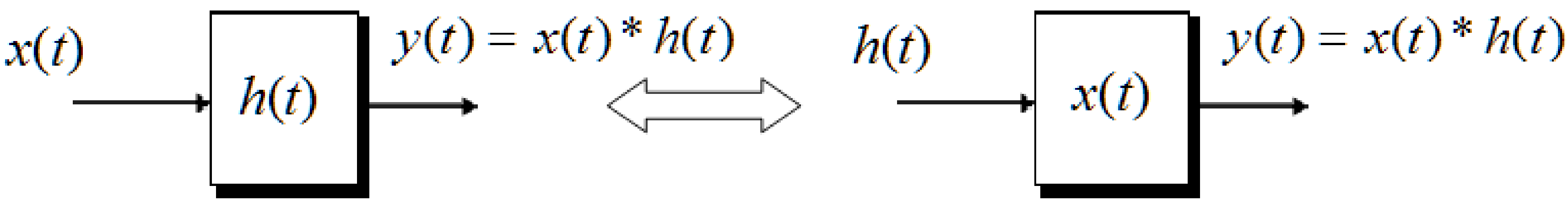


图2-9 从系统分析的观点解释卷积的交换律

卷积积分的交换律表明：卷积与两个信号的顺序无关。

2.1.4 卷积积分的性质

- 2. 结合律

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

考查如图所示的级联系统

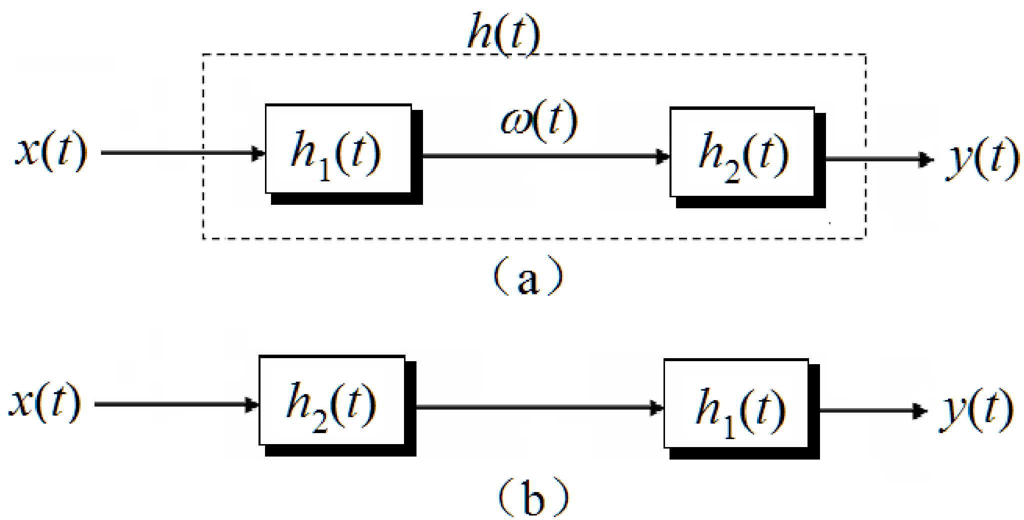


图2-10 卷积结合律及交换律的系统意义

2.1.4 卷积积分的性质

根据卷积积分，有 $\omega(t)=x(t)*h_1(t)$， $y(t)=\omega(t)*h_2(t)$

$$=\left(x(t)*h_1(t)\right)*h_2(t)$$

由结合律有 $y(t)=x(t)*\left(h_1(t)*h_2(t)\right)$

$$=x(t)*h(t)$$

再根据交换律，可得 $y(t)=x(t)*\left(h_1(t)*h_2(t)\right)$

$$=x(t)*\left(h_2(t)*h_1(t)\right)$$

$$=\left(x(t)*h_2(t)\right)*h_1(t)$$

重要结论：LTI系统的级联，与各子系统的次序无关，即各子系统连接的顺序可以调换，总的响应为各子系统的卷积。

2.1.4 卷积积分的性质

- 3. 分配律

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

考查图2-11所示并联LTI系统

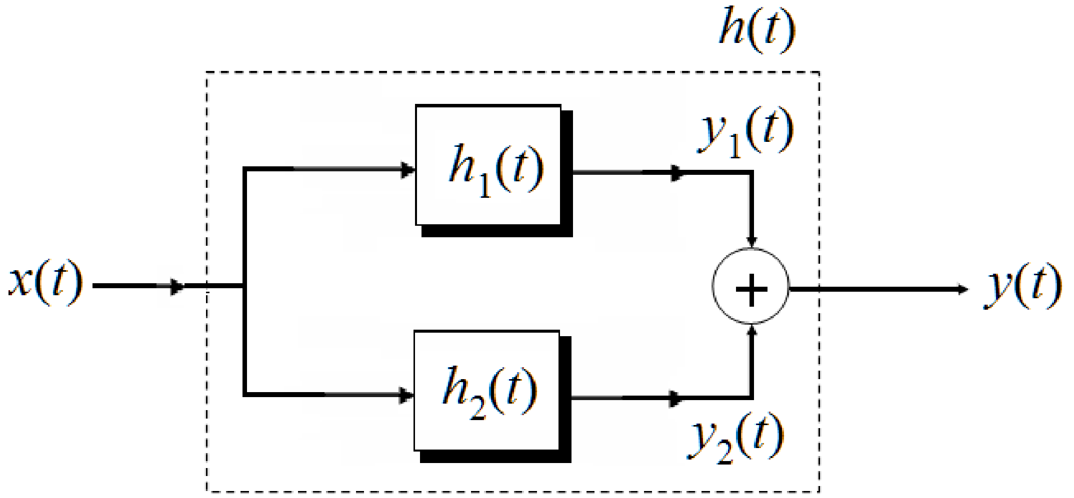


图2-11 分配律的系统意义

2.1.4 卷积积分的性质

我们有 $y_1(t) = x(t) * h_1(t)$ $\quad$ $y_2(t) = x(t) * h_2(t)$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$
$$= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

根据分配律有

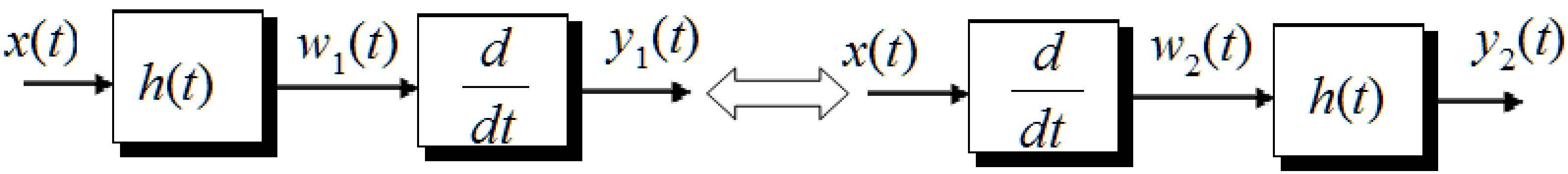
$$y(t) = x(t) * \left(h_1(t) + h_2(t)\right) = x(t) * h(t)$$

分配律性质表明，并联LTI系统总的单位冲激响应等于各子系统单位冲激响应之和。

2.1.4 卷积积分的性质

二、卷积的微分与积分特性

- 1. 卷积的微分性质



（a）　　　　（b）

从上述的卷积的代数性质可知，图所示的两个级联系统是完全等价，即$y_1(t)=y_2(t)$。结合卷积的代数性质，我们有

$$w_1(t)=x(t)*h(t) \qquad y_1(t)=\frac{dw_1(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[x(t)*h(t)\right]$$

$$w_2(t)=\frac{dx(t)}{dt} \qquad y_2(t)=w_2(t)*h(t)=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)$$

2.1.4 卷积积分的性质

由于$y_1(t) = y_2(t)$ 因此有

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) * h(t)\right] = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$$

利用交换律，可得

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) * h(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[h(t) * x(t)\right] = \frac{dh(t)}{dt} * x(t) = x(t) * \frac{dh(t)}{dt}$$

卷积的微分性质：

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) * h(t)\right] = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) = x(t) * \frac{dh(t)}{dt}$$

2.1.4 卷积积分的性质

- 2. 卷积的积分性质

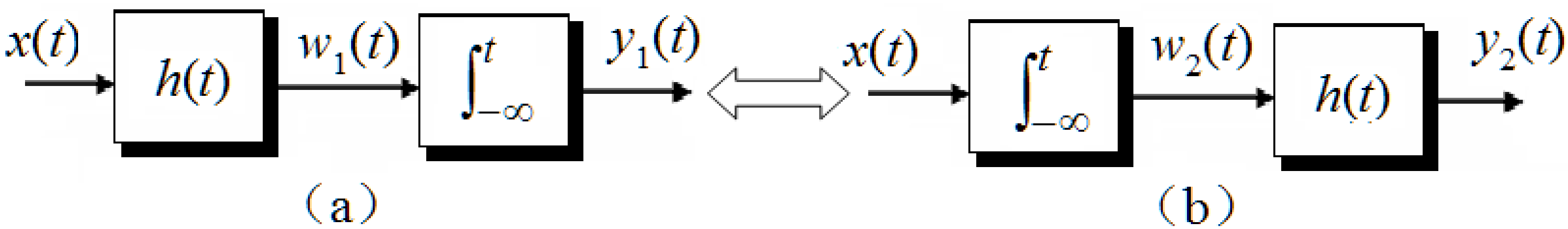


图2-13 卷积积分的图解说明

与卷积的微分性质相类似，同样我们可得卷积的积分性质：

$$\int_{-\infty}^{t}\left[x(\lambda)*h(\lambda)\right]\cdot d\lambda=\left[\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)\cdot d\lambda\right]*h(t)=x(t)*\left[\int_{-\infty}^{t}h(\lambda)\cdot d\lambda\right]$$

其证明与微分性质的证明一样，可利用上面所示的图解说明。

2.1.4 卷积积分的性质

- 3. 推广

应用上述推演方法，可以导出卷积的高阶导数或多重积分的性质：

设$r(t)=\left[x_1(t)*x_2(t)\right]$，则有$r^{(i)}(t)=x_1^{(j)}(t)*x_2^{(i-j)}(t)$

其中，当i、j、$i\text{–}j$取正整数时为导数的阶次，取负整数时为重积分的次数，等式两边必须满足$i=j+(i-j)$。

2.1.4 卷积积分的性质

一个特例是取 $i=0$， $j=1$ ，$i-j=-1$， 或取 $i=0$，$j=-1$ ，$i-j=1$， 我们有

$$r(t)=r^{(0)}(t)=x_1^{(1)}t*x_2^{(-1)}(t)$$

$$=x_1^{(-1)}(t)*x_2^{(1)}(t)$$

即

$$r(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}x_2(t)\cdot dt$$

$$=\int_{-\infty}^{t}x_1(t)\cdot dt*\frac{dx_2(t)}{dt}$$

2.1.4 卷积积分的性质

三、与冲激函数 $\delta(t)$和阶跃函数 $u(t)$的卷积：

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

对于冲激偶$\delta'(t)$，有

$$x(t)*\delta'(t)=x'(t)*\delta(t)=x'(t)$$

对于单位阶跃函数$u(t)$，可得：

$$x(t)*u(t)=x(t)*\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\cdot dt=\int_{-\infty}^{t}x(t)\cdot dt*\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t)\cdot dt$$

2.1.4 卷积积分的性质

推广到更一般的情况，我们有

$$x(t)*\delta^{(k)}(t)=x^{(k)}(t)*\delta(t)=x^{(k)}(t)$$

$$x(t)*\delta^{(k)}(t-t_0)=x^{(k)}(t)*\delta(t-t_0)=x^{(k)}(t-t_0)$$

当 k 取正整数时表示导数阶次，k 取负整时为重积分的次数。

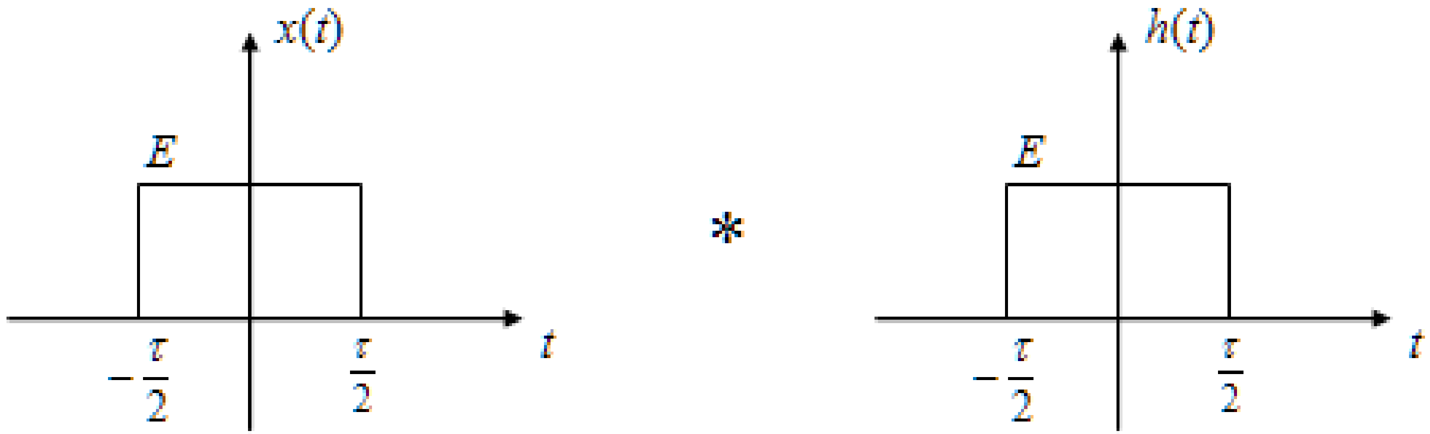
例如 $x^{(-1)}(t)$ 表示 $x(t)$ 一次积分。$\delta^{(-1)}(t)=u(t)$

例2.4

【例2.4】 用卷积性质计算图2-15(a)所示两信号的卷积。

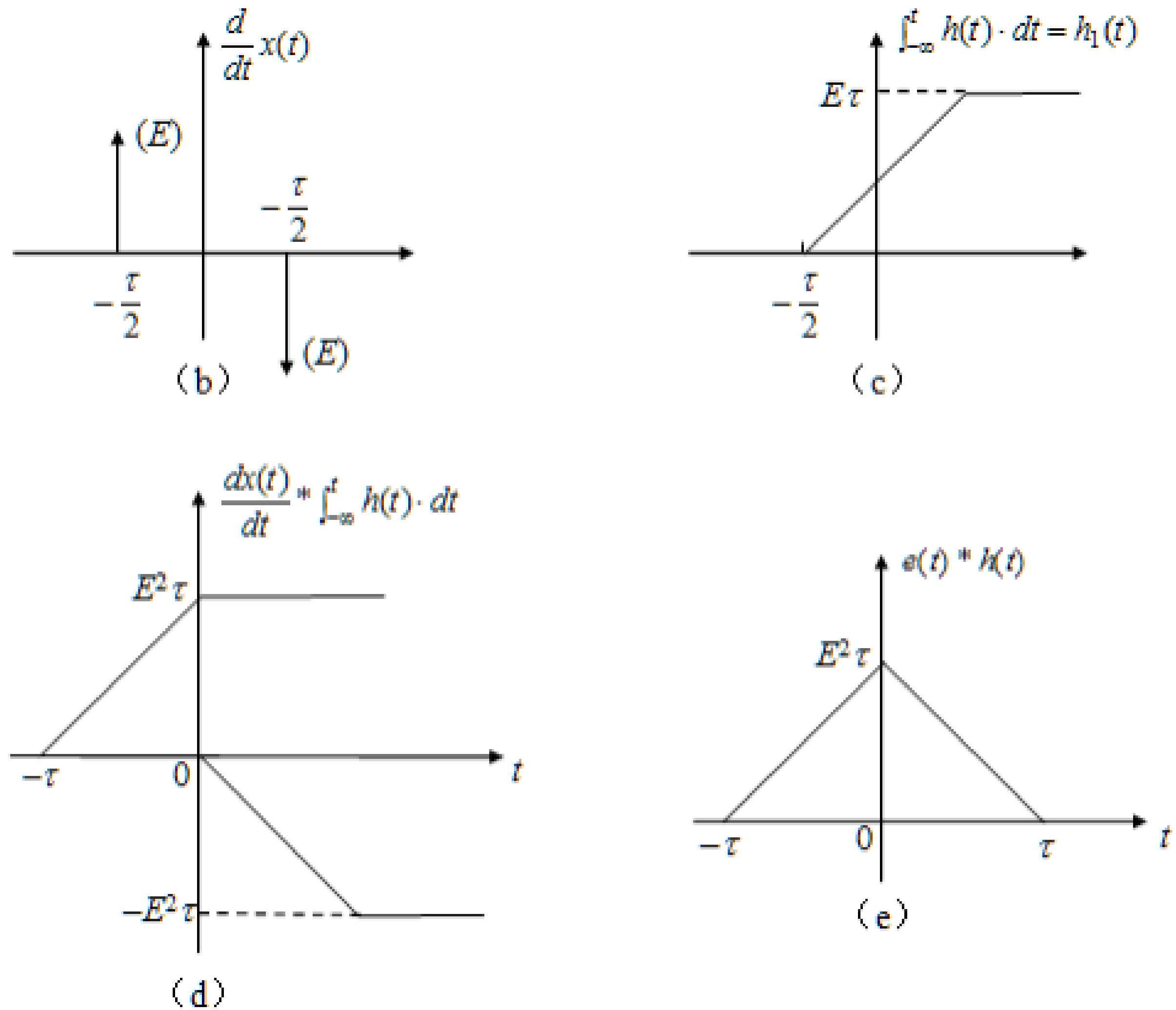
解： 利用

$$y(t)=x(t)*h(t)=\frac{d}{dt}x(t)*\int_{-\infty}^{t}h(t)\cdot dt$$



（a）

例2.4



$\frac{d}{dt}x(t)$
(E)
$-\frac{\tau}{2}$
$-\frac{\tau}{2}$
(E)
（b）
$\int_{-\infty}^{t} h(t)\cdot dt = h_1(t)$
$E\tau$
$-\frac{\tau}{2}$
（c）
$\frac{dx(t)}{dt} * \int_{-\infty}^{t} h(t)\cdot dt$
$E^2\tau$
$-\tau$
0
t
$-E^2\tau$
（d）
$e(t) * h(t)$
$E^2\tau$
$-\tau$
0
τ
t
（e）

2.2.1 离散时间信号的单位脉冲分解

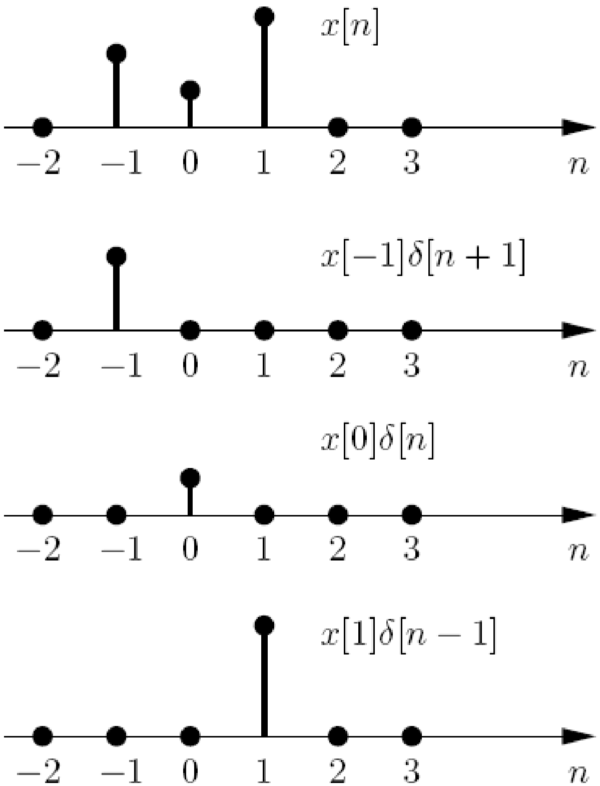
- 展开为：

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{Coefficients}}\ \underbrace{\delta[n-k]}_{\text{Basic Signals}}$$

2.2.1 离散时间信号的单位脉冲分解



$$x[n] = x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1]$$

图2-16 一个离散时间信号分解为一组加权的移位脉冲之和

例2.5

【例2.5】 用单位脉冲表示单位阶跃信号$u[n]$。

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[k]\delta[n-k]$$

因为$k<0$时，$u[k]=0$， 而$k\geq 0$时，$u[k]=1$， 上式可表示为

$$u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

如我们做变量替换$n-k=m$，$u[n]$还可以表示另一种形式，即

$$u[n]=\sum_{m=n}^{-\infty}\delta[m]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

上式表明，$u[n]$也可表示为单位脉冲信号的累加。

2.2.2 卷积和与单位脉冲响应

- 为了说明其基本原理，考虑以下LTI系统。

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

$$\delta[n-n_0] \rightarrow h[n-n_0]$$

其中，$h[n]$ 称为系统的单位脉冲响应。

将 $x[n]$ 分解为移位冲激信号的线性组合：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

2.2.2 卷积和与单位脉冲响应

- 根据LTI系统的齐次性，有

$$x[k]\cdot\delta[n-k]\rightarrow x[k]\cdot h[n-k]$$

- 再根据LTI系统的叠加性，我们有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- 有

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k]=x[n]*h[n]$$

简称卷积和

2.2.2 卷积和与单位脉冲响应

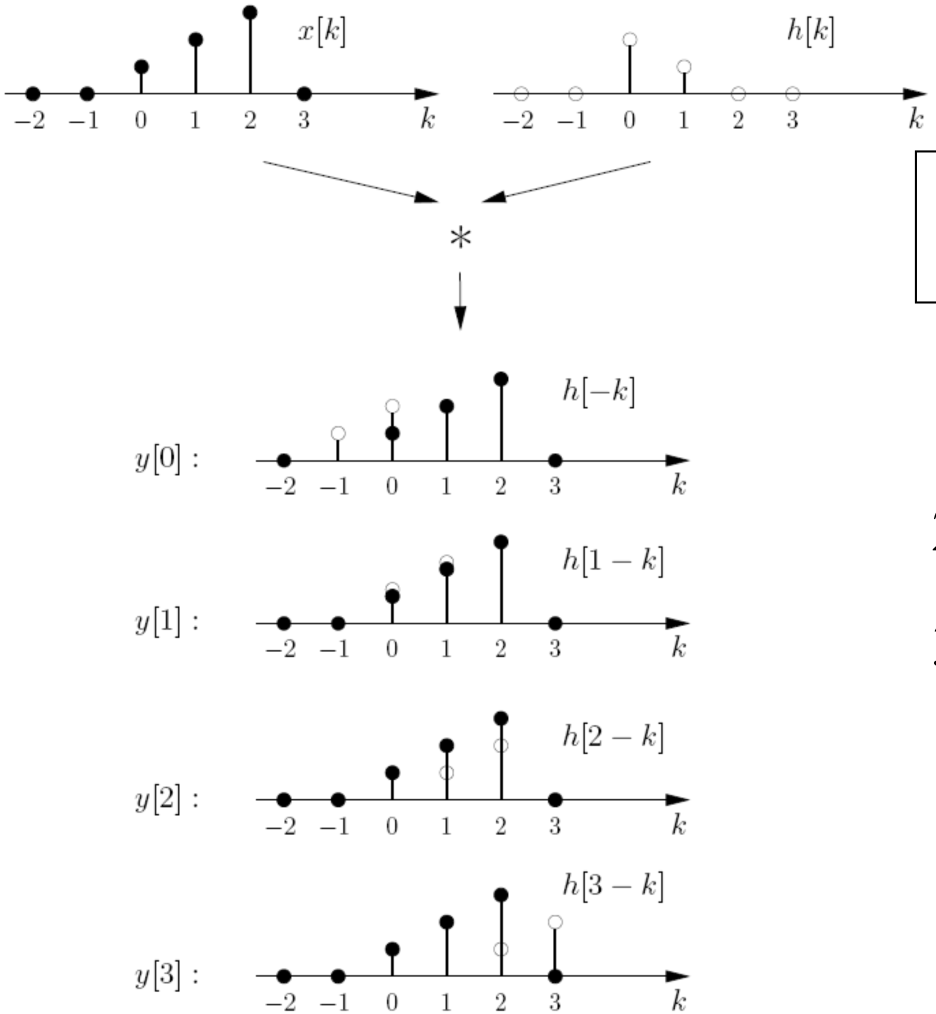
卷积和的意义

1. 离散时间LTI系统对输入信号的响应过程可以看作是两个信号相互作用的过程：卷积和运算。

2. 单位脉冲响$h[n]$可以完全表征系统。

3. 单位冲激响给出离散时间LTI系统更一般的描述方法。

2.2.2 卷积和与单位脉冲响应



卷积和图示法：

1.反转：$h[k] \Rightarrow h[-k]$

2.平移：$h[n-k]$

3.相乘求和：$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

MATLAB演示

【例2-23】已知：$x[n]=(0.5)^n u[n]$，$h[n]=(0.8)^n u[n]$

求 $y[n]=x[n]*h[n]$。

解： 源程序如下

```
n = 0:100;
x = (1/2).^n;
h = (0.8).^n;
y = conv(x,h);
subplot(3,1,1);stem(n,x);
xlabel('n');ylabel('x[n]');
axis([0 20 0 1.5]);grid on;
subplot(3,1,2);stem(n,h);
xlabel('n');ylabel('h[n]');
axis;
subplot(3,1,3);
stem(0:length(y)-1,y);
xlabel('n');ylabel('x[n]*h[n]');
axis([0 20 0 1.5]);grid on;
```

MATLAB演示

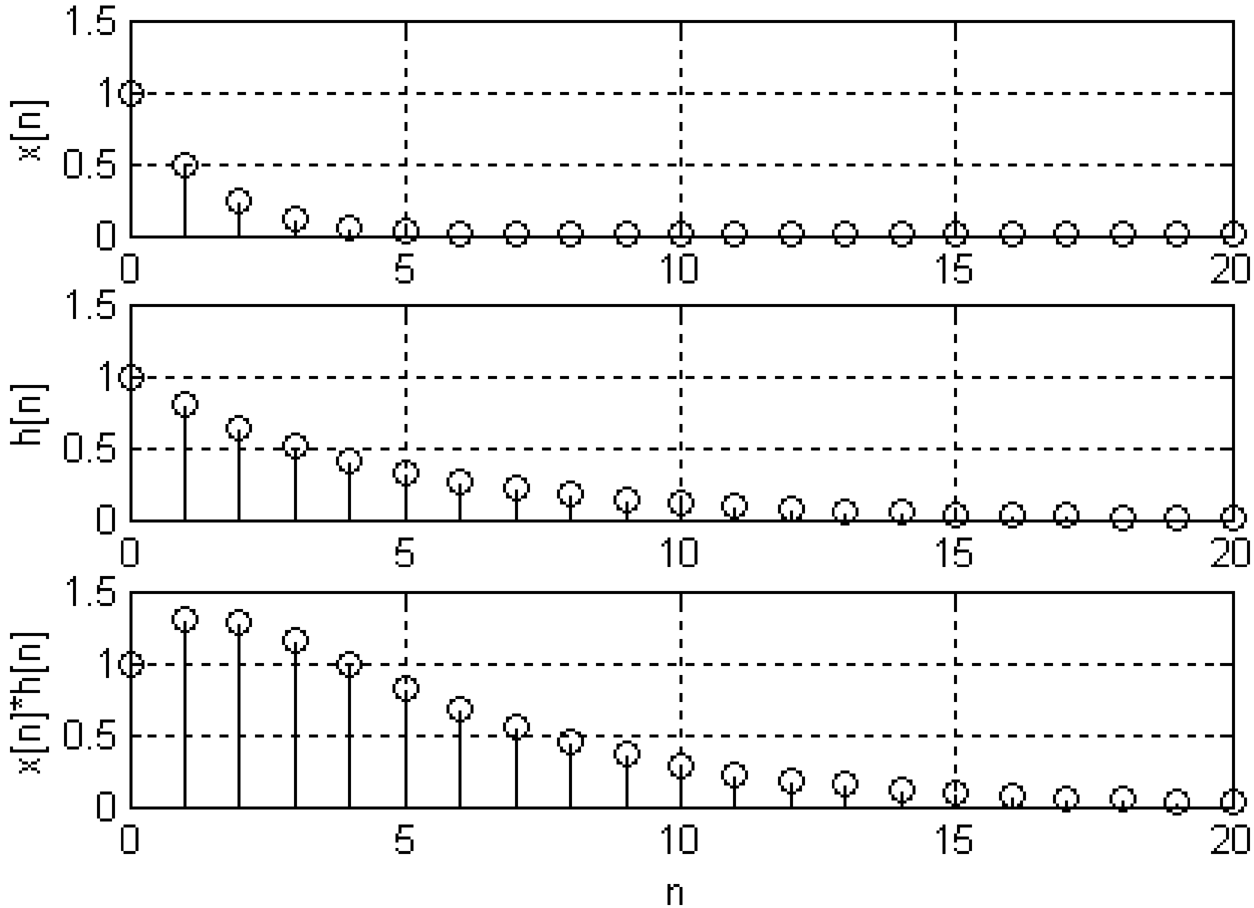


图2-35 例2.23的运行结果图

2.2.3 卷积和的性质

1. 卷积和的代数性质

- 交换律：$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$
- 结合律：$x[n]*\left(h_1[n]*h_2[n]\right)=\left(x[n]*h_1[n]\right)*h_2[n]$
- 分配律：$x[n]*\left(h_1[n]+h_2[n]\right)=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$

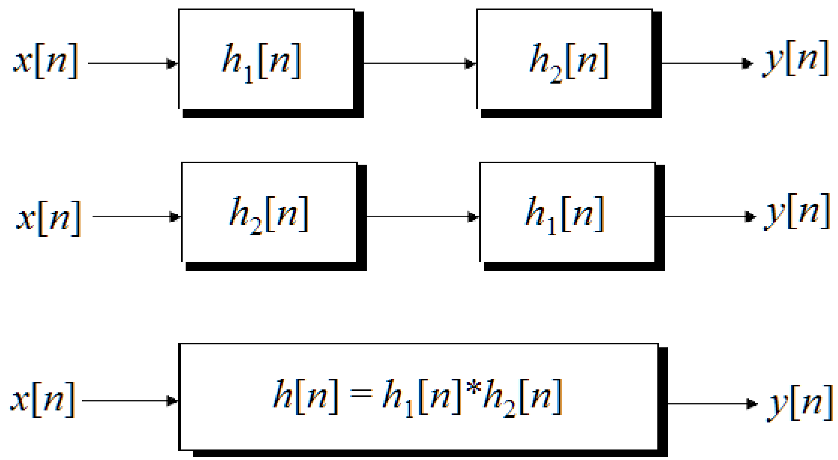


图2-19 离散时间LTI系统的级联

2.2.3 卷积和的性质

2． 与冲激脉冲序列$\delta[n]$和阶跃函数$u[n]$ 的卷积

$$x[n]*\delta[n]=x[n]$$

进一步有 $x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$

任意信号 $x[n]$ 与单位阶跃 $u[n]$ 的**卷积和**，可表示为：

$$x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

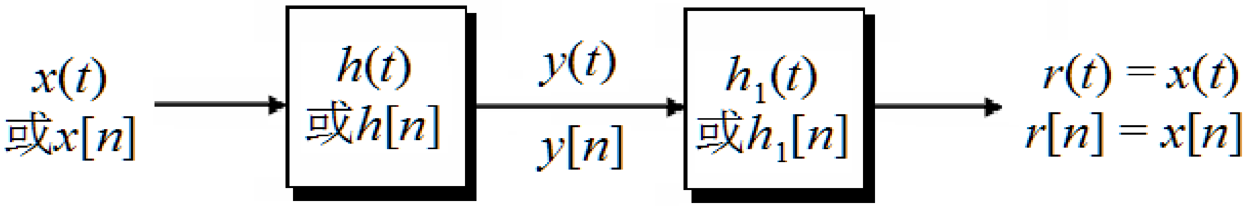
推论：

（1） $x[n-n_1]*\delta[n-n_2]=x[n-n_1-n_2]$

（2）若：$x[n]*h[n]=y[n]$

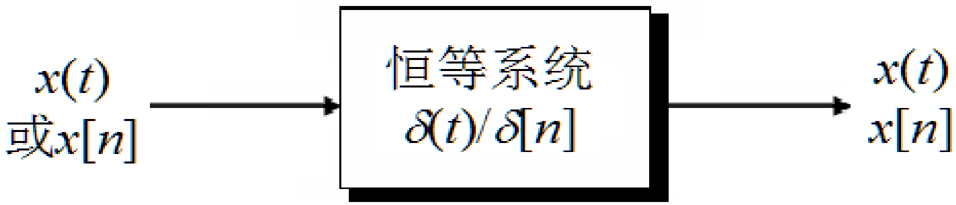
则：$x[n-n_1]*h[n-n_2]=y[n-n_1-n_2]$

2.3.1 LTI系统的可逆性与可逆系统



（a）

图2-20 LTI系统的可逆性



（b）

LTI逆系统与原系统存在以下关系：

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t) \qquad h[n]*h_1[n]=\delta[n]$$

根据上式，可以构造LTI系统的可逆性及其逆系统。

例2.8

【例2.8】 一个连续时间LTI系统的输入输出关系为

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

试求它的逆系统。

解： 将 $x(t)=\delta(t)$ 代入方程，可得该系统的单位冲激响应 $h(t)$

$$h(t)=\delta'(t)+\delta(t)$$

设该系统的逆系统为 $h_1(t)$ ，则有

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t)$$

例2.8

将$h(t)=\delta'(t)+\delta(t)$ 代入上式,再根据 $\delta(t)$ 的卷积性质,有

$$\left(\delta'(t)+\delta(t)\right)*h_1(t)=h'_1(t)+h_1(t)=\delta(t)$$

观察上式，可知 $h_1(t)$ 为由方程$y'(t)+y(t)=x(t)$描述的连续LTI系统的单位冲激响应,故可求得逆系统为

$$y'(t)+y(t)=x(t)$$

例2.9

【例2.9】 一离散时间累加器系统的输入输出关系为

$$y[n]-y[n-1]=x[n]$$

试求它的逆系统。

解： 根据单位脉冲$\delta[n]$的卷积和性质，可将上述输入输出关系重新写为

$$y[n]*\left(\delta[n]-\delta[n-1]\right)=x[n] \qquad \text{[A]}$$

将原系统脉冲响应代入上式，得

$$h[n]*(\delta[n]-\delta[n-1])=\delta[n]$$

根据逆系统的定义，可得逆系统

$$h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

为一差分器。

例2.9

实际上，由[A]式，我们可得

$$y[n]*(\delta[n]-\delta[n-1])*u[n]=x[n]*u[n]$$

等式左边化简得

$$y[n]*(u[n]-u[n-1])=x[n]*u[n] \qquad \text{[B]}$$

由$u[n]$的卷积和性质及与$\delta[n]$的关系

$$x[n]*u[n]=\sum_{n=-\infty}^{n}x[n] \qquad u[n]-u[n-1]=\delta[n]$$

式[B]可变为$y[n]*\delta[n]=\sum_{n=-\infty}^{n}x[n]$，即$y[n]=\sum_{n=-\infty}^{n}x[n]$，为一累加器。

因此，累加器的逆系统为一差分器。

2.3.2 LTI系统的稳定性

- 对于稳定的系统：有界的输入必产生有界的输出。

- 充要条件为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot d\tau < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

2.3.2 LTI系统的稳定性

证明:

1. 必要条件:

设一具有单位冲激响应$h(t)$的稳定LTI系统的输入信号为

$$x(t)=\begin{cases}0, & h(-t)=0\\ \dfrac{h(-t)}{|h(-t)|}, & h(-t)\neq 0\end{cases}$$

显然$x(t)$为一有界信号, $|x(t)|\le 1$ ，对所有t 。

则系统输出为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau$$

2.3.2 LTI系统的稳定性

因此，$t=0$ 时，输出 $y(0)$ 为

$$y(0)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(-\tau)\cdot d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\cdot d\tau$$

因为 $y(0)$ 为稳定系统在 $t=0$ 时刻上的输出，$y(0)$ 必有界。

因此要求上式的右边积分值有界，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\cdot d\tau<\infty \qquad (2.43)$$

即系统的单位冲激响应绝对可积。

这就证明了（2.43）式是连续LTI系统稳定的必要条件。

2.3.2 LTI系统的稳定性

2. 充分条件：

设系统的输入 $x(t)$ 为有界，即

$$|x(t)| \le B \quad 对所有t$$

则系统输出的绝对值为

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\cdot d\tau \right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\cdot|x(t-\tau)|\cdot d\tau$$

$$\le B\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\cdot d\tau$$

如 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\cdot d\tau < \infty$ ，有 $|y(t)| \le B\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\cdot d\tau < \infty$

2.3.2 LTI系统的稳定性

用完全类似的方法可得到离散LTI系统稳定的充要条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

即系统的单位脉冲响应绝对可和。

例2.10

【例2.10】 考查累加器的稳定性。

解：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

因为累加器的单位脉冲响应 $h[n]=u[n]$ ，因此有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\,h[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u[n]=\sum_{n=0}^{\infty}1=\infty$$

所以累加器是非稳定系统。

2.3.3 LTI系统的因果性

一个因果系统的输出仅决定于现在和过去时刻的系统输入值。

- 考虑离散时间LTI系统，其输出可表示为:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]h[n-k]+\sum_{k=n+1}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

- 分析:

上式中的第二项与将来的输入有关，危保证其输出与将来的输入无关，必使第二项等于零。

即在 $k>n$ □ $(n-k<0)$□ $h(n-k)=0$

2.3.3 LTI系统的因果性

- 离散时间LTI系统的因果性的充要条件：

$$h[n]=0, \qquad n<0$$

- 同理，一个连续时间LTI系统因果性的充要条件为：

$$h(t)=0, \qquad t<0$$

例2.11

【例2.11】 考查系统 $y(t)=x(t-t_0)$。

其冲激响应为 $h(t)=\delta(t-t_0)$ 。

当 $t_0 \geq 0$ 时，是因果系统，系统为一延时器；
当 $t_0 < 0$ 时，是非因果系统，系统的输出超前输入。

同样，对于离散LTI系统 $y[n]=x[n-n_0]$，仅当 $n_0 \geq 0$ 时，才是一因果系统，系统是一离散时间的延时器。

2.3.4 LTI系统的单位阶跃响应

- 连续时间LTI系统，其单位阶跃响应为

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) \cdot d\tau$$

- 离散时间LTI系统，其单位阶跃响应为

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

2.3.4 LTI系统的单位阶跃响应

阶跃响应和冲激响应之间的关系：

- 连续时间LTI系统

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\cdot d\tau \qquad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$

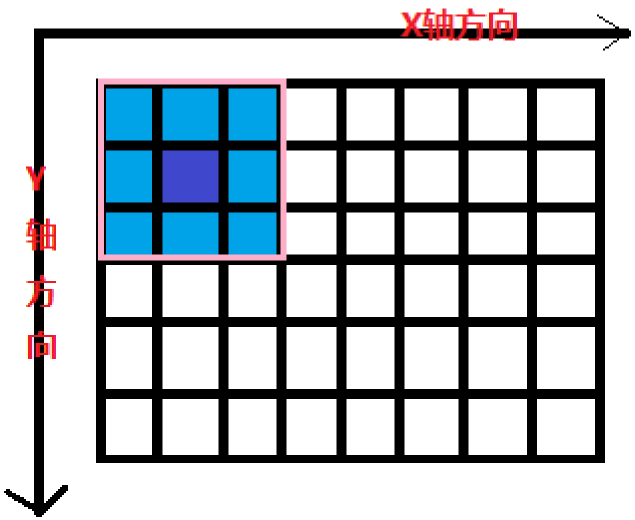
$$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*\frac{ds(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}*s(t)$$

- 离散时间LTI系统

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k] \qquad h[n]=s[n]-s[n-1]$$

$$y[n]=x[n]*h[n]=x[n]*(s[n]-s[n-1])=(x[n]-x[n-1])*s[n]$$

卷积运算在数字图像处理中的应用
图像模糊化



$$h = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

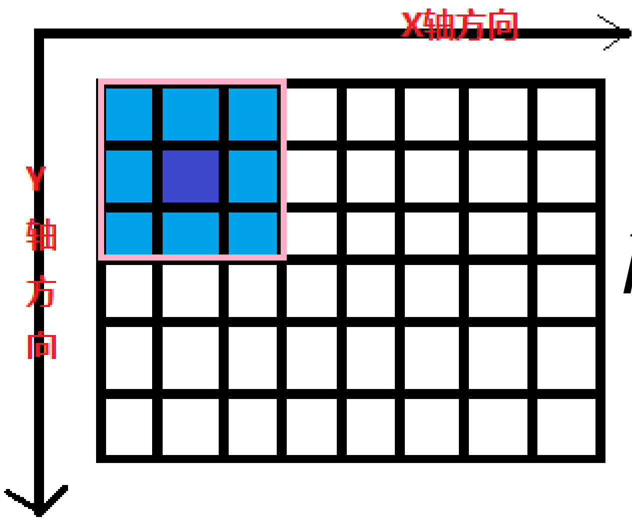
$$y[m,n] = \sum_{u,v} x[u,v]h[m-u,n-v]$$

卷积运算在数字图像处理中的应用

原图

模糊化后图像

卷积运算在数字图像处理中的应用
边缘提取



$$h = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

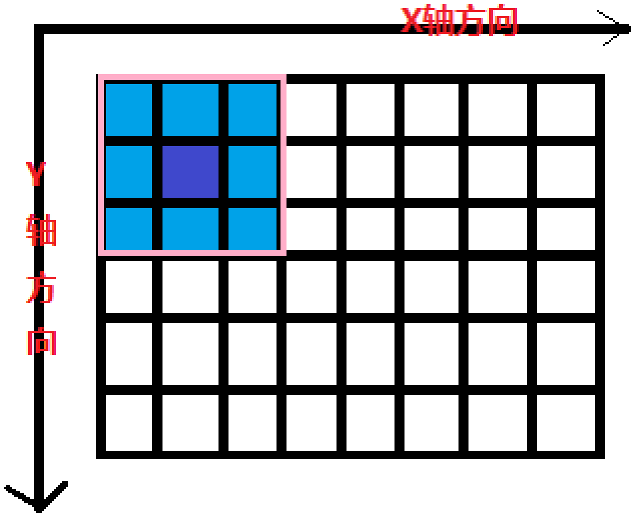
$$y[m,n] = \sum_{u,v} x[u,v]h[m-u,n-v]$$

卷积运算在数字图像处理中的应用

原图

边缘检测后图像

卷积运算在数字图像处理中的应用
边缘提取



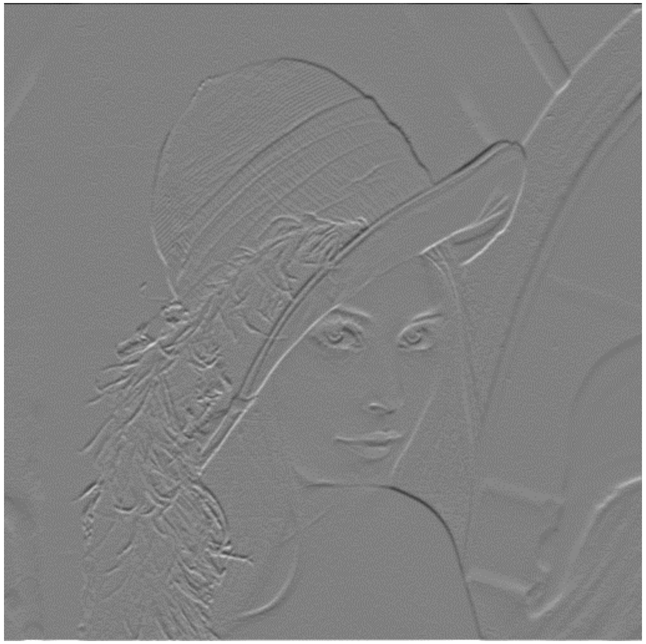
边缘检测中的Sobel算子

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$y[m,n] = \sum_{u,v} x[u,v]h[m-u,n-v]$$

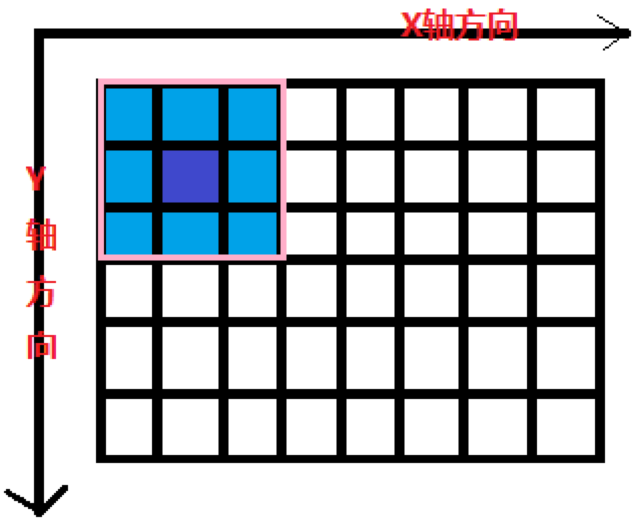
卷积运算在数字图像处理中的应用

原图



边缘检测后图像

卷积运算在数字图像处理中的应用
边缘提取



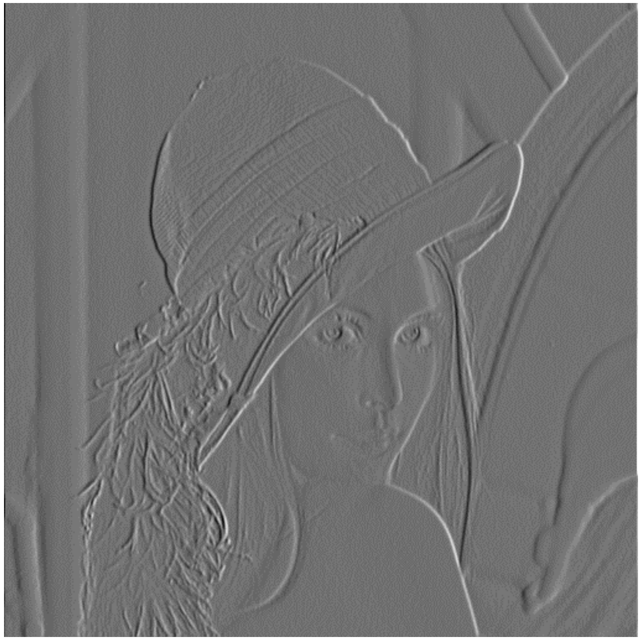
边缘检测中的Sobel算子

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$y[m,n] = \sum_{u,v} x[u,v]h[m-u,n-v]$$

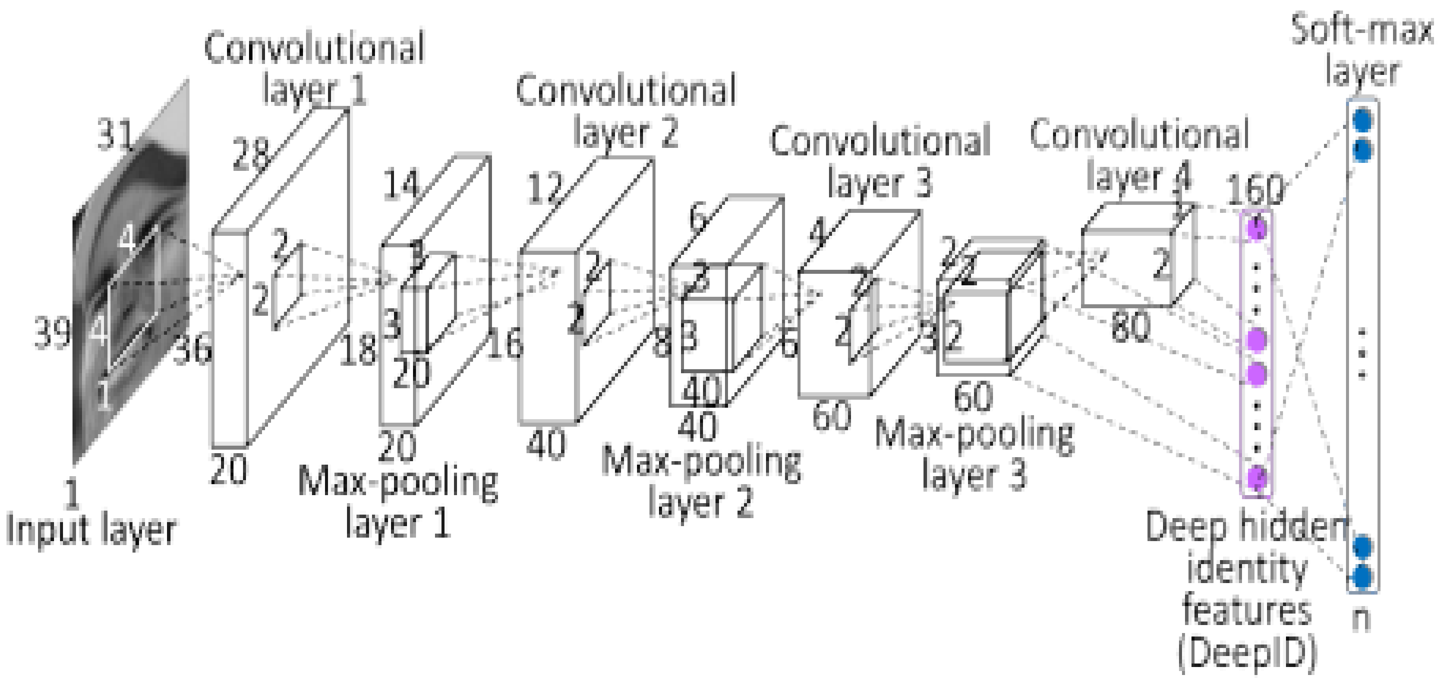
卷积运算在数字图像处理中的应用

原图



边缘检测后图像

卷积神经网络人脸识别（Convolutional Neural Network for Face Recognition）



卷积神经网络人脸识别（目前识别率最好的算法）