

矩阵论大作业

一、背景介绍

目标方位估计指利用传感器阵列接收到的信号来估计目标源位置。

以图 1 所示为例：在空间中布放一个 8 元水平线阵，传感器间距为 0.5m 均匀分布，以法线为基准，逆时针为 $0^\circ \sim 90^\circ$ ，顺时针为 $0^\circ \sim -90^\circ$ 。假设信号源位于无穷远处，则信号源所发送的信号到达传感器时可以等效为从同一入射平面入射。则在图 1 中， $s(t)$ 为入射平面波（假设 $s(t)$ 的均值为 0）， $x_i(t)$ $i = 1, 2, \dots, 8$ 为各个阵元所接收信号， $d = 0.5m$ 为线性阵列的阵元间距， $\theta = -30^\circ$ 为入射波与竖直轴的夹角。

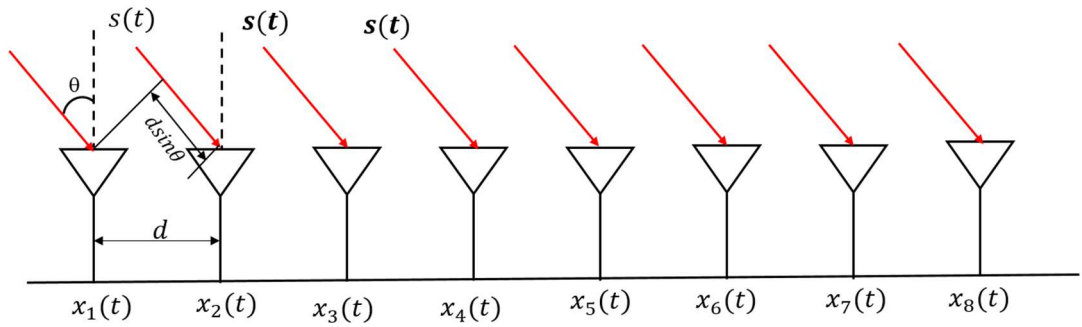


图 1 声传播环境

阵列接收信号可表示为：

$$\begin{cases} x_1(t) = s(t)e^{j\omega t} + w_1(t) \\ x_2(t) = s(t)e^{j\omega t} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta} + w_2(t) \\ \dots \\ x_8(t) = s(t)e^{j\omega t} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(8-1)d \sin \theta} + w_8(t) \end{cases} \quad (1)$$

将（1）表示为矩阵形式即为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= [x_1(t), x_2(t), \dots, x_8(t)]^T \\
&= s(t)e^{j\omega t} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta} \\ \dots \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(8-1)d\sin\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \dots \\ w_8(t) \end{bmatrix} \\
&= s(t)\mathbf{a}(\theta) + \mathbf{W}(t)
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\mathbf{a}(\theta) = e^{j\omega t} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta} \\ \dots \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(8-1)d\sin\theta} \end{bmatrix}_{8 \times 1}$ 为方向矢量, $\lambda = \frac{c}{f}$ 为波长 (在水中, c 一般取 1500m/s),

$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \dots \\ w_8(t) \end{bmatrix}_{8 \times 1}$ 为噪声矢量。

二、MUSIC 算法

MUSIC 算法是最先提出的一种超分辨率的用于目标估计的算法。其基本思想是通过将阵列输出信号的协方差矩阵进行特征值分解,从而得到信号子空间和噪声子空间,同时利用两个子空间的正交性来构造空间谱函数,通过谱峰搜索来估计信号的波达方向。

MUSIC 算法原理介绍如下:

由阵列的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] \tag{3}$$

阵列的协方差矩阵 \mathbf{R} 经过特征值分解后如下:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Sigma}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_w \mathbf{\Sigma}_w \mathbf{U}_w^H \tag{4}$$

其中 \mathbf{U}_s 是由较大特征值对应的特征向量张成的子空间,为信号子空间; \mathbf{U}_w 是由较小特征值对应的特征向量张成的子空间,为噪声子空间。根据两子空间相互正交,则可得:

$$\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_w = 0 \quad (5)$$

则可构造谱函数如下：

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_w\mathbf{U}_w^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (6)$$

通过对 θ 进行扫描，就可以通过式（6）找到谱函数中的峰值，即可找到信号的到达角，即进行最小化搜索：

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_w\mathbf{U}_w^H\mathbf{a}(\theta) \quad (7)$$

三、任务

（1）运用所学知识，根据式（4）推导出式（5），并给出 8 个传感器情况下，信号子空间和噪声子空间的维度；

（2）依据图 1 的环境，使用 Matlab 实现 MUSIC 算法；
假定：

（a）输入信号： $s(t) = \sin(100\pi t)$

（b）噪声为高斯白噪声，信噪比为 20dB；

（3）如何克服 MUSIC 在低信噪比或/与小快拍数性能恶化的问题（低信噪比：-5 dB 以下；少快拍数：快拍数少于阵元数）。另外，如果有两个及以上信号源，试分析信号源间相干或者不相干会对算法带来什么影响。（附加题，可不做，做了有加分）

说明：快拍数即为采样点数，对于信号为 $s(t) = \sin(100\pi t)$ ，假设采样频率为 f_s ，采样点数为 N，则有采样信号为： $s(n) = \sin\left(100\pi \frac{n}{f_s}\right) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$,

相应的即可得到 $\mathbf{X}(n) = s(n)\mathbf{a}(\theta) + \mathbf{W}(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ，则协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{X}(n)\mathbf{X}^H(n)。$$

四、提交要求

程序源代码+电子说明文档（包括推导过程、输出结果、结果分析、个人心得等），压缩之后以“学号_姓名_矩阵论大作业”命名，提交至学在浙大。