第一章

满足齐次性但不满足叠加性的系统

但很容易举出反例：

实际上所有，其中与都是线性函数，都满足。

满足叠加性但不满足齐次性系统

在复数域上考虑该问题

满足叠加性，但不满足齐次性：

但

若，，都是实数，需要实变函数知识。

性质：

性质1：

证明：,因此

性质2：，性质1可看作性质2的特例。

证明：

性质3：

补充知识：奇异函数相等？勒贝格定义：两个函数和相等，是指对任意一个符合要求的测试函数，都有：

上式积分可以发散，要发散就一起发散。

例1：根据上述定义，单位阶跃函数在时的取值可以为任意的，因为一个点的值不影响积分值。

例2：如果两个函数和在某个区间上，恒有，则。

例3：如果在有限个点上，但其他点上，则。

例4：在勒贝格积分下，例3的有限个点可以变成可数个点。可参考实变函数教材了解勒贝格积分。今后函数相等专指勒贝格定义下的相等。

定理：若，则

证明：

下面证明性质3：

所以有(勒贝格定义函数相等)

性质4：

证明：

换元，设，则有：

时：

时：

因此：

左边=右边，命题成立

性质5：的多样性。根据勒贝格函数定义，我们需要证明某函数是，只需要证明任意测试函数，有：

试证明:

证明：

引理1：若在连续且有界，则：

证明：

以上证明不严格，我们假定了最后两项有限。严格证明请参阅张筑生《数学分析新讲》第二十章。

上述引理直观上很好理解。当很大时，振荡非常激烈，如果和相乘，在一小段内，必然正负循环很多次，这些值如果积分，会相互抵消，因此值为0。



引理2：

使用复变函数知识进行证明

引理3：

请自己证明

应用上面的引理，证明：

只需证明：

根据引理1，若在连续且有界，则左边=0。但在时不连续且无界，因此引入下面技巧：

分析上式第一项，若设：

可以证明在处连续且有界，因此根据引理1：

另一方面，根据引理3：

因此

得证。

性质6（性质4是性质6的特例）：

证明：只需证明

不失一般性，设



则

由于在区间、、中，，则在这些区间上，，因此上式中1、3、5式为0，仅需考虑2、4式。

先看2式。假设且，设，由于在单调增，因此存在反函数，有：

换元，设，则，有：

由于，则，又由于反函数导数是原函数的倒数，因此

第三章

傅里叶级数

信号的正交分解

傅里叶级数之所以能写成简单的形式，是因为以下函数族：

任何两个相乘后在上积分都为0。

因此引入正交基的概念：若一组函数满足当时，内积，则称这族函数为正交基函数。

内积运算需要满足下面四个性质：

a.交换律：，横线表示共轭

b.齐次性：

c.结合律：

d.非负性：，当且仅当时等号成立

若一组正交基函数满足，，则称这组函数为标准正交基。

施密特正交化：若不是正交基函数，以下过程可获得一组正交基：

单位化：

假设信号可以写成一组正交基的分解形式：

其中为一组正交基，则：

其收敛性时需要证明的。

傅里叶变换

若

求证：

证明：

由于

因此：

常用傅里叶变换对

(1) 单边指数信号

(2)单位冲激信号

(3)双边指数信号

(4)冲击偶信号

方波和Sa(t)互为傅里叶变换

(5)矩形窗

记忆：为矩形的面积，中为方波的界限

为什么Sa前面的系数是方波的面积？

由于，而，因此

例：

解答：Sa对应的是方波，而方波截止的界限就是3，因此

现在确定E。因为

所以

由于

故

即

(6)抽样信号

第二项积分内为t的奇函数，积分结果为0

由于

故

反推：见教材

记忆：右边矩形的截止的界限就是左边sin里面t的系数，右边的矩形高度即为左边的面积，在标准型中。

例：

解答：方波对应Sa，方波的截止界限为3，故

(7)

反推见教材。

(8)单位阶跃函数

证明：反推

正推：

下面证明

我们知道若满足狄里赫利三条件，则

证明勒贝格定义下的相等，即证明

因此我们有

上式为了解决0处的发散问题，其核心思路是

上式等号右边第一项为0（根据三条件结论），第二项积分内为的奇函数，故也为0，因此

所以

综上