Intégration

(Newton Cotes)

$$I = \int_a^b u(x)\,dx \approx \int_a^b \underbrace{u^h(x)}_{\sum_{i=0}^{m} \underbrace{u(x_i)}_{U_i} \Phi_i(x)} dx = \sum_{i=0}^{m} U_i \underbrace{\int_a^b \Phi_i(x)\,dx}_{w_i}$$

choix fct de base

$$I \sim I^h = \sum_{i=0}^{m} U_i w_i$$ m points donnent un degré de précision m.

changement de domaine $[a,b] \rightarrow [-1,1]$.

$$\int_a^b u^h(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u^h(\xi) \underbrace{\left|\frac{dx}{d\xi}\right|}_{\frac{b-a}{2}} d\xi$$

$$x(\xi) = \xi\,\frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}$$

méthode composite

$x_0 = a \quad x_1 \quad \ldots \quad x_i \quad x_{m-1} \quad b = x_m$

$$I \sim I^h = \int_a^b u^h(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^h(x)\,dx$$

choix des x_i $i = 0 \ldots m$.
- équidistants $\boxed{x_i - x_{i-1} = h}$
- Gauss-Legendre

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{trouver } x_i \text{ tels que} \\ \dfrac{2}{2j+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} w_k x_k^{2j} \\ 0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} w_k x_k^{2j+1} \end{array}}$$

→ m+1 points donnent un degré de précision 2m+1.

⇒ Combinaison linéaire des résultats en $O(h^m)$ pour obtenir une méthode en $O(h^{m+1})$ = élimination d'un terme d'erreur dans le dvlp de Taylor

Extrapolation Richardson

	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$
h	$F_{0,0}$			
$h/2$	$F_{1,0}$	$F_{1,1}$		
$h/4$	$F_{2,0}$	$F_{2,1}$	$F_{2,2}$	
$h/8$	$F_{3,0}$	$F_{3,1}$	$F_{3,2}$	$F_{3,3}$ etc

$$F_{i,k} = \frac{F_{i,k-1} - \frac{1}{2^k} F_{i-1,k-1}}{\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}$$

Romberg = application de Richardson à la méth. des trapèzes

$$I_{i,k} = \frac{I_{i,k-1} - \frac{1}{2^{2k}} I_{i-1,k-1}}{\left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right)}$$

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
h	$I_{0,0}$			
$h/2$	$I_{1,0}$	$I_{1,1}$		
$h/4$	$I_{2,0}$	$I_{2,1}$	$I_{2,2}$	
$h/8$	$I_{3,0}$	$I_{3,1}$	$I_{3,2}$	$I_{3,3}$

Calcul de la borne d'erreur

méthode 1 X_i équidistants X_i

$$E^h = \int_a^b e^h(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{X_{i-1}}^{X_i} \frac{u^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \underbrace{(x-X_0)\cdots(x-X_m)}_{\text{degré } m+1} dx$$

$$C = \max_{[a,b]} |u^{(m+1)}(\xi)|$$

$$\Rightarrow |E^h| \leqslant \frac{mC}{(m+1)!} h^{m+2} \times \left(\text{constante venue de l'évaluation de l'intégrale}\right)$$

$m+2 \Rightarrow$ erreur locale

mais m dépend de $1/h$. $m+1 \Rightarrow$ erreur globale

⚠ ordre de précision = erreur globale

degré de précision = ordre de précision − 1.

exemple : méthode de Boole composite.

$$\int_{-2h}^{2h} u(x)\,dx \cong \frac{2h}{45}\left(7U_{-2h} + 32U_{-h} + 12U_0 + 32U_h + 7U_{2h}\right)$$

$$\Rightarrow E^h = \sum_{i=1}^{m} \int_{-2h}^{2h} \frac{u^{(6)}(\xi_i)}{6!}(x+2h)(x+h)x(x-h)(x-2h)(x-x)\,dx$$

on ajoute artificiellement $(x-x)$

on intègre parfaitement un polynôme d'ordre 5

seul un polynôme d'ordre 6 fait apparaître l'erreur.

$$|E^h| \leqslant m\frac{C_6}{6!}\left|\underbrace{\int_{-2h}^{2h} x^2(x+2h)(x+h)(x-h)(x-2h)\,dx}_{\frac{128}{21}h^7} - \underbrace{\int_{-2h}^{2h} x(x+2h)(x+h)x(x-h)(x-2h)\,dx}_{=0}\right|$$

degré impair sur domaine symétrique

$$\leqslant m\frac{C_6}{6!}\frac{128}{21}h^7$$

$$\leqslant m\frac{8C_6}{945}h^7$$

donc erreur locale $O(h^7)$

mais

$$\underbrace{-2h}_{a} \quad \overset{h}{\text{—}} \quad -h \quad \overset{h}{\text{—}} \quad 0 \quad \overset{h}{\text{—}} \quad h \quad \overset{h}{\text{—}} \quad \underbrace{2h}_{b} \qquad m = \frac{b-a}{4h}.$$

$|E^h| \leq (b-a)\frac{266}{945}h^6$ erreur globale $O(h^6)$

méthode 2 dvlp de Taylor.

$$u(x) = U_0 + xU_0' + \frac{x^2}{2}U_0'' + \frac{x^3}{6}U_0''' + \frac{x^4}{24}U_0^{(4)} + \frac{x^5}{120}U_0^{(5)} + \frac{x^6}{720}U_0^{(6)} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}U_0^{(k)}$$

$$E^h = \sum_{i=1}^{m}\left(\underbrace{\boxed{\int_{-2h}^{2h} u(x)\,dx}}_{} - \underbrace{\boxed{\int_{-2h}^{2h} u^h(x)\,dx}}_{\frac{2h}{45}(7U_{-2h} + 32U_{-h} + 12U_0 + 32U_h + 7U_{2h})}\right)$$

$$\boxed{\int_{-2h}^{2h}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}U_0^{(k)}\,dx}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}U_0^{(k)}\right]_{-2h}^{2h}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2h)^{k+1}}{(k+1)!}U_0^{(k)} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2h)^{k+1}}{(k+1)!}U_0^{(k)}$$

Si $k+1$ pair $(2h)^{k+1} = (-2h)^{k+1} \Rightarrow$ les termes s'annulent

Si $k+1$ impair $\Rightarrow$ les termes s'additionnent

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2\frac{(2h)^{2k+1}}{(2k+1)!}U_0^{(2k)}$$

$$= 4hU_0 + \frac{16h^3}{3!}U_0^{(2)} + \frac{2(2h)^5}{5!}U_0^{(4)} + \frac{2(2h)^7}{7!}U_0^{(6)} + \dots$$

$$\begin{cases} U_{-2h} = u(-2h) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2h)^k}{k!}U_0^{(k)} & \times 7 \\ U_{-h} = u(-h) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-h)^k}{k!}U_0^{(k)} & \times 32 \\ U_h = u(h) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}U_0^{(k)} & \times 32 \\ U_{2h} = u(2h) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2h)^k}{k!}U_0^{(k)} & \times 7 \end{cases}$$

seuls les termes avec k pairs s'annulent pas.

$$\frac{2h}{45}\left(7U_{-2h}+32U_{-h}+12U_0+32U_h+7U_{2h}\right)$$

$$=\frac{2h}{45}\left(2\times7\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2h)^{2k}}{2k!}U_0^{(2k)}+12U_0+2\times32\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^{2k}}{2k!}U_0^{(2k)}\right)$$

$$\boxed{=\frac{2h}{45}\left(90U_0+\frac{h^2}{2}(14\times4+64)U_0^{(2)}+\frac{h^4}{4!}(14\times16+64)U_0^{(4)}+\frac{h^6}{6!}(14\times64+64)U_0^{(6)}+\frac{h^8}{8!}(14\times256+64)U_0^{(8)}+\dots\right)}$$

$$\Rightarrow E^h=\sum_{i=1}^{m}\left(\qquad-\qquad\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\cancel{4hU_0}+\cancel{\frac{16h^3}{3!}U_0^{(2)}}+\cancel{\frac{64h^5}{5!}U_0^{(4)}}+\frac{256h^7}{7!}U_0^{(6)}+\dots-\left[\cancel{4hU_0}+\cancel{\frac{8}{3}h^5U_0^{(2)}}+\cancel{\frac{8h^5}{15}U_0^{(4)}}+\frac{8h^7}{135}U_0^{(6)}+\dots\right]\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}h^7\,U_0^{(6)}\left(\frac{256}{7!}-\frac{8}{135}\right)$$

$$\Rightarrow |E^h|\leqslant\frac{mh^7\,U_0^{(6)}\,8}{945}$$ erreur locale $O(h^7)$

mais $m=\frac{b-a}{4h}$ erreur globale $O(h^6)$

méthode 3

on peut utiliser $I_{Boole,h}=\frac{I_{Simpson,h}-\frac{1}{24}I_{Trapèze,2h}}{1-\frac{1}{24}}$

$$=\frac{16\,I_{Simpson,h}-I_{Trapèze,2h}}{15}$$