

设计离散系统计算窄带信号的瞬时频率和幅度

;; 信息与工程学院; 电子科学与技术

摘要：对于窄带信号 $x(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta(t))$ ，在现实生活中有诸多应用。因其时变非平稳的特点，通常使用幅度、瞬时相位、瞬时频率等特征来描述一个窄带信号。本文借助 MATLAB，基于希尔伯特变换，对一个窄带信号的幅度、瞬时相位和瞬时频率的求解方式做了多种仿真，提供了一些可行方法。

关键词：数字系统；窄带信号；希尔伯特变换

一、背景

众所周知，现实生活中的信号大多数是时变、非平稳、多分量信号，随着科学技术的不断发展进步，对时变非平稳信号的分析已经成为研究的热点方向之一。对于时变非平稳信号，可以通过时域特征、频域特征、时频域特征等各种特征对其进行描述，通过特征可以更加深入地了解信号蕴含的信息。因此，时变非平稳信号的特征检测与提取是十分有必要的。

平稳信号是指频率不随时间变化的信号，非平稳信号就是指频率随时间变化的信号，所以对非平稳信号进行分析时，求解瞬时频率是必要的过程，就像一个平稳信号可以用傅里叶变换来进行频谱分析一样，可以让我们了解一个信号的频率成分。

瞬时频率作为非平稳信号分析的重要参数，已经广泛应用于桥梁振动检测、地震勘测、机械、电力系统、雷达、通信等各方面。

二、问题分析

想要对非平稳的窄带信号做幅度和瞬时频率的分析，有以下几个问题：

- (1) 对于连续的正弦信号，可以通过希尔伯特变换求其幅度和瞬时频率。但数字系统只能处理离散信号，所以需要设计一个离散的希尔伯特变换器来求解。
- (2) 对于窄带信号 $x(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta(t))$ ，要使用数字系统进行处理，首先要对其采样，得到离散的信号。为了保证离散信号能够还原回原始信号，需要满足基尔霍夫采样定理。
- (3) 在设立离散的希尔伯特变换器时，可以采用 FIR 滤波器设计。对于 FIR 滤波器而言，其理论形式无限长的，所以只能截取部分运用。在截取方式上，如果直接采用理想的矩形窗函数，会导致明显的吉布斯效应，所以考虑采用其他的窗函数，这是使用窗函数法求 FIR 滤波器。

三、理论

对于利用希尔伯特变换求解连续信号的幅度和瞬时频率，给出以下证明：

对于输入信号 $x(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta(t))$ ，通过希尔伯特变换器得到

$$\hat{x}(t) \approx A(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \theta(t)) \quad (1)$$

因此有

$$|A(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \quad (2)$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \theta(t) = \arctan\left(\frac{\hat{x}(t)}{x(t)}\right) \quad (3)$$

设 $q(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = |A(t)|e^{j\varphi(t)}$ ，则有

$$\ln[q(t)] = \ln|A(t)| + j\varphi(t) \quad (4)$$

$$\varphi(t) = \text{Im} \{ \ln[q(t)] \} \quad (5)$$

则有瞬时相位

$$\omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \text{Im} \left\{ \frac{d \ln[q(t)]}{dt} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{q(t)} \frac{dq(t)}{dt} \right\} \quad (6)$$

四、 采样

使用冲激串采样，就是将 $x(t)$ 与冲激串函数 $p(t)$ 相乘，有

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x(t)p(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $x(nT) = x[n]$ 。

对 $x(t)$ 作傅里叶变换，则有

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)), \omega_s = \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (8)$$

对于带限信号 $x(t)$ ，当 $|\omega| > \omega_M$ 时， $X(j\omega) = 0$ 。故 $\omega_s > 2\omega_M$ 时， $X_p(j\omega)$ 频域内不会重叠，能够还原回原信号。

五、 离散希尔伯特变换器

设计离散的希尔伯特变换需满足

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} j, & -\pi < \omega < 0 \\ -j, & 0 < \omega < \pi \end{cases} \quad (9)$$

对 $H(e^{j\omega})$ 作傅里叶反变换，有

$$\begin{aligned} h[n] &= F^{-1} [H(e^{j\omega})] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} j e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \end{aligned} \quad (10)$$

因此

$$h[n] = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \\ \frac{2}{\pi n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases} \quad (11)$$

$h[n]$ 是奇函数。

做 matlab 仿真得到离散希尔伯特变换器特征如图 1。

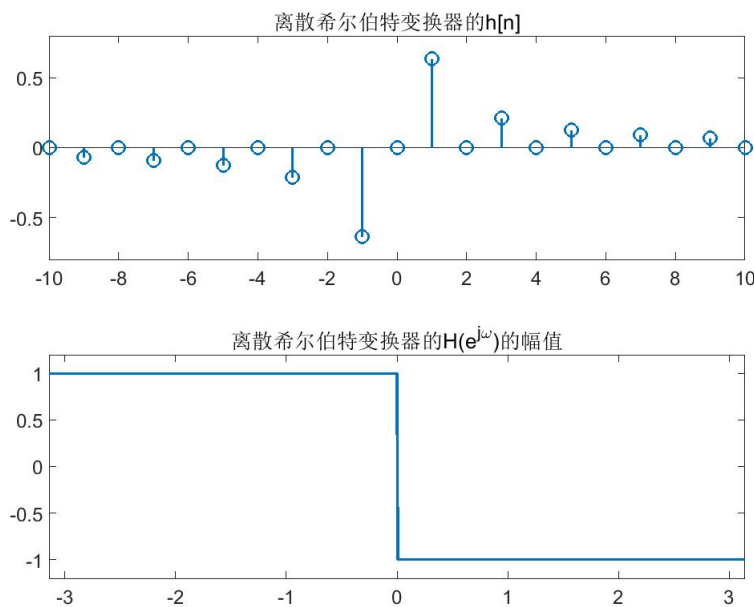


图 1: 离散希尔伯特变换器仿真

六、 FIR 滤波器逼近希尔伯特变换

FIR (Finite Impulse Response) 滤波器：有限长单位冲激响应滤波器，是数字信号处理系统中最基本的元件，它可以在保证任意幅频特性的同时具有严格的线性相频特性，同时其单位抽样响应是有限长的，因而滤波器是稳定的系统。因此，FIR 滤波器在通信、图像处理、模式识别等领域都有着广泛的应用。它采用“最大误差最小化”优化准则，即 $\min(\max |E(\omega)|)$ ，其中权函数误差 $E(\omega) = W(\omega)[H_d(\omega) - H(\omega)]$ ， $W(\omega)$ 为加权函数， $H_d(\omega)$ 为期望频率响应， $H(\omega)$ 为实际频率响应。应用这种方法设计的滤波器能够获得较好的通带和阻带性能，并能准确地指定通带和阻带边缘。由于该滤波器在通带和阻带的误差是均匀分布的，因此其频率响应在通带和阻带内显示出等波纹性，阶次可以比较低。

1. 切比雪夫等波纹逼近及等波纹最优化设计

切比雪夫等波纹逼近准则也称最大误差最小化准则，可以表示为

$$\max(|E(\omega)|) = \min(|\omega| F) \quad (12)$$

其中， $E(\omega)$ 为最大加权误差， F 为根据通带（或阻带）范围。切比雪夫等波纹逼近通过对通带和阻带使用不同的加权函数；实现在不同频段的加权误差最大值相同，从而实现其最大误差在满足性能指标的条件下达到最小值，即使得 $H_d(e^{j\omega})$ 和 $H(e^{j\omega})$ 之间的最大绝对误差最小。

等波纹滤波器的最优化设计方法主要有两种，第一种是离散最小二乘法，是在给定的离散点上，使实际的幅频特性和理想幅频特性之间的误差的平方和最小；第二种是最优化等波纹设计法，也称切比雪夫逼近法，这种滤波器的幅频特性在通带和阻带上的误差峰值是均匀的，其误差具有等波纹性，因而把波纹的幅度控制到最小，或在同等指标下减小它的阶次。第二种方法相对而言直接控制通带波动和阻带衰减，最具针对性，是滤波器的最优化设计方法。

在针对希尔伯特变换器的滤波器设计上，我们需要找到 $h[n]$ 满足以下条件：

- (1) $h[n]$ 在 $0 \sim N-1$ 范围内有值，确保 $h[n]$ 为因果有限长序列；
- (2) $h[n]$ 的傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 是线性相位，确保 $H(e^{j\omega})$ 具有理想滤波器的相位特性；

(3) 在一些特定的频率点上， $H(e^{j\omega})$ 等于我们想要的值。

由如上条件，分类讨论如下：

(1) N 为奇数且 $h[n] = h[N-1-n]$ 时

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} a_k \cos(\omega k) \quad (13)$$

(2) N 为偶数且 $h[n] = h[N-1-n]$ 时

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} a_k \cos(\omega(k - \frac{1}{2})) \quad (14)$$

(3) N 为奇数且 $h[n] = -h[N-1-n]$ 时

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} a_k \sin(\omega k) \quad (15)$$

(4) N 为偶数且 $h[n] = -h[N-1-n]$ 时

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} a_k \sin(\omega(k - \frac{1}{2})) \quad (16)$$

要符合条件 (3)，实际上是解多元方程。比较有名的是通过 Parks-McClellan 方法。

2. 窗函数法

窗函数法又称傅里叶级数法。由于前文需求的理想希尔伯特变换器是无限长序列，但是实际系统中只能用有限长序列。为了使 FIR 滤波器逼近理想希尔伯特变换器，需将理想希尔伯特变换器的无限长单位脉冲响应 $h_d[n]$ ，分别从左右进行截断。因为对于理想希尔伯特变换器，截断后的单位脉冲响应 $h_d[n]$ 非因果，所以将其右移使其变成因果序列。因时移而使系统增加的线性值不会对原始信号的幅度和瞬时频率产生影响。

理想希尔伯特变换的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 和 FIR 滤波器的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的积分平方误差定义为

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (17)$$

ε^2 也可以表示为

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_d[n] - h[n]|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} |h_d[n]|^2 + \sum_{k=0}^M |h_d[n] - h[n]|^2 + \sum_{k=M+1}^{\infty} |h_d[n]|^2 \end{aligned} \quad (18)$$

其中，只有第二项与 $h[n]$ 有关。为使第二项最小，即使

$$h[n] = h_d[n], 0 \leq k \leq M \quad (19)$$

用如上方法即可得到积分平方误差最小意义下的最佳 FIR 滤波器。

吉布斯现象是理想滤波器单位脉冲响应 $h_d[n]$ 截断获得的 FIR 滤波器的幅度函数 $A(\omega)$ 在通带和阻带都会有振荡现象。随着滤波器阶数增加，幅度函数在通带和阻带的波纹数量也随之增加，波纹宽度随之减小，但通带和阻带最大波纹的幅度与滤波器结束 M 无关。窗函数的主瓣宽度决定了 $H_d(e^{j\omega})$ 过渡带的宽度，窗函数长度 N 增大，过渡带减小。

将式 (11) 得到的理想希尔伯特变换器 $h[n]$ 右移 n_0 , 同时在 $[0, N-1]$ 上用窗函数, 其中 $N = 2n_0 + 1$, 得到

$$h_N[n] = h[n - \frac{N-1}{2}] \cdot w[n] \quad (20)$$

其中 $w[n]$ 表示不同的窗函数形式。若采用矩形窗函数, 会有明显的吉布斯现象, 可以考虑采用不同特点的窗函数来减小吉布斯现象的影响。

此时有 $\hat{x}[n] \approx x[n] * h_N[n]$

可得到

$$|A[n_0]| = |A(nT)| \approx \sqrt{x^2[n] + \hat{x}^2[n]} \quad (21)$$

$$\omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{q(t) \cdot \frac{dq(t)}{dt}} \right\} \quad (22)$$

另做如下近似

$$\begin{aligned} q[n] &= q(nT) = x[n] + j\hat{x}[n] \\ \frac{dq(t)}{dt} &\approx \frac{q[n+1] - q[n]}{T} \\ \frac{1}{q(t)} &= \frac{1}{\frac{q[n+1] + q[n]}{2}} = \frac{2}{q[n+1] + q[n]} \end{aligned} \quad (23)$$

其中 T 是信号的采样周期。则式 (14) 求瞬时频率可以被化简为

$$\omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} \approx \text{Im} \left[\frac{2(q[n+1] - q[n])}{T(q[n+1] + q[n])} \right] \quad (24)$$

3. 频率取样法

频率取样法是从频域出发, 在频域直接设计, 把给定的理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 加以等间隔取样, 并以此作为实际 FIR 滤波器的频率响应。设所需滤波器的频率响应为 $H_d(e^{j\omega})$ 。在 $|e^{j\omega}| = 1$ 的单位圆上等间隔采样 N 个点, 得到 $H_d(k)$

$$H_d(k) = H_d(e^{j\omega})|_{\omega_k = 2\pi k/N} = H_d(e^{j2\pi k/N}) \quad (25)$$

再将其傅里叶反变换到时域, 就可以得到脉冲响应有

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j2\pi kn/N}, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (26)$$

为了提高滤波器的质量并减少误差, 可以采用人为地扩展过渡带的方法, 即在频率相应的过渡带内插入一个或多个比较连续的采样点, 使得过渡带比较连续, 从而使得通带和阻带之间变化比较缓慢, 使得设计得到的滤波器对理想滤波器的逼近误差较小。

在理想低通滤波器的设计中, 若不增加过渡点, 阻带和通带之间的衰减约为-21dB, 如果在通带和阻带之间增加一个采样点, 阻带的最小衰减可以提高到-65dB, 如果增加两个采样点, 阻带的最小衰减可以提高到-75dB, 如果增加 3 个采样点, 阻带的最小衰减可以提高到-85dB 至-95dB。

七、FIR 滤波器的 MATLAB 实现

1. FDAtool 实现离散希尔伯特变换器

利用 MATLAB 的 FDA tool 可以便捷设置希尔伯特变换器的相关参数，其幅度衰减与相位特征如图右上角。

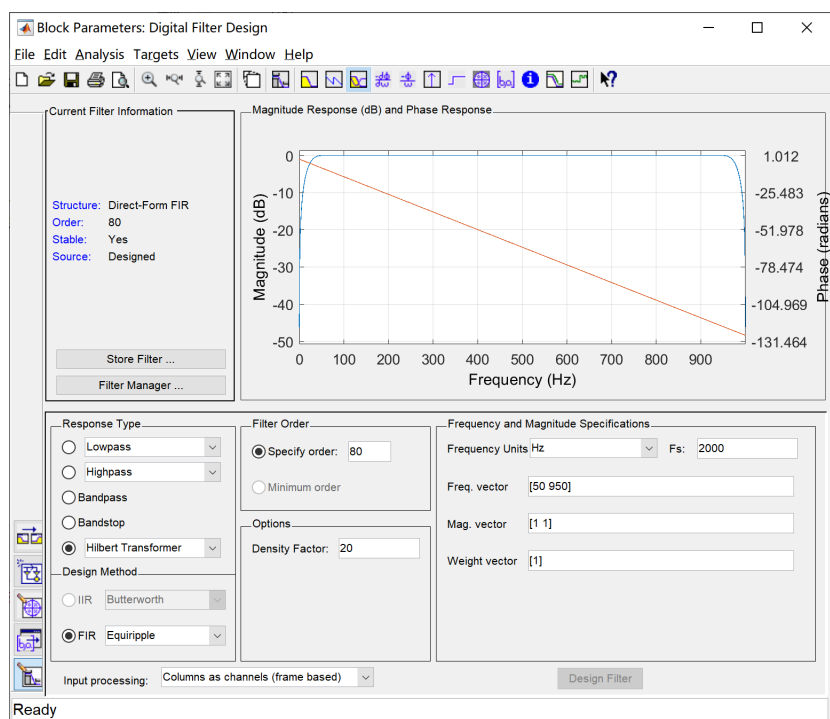


图 2: FDA tool 生成希尔伯特变换器

2. Simulink 实现离散希尔伯特变换器

利用 MATLAB 的 Simulink 工具可以可视化仿真离散希尔伯特变化器。

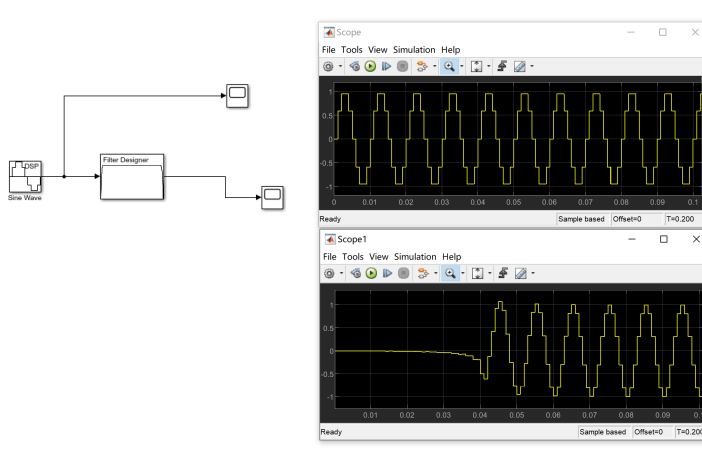


图 3: Simulink 做离散希尔伯特变换

仿真结果显示输入与输出信号产生相移，实现离散希尔伯特变换。

3. Parks McClellan 方法

运用 Parks McClellan 方法计算得到

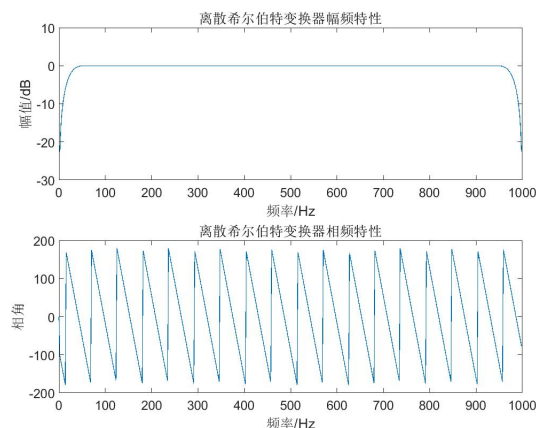


图 4: 离散希尔伯特变换器频谱

可以看到利用 Parks McClellan 方法设计的离散希尔伯特变换器具有良好的带通特性和线性相位特性，能够比较好地实现 90° 的相移。

设输入信号为 $x(t) = \cos(2\pi \cdot 0.01t) \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + 0.01t)$ ，采用以上程序设计的 FIR 滤波器逼近希尔伯特变换，得到的仿真结果如下。

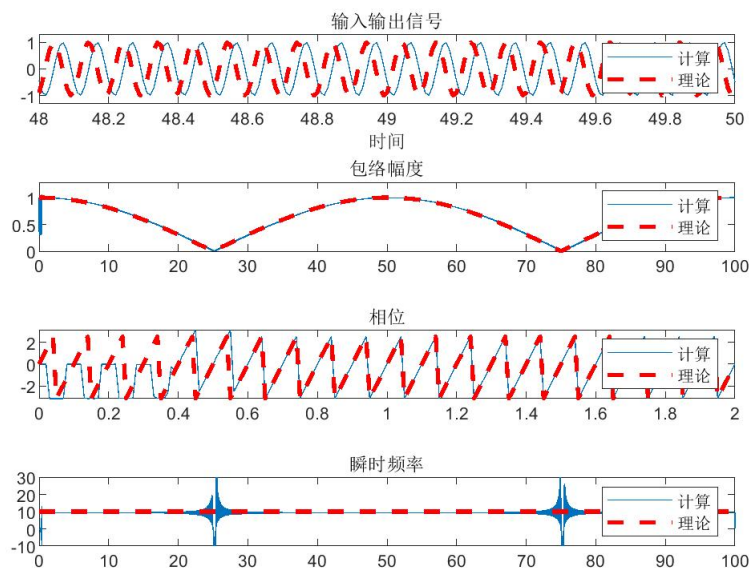


图 5: 离散希尔伯特变换器频谱

可以看到计算所得幅度、相位和瞬时频率与理论值基本相符，在理论值附近存在波动。计算所得瞬时频率在约 $t=25.2$ 和 $t=75.2$ 处存在突变，是因为此时信号幅度接近 0，计算公式中分母接近 0 导致的计算误差。

将此滤波器与 MATLAB 自己的 Hilbert 求瞬时频率对比（如图 4），可以看到两者趋势相符，但直接设计的滤波器在输入幅度较小处存在较大波动。

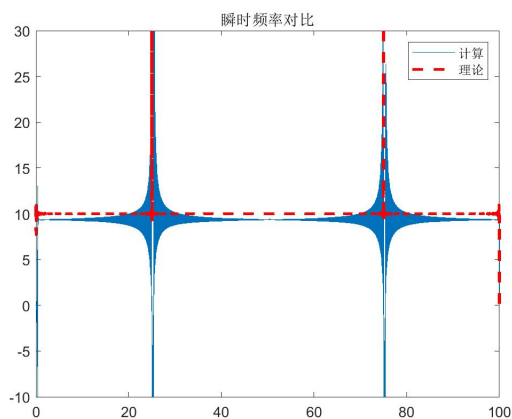


图 6: 计算所得瞬时频率与 MATLAB 求解对比

4. 窗函数法

首先，给出五种基本窗函数的时域和频域特征。

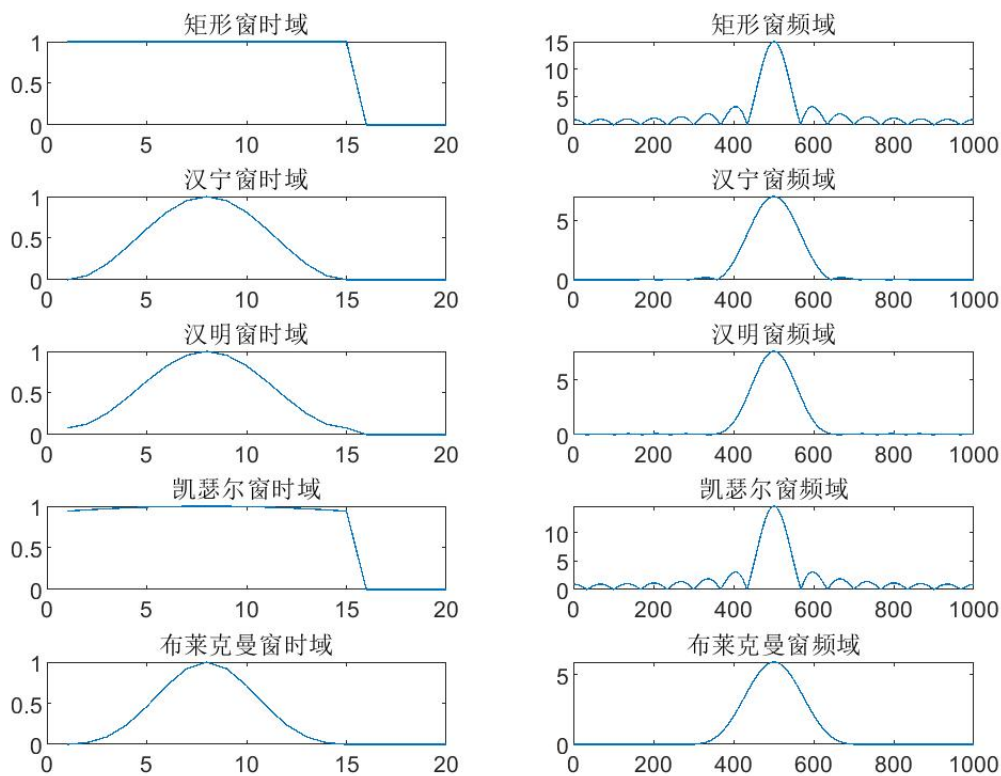


图 7: 五种基本窗函数

利用前文提到的思路，用不同的窗函数对 $h[n]$ 进行截断，得到五组测试结果。

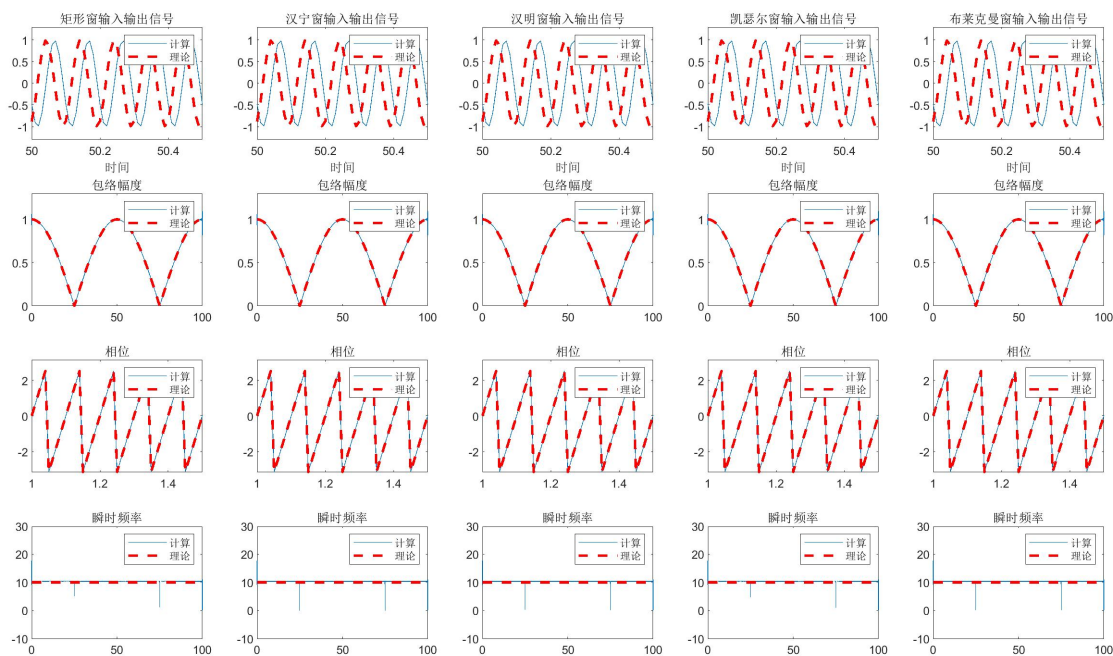


图 8: 五种基本窗函数测试

可以看到，五种窗函数都能比较好地实现离散希尔伯特变化，计算出的幅度、瞬时相位和瞬时频率都与理论值基本相符。

5. 频率采样法

对运用频率采样法得到的离散希尔伯特变换器进行测试，得到

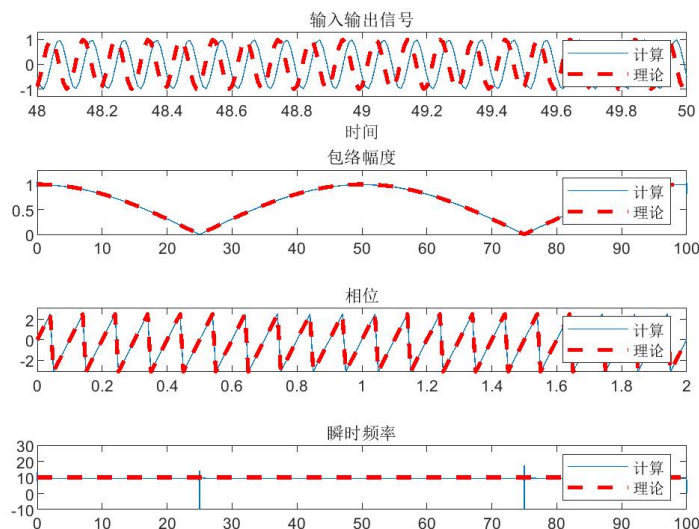


图 9: 频率采样法测试

可以看到，所得的离散希尔伯特变换器可以较好地满足需要，计算所得的幅度、瞬时相位和瞬时频率均呈现比较好的效果。

八、 结论

本文分析了利用 MATLAB 设计离散希尔伯特变换器的多种实现方法。其中，FDA tool 和 Simulink 因其图形化界面，设置简便，但在自定义相关参数上难免有局限。对信号的处理效果较好。最优化设计中，本文主要使用 Parks McClellan 方法设计，得到的滤波器与其阶数相关性比较大，在 $N=60$ 和 80 时有比较好的输出效果，其周围其他取值会产生较大的波动，但总体仍在理论值附近。窗函数法是对理想希尔伯特变换器进行截断，会导致吉布斯现象的产生，可以通过扩大主瓣、压缩旁瓣的方式减小其影响。在测试中，几个窗函数均有比较好的实验效果。频率采样法设计也比较简洁，使用中修改理想滤波器的取值就可以实现除希尔伯特变换器外的 FIR 滤波器设计，输出效果也比较好。总体而言，这几种方法都可以比较好地实现离散希尔伯特变换，求解的幅度和瞬时相位、瞬时频率也与理论值有较高的符合程度，都是可行的设计方法。

参考文献

- [1] 王胜坤. 最佳 FIR 数字希尔伯特变换器的性质和设计 [J]. 太原工学院学报, 1984, (第 2 期).
- [2] 程乾生. 希尔伯特变换与信号的包络、瞬时相位和瞬时频率 [J]. 石油地球物理勘探, 1979, (第 3 期).
- [3] 聂仙娥 1, 许爱国 2, 赵河明 1,3, 杨超 1. 基于 Matlab 的 FIR 型希尔伯特变换器设计 [J]. 现代电子技术, 2011, (第 7 期).
- [4] 吴艳君. FIR 希尔伯特变换器设计 [J]. 科技信息, 2012, (第 27 期).
- [5] 陈啸晴. FIR 型 HILBERT 数字滤波器的设计 [J]. 广东技术师范学院学报, 2012, 33(06): 20-23.

九、 附录

1. 程序一：离散希尔伯特变换器

离散希尔伯特变换器仿真

```
1 for i=-10:10
2     n=i+11;
3     if(mod(n,2) == 0) h(n) = 2/pi/i;
4     else h(n) = 0;
5     end
6 end
7 i=-10:10;
8 w=-pi:0.01:pi
9 H=1j*(w>=-pi&w<=0)-1j*(w>=0&w<=pi);
10 subplot(2,1,1);stem(i,h,'linewidth',1.3);title('离散希尔伯特变换器的h[n]');axis
    ([-10,10,-0.8,0.8]);
11 subplot(2,1,2);plot(w,H/j,'linewidth',1.3);title('离散希尔伯特变换器的H(e^{j\omega})
    的幅值');axis([-pi,pi,-1.2,1.2]);
```

2. 程序二：运用 Parks McClellan 方法实现离散希尔伯特变换器

Parks McClellan 方法实现离散希尔伯特变换器

```
1 clear all;
2 N=72;%阶数
3 f=[0.05 0.95];%带宽
4 m=[1 1];%幅频特性
5 fs=2000;%采样频率
6 b=firpm(N,f,m,'h');%采用Parks-McClellan方法设计Hilbert变换器
7 [H,w]=freqz(b,1,512,fs);%计算Hilbert变换器的脉冲响应
8 subplot(2,1,1);plot(w,20*log10(abs(H)));axis([0,1000,-30,10]);xlabel('频率/Hz');
    ylabel('幅值/dB');title('离散希尔伯特变换器幅频特性');
9 subplot(2,1,2);plot(w,angle(H)/pi*180);xlabel('频率/Hz');ylabel('相角');title('离散希
    尔伯特变换器相频特性');
```

3. 程序三：测试 Parks McClellan 方法实现的离散希尔伯特变换器

验证 Parks McClellan 方法实现离散希尔伯特变换器

```
1 clear all;
2 N=80;%阶数
3 f=[0.05 0.95];%设置带宽
4 m=[1 1];%理想滤波器的幅频特性
5 b=firpm(N,f,m,'h');%Hilbert变换器
6 dt=0.01;
7 t=0:dt:100;
8 x=cos(2*pi*0.01*t).*cos(2*pi*10*t+0.01*t);%输入信号
9 Ad=abs(cos(2*pi*0.01*t));
10
11 y=filter(b,1,x);%希尔伯特变换，得到的解析信号为x+1j*y;
12 A=(abs(x).^2+abs(y).^2).^0.5;%计算幅度
13
14 p=atan2(y,x);%计算相位
15 pd=atan2(sin(2*pi*10*t+0.01*t),cos(2*pi*10*t+0.01*t));%理论相位
16
17 q=x+1j*y;%解析信号
18 f = zeros(1,length(q));%计算频率
19 temp = diff(q);
20 for n=1:length(f)-1
21     f(n)=imag(100*temp(n)/q(n))/2/pi;
22 end
23 f(end)=p(end)/2/pi;
24 for n=1:length(f)
25     fd(n)=10+0.01/2/pi;%理论频率
26 end
27 figure(1)
28 subplot(4,1,1);
29 plot(t,y);xlabel('时间');title('输入输出信号');axis([48,50,-1.3,1.3]);hold on;
30 plot(t,x, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([48,50,-1.3,1.3]);
31
32 subplot(4,1,2);
33 plot(t,A);title('包络幅度');axis([0,100,0,1.3]);hold on;
34 plot(t,Ad, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,0,1.3]);
35
36 subplot(4,1,3);
37 plot(t,p);title('相位');axis([0,2,-3.15,3.15]);hold on;
38 plot(t,pd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,2,-3.15,3.15]);
39
40 subplot(4,1,4);
41 plot(t,f);title('瞬时频率');axis([0,100,-10,30]);hold on;
```

```
42 plot(t,fd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,-10,30]);
43
44 %%%%以下为利用MATLAB自带Hilbert变换求瞬时频率与前部分设计的滤波器求解的对比%%%%
45 fs=100;
46 z = hilbert(x);
47 instfrq = fs/(2*pi)*diff(unwrap(angle(z)));
48
49
50 figure(2)
51 plot(t,f);title('瞬时频率对比');axis([0,100,-10,30]);hold on;
52 plot(t(2:end),instfrq, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,-10,30]);
```

4. 程序四：五种基本窗函数

五种基本窗函数

```
1 clear all;
2 N = 15;
3 Np = 1000;
4
5 window = ones(1,N);
6 window = [window,zeros(1,Np-length(window))];
7 y=fftshift(fft(window));
8 subplot(5,2,1);plot(window);title('矩形窗时域');xlim([0 20]);
9 subplot(5,2,2);plot(abs(y));title('矩形窗频域');
10
11 window = hann(N)';
12 window = [window,zeros(1,Np-length(window))];
13 y=fftshift(fft(window));
14 subplot(5,2,3);plot(window);title('汉宁窗时域');xlim([0 20]);
15 subplot(5,2,4);plot(abs(y));title('汉宁窗频域');
16
17 window = hamming(N)';
18 window = [window,zeros(1,Np-length(window))];
19 y=fftshift(fft(window));
20 subplot(5,2,5);plot(window);title('汉明窗时域');xlim([0 20]);
21 subplot(5,2,6);plot(abs(y));title('汉明窗频域');
22
23 window = kaiser(N)';
24 window = [window,zeros(1,Np-length(window))];
25 y=fftshift(fft(window));
26 subplot(5,2,7);plot(window);title('凯瑟尔窗时域');xlim([0 20]);
27 subplot(5,2,8);plot(abs(y));title('凯瑟尔窗频域');
28
29 window = blackman(N)';
```

```
30 window = [window,zeros(1,Np-length(window))];
31 y=fftshift(fft(window));
32 subplot(5,2,9);plot(window);title('布莱克曼窗时域');xlim([0 20]);
33 subplot(5,2,10);plot(abs(y));title('布莱克曼窗频域');
```

5. 程序五：测试利用五种基本窗函数得到的离散希尔伯特变换器

窗函数计算

```
1 function [y,A,p,f]=cal_window(k,N,h,x)
2     T=0.01;
3     switch k
4         case 1
5             window = ones(1,N);
6         case 2
7             window = hann(N)';
8         case 3
9             window = hamming(N)';
10        case 4
11            window = kaiser(N)';
12        case 5
13            window = blackman(N)';
14    end
15
16    hN=h.*window;
17    y=conv(x,hN,'same');
18    A=(abs(x).^2+abs(y).^2).^0.5;
19    p=atan2(y,x);%计算相位
20    q=x+1j*y;
21    f = zeros(1,length(q));
22    for i=1:length(f)-1
23        f(i)=imag(2*(q(i+1)-q(i))./((q(i+1)+q(i))*T))/2/pi;
24    end
25    f(end)=p(end)/2/pi;
```

窗函数测试

```
1 clear all;
2 T=0.01;
3 t=0:T:100;
4 x=cos(2*pi*0.01*t).*cos(2*pi*10*t+0.01*t);
5 n=-1000:1000;
6 N=length(n);
7 h=zeros(1,N);
8 for i=1:N
9     if(mod(i,2) == 0)
```

```
10     h(i) = 2/pi/n(i);%希尔伯特变换器
11     end
12 end
13 %%%%%%%%%输入信号理论值%%%%%%%%%
14 Ad=abs(cos(2*pi*0.01*t));%理论幅度
15 pd=atan2(sin(2*pi*10*t+0.01*t),cos(2*pi*10*t+0.01*t));%理论相位
16 for i=1:length(x)
17     fd(i)=10+0.01/2/pi;%理论频率
18 end
19
20 %%%%%%%%%矩形窗%%%%%%%%%
21 [y1,A1,p1,f1]=cal_window(1,N,h,x);
22
23 %%%%%%%%%汉宁窗%%%%%%%%%
24 [y2,A2,p2,f2]=cal_window(2,N,h,x);
25
26 %%%%%%%%%汉明窗%%%%%%%%%
27 [y3,A3,p3,f3]=cal_window(3,N,h,x);
28
29 %%%%%%%%%凯瑟尔窗%%%%%%%%%
30 [y4,A4,p4,f4]=cal_window(4,N,h,x);
31
32 %%%%%%%%%布莱克曼窗%%%%%%%%%
33 [y5,A5,p5,f5]=cal_window(5,N,h,x);
34
35 figure(1)
36 subplot(4,5,1);
37 plot(t,y1);xlabel('时间');title('矩形窗输入输出信号');axis([50,50.5,-1.3,1.3]);hold
    on;
38 plot(t,x, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([50,50.5,-1.3,1.3]);
39 legend('计算','理论');
40 subplot(4,5,2);
41 plot(t,y2);xlabel('时间');title('汉宁窗输入输出信号');axis([50,50.5,-1.3,1.3]);hold
    on;
42 plot(t,x, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([50,50.5,-1.3,1.3]);
43 legend('计算','理论');
44 subplot(4,5,3);
45 plot(t,y3);xlabel('时间');title('汉明窗输入输出信号');axis([50,50.5,-1.3,1.3]);hold
    on;
46 plot(t,x, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([50,50.5,-1.3,1.3]);
47 legend('计算','理论');
48 subplot(4,5,4);
49 plot(t,y4);xlabel('时间');title('凯瑟尔窗输入输出信号');axis([50,50.5,-1.3,1.3]);hold
    on;
```

```
50 plot(t,x, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([50,50.5,-1.3,1.3]);
51 legend('计算','理论');
52 subplot(4,5,5);
53 plot(t,y5);xlabel('时间');title('布莱克曼窗输入输出信号');axis([50,50.5,-1.3,1.3]);
    hold on;
54 plot(t,x, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([50,50.5,-1.3,1.3]);
55 legend('计算','理论');
56
57 subplot(4,5,6);
58 plot(t,A1);title('包络幅度');axis([0,100,0,1.3]);hold on;
59 plot(t,Ad, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,0,1.3]);
60 legend('计算','理论');
61 subplot(4,5,7);
62 plot(t,A2);title('包络幅度');axis([0,100,0,1.3]);hold on;
63 plot(t,Ad, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,0,1.3]);
64 legend('计算','理论');
65 subplot(4,5,8);
66 plot(t,A3);title('包络幅度');axis([0,100,0,1.3]);hold on;
67 plot(t,Ad, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,0,1.3]);
68 legend('计算','理论');
69 subplot(4,5,9);
70 plot(t,A4);title('包络幅度');axis([0,100,0,1.3]);hold on;
71 plot(t,Ad, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,0,1.3]);
72 legend('计算','理论');
73 subplot(4,5,10);
74 plot(t,A5);title('包络幅度');axis([0,100,0,1.3]);hold on;
75 plot(t,Ad, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,0,1.3]);
76 legend('计算','理论');
77
78 subplot(4,5,11);
79 plot(t,p1);title('相位');axis([1,1.5,-3.15,3.15]);hold on;
80 plot(t,pd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([1,1.5,-3.15,3.15]);
81 legend('计算','理论');
82 subplot(4,5,12);
83 plot(t,p2);title('相位');axis([1,1.5,-3.15,3.15]);hold on;
84 plot(t,pd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([1,1.5,-3.15,3.15]);
85 legend('计算','理论');
86 subplot(4,5,13);
87 plot(t,p3);title('相位');axis([1,1.5,-3.15,3.15]);hold on;
88 plot(t,pd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([1,1.5,-3.15,3.15]);
89 legend('计算','理论');
90 subplot(4,5,14);
91 plot(t,p4);title('相位');axis([1,1.5,-3.15,3.15]);hold on;
92 plot(t,pd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([1,1.5,-3.15,3.15]);
```



```
93 legend('计算','理论');
94 subplot(4,5,15);
95 plot(t,p5);title('相位');axis([1,1.5,-3.15,3.15]);hold on;
96 plot(t,pd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([1,1.5,-3.15,3.15]);
97 legend('计算','理论');
98
99 subplot(4,5,16);
100 plot(t,f1);title('瞬时频率');axis([0,100,-10,30]);hold on;
101 plot(t,fd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,-10,30]);
102 legend('计算','理论');
103 subplot(4,5,17);
104 plot(t,f2);title('瞬时频率');axis([0,100,-10,30]);hold on;
105 plot(t,fd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,-10,30]);
106 legend('计算','理论');
107 subplot(4,5,18);
108 plot(t,f3);title('瞬时频率');axis([0,100,-10,30]);hold on;
109 plot(t,fd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,-10,30]);
110 legend('计算','理论');
111 subplot(4,5,19);
112 plot(t,f4);title('瞬时频率');axis([0,100,-10,30]);hold on;
113 plot(t,fd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,-10,30]);
114 legend('计算','理论');
115 subplot(4,5,20);
116 plot(t,f5);title('瞬时频率');axis([0,100,-10,30]);hold on;
117 plot(t,fd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,-10,30]);
118 legend('计算','理论');
```

6. 程序六：测试频率采样法得到的离散希尔伯特变换器

频率采样法设计离散希尔伯特变换器及测试

```
1 N=21;
2 Hd=[-1j*ones(1,10),0,1j*ones(1,10)];
3 k = 0:N-1;
4 A = exp(-1j*pi*k*(N-1)/N);
5
6 H = Hd.*A;%频率采样，得到希尔伯特变换器的频域表示
7
8 h = ifft(H);%做傅里叶反变换得到时域
9 figure(1);
10 freqz(h1);
11
12 T=0.01;
13 t=0:T:100;
14 x=cos(2*pi*0.01*t).*cos(2*pi*10*t+0.01*t);
```

```
15
16 %%%%%%%%%输入信号理论值%%%%%%%%%
17 Ad=abs(cos(2*pi*0.01*t));%理论幅度
18 pd=atan2(sin(2*pi*10*t+0.01*t),cos(2*pi*10*t+0.01*t));%理论相位
19 for i=1:length(x)
20     fd(i)=10+0.01/2/pi;%理论频率
21 end
22
23 %%%%%%%%%利用离散希尔伯特变换器计算%%%%%%%%%
24 h=real(h);
25 y=conv(x,h,'same');
26 A=(abs(x).^2+abs(y).^2).^0.5;
27 p=atan2(y,x);%计算相位
28 q=x+1j*y;%解析信号
29 f = zeros(1,length(q));%计算频率
30 temp = diff(q);
31 for n=1:length(f)-1
32     f(n)=imag(100*temp(n)/q(n))/2/pi;
33 end
34 f(end)=p(end)/2/pi;
35
36 figure(2);
37 subplot(4,1,1);
38 plot(t,y);xlabel('时间');title('输入输出信号');axis([48,50,-1.3,1.3]);hold on;
39 plot(t,x, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([48,50,-1.3,1.3]);
40 legend('计算','理论');
41
42 subplot(4,1,2);
43 plot(t,A);title('包络幅度');axis([0,100,0,1.3]);hold on;
44 plot(t,Ad, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,0,1.3]);
45 legend('计算','理论');
46
47 subplot(4,1,3);
48 plot(t,p);title('相位');axis([0,2,-3.15,3.15]);hold on;
49 plot(t,pd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,2,-3.15,3.15]);
50 legend('计算','理论');
51
52 subplot(4,1,4);
53 plot(t,f);title('瞬时频率');axis([0,100,-10,30]);hold on;
54 plot(t,fd, 'r--' , 'linewidth' ,2);axis([0,100,-10,30]);
55 legend('计算','理论');
```