Part III : problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = \bar{u} \quad (CI) \end{cases}$$

solution ε-approchée $u_\varepsilon(x) - u(x) = \varepsilon = e_\varepsilon(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_\varepsilon'(x) = \underbrace{u_\varepsilon'(x)}_{f(x,u_\varepsilon(x))} - \underbrace{u'(x)}_{f(x,u(x))} \\ \qquad = f(x,u(x)) + \dfrac{\partial f}{\partial u}\underbrace{(u_\varepsilon(x) - u(x))}_{e_\varepsilon(x)} - f(x,u(x)) \\ \qquad = e_\varepsilon(x)\, J(x,u(x)) \\ e_\varepsilon(a) = \varepsilon \qquad (CI) \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_\varepsilon(x) = \underbrace{\varepsilon \exp\Big(\int_a^x \underbrace{J(s,u(s))}_{\sim J_i}\, ds\Big)}$$

si $J_i < 0$ $\searrow$ $e_\varepsilon(x) \to 0$

>0 $\nearrow$ $\to \infty$

$=0$ $\rightarrow$ constant.

si $|J_i| \uparrow\uparrow$ la convergence est trop rapide, le problème est dit raide.

ex 113 (1) Taylor

$x_i \xrightarrow{h} x = x_{i+1}$

$$u(x) = u(x_i) + (x - x_i)\underbrace{u'(x_i)}_{f(x_i,u(x_i))} + \frac{(x-x_i)^2}{2}\underbrace{u''(x_i)}_{f'(x_i,u(x_i))}$$

considérant $f' = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial u} u'$ (approx ordre 1)

$$U_{i+1} = U_i + h\Big(f + \frac{h^2}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\Big)u'\Big|_{x_i} + \cdots\Big)$$

$x_{i+1} - x_i = h$.

S1 Taylor ordre 1 = Euler explicite. $U_{i+1} = U_i + hf(x_i, U_i)$

U_{i+1} dépend que d'informations avant $i-1$

Analysons l'erreur de Euler explicite :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hf(x_i, U_i) + \frac{h^2}{2}u''(\xi)$$

$-U_{i+1}$ $\quad -U_{i+1}$ $\quad = U_i$ $\quad = U_i$

$$u(x_{i+1}) - \underbrace{u^h(x_{i+1})}_{=U_{i+1}} = u(x_i) - u^h(x_i) - hf(x_i, u^h(x_i)) + hf(x_i, U_i) + \frac{h^2}{2}u''(\xi)$$

$$\Rightarrow e^h(x_{i+1}) = e^h(x_i) + h\left(f(x_i, u(x_i)) - f(x_i, U_i)\right) + \frac{h^2}{2} u''(\xi)$$

$-e^h(x_i)$

$e^h(x_i) \, \partial f \, J(x_i, U_i)$

$$\Rightarrow e^h(x_{i+1}) = e^h(x_i)(1 + hJ_i) + \frac{h^2}{2} u''(\xi)$$

e_{i+1}

l'erreur est décroissante si $|1 + hJ_i| < 1$

$$-2 < hJ_i < 0.$$

donc en résumé

$J(x, u(x)) > 0$ problème physique instable $\Rightarrow$ méth Euler explicite instable

$J(x, u(x)) < 0$ " stable $\Rightarrow$ " stable conditionellement si $\boxed{\begin{array}{l} -2 < hJ_i \\ \frac{-2}{J_i} > h \end{array}}$

<u>Analyse de l'erreur pour Taylor général d'ordre m.</u>

$$e_{i+1} = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} u^{(m+1)}(\xi_{i+1})$$

$$e^h(x_{i+1}) = \left(1 + hJ_i + \frac{h^2}{2} J_i^2 + \cdots + \frac{h^m J_i^m}{m!}\right) e^h(x_i) + e_{i+1}$$

région de stabilité = erreur décroissante

$$\left|1 + hJ_i + \frac{h^2}{2} J_i^2 + \cdots + \frac{h^m J_i^m}{m!}\right| < 1.$$

<u>Euler implicite</u> $U_{i+1} = U_i + h f(x_{i+1}, U_{i+1})$

car U_{i+1} dépend d'information en $i+1$!

$$U_{i+1} - h f(x_{i+1}, U_{i+1}) = U_i$$

même dvlp que Euler explicite :

$$e^h(x_i) = e^h(x_{i+1})(1 - hJ_i) + e_{i+1}$$

$$\Rightarrow e^h(x_{i+1}) = (1 - hJ_i)^{-1} e^h(x_i) - e_{i+1}'$$

l'erreur est décroissante si $|(1 - hJ_i)^{-1}| < 1$.

donc en résumé $|(1 - hJ_i)| > 1$.

$J > 0$ problème phys instable $\Rightarrow$ méth Euler implicite instable

$J < 0$ " stable $\Rightarrow$ inconditionellement stable

Cronk-Nicholson = moyenne des Euler

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, U_i) + f(x_{i+1}, U_{i+1})\right)$$

$$\left|\left(1+\frac{h}{2}J_i\right)\left(1-\frac{h}{2}J_i\right)^{-1}\right| < 1 \iff \mathcal{R}(hJ_i) < 0.$$

8 (2) Runge-Kutta

$$U_{i+1} = U_i + h\left(\sum_{j=1}^{m} w_j K_j\right) \qquad K_1 = f(x_i, U_i) \qquad K_2 = f(x_i + \alpha_2 h, U_i + \beta_{21} h K_1)$$

ex 12 c, 119, 106, 91, 56

Heun = RK ordre 2 $\quad U_{i+1} = U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$

$$K_1 = f(x_i, U_i)$$
$$K_2 = f(x_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$

idée : la meilleure approximation est amenée par un développement de Taylor :

$$U_{i+1} = U_i + h f(x_i, U_i) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} f\right)\Big|_{x_i, U_i} + O(h^3)$$

en substituant K_1 et K_2 dans (Heun), on obtient

$$U_{i+1} = U_i + h w_1 f(x_i, U_i) + h w_2 \underbrace{f(x_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)}_{f(x_i, U_i) + \alpha h \frac{\partial f}{\partial x} + \beta h K_1 \frac{\partial f}{\partial u} + O(h^2)}$$

$$= U_i + h(w_1 + w_2) f(x_i, U_i) + h^2 w_2\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta f \frac{\partial f}{\partial u}\right) + O(h^3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ \alpha w_2 = 1/2 \, ; \, \beta w_2 = 1/2 \end{cases} \quad + 1 \text{ ddl.}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 1 \quad w_1 = w_2 = 1/2.$$

ex 99, 85, 83

(3) ABM (Adam-Bashforth-Moulton) ↳ explicite à pas liés

Rappels

9

méthode implicite	explicite
U_{i+1} dépend d'infos $\geq i+1$	U_{i+1} dépend d'infos $\leq i$

méthode pas simple :

U_{i+1} dépend de $i+1, i, i+2$ $\qquad$ de $i, i-1$

méthode pas liés :

U_{i+1} dépend d'autres itérations antérieures ou postérieures

$$U_{i+1} = U_i + h \sum_{j=-1}^{m} \beta_j f(x_{i-j}, U_{i-j})$$

Comment trouver les β_j ?

$$h \sum_{j=-1}^{m} \beta_j f(x_{i-j}, U_{i-j}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))\, dx$$ $m-1$

101 ex 126 $\Rightarrow$ voir chap intégration

<u>les méthodes prédicteur-correcteur</u>

ordre 1 <u>ex</u> $\begin{cases} P_{i+1} = U_i + h f(x_i, U_i) & \text{euler explicite (Adam Bashforth ordre 1)} \\ U_{i+1} = U_i + h f(x_{i+1}, P_{i+1}) & \text{" implicite (Adam-Moulton ordre 1)} \end{cases}$

ABM consiste à itérer entre

(a) une méthode Adam-Bashforth (explicite) d'ordre m

(b) une méthode Adam-Moulton (implicite) d'ordre m avec $U_{i+1} \approx P_{i+1}$

$$u(x_{i+1}) - P_{i+1} = \frac{h^2}{2} u''(\xi_1) > 0 \text{ car explicite}$$

$$u(x_{i+1}) - U_{i+1} = -\frac{h^2}{2} u''(\xi_2) < 0 \text{ car implicite}$$

$$\Rightarrow \left(u(x_{i+1}) - P_{i+1}\right)^2 \approx \left(u(x_{i+1}) - U_{i+1}\right)^2$$

ordre 3 <u>ex</u> $\begin{cases} P_{i+1} = U_i + \frac{h}{12}(5F_{i-2} - 16F_{i-1} + 23F_i) \\ U_{i+1} = U_i + \frac{h}{12}(-F_{i-1} + 8F_i + 5F_{i+1}) \end{cases}$

$$u(x_{i+1}) - P_{i+1} = \frac{3}{8} h^4 u^{(4)}(\xi_1) > 0$$

$$u(x_{i+1}) - U_{i+1} = \frac{8}{24} h^4 u^{(4)}(\xi_2) < 0$$

$$\Rightarrow \left(u(x_{i+1}) - U_{i+1}\right)^2 \approx \left(\frac{8}{3} 24 \left(u(x_{i+1}) - P_{i+1}\right)\right)^2$$

Runge-Kutta-Fehlberg = appliquer la méthode prédicteur-correcteur à 2 méthode de Runge-Kutta d'ordre m et $m+1$

$|U_{i+1} - P_{i+1}| \approx O_{i+1}$ erreur locale

si on peut exprimer $\begin{cases} O_i = C h_i^{m+1} \\ O_{i+1} = C h_{i+1}^{m+1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{O_{i+1} \approx O_i \left(\frac{h_{i+1}}{h_i}\right)^{m+1}}$

si on itère jusqu'à $|U_{i+1} - P_{i+1}| \leq \varepsilon$

$\theta_{i+1} \leq \varepsilon \Rightarrow \theta_i \left(\frac{h_{i+1}}{h_i}\right)^{m+1} \leq \varepsilon$

$\Rightarrow h_{i+1} \leq h_i \left(\frac{\varepsilon}{\theta_i}\right)^{1/m+1}$

ex 90 (4) Gear $u_{l+1}^h(x) = \sum_{j=0}^{m} U_{l+1-j}\, \phi_j(x)$

$u'(x_{l+1}) = F_{l+1}$

$\Rightarrow \sum_{j=0}^{m} U_{l+1-j}\, \phi_j'(x_{l+1}) = F_{l+1}$

$\Rightarrow U_{l+1}\, \phi_0'(x_{l+1}) + \sum_{j=1}^{m} U_{l+1-j}\, \phi_j'(x_{l+1}) = F_{l+1}$

$\Rightarrow U_{l+1} = \frac{1}{\phi_0'(x_{l+1})} \left(F_{l+1} - \sum_{j=1}^{m} U_{l+1-j}\, \phi_j'(x_{l+1})\right)$

Liens avec Algèbre : les EDO linéaires

$\underset{\sim}{u}' = A \underset{\sim}{u} \Longrightarrow J(u(x)) = A = P \Lambda P^{-1}$

$\underset{\sim}{v}' = \Lambda \underset{\sim}{v}$ (substitution $u = Pv$)

donc $\begin{cases} v_1' = \lambda_1 v_1 & \Rightarrow v_1 = \exp(+\lambda_1 t)\, c_1 \\ \vdots & \\ v_m' = \lambda_m v_m & \Rightarrow v_m = \exp(\lambda_m t)\, c_m \end{cases}$

stable ssi les exponentielles sont décroissantes càd $\mathbb{R}(\lambda_i) < 0$.

EDO d'ordre m $\Rightarrow$ m EDO d'ordre 1

exercices 136, 116, 102

Méthode des différences finies

$$u''(x_i) = f(x_i, U_i) \qquad u(a) = u^a \quad u(b) = u^b$$

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = f(x_i, U_i)$$

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} h^2 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 0 & h^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^a \\ f(x_i, U_i) \\ u^b \end{pmatrix}$$

solvable si f est linéaire par rapport à u

(10) équations non linéaires $\quad F(X) = 0$.

(1) bisection

Soit $[a_0, b_0]$ tel que $F(a_0)F(b_0) < 0$.

$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$

si $F(x_i) = 0$ return

si $F(x_i)F(a_i) > 0 \qquad a_{i+1} = x_i$

$\qquad b_{i+1} = b_i$

else $\qquad a_{i+1} = a_i$

$\qquad b_{i+1} = x_i$

convergence : $|e_0| < \frac{b_0 - a_0}{2}$

$|e_1| < \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$

$|e_m| < \frac{b_0 - a_0}{2^{m+1}}$

$\Rightarrow |e_i| < \frac{1}{2}|e_{i+1}|^1$ méthode linéaire

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|e_i|}{|e_{i+1}|^1} = \frac{1}{2}$$

ex (2) point fixe $\quad F(X) = 0 \Rightarrow G(X) = X$

133 soit x_0

68

64 while $|\Delta x| > \varepsilon$

63 $\qquad x_{i+1} = g(x_i)$

mais la convergence n'est pas assurée

privilégier l'expression $|g'(x)|$ petit

Si $|g'(x)| \leq L < 1$ (condition de Lipschitz)
alors l'algorithme converge linéairement

$$\underbrace{x_{i+1} - x}_{e_{i+1}} = g(x_i) - g(x) = \underbrace{g'(\xi)}_{\leq K}\underbrace{(x_i - x)}_{e_i} \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \frac{|e_i|}{|e_{i+1}|} \leq \frac{1}{K}$$

<u>application aux systèmes</u> $F(x) = Ax - b = 0$

(1) Jacobi

$D = \mathrm{Diag}(\mathrm{diag}(A))$

$$x_{i+1} = D^{-1}(D-A)x_i + D^{-1}b$$
$$= D^{-1}[(D-A)x_i + b]$$
$$= D^{-1}[Dx_i - Ax_i + b]$$
$$\Rightarrow Dx_{i+1} = Dx_i - Ax_i + b$$
$$\Rightarrow D\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\to 0} = b - Ax_i$$

ex 72 (2) Gauss-Seidel $x_{i+1} = (D+L)^{-1}(D+L-A)x_i + (D+L)^{-1}b$

$A = L + D + U$

$\Rightarrow$ méthodes de type $x_{i+1} = Mx_i + c$

$$\underbrace{x_{i+1} - x}_{e_{i+1}} = M\underbrace{(x_i - x)}_{e_i} + c - c$$
$$= M^{i+1}\underbrace{(x_0 - x)}_{e_0}$$

il faut que $\lim_{i\to\infty} M^i e_0 = 0$

exprimons e_0 dans la base des vecteurs propres

$$e_0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j \Rightarrow e_i = M^i e_0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j M^i v_j$$
$$M^i v = \lambda^i v \qquad = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_j^i v_j$$

$e_i \to 0$ si λ_j^i décroissent

$|\lambda_j| < 1 \quad \forall j$

Si M est $\underbrace{\text{diagonale dominante}}$, la méthode est convergente

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{m} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i$$

(11)

ex 139 • méthode approximation de premier ordre (Newton-Raphson)
ex 125
122
115
62
61

$$f(x) = 0 = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) \left(+ \frac{1}{2}(x-x_i)^2 f''(x_i)\right)$$

$$\Rightarrow x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - f(x_i)\left(\nabla f(x_i)\right)^{-1}}$$

<u>convergence</u>

$$e_{i+1} = x - x_{i+1} = x - \left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)$$

$$= \frac{e_i f'(x_i) + f(x_i)}{f'(x_i)} = \frac{\overbrace{f(x)}^{=0} - \frac{1}{2} e_i^2 f''(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$e_{i+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} e_i^{2} \quad \text{quadratique si } \left|\frac{1}{2}\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}\right| < 1$$

ex 138 • approximation de $f'(x_i) \approx \dfrac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h}$
, 111
98

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}} \quad \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

ex 128 <u>exemple d'application</u> : trouver un point stationnaire
73
74 d'une fonction $F(x)$, càd tel que $\nabla F(x) = 0$.

$\Rightarrow$ on applique Newton-Raphson $\underset{\sim}{x}_{i+1} = \underset{\sim}{x}_i - \nabla F(x)\left[\nabla^2 F(x)\right]^{-1}$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 F(x) \underbrace{(\Delta x_i)}_{x_{i+1} - x_i} = -\nabla F(x).$$

ex 132. <u>appliquer Newton-Raphson à la méthode d'Euler implicite</u>
idem 104

soit U_0, pour résoudre Euler implicite $U_{i+1} = U_i + h f(x_{i+1}, U_{i+1})$,
calcule $x = U_{i+1}$ tel que $g(x) = U_{i+1} - U_i - h f(x_{i+1}, U_{i+1}) = 0$
càd tant que $\|\Delta x\| > \varepsilon$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_j)\,\Delta x = -g(x_j)$$

$$x_{j+1} = x_j + \Delta x$$

(12) ex 75

Introduction aux équations différentielles partielles (suite en LEPL 1103)

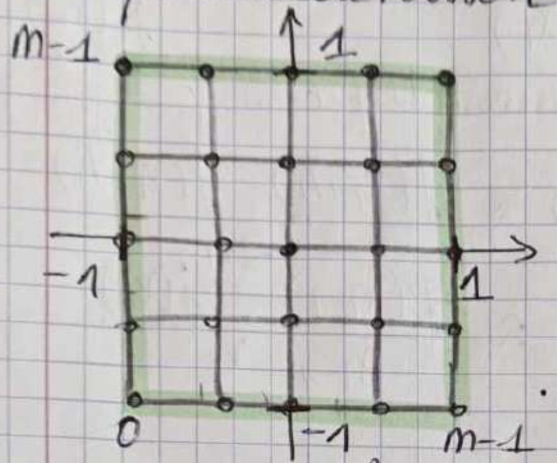
(1) • équations elliptiques $\kappa \nabla^2 u(x,y) + f(x,y) = 0$

(2) • équations paraboliques $\rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$

(3) • équations hyperboliques $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$

(1) Equation de Poisson

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla^2 u(x,y) + 1 = 0 \\ u(x,y) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array}}$$



grille avec points équidistants

$$x_{ij} = (x_i, y_j) = (-1+ih, -1+jh)$$

avec $h = \frac{2}{m-1}$

en 2D $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 1 = 0.$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2}\left(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j}\right) + 1 = 0.$$

pour la convergence : $\max\left(|u(x_i,y_j) - u^h(x_i,y_j)|\right) \leq C h^2 \max_{x,y} |\nabla^4 u(x,y)|$

(2) Equation de la chaleur

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\Rightarrow \frac{U_i^{m+1} - U_i^m}{\Delta t} \doteq \underbrace{\frac{\kappa}{\rho c}}_{=\alpha} \frac{U_{i+1}^m - 2U_i^m + U_{i-1}^m}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow U_i^{m+1} = U_i^m + \underbrace{\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}}_{=\beta}\left(U_{i+1}^m - 2U_i^m + U_{i-1}^m\right) \quad \forall i$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_1^{m+1} \\ U_i^{m+1} \\ U_m^{m+1} \end{pmatrix}}_{u^{m+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} U_1^m \\ U_i^m \\ U_m^m \end{pmatrix}}_{u^m} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} U_1^m \\ U_i^m \\ U_m^m \end{pmatrix}}_{u^m}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + \beta A u_n = u_n (I + \beta A)$$

- ce qui est Euler explicite pour $u'(t) = \frac{\alpha}{\Delta x^2} A u(t)$
- ce qui est une recurrence, u_n stable si les vap de $I + \beta A$ sont < 1 donc $|1 + \beta \lambda_i| < 1 \quad \forall i$.

Considérons la méthode de séparation des variables

$$U_j^m = U^m \exp(i k x_j)$$

$$\Rightarrow U_j^{m+1} = U_j^m + \beta (U_{j+1}^m + U_{j-1}^m - 2 U_j^m)$$

$$= U^m e^{ikx_j} + \beta (U^m e^{ikx_{j+1}} + U^m e^{ikx_{j-1}} - 2 U^m e^{ikx_j})$$

$$= \underbrace{U^m e^{ikx_j}}_{U_j^m} \left[1 + \beta (e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} - 2) \right]$$

$$= U_j^m \underbrace{\left[1 + \beta (2\cos(k\Delta x) - 2) \right]}_{\text{terme d'amplification}}$$

$$|1 + \beta(2\cos(k\Delta x) - 2)| \leq 1$$

cas le plus defavorable lorsque $1 + \beta(2\cos(k\Delta x) - 2)$ est maximal càd $\cos k\Delta x = -1$

$$k\Delta x = (2k+1)\pi$$

$$\Leftrightarrow |1 - 4\beta| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 4\beta \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -4\beta \leq 0 \Leftrightarrow 2 \geq 4\beta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \beta \geq 0.$$

exercices 140, 107, 123, 96, 94, 88