Approximation

$m+1$ points à approximer par une combili de $n+1$ fct de base.

$m > n$

$$\boxed{u^h(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x)}$$

on impose $\underbrace{u(x_i)}_{U_i} = \underbrace{u^h(x_i)}_{\sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x_i)}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_m) & \cdots & \phi_n(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix}$$

cas particulier $n = m$: 1 seul polynôme de degré n passe par $n+1$ points

$\Rightarrow$ matrice inversible $\underline{\underline{A}}\, \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ possède 1 solution

on connaît la fonction en les $m+1$ points $\{x_i\}_{i=0}^{m}$

$$\boxed{\min_a \underbrace{J(a)}_{\text{fct objective}}} = \sum_{i=0}^{m} \left(U_i - u^h(x_i)\right)^2 = \sum_{i=0}^{m} R_i^2$$

pour ne pas prendre en compte le signe

Remarque : on pourrait prendre d'autres objectifs pour minimiser les résidus ex $\sum_{i=0}^{m} R_i^{2K}$ $\forall K > 0$ (exposant pair)

$$\sum_{i=0}^{m} |R_i|$$

fct objective convexe $\Rightarrow$ le minimum local est global.

$$\frac{\partial J(a)}{\partial a_K} = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{m} \phi_K(x_i)\phi_j(x_i) \right) a_j}_{} = \sum_{i=0}^{m} \phi_K(x_i) U_i \quad \forall K.$$

équations normales. $\underbrace{\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}}_{\nabla^2 J(a)}\, \underset{\sim}{x} = \underline{\underline{A}}^T \underset{\sim}{b}$.

on connaît la fonction en tout point x sur l'intervalle I

$$\min_a J(a) = \int_I \left(u(x) - u^h(x)\right)^2 dx \leq \sum_{i=0}^{m} \left(U_i - u^h(x_i)\right)^2$$

$$e^h(x) \doteq u(x) - u^h(x) = \frac{u^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n) \text{ par Th Rolle}$$

inconnu

$$\underbrace{\leq \frac{\max\left(u^{(n+1)}(x)\right)}{(n+1)!} \underbrace{|(x-x_0)\cdots(x-x_n)|}_{\leq n!\frac{h^{n+1}}{4}}},$$

la borne est proportionnelle à h^{n+1}

on écrit $\mathcal{O}(h^{n+1})$ ordre $n+1$.

• Conditionnement de $\underline{A}$ $\quad K(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| \underset{\uparrow}{=} \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$

si A normale ($A^TA = AA^T$)

audren.balon@student.uclouvain.be

Si $K(A)$ élevé, mal-conditionné (= déterminant apparent nul)

fct régulière	dérivée bornée <u>ex</u> : $\cos x$	no problem
fct régulière	dérivée non bornée <u>ex</u> : $\dfrac{1}{1+5x}$	effet de Runge. $\Rightarrow$ abscisses Chebyshev
fct non régulière	<u>ex</u> avec discontinuités	oscillations

les <u>abscisses de Chebyshev</u> sont les racines des <u>polynômes</u>

$$T_{m+1}(x) = \cos\big((m+1)\arccos(x)\big) = 0 \Rightarrow \boxed{x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(m+1)}\right)}$$

idée = "mettre + de points d'interpolation au bord des intervalles"

les <u>polynômes de Lagrange</u> $\phi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

l'effet de Runge est entre autre dû au fait qu'on impose que le passage de $u^h(x)$ en (X_i, U_i) mais pas la dérivée.

Idée : calculer des interpolations sur de + petits intervalles en assurant une jonction régulière (smooth)

conditions = (1) passer par les points d'interpolation

$$u^{h_i}(X_i) = u^{h_{i+1}}(X_i) = U_i \quad \text{et} \quad u^{h_1}(X_0) = U_0$$
$$u^{h_m}(X_m) = U_m$$

(2) imposer la continuités des dérivées premières et secondes

$$(u^{h_i})'(X_i) = (u^{h_i})'(X_{i+1})$$

$$\Rightarrow \frac{h}{6}\left(U''_{i-1} + 4U''_i + U''_{i+1}\right) = \frac{1}{h}\left(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U''_0 \\ \vdots \\ U''_i \\ \vdots \\ U''_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) $U''_0 = U''_m = 0$ $\underbrace{\text{(condition pour splines cubiques naturelles)}}_{\text{ceci est une convention}}$

ceci est une convention
on pourrait imaginer prendre d'autres valeurs pour U''_0 et U''_m

audren.balon@student.uclouvain.be

B-Spline

$$\boxed{u^h(x) = \sum_{i=0}^{m-p-1} B_i^p(x)\, P_i}$$ pôles jouent le rôle de "poids"

$m-p$ fonctions de base

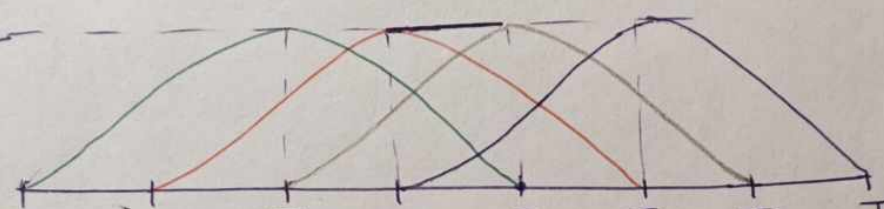
$B_i^p(x)$ défini sur $[T_i, T_{i+p+1})$

par récurrence $$\boxed{B_i^p(x) = \frac{(x-T_i)}{(T_{i+p}-T_i)} B_i^{p-1}(x) + \frac{(T_{i+p+1}-x)}{(T_{i+p+1}-T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(x)}$$

CI $$B_i^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [T_i, T_{i+1}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : on annule les termes de la somme avec dénominateur nul

exemple $K<1$



- $$\sum_{i=0}^{m-p-1} B_i^p(x) = 1 \quad x \in \underbrace{[T_p, T_{m-p}]}_{\text{intervalle où l'on trouve toutes les courbes}}$$

$B_i^p(x) \in C^{p-1}$ pour des noeuds de multiplicité 1

localement $B_i^p(x) \in C^{p-m}$ " m.

$B_i^p(x) = 1$ ssi $x = T_i$ de multiplicité $\geq p$ (on force à passer par le noeuds)

- Pour $\underbrace{m+1 \text{ noeuds}}_{\{T_i\}_{i=0}^{m}}$ et $\underbrace{m+1 \text{ points de contrôles}}_{\{P_i\}_{i=0}^{m}}$, on utilise des splines de degré $n-m$

Introduction de poids (+ le poids est grand, + on passe près du point de contrôle) = généralisation des B-splines par les <u>NURBS</u>

$$u^h(x) = \sum_{i=0}^{m-p-1} \frac{W_i B_i^p(x)}{\sum_{k=0}^{m-p-1} W_k B_k^p(x)} P_i$$

audren.balon@student.uclouvain.be