LAPORAN TUGAS BESAR
SISTEM PERSAMAAN LINIER, DETERMINAN, dan APLIKASINYA

Disusun oleh:

13520057 Marcellus Michael Herman

13520088 Rio Alexander Audino

13520156 Dimas Faidh Muzaki

SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

BANDUNG

Daftar Isi

BAB I Deskripsi Masalah

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Anda sudah mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A_{-1}b$), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

BAB II Teori Singkat

I. Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi gauss termasuk dalam metode penyelesaian persamaan linear dengan cara langsung. Inti dari metode ini adalah membawa persamaan kedalam bentuk matriks dan menyederhanakan matriks menjadi bentuk Eselon Baris melalui Operasi Baris Elementer. Setelah mendapat bentuk matriks tersebut dilakukan substitusi balik untuk mendapat nilai dari akar persamaan tadi.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} x + 3y + z = 2 \ldots (1) \\ y - 7z = 9 \ldots (2) \\ z = -1 \ldots (3) \end{array}$$

II. Metode Eliminasi Gauss Jordan

Metode eliminasi Gauss Jordan termasuk dalam metode penyelesaian persamaan linear dengan cara langsung. Metode ini sebenarnya merupakan metode yang dimodifikasi dari metode eliminasi Gauss yang diperkenalkan oleh Jordan pada tahun 1887. Metode Gauss Jordan akan menghasilkan matriks dengan bentuk baris eselon yang tereduksi.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{array}\right]$$

III. Determinan

Determinan matriks adalah suatu bilangan real yang diperoleh dari proses yang memiliki aturan tertentu yang dilakukan terhadap suatu matriks. Determinan matriks hanya dapat diperoleh pada matriks bujur sangkar. Terdapat beberapa cara untuk memperoleh determinan dari suatu matriks. Salah satu cara tersebut adalah menggunakan matriks segitiga yang dapat dibagi menjadi dua, yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Untuk mendapatkan matriks segitiga, dapat dilakukan OBE sampai memperoleh matriks segitiga atau ataupun matriks segitiga bawah.

Selain menggunakan matriks segitiga, penghitungan determinan dapat menggunakan ekspansi kofaktor. Digunakan definisi sebagai berikut untuk menentukan nilai dari ekspansi kofaktor

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Dengan

$C_{ij} = kofaktor\ entri\ a_{ij}$

$M_{ij} = determinan\ submatrix\ tanpa\ baris\ i\ dan\ kolom\ j$

IV. Metode Matriks Balikan

Metode matriks balikan merupakan metode penyelesaian persamaan linear yang menggunakan metode eliminasi Gauss Jordan untuk menentukan balikan dari suatu matriks. Menentukan matriks balikan dengan menggunakan Gauss Jordan memenuhi bentuk persamaan

$$[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$$

Metode matriks balikan hanya berlaku pada matriks berukuran n x n. Pada matriks dengan rumus Ax = b, dapat diketahui solusi penyelesaian matriks dengan rumus

$$x = A^{-1}b$$

V. Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor digunakan untuk menentukan adjoin dari suatu matriks, dengan adjoin dari suatu matriks adalah transpose dari matriks kofaktor. Misalkan A adalah matriks persegi, maka matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan

$C_{ij} = kofaktor\ entri\ a_{ij}$

VI. Matriks Adjoin

Matriks adjoin adalah transpose dari matriks kofaktor. Matriks adjoin dapat digunakan untuk mencari matriks balikan dari suatu matriks. Misalkan A adalah suatu matriks persegi, maka balikan dari matriks tersebut dapat dirumuskan dengan

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

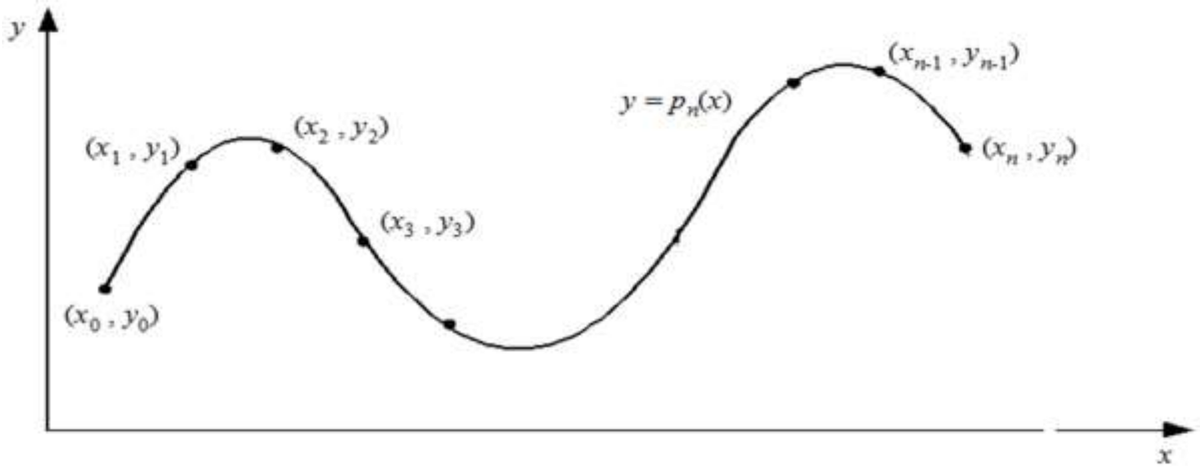
VII. Metode Matriks Cramer

Metode cramer merupakan metode penyelesaian persamaan linear dengan menggunakan determinan dari suatu matriks. Karena menggunakan determinan dari suatu matriks, matriks tersebut haruslah berbentuk matriks persegi dengan nilai determinan tidak sama dengan 0. Jika Ax = b adalah sistem persamaan linear yang terdiri dari n persamaan linear dengan n peubah dan nilai determinan tidak sama dengan 0, matriks tersebut memiliki solusi yang unik yang dapat dirumuskan dengan persamaan

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \ldots, x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

VIII. Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk i = 0, 1, 2, …, n.



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang $[x_0, x_n]$.

Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia (n+1) buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ untuk i = 0, 1, 2, …, n, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= y_0 \\
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= y_1 \\
\ldots \qquad\qquad &\ldots \\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= y_n
\end{aligned}
$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai $a_0, a_1, \ldots, a_n$, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada x = 9.2. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sistem persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$
\begin{aligned}
a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 &= 2.0794 \\
a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 &= 2.1972 \\
a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 &= 2.2513
\end{aligned}
$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266$, dan $a_2 = -0.0064$. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah 2 titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 9.2 dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)^2 = 2.2192$.

IX. Regresi Linear Berganda

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap β_i dapat digunakan Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression sebagai berikut:

$$\begin{array}{lllll}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{2i} + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i
\end{array}$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

BAB III Implementasi Pustaka

I. Pustaka

Pustaka terdiri dari beberapa file kelas seperti Matriks.java, FungsiSPL.java, dan InOut.java.

```
public class FungsiSPL {

	/* FungsiSPL merupakan class yang berisi fungsi / prosedur untuk menyelesaikan persoalan SPL. Terdapat 5 buah method pada class FungsiSPL. Setiap method akan menerima argumen sesuai dengan method masing-masing dan akan mengeluarkan output berupa hasil penyelesaian SPL sesuai metode yang ada pada method.
	*/

	public static Matriks konversiCoefHasil(Matriks mTemp)
	public static Matriks splGauss(Matriks matrix)
	public static Matriks splGaussJordan(Matriks matrix)
	public static void splMatriksBalikan(String fileName, Matriks m)
	public static void splCramer(String fileName, Matriks m)
}


public class Matriks {

	/* Matriks adalah class yang berisi fungsi / prosedur untuk mendukung operasi-operasi yang terdapat di FungsiSPL. Terdapat 1 buah konstruktor dan 18 method yang terdapat dalam class Matriks. Setiap method akan mengeluarkan output sesuai detail method masing-masing.
	*/

	Matriks(int row, int col)
	public void undefMatriks()
```

```
    public boolean isMatriksUndef()
    public boolean isRowSPLZero (int i, int jStart, int jMax)
    public boolean isZeroRowExist()
    public boolean isZeroColExist(int iStart, int jStart)
    public Matriks Transpose()
    public double Trace()
    public Matriks reduksiMatriks()
    public Matriks konversiEselonMatriks()
    public Matriks eselonTereduksiMatriks()
    public static double detReduksiBaris(Matriks m)
    public static Matriks ubahKaliBaris(Matriks m, int index,
float x)
    public static Matriks ubahKurangBaris(Matriks m, int
index1, int index2, float konstanta)
    public static Matriks ubahTambahBaris(Matriks m, int
index1, int index2)
    public static Matriks MatriksIdentitas(Matriks m)
    public static double detKofaktor(Matriks m)
    public static Matriks matrixKofaktor(Matriks matrix)
    public static Matriks balikanAdjoin(Matriks matrix)
}

public class InOut {

    /* InOut merupakan class yang berisi fungsi / prosedur
untuk menerima input dan mengeluarkan output, baik ke / dari
terminal maupun ke / dari layar. Terdapat 11 method pada class
InOut. Setiap method mengeluarkan atau menerima input dari layar
ataupun dari terminal sesuai dengan nama dari method tersebut.
    */

    static double[] method(String str, int col)
    public int colTxt(String fileName)
    public int rowTxt(String fileName)
```

```
    public void buatTxtBaru (String fileName)
    public Matriks bacaTxtMatriks(String fileName)
    public void tulisTxtMatriks(String fileName, Matriks m1)
    public Matriks bacaTerminalMatrix()
    public Matriks bacaTerminalMatrixSquare()
    public void tulisTerminalMatrix(Matriks matriks)
    public void tulisTerminalMatrix(String fileName, Matriks matriks)
    public void tulisPenyelesaianSPL(String fileName, Matriks coefHasil)
}
```

II. Program Utama

Program utama dalam bahasa java yang merupakan flow utama dari program yang dapat mengarahkan user untuk melakukan operasi operasi yang disediakan.

```
public class Main {

    /* Main merupakan class yang berisi fungsi / prosedure untuk menjalankan program utama. Terdapat 9 method pada class Main. Program pertama kali akan memunculkan menu yang berisi 6 pilihan. Enam pilihan tersebut adalah Sistem Persamaan Linier, Determinan, Matriks balikan, Interpolasi Polinom, Regresi linier berganda, dan Keluar.
    Untuk Sistem Persamaan Linier, terdapat 4 sub-menu, yaitu Metode Eliminasi Gauss, Metode Eliminasi Gauss-Jordan, Metode Matriks Balikan, dan Metode Cramer. Untuk Determinan, terdapat 2 sub-menu, yaitu Metode Reduksi Baris dan Metode Ekspansi Kofaktor. Untuk Matriks Balikan, terdapat terdapat 2 sub-menu, yaitu Metode Adjoin dan Metode Matriks Identitas. Untuk Interpolasi Polinom, menerima input berupa matriks dan mengeluarkan output float.
    */

    public static void main(String[] args)
```

```java
    public static void tesAdjoin()
    public static void tesInvers()
    public static void TesBacaTerminal()
    public static void TesBacaText()
    public static void SPL()
    public static void Determinan()
    public static void Balikan()
    public static Matriks flowBacaMatriks()
    public static double fungsi6c(double X)
    public static void bikinTxt6c()
}
```

III. Kelas Studi Kasus

Kelas ini disimpan pada file TesJava.java dalam folder src. File ini merupakan modifikasi dari file program utama yaitu Main.java. Tujuan dari modifikasi ini adalah untuk memberikan kemudahan dalam melaksanakan testing secara otomatis dari masukan yang sudah ditentukan sebelumnya. Dengan kelas ini, testing untuk setiap kasus dapat dilakukan serentak hanya dengan menekan satu tombol f5 pada Visual Studio Code. Seluruh studi kasus akan dikerjakan dan hasil berupa txt akan disimpan dalam folder test dan subfolder untuk setiap nomor.

```java
import java.util.*;

public class TestJava {
    /* TestJava merupakan sebuah kelas yang memiliki semua fungsi dan prosedur yang dimiliki oleh kelas Main. Namun, fungsi/prosedur tersebut menerima masukan berupa list String yang berfungsi untuk membuat proses testing program menjadi otomatis. Selain itu, kelas ini memiliki prosedur tambahan seperti nomor1,nomor2,dst. Prosedur-prosedur teresbut berfungsi untuk menjalankan setiap studi kasus yang tertera pada spesifikasi tugas besar ini.
    */
    public static void main(String[] args)
    public static void nomor1()
    public static void nomor2()
```

```
    public static void nomor3()
    public static void nomor4()
    public static void nomor5()
    public static void nomor6a()
    public static void nomor6b()
    public static void nomor6c()
    public static void nomor7()

    public static void mainTest(ArrayList<String> input)
    public static void SPL(ArrayList<String> input)
    public static void Determinan(ArrayList<String> input)
    public static void Balikan(ArrayList<String> input)
    public static void InterpolasiPolinom(ArrayList<String> in
put)
    public static void RegresiLinier(ArrayList<String> input)
    public static Matriks flowBacaMatriks(ArrayList<String> in
put)
    public static double fungsi6c(double X)
    public static void bikinTxt6c(ArrayList<String> input)
}
```

BAB IV Eksperimen

Nomor 1

A. Hasil eksekusi terhadap sistem persamaan linear:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Yaitu,

Hasil1a.txt - Notepad

File Edit Format View Help

```
Hasil penyelesaian tidak valid, tidak dapat menggunakan metode tersebut
```

Analisis: hasil tidak valid, sebab akan muncul satu baris berisi 0 di tengah perhitungan. Baris yang berisi 0 menyebabkan matriks A tidak memiliki balikan.

B. Hasil eksekusi terhadap sistem persamaan linear:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Adalah

Hasil1b.txt - Notepad

File Edit Format View Help

```
Hasil penyelesaian SPL :
X1 = 3.00 + 1.00(a5)
X2 = 0.00 + 2.00(a5)
X3 = a3
X4 = -1.00 + 1.00(a5)
X5 = a5
```

Analisis: Hasil penyelesaian SPL berupa parametrik, sebab terdapat kolom yang berisi 0.

C. Hasil eksekusi terhadap sistem persamaan linear:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Adalah

Hasil1c.txt - Notepad

File Edit Format View Help

```
Hasil penyelesaian SPL :
X1 = 2.00 + 1.00(a4) + 1.00(a6)
X2 = 0.00 + -1.00(a4) + -1.00(a5) + -1.00(a6)
X3 = 1.00 + 1.00(a4) + 1.00(a5)
X4 = a4
X5 = a5
X6 = a6
```

Analisis: Hasil penyelesaian SPL adalah parametrik. Perhitungan menggunakan metode Eliminasi Gauss dan tidak dapat menggunakan metode matriks balikan sebab tidak memenuhi syarat yaitu matriks A haruslah berukuran n x n.

D. Hasil eksekusi terhadap sistem persamaan linear:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

H adalah matriks Hilbert. Cobakan untuk n = 6 dan n = 10.

Adalah

```
Hasil1da.txt - Notepad
File  Edit  Format  View  Help

Hasil penyelesaian SPL :
X1 = 11.06
X2 = 58.56
X3 = -1203.88
X4 = 4144.57
X5 = -5226.01
X6 = 2226.06
```

```
Hasil1db.txt - Notepad
File  Edit  Format  View  Help

Hasil penyelesaian SPL :
X1 = 57.33
X2 = -1142.35
X3 = 5821.69
X4 = -8644.02
X5 = -3710.11
X6 = 7498.26
X7 = 27493.04
X8 = -47662.39
X9 = 20504.04
X10 = -203.97
```

Analisis: Hasil perhitungan SPL untuk matriks Hilber dengan n = 6 dan n = 10 memiliki solusi yang unik.

Nomor 2

A. Hasil eksekusi program mencari solusi SPL matriks augmented:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Adalah

```
Hasil2a.txt - Notepad
File  Edit  Format  View  Help

Hasil penyelesaian SPL :
X1 = -1.00 + 1.00(a4)
X2 = 0.00 + 2.00(a3)
X3 = a3
X4 = a4
```

Analisis: Hasil penyelesaian SPL dengan matriks augmented adalah parametrik, sebab terdapat baris yang berisi 0 di tengah perhitungan.

B. Hasil eksekusi program mencari solusi SPL matriks augmented:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Adalah

```
Hasil2b.txt - Notepad
File  Edit  Format  View  Help

Hasil penyelesaian SPL :
X1 = a1
X2 = 2.00
X3 = 1.00
X4 = 1.00
```

Analisis: Hasil penyelesaian SPL dengan matriks augmented adalah parametrik, sebab terdapat baris yang berisi 0 di tengah perhitungan.

Nomor 3

A. Hasil eksekusi untuk SPL berbentuk

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Adalah

```
Hasil3a.txt - Notepad
File  Edit  Format  View  Help

Hasil penyelesaian SPL :
X1 = -0.12
X2 = 0.14
X3 = 0.45
X4 = -0.10
```

Analisis: Hasil penyelesaian SPL untuk matriks tersebut adalah unik sehingga setiap x memiliki nilai yang unik.

B. Hasil eksekusi untuk SPL berbentuk

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

Adalah

Hasil3b.txt - Notepad

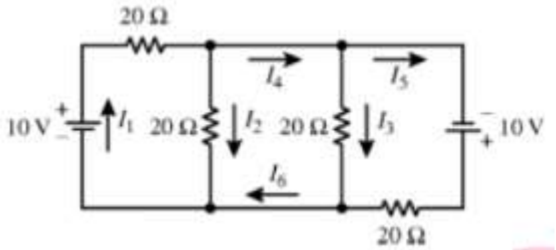
File Edit Format View Help

Hasil penyelesaian tidak valid, tidak dapat menggunakan metode tersebut

Analisis: Hasil penyelesaian SPL untuk matriks tersebut adalah parametrik sebab terdapat baris yang berisi 0 di tengah pengerjaan.

Nomor 4

Pada nomor 4, kami diberikan soal analisis rangkaian sederhana seperti gambar dibawah ini:



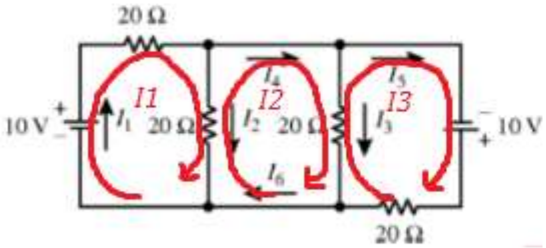
Dengan menggunakan analisis KVL (Kirchoff Voltage law), didapatkan system persamaan linier:

$$4I1 - 2I2 = 1$$

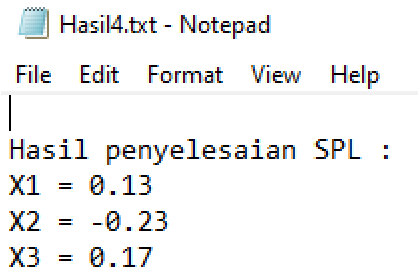
$$-2I1 - 4I2 - 2I3 = 0$$

$$-2I2 + 4I3 = 1$$

Dengan I1, I2, I3 merupakan arus dengan arah seperti berikut



Dengan bantuan pustaka yang kita punya, kita memperoleh hasil sebagai berikut



```
Hasil4.txt - Notepad
File  Edit  Format  View  Help

Hasil penyelesaian SPL :
X1 = 0.13
X2 = -0.23
X3 = 0.17
```

Maka kita dapat mencari setiap I1,I2,….,I6 sebagai berikut:

$$I1 = X1 = 0.13$$

$$I2 = X1 - X2 = 0.36$$

$$I3 = X2 - X3 = -0.40$$

$$I4 = X2 = -0.23$$

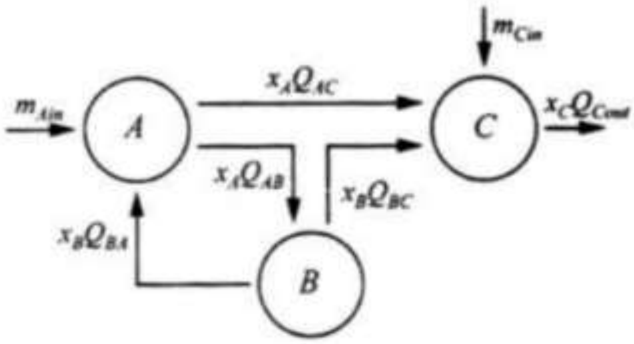
$$I5 = X3 = 0.17$$

$$I6 = X2 = -0.23$$

Analisis: Hasil penyelesaian SPL untuk matriks tersebut adalah unik sehingga dapat diketahui nilai dari I1, I2, I3, I4, I5, dan I6 serta nilai tersebut bersifat unik pula.

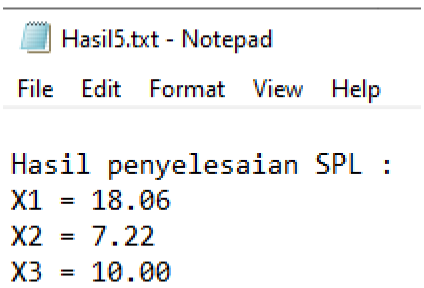
Nomor 5

Diberikan system persamaan linear untuk sebuah system reactor sebagai berikut



$$
\begin{aligned}
\text{A:}\quad & m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0 \\
\text{B:}\quad & Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0 \\
\text{C:}\quad & m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0
\end{aligned}
$$

Dan nilai-nilai parameter sebagai berikut: $Q_{AB} = 40$, $Q_{AC} = 80$, $Q_{BA} = 60$, $Q_{BC} = 20$ dan $Q_{Cout} = 150$ m^3/s dan $m_{Ain} = 1300$ dan $m_{Cin} = 200$ mg/s. Kita dapatkan nilai Xa, Xb, dan Xc:


Hasil5.txt - Notepad
File Edit Format View Help

```
Hasil penyelesaian SPL :
X1 = 18.06
X2 = 7.22
X3 = 10.00
```

Analisis: Hasil penyelesaian SPL untuk matriks tersebut adalah unik sehingga dapat diketahui nilai dari Xa, Xb, dan Xc serta nilai tersebut bersifat unik pula.

Nomor 6

A. Diberikan studi kasus interpolasi dengan data masukan x dan f(x)

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

Dan nilai x yang diprediksi:

$x = 0.2$ f(x) = ?
$x = 0.55$ f(x) = ?
$x = 0.85$ f(x) = ?
$x = 1.28$ f(x) = ?

Didapatkan hasil sebagai berikut:

```
Hasil6a1.txt - Notepad
File Edit Format View Help
Polinom Interpolasi yang melewati 7 titik tersebut adalah :
P6(x) = -0.0230 + 0.2400x + 0.1974x^2 + 0.0000x^3 + 0.0260x^4 + 0.0000x^5 + -0.0000x^6
P6(0.2) =  0.0330
```

```
Hasil6a2.txt - Notepad
File Edit Format View Help
Polinom Interpolasi yang melewati 7 titik tersebut adalah :
P6(x) = -0.0230 + 0.2400x + 0.1974x^2 + 0.0000x^3 + 0.0260x^4 + 0.0000x^5 + -0.0000x^6
P6(0.55) =  0.1711
```

```
Hasil6a3.txt - Notepad
File Edit Format View Help
Polinom Interpolasi yang melewati 7 titik tersebut adalah :
P6(x) = -0.0230 + 0.2400x + 0.1974x^2 + 0.0000x^3 + 0.0260x^4 + 0.0000x^5 + -0.0000x^6
P6(0.85) =  0.3372
```

```
Hasil6a4.txt - Notepad
File Edit Format View Help
Polinom Interpolasi yang melewati 7 titik tersebut adalah :
P6(x) = -0.0230 + 0.2400x + 0.1974x^2 + 0.0000x^3 + 0.0260x^4 + 0.0000x^5 + -0.0000x^6
P6(1.28) =  0.6775
```

Analisis: Hasil penyelesaian SPL untuk matriks tersebut adalah unik sehingga nilai konstanta pembentuk fungsi P6(x) adalah unik pula dan dapat digunakan untuk memprediksikan nilai yang ingin diprediksi. Digunakan SPL Gauss Jordan untuk menyelesaikan matriks tersebut.

B.Diberikan lagi persoalan interpolasi polinom dengan data sebagai berikut

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6,567	12.624
30/06/2021	7	21.807
08/07/2021	7,258	38.391
14/07/2021	7,451	54.517
17/07/2021	7,548	51.952
26/07/2021	7,839	28.228
05/08/2021	8,161	35.764
15/08/2021	8,484	20.813
22/08/2021	8,709	12.408
31/08/2021	9	10.534

Dan nilai yang ingin diestimasi sebagai berikut,

a. 16/07/2021
b. 10/08/2021
c. 05/09/2021
d. beserta masukan user lainnya berupa **tanggal (desimal) yang sudah diolah** dengan asumsi prediksi selalu dilakukan untuk tahun 2021.

(perhitungan dari tanggal ke tanggal (decimal) dilakukan secara manual. Pada poin D dipilih tanggal 13/06/2021)

Didapatkan hasil operasi interpolasi polinom sebagai berikut:

Polinom Interpolasi yang melewati 10 titik tersebut adalah :

P9(x) = 7189658260.8541 + -9350004106.8759x + 5335755583.4209x^2 + -1757276569.3335x^3 + 368640761.9913x^4 + -51143429.4023x^5 + 4696794.2217x^6 + -275528.7814x^7 + 9374.5844x^8 + -141.0184x^9

Dan hasil estimasi sebagai berikut:

P9(7.516) = 53.5440 (16/07/2021)

P9(8.322) = 36.3524 (10/08/2021)

P9(9.166) = -659.0368 (05/09/2021)

P9(6.433) = -545.5268 (13/06/2021)

Analisis: Hasil penyelesaian SPL untuk matriks tersebut adalah unik sehingga nilai konstanta pembentuk fungsi P9(x) adalah unik dan dapat digunakan untuk memprediksikan nilai yang ingin diprediksi. Digunakan SPL Gauss Jordan untuk menyelesaikan matriks tersebut.

C. Soal interpolasi terakhir adalah menyederhanakan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

Dengan polinom derajat n di dalam selang [0,2]. Sebagai contoh, pada program kami di jalankan n = 5 sehingga didapatkan data pasangan x dan f(x) sebagai berikut:

6c.txt - Notepad

File Edit Format View Help

```
0.0 0.0
0.4 0.418884230141255
0.8 0.5071579685304316
1.2000000000000002 0.5609246748146806
1.6 0.5836856612868684
2.0 0.576651529751722
```

Selanjutnya, diterapkan operasi interpolasi polinom menggunakan pustaka kami. Kami dapat menyederhanakan fungsi tadi menjadi:

```
Polinom Interpolasi yang melewati 6 titik tersebut adalah :
P5(x) = 0.0000 + 2.0353x + -3.5527x^2 + 3.2371x^3 + -1.4213x^4 + 0.2363x^5
```

Analisis: Hasil penyelesaian SPL untuk matriks tersebut adalah unik sehingga nilai konstanta pembentuk fungsi P5(x) adalah unik pula. Digunakan SPL Gauss Jordan untuk menyelesaikan matriks tersebut.

Nomor 7

Diberikan sekumpulan data sesusai pada tabel berikut ini

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Pada data tersebut akan dilakukan operasi regresi linear berganda untuk mendapatkan persamaan yang dapat mengestemisasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30. Hasilnya adalah sebagai berikut:

Hasil7.txt - Notepad

File Edit Format View Help

```
Dari data-data yang ada, diperoleh SPL sebagai berikut:
 20.0000b0 +  863.1000b1 +  1530.4000b2 +  587.8400b3 =  19.4200
 863.1000b0 +  54876.8900b1 +  67000.0900b2 +  25283.3950b3 =  779.4770
 1530.4000b0 +  67000.0900b1 +  117912.3200b2 +  44976.8670b3 =  1483.4370
 587.8400b0 +  25283.3950b1 +  44976.8670b2 +  17278.5086b3 =  571.1219
Hasil prediksi :  0.9384
```

Analisis: Hasil penyelesaian SPL untuk matriks tersebut adalah unik sehingga nilai konstanta pembentuk fungsi regresi adalah unik pula. Digunakan SPL Gauss Jordan untuk menyelesaikan matriks tersebut.

BAB V Kesimpulan, Saran, dan Refleksi

Dari tugas besar mata kuliah Aljabar Linier dan Geometri, kelompok kami menyimpulkan bahwa kelompok kami berhasil mengimplementasikan setiap library dan class yang dibutuhkan untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang akan diujikan seperti interpolasi polinom dan regresi linear berganda. Kelompok kami juga berhasil melewati berbagai studi kasus yang ada dan berhasil mengeluarkan output jawaban dengan benar.

Saran dari kelompok kami untuk tugas besar mata kuliah Aljabar Linier dan Geometri adalah memberikan wadah untuk melakukan mentoring bersama asisten praktikum minimal sekali sehingga setiap kelompok dapat mengkonsultasikan progress dan menanyakan berbagai pertanyaan yang mungkin muncul di tengah pengerjaan tugas besar ini.

Refleksi yang telah kelompok kami lakukan dari pengerjaan tugas besar mata kuliah Aljabar Linear dan Geometri adalah menyadari betapa pentingnya komunikasi dalam pengerjaan suatu tugas, khususnya tugas besar. Kelompok kami sering melakukan komunikasi baik melalui grup chat maupun meet bersama sehingga kelompok kami dapat menyelesaikan tugas besar Aljabar Linier dan Geometri dengan baik.

Referensi

Munir, R. (2021). Sistem persamaan linier (Bagian 1: Metode eliminasi Gauss) [Presentasi PowerPoint]. Diakses dari https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf

Munir, R. (2021). Sistem persamaan linier (Bagian 2: Tiga kemungkinan sistem persamaan linier [Presentasi PowerPoint]. Diakses dari https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf

Munir, R. (2021). Sistem persamaan linier (Bagian 2: Metode eliminasi Gauss-Jordan) [Presentasi PowerPoint]. Diakses dari https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf

Munir, R. (2021). Determinan (Bagian 1: menghitung determinan dengan reduksi baris)[Presentasi PowerPoint]. Diakses dari https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf

Munir, R. (2021). Determinan (Bagian 2: menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor) [Presentasi PowerPoint]. Diakses dari https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf