

# 课程回顾

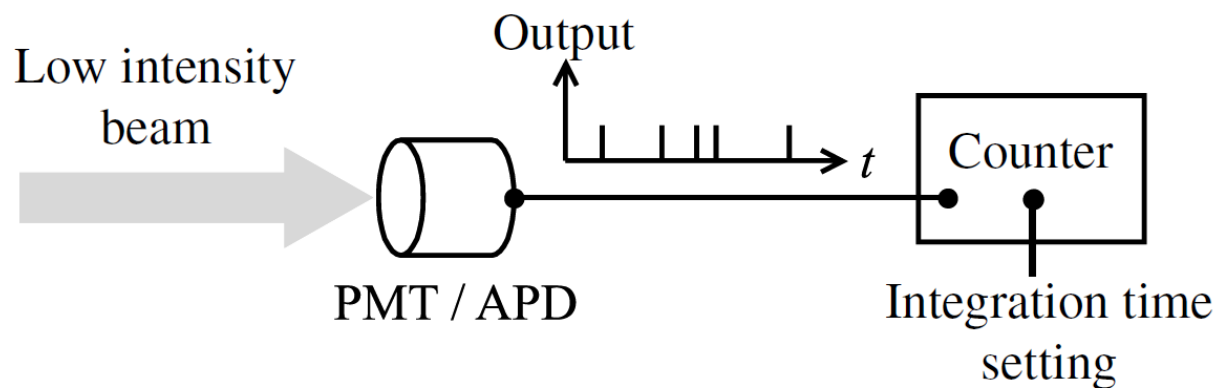
---

- 激光器工作的三个条件：**泵浦源**（粒子数反转）、**谐振腔**、**增益介质**。
- 激光器工作原理：增益介质在泵浦作用下实现粒子数反转，在谐振腔的协助下对自发辐射光进行正反馈放大。
- 半导体**双异质结**激光器可实现对**载流子**的有效约束。
- **光波导**结构可实现对光场的横向约束。

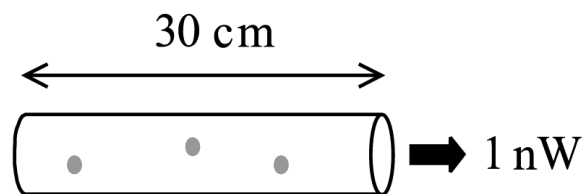
## C4-4 光子相关测量基础

# 课程回顾

- 量子测量与被测系统不可分割，结果一般具有不确定性，非对易测量无法同时得到确定结果。
- 一般使用单光子探测器进行光子的量子测量。例如APD、MPT、SNSPD。
- 光子的量子测量一般将转化为“计数”问题。



# 光子计数(3)



考虑氦氖激光器发出波长为633nm（对应的单光子能量为2eV）的红光，如果激光功率为1mW，并衰减 $10^6$ 倍。平均光子速流为：

$$\Phi = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{10^{-9}}{2.0 \times (1.6 \times 10^{-19})} = 3.1 \times 10^9$$

光的速度为 $3 \times 10^8$ m/s，考虑3米长的光束，平均会有31个光子，对应的光子计数时间为 $10^{-8}$ 秒。如果考虑更短的光子计数时间，比如1纳秒= $10^{-9}$ 秒，那么光子的数量会变成一个非整数3.1个光子，但光子计数必须是一个整数，如果测量多次，会得到类似于下面的结果

1, 6, 3, 1, 2, 2, 4, 4, 2, 3, 4, 3, 1, 3, 6, 5, 0, 4, 1, 1, 6, 2, 2, 6, 4, 1, 4, 3, 4, 6, ...

30次计数总共观测到大约95个光子。

如果计数时间更短，比如0.1纳秒= $10^{-10}$ 秒，平均每次测量会有0.31个光子，如果测量多次，会得到类似于下面的结果：

1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, ...

10次计数总共观测到大约3个光子。

含时微扰论

# 泊松统计(1)

- 由于光子的量子化特点，它的浮动范围遵循一定的统计规律。对于完美的相干光束（单色性非常理想的激光），由于光强和平均光子速流恒定，其遵循泊松光子统计。

考虑功率恒定为  $P$  的一束光，长度  $L$  内的平均的光子数为

$$\bar{n} = \Phi L / c$$

假设我们把  $L$  分成  $N$  段， $N$  是足够大的一个大数。对于长度  $L/N$  中发现一个光子的概率  $p = \bar{n}/N$  是非常小的，这种情况下在长度  $L/N$  上发现2个或者多个光子的概率可以忽略。现在的问题为在  $L$  上发现  $n$  个光子概率  $\mathcal{P}(n)$  是多大？

$$\mathcal{P}(n) = \frac{N!}{n! (N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{N!}{n! (N-n)!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = \frac{1}{n!} \left(\frac{N!}{(N-n)! N^n}\right) \bar{n}^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}$$

利用斯特林近似

$$\ln(N!) \approx N \ln(N) - N, \quad N \gg 1$$

# 泊松统计(2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \ln \left( \frac{N!}{(N-n)! N^n} \right) \right] = 0$$

所以

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{N!}{(N-n)! N^n} \right] = 1$$

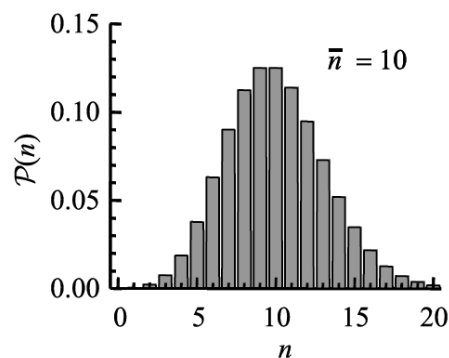
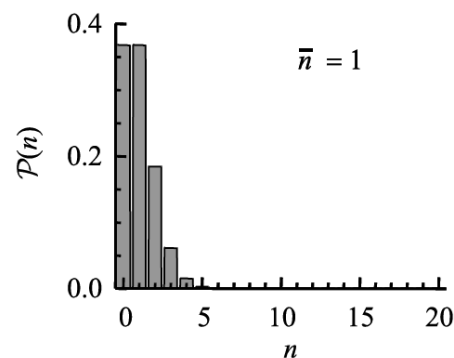
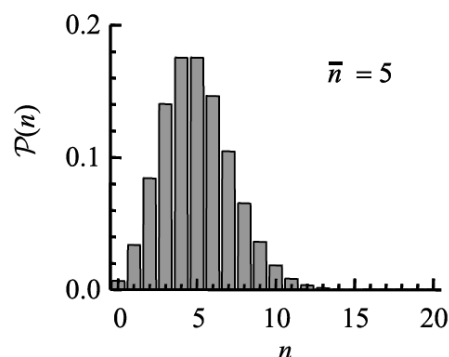
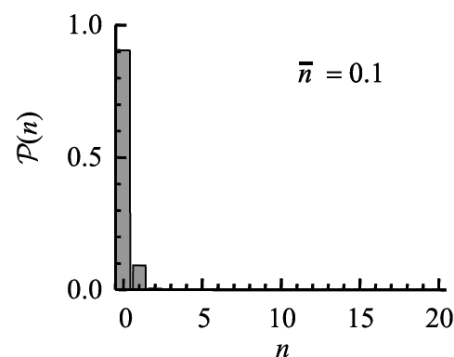
另外

$$\left( 1 - \frac{\bar{n}}{N} \right)^{N-n} = 1 - (N-n) \frac{\bar{n}}{N} + \frac{1}{2!} (N-n)(N-n-1) \left( \frac{\bar{n}}{N} \right)^2 - \dots \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{2!} - \dots = e^{-\bar{n}}$$

$$\mathcal{P}(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

光子的泊松统计公式

# 泊松统计(3)



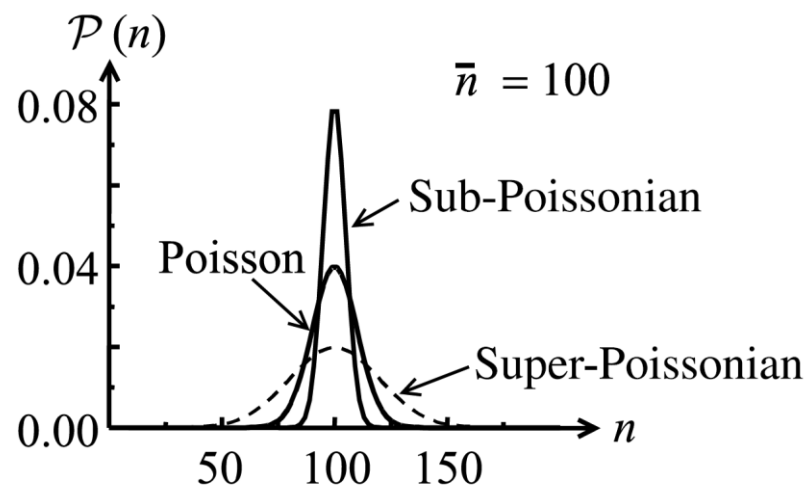
在泊松统计中，随着平均光子数增加，可能探测到的光子计数范围变得更加宽广。因此可以定义光子计数的变化量为标准方差的平方，即

$$\text{Var}(n) \equiv (\sigma(n))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 \mathcal{P}(n) = \bar{n}$$

所以

$$\sigma(n) = \sqrt{\bar{n}}$$

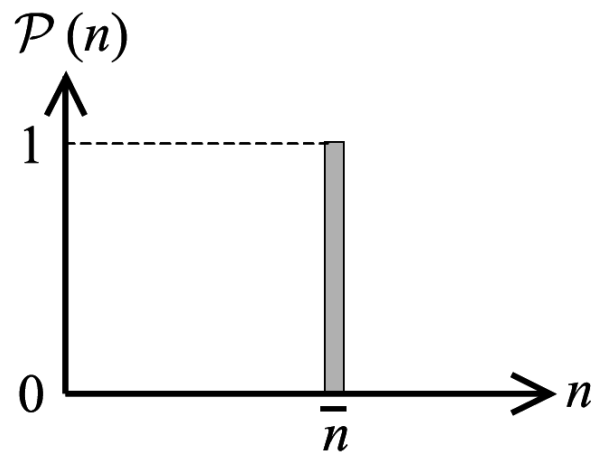
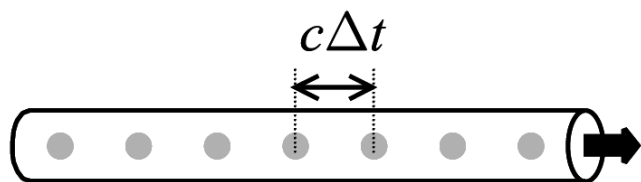
# 光源的分类



- 光源的统计性质，根据其涨落与泊松统计的关系可以分为以下三类：
  - 亚泊松统计， $\sigma(n) < \sqrt{\bar{n}}$ ；
  - 泊松统计， $\sigma(n) = \sqrt{\bar{n}}$ ；
  - 超泊松统计， $\sigma(n) > \sqrt{\bar{n}}$ 。
- 超泊松分布代表着更宽的光子数分布，不难想象这代表着更为不稳定的光源。所以非激光的传统光源由于光强不稳定，会导致超泊松分布。
- 亚泊松分布代表着比完美激光更为稳定的光源，也被称为非经典光源，典型的代表是单光子源。



# 亚泊松光源(1)



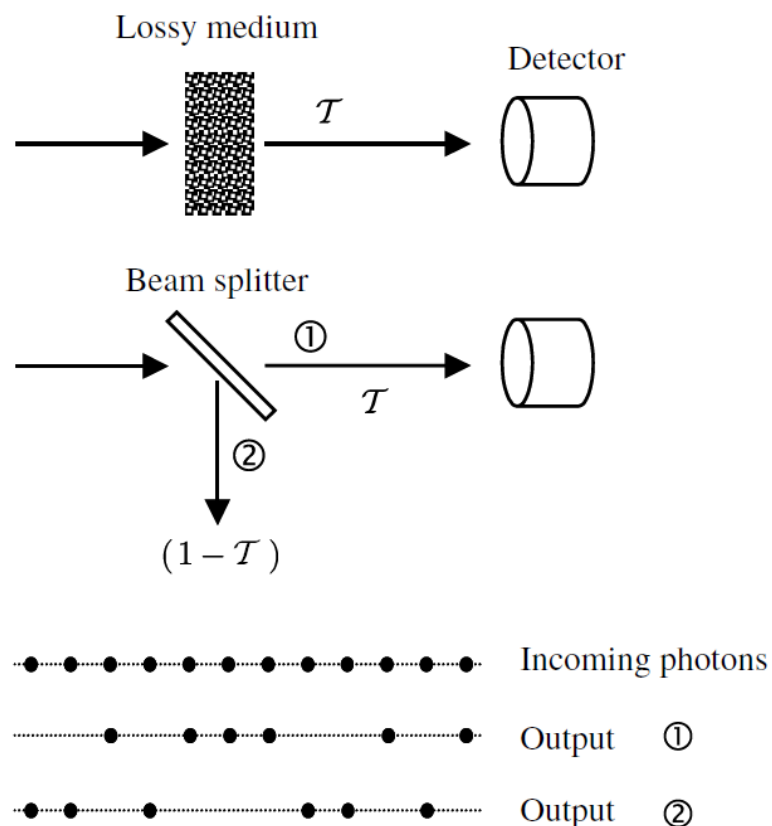
- 亚泊松光源满足  $\sigma(n) < \sqrt{\bar{n}}$ ，是超经典的，因而没有经典对应光源的例子。

如果我们考虑一队光子等间距地出现，间距满足  $\Delta x = c\Delta t$ ，因此  $T$  时间内的光子计数为

$$N(T) = \text{Int} \left( \eta \frac{T}{\Delta t} \right)$$

每次测量得到的结果都是一样的，因此  $\bar{n} = N$  而且  $\sigma(n) = 0$ 。这也就是一个完美的单光子源。

# 亚泊松光源(2)



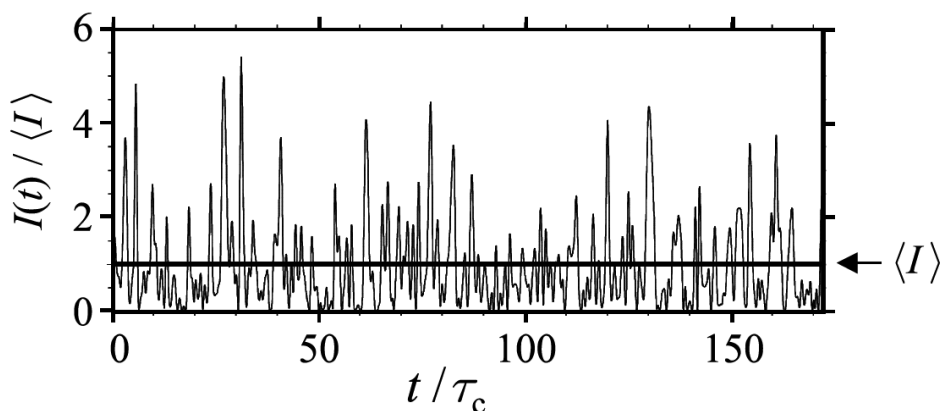
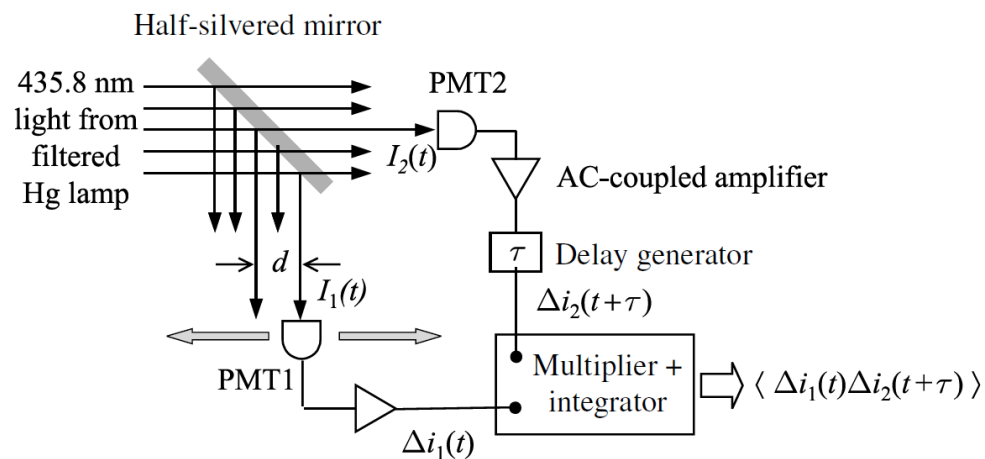
假设一个完美的单光子源发射的单光子经过一个光损媒介，如果这时光子的通过率是 $\mathcal{T}$ ，那么光损媒介可以看作是一个 $\mathcal{T}:1 - \mathcal{T}$ 的光分束器，也就是分束后的两路光中平均光子数的比例为 $\mathcal{T}:1 - \mathcal{T}$ 。

由于光损（或者分束）是一个随机过程，所以实际的单光子源测试不可避免地偏离完美单光子源。造成光损的原因有：

- (1) 不充分的采集；
- (2) 光学元件引入的损耗，比如吸收，散射，反射等不完美过程；
- (3) 不完美的探测。

而这些都是不可避免的！因此单光子源的统计性质容易被破坏，是非常脆弱的光源。

# HBT实验（关联测量）



- Hanbury Brown-Twiss实验简称HBT实验，是一种检验光场强度相关性的实验方法，最初用于改善双星系统测试的角分辨率。
- 来自经典光源的光线被分束器分为两束，分别被光电探测器接收。将其中一路信号延迟  $\tau$  后，两路信号经过乘法器并取时间平均得到  $\langle \Delta I(t) \Delta I(t + \tau) \rangle$
- 考虑光线本身的相干时间为  $\tau_c$ ，当  $\tau \gg \tau_c$  时  

$$\langle \Delta I(t) \Delta I(t + \tau) \rangle_{\tau \gg \tau_c} = 0$$
- 如果两路信号的延迟为0，则  

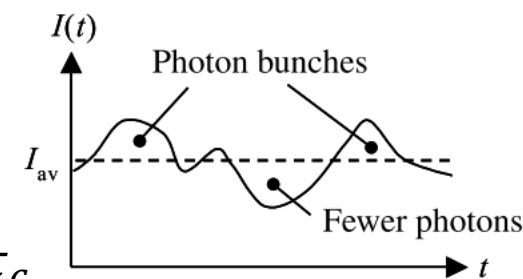
$$\langle \Delta I(t) \Delta I(t + \tau) \rangle_{\tau=0} = \langle \Delta I(t)^2 \rangle$$

# 二阶关联函数(1)

根据HBT实验，我们定义二阶关联函数  $g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t+\tau) \rangle}$

一般情况下光场的平均强度随时间不变， $\langle I(t) \rangle = \langle I(t+\tau) \rangle$ 。

分离出光场强度中的时间相关项  $I(t) = \langle I \rangle + \Delta I(t)$ 。由于  $\langle \Delta I(t) \rangle = 0$ ，对于  $\tau \gg \tau_c$



$$\begin{aligned} \langle I(t)I(t+\tau) \rangle_{\tau \gg \tau_c} &= \langle (\langle I \rangle + \Delta I(t))(\langle I \rangle + \Delta I(t+\tau)) \rangle \\ &= \langle I \rangle^2 + \langle I \rangle \langle \Delta I(t) \rangle + \langle I \rangle \langle \Delta I(t+\tau) \rangle + \langle \Delta I(t) \Delta I(t+\tau) \rangle = \langle I \rangle^2 \end{aligned}$$

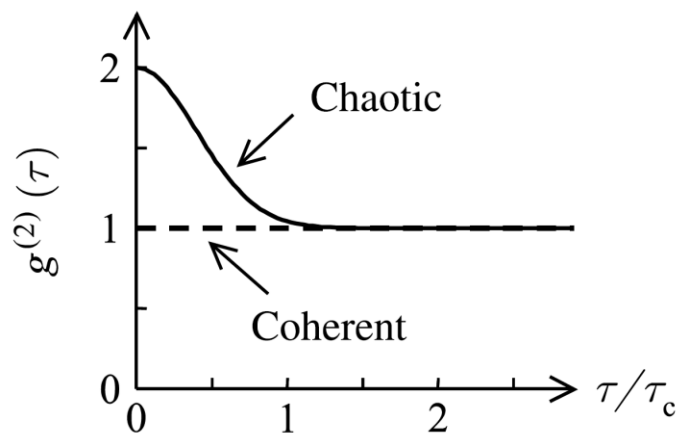
所以

$$g^{(2)}(\tau \gg \tau_c) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{\langle I(t) \rangle^2}{\langle I(t) \rangle^2} = 1$$

对于  $\tau = 0$

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle I(t)I(t) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{\langle I(t)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}$$

## 二阶关联函数(2)



一般情况下  $g^{(2)}(0) \geq 1$        $g^{(2)}(0) \geq g^{(2)}(\tau \gg \tau_c)$

对于完美的相干光源（单色性很好的激光）

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{I_0^2}{I_0^2} = 1$$

对于不同线型的混乱光源（chaotic light），比如高斯线型的光源

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-\pi(\tau/\tau_c)^2}$$

或者洛伦兹线型的光源

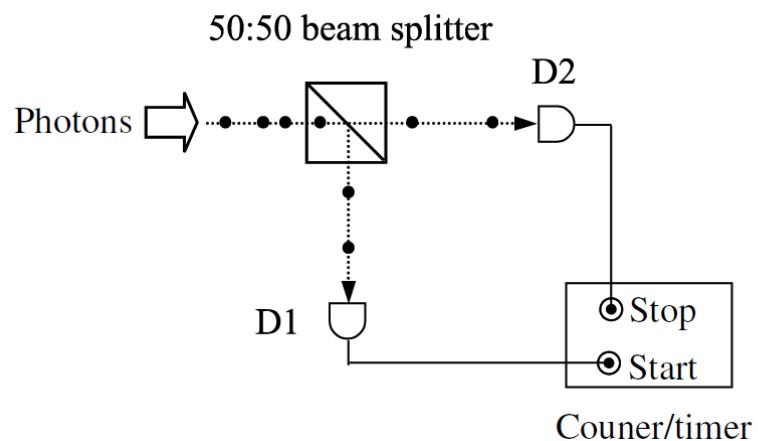
$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2|\tau|/\tau_0}$$

以上两种光源都满足

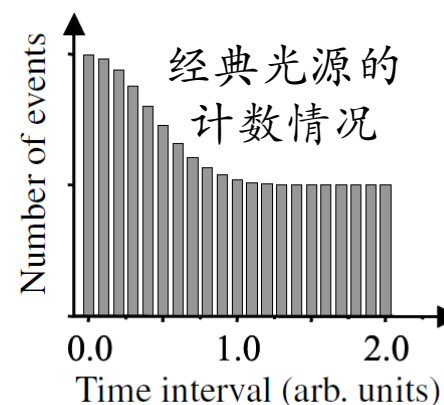
$$g^{(2)}(0) = 2$$

# 非经典光源

- 考虑光子场景下的HBT实验设备。光电探测器将被单光子探测器所取代。一队光子通过50:50的分束器被平分为两队光子，分别被单光子探测器D1和D2所探测，并连接到光子计数器上。光子计数器会记录每个计数的时间，以及计数之间的时间差。
- 二阶关联函数在光子数表象下为
$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_1(t)n_2(t+\tau) \rangle}{\langle n_1(t) \rangle \langle n_2(t+\tau) \rangle}$$
- 对于非经典光源，比如单光子源，由于D1发生计数时，D2不发生计数，或者反之（单个光子通过分束器只能出现在某一路上），满足 $g^{(2)}(0) = 0$ 。



含时微扰论

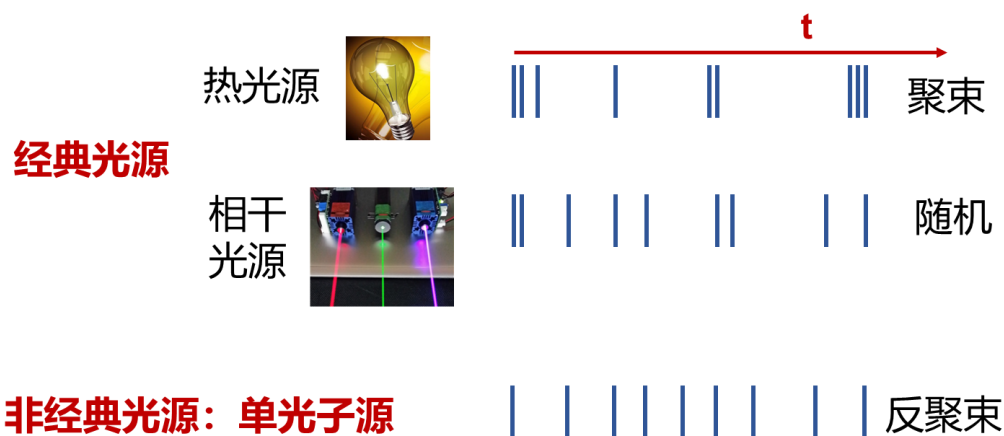


# 光子聚束与反聚束

Classical description	Photon stream	$g^{(2)}(0)$
Chaotic	Bunched	$>1$
Coherent	Random	$1$
None	Antibunched	$<1$

- 根据光源的统计性质，可分为超泊松统计，泊松统计和亚泊松统计三类，大致对应于三类聚束性质（为何不是完全对应？）：

- 聚束光源， $g^{(2)}(0) > 1$ ；
- 相干光源， $g^{(2)}(0) = 1$ ；
- 反聚束光源， $g^{(2)}(0) < 1$ 。

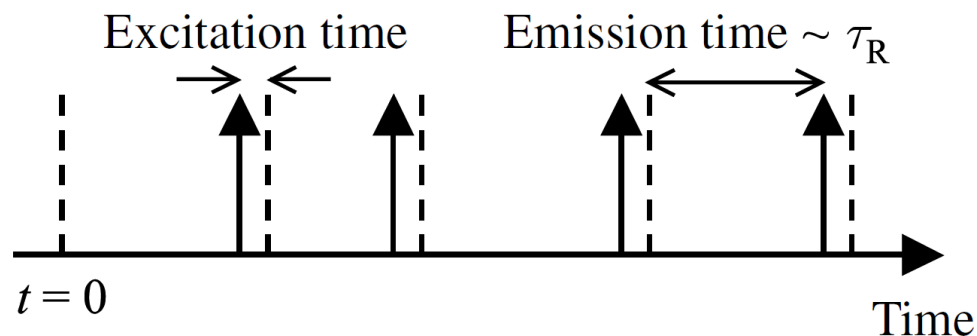


- 注意：存在损耗介质的情况下，虽然单光子源的亚泊松统计会被削弱，但不会改变其反聚束的特征。为什么？
- 在实验中的单光子源经过长时间积分，可以较为准确地测得  $g^{(2)}(0)$ 。

# 光子反聚束实验(1)



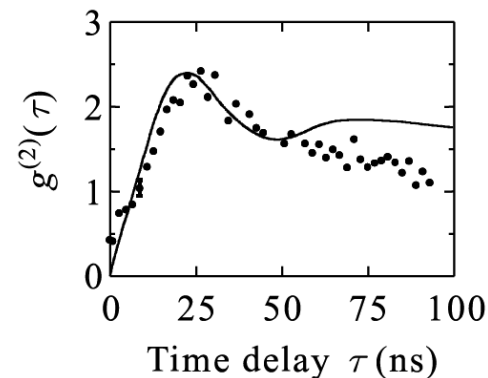
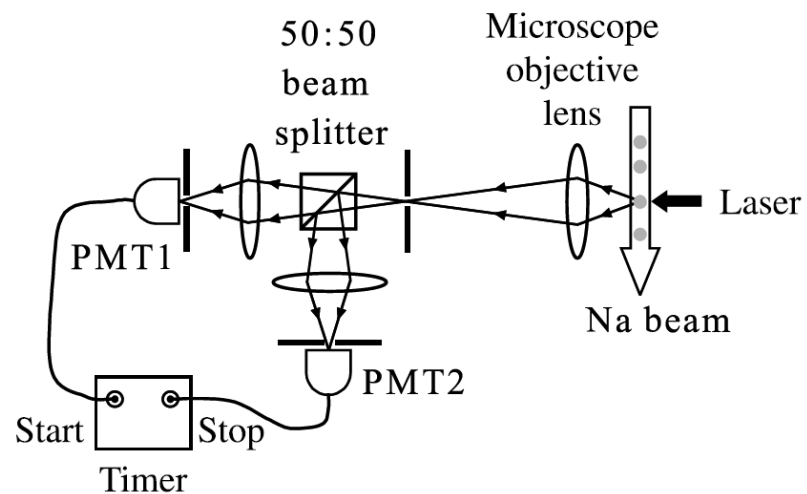
- 1977年, Jeff Kimble等人实现了第一个单光子反聚束实验。
- 实验基于电子在原子能级间跃迁导致的发光。由于每次泵浦原子后, 电子的跃迁只能发出一个光子, 因而具有光子反聚束的特点。
- 光子反聚束实验实际上是第一个只能用量子理论解释的量子光学实验。



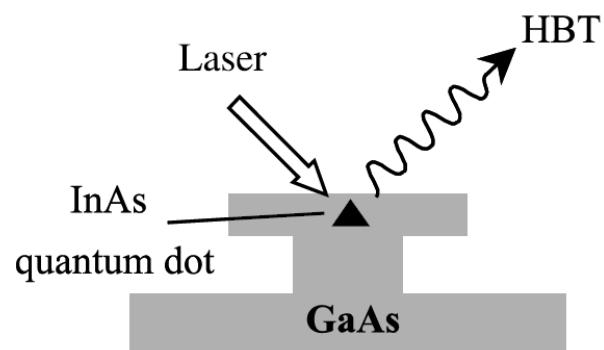


# 光子反聚束实验(2)

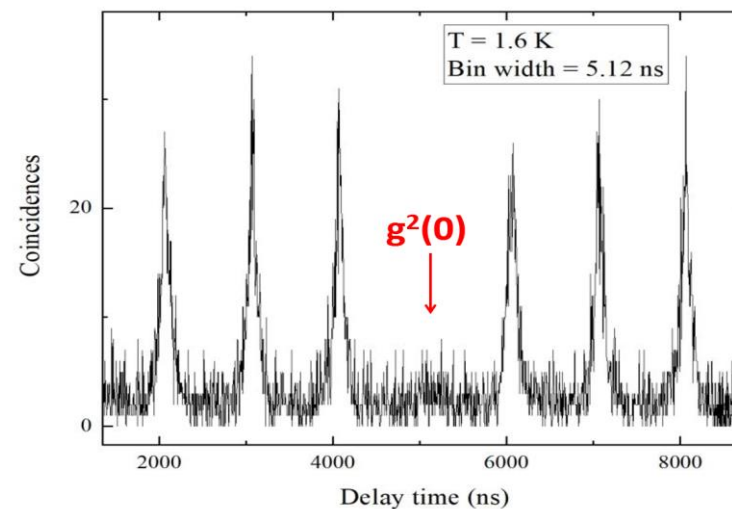
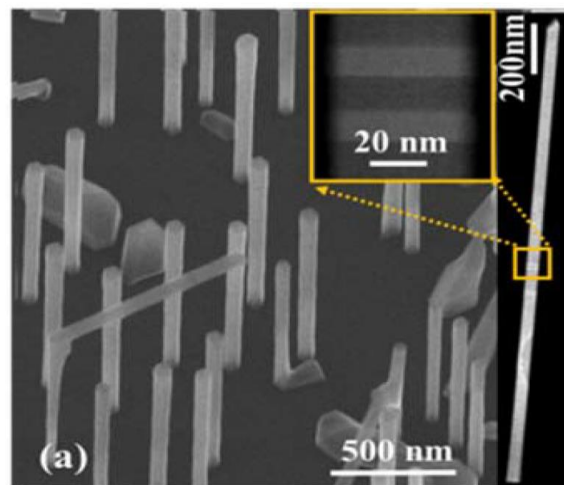
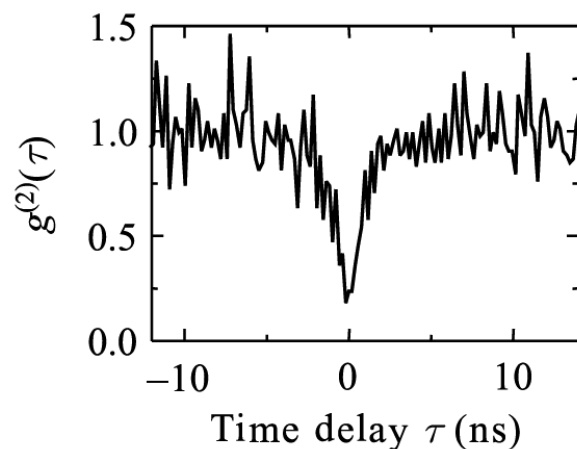
- 在实验中，一束激光照射到Na原子队列上，确保每次只有1-2个Na原子发光。Na原子发光被收集起来，通过50:50的分束器后，分别被两个光电倍增管所探测。
- 明显的 $g^{(2)}(0) \approx 0.4 < 1$ 被实验观测到了。但是在当时的实验条件下，由于很难保证每次只有一个Na原子被照射后发光，所以 $g^{(2)}(0) \neq 0$ 。



# 光子反聚束实验(3)



- 在后来的研究中，光子反聚束实验在下述固态物质体系中成功实现：
  - 染料分子发光；
  - 半导体量子点发光；
  - 金刚石中色心发光。



# 参考文献

---

- 单光子源和泊松统计主要参考
  - Mark Fox, Quntum Optics – An Introduction, Oxford University Press (2006). 第5、6章。
- HBT实验和光子反聚束主要参考
  - Mark Fox, Quntum Optics – An Introduction, Oxford University Press (2006). 第6章。

## 第四章小结

- 设体系哈密顿量为 $H(t) = H^0 + H'(t)$ ，其中 $H^0$ 与时间无关，仅微扰 $H'(t)$ 与时间相关。假设波函数的含时表达为 $\Psi(t) = c_a(t)\psi_a e^{-iE_a t/\hbar} + c_b(t)\psi_b e^{-iE_b t/\hbar}$ ，代入薛定谔方程后可以得到含时系数 $c_a(t)$ 和 $c_b(t)$ 。
- 二能级体系在周期性微扰下的跃迁几率公式：

$$P_{a \rightarrow b}(t) = |c_b(t)|^2 \cong \frac{|V^{ba}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

- 在非相干扰动情况下，得到二能级体系的跃迁速率，以及爱因斯坦系数之间的关系以及费米黄金规则。
- 受激辐射提供了激光器的理论基础。激光器激射的三个条件：泵浦源、谐振腔、增益介质。自发辐射提供了发光二极管的理论基础。
- 由于光子的量子化特点，光子计数的波动范围遵循一定的统计规律。完美的相干光束（单色性非常理想的激光）遵循泊松光子统计。超泊松光源的典型代表是热光源；亚泊松光源的典型代表是单光子源。单光子反聚束效应确认了光的粒子性。

# 备注

## 用粒子数算符、产生湮灭算符表示的二阶关联函数的表达式实为

$$g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(\chi_1; \chi_2) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2}. \quad g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2} = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2} = 1 + \frac{(\Delta n)^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2}.$$

The basic reason for the difference between the ranges of values of the degree of second-order coherence in the classical and quantum theories lies in the forms of their numerators, respectively  $\langle I^2 \rangle$  and  $\langle n(n-1) \rangle$ . We have seen that these quantities describe experiments of the Brown–Twiss variety, which essentially measure the intensity or photon number of the light beam twice in succession. A classical measurement of the intensity leaves its value  $I$  unchanged for the second measurement and  $I^2$  is the quantity to be averaged. However, the quantum average of  $n(n-1)$  exemplifies the principle that a quantum measurement generally interferes with the measured system. Thus, in the present example, the measurement acts by determination of the rate of photon absorption and it reduces the photon number by 1, so that the second measurement finds only  $n-1$  photons. This effect lies at the root of the differences between the degrees of second-order coherence in the classical and quantum theories.