

# Latihan OSP

GOOD LUCK OSPNYA - AUDREY FELICIO ANWAR

1. Misalkan  $a, b, c, d$  adalah bilangan real nonnegatif yang memenuhi  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , buktikan bahwa

$$a + b + c + d - 1 \geq 16abcd$$

2. Tentukan semua fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  yang memenuhi

$$f(xy + f(x)) = xf(y)$$

untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$

3. Misalkan  $a, b$  adalah bilangan real yang lebih besar dari 4. Apakah salah satu dari persamaan kuadrat  $x^2 + ax + b$  dan  $x^2 + bx + a$  pasti mempunyai dua akar yang berbeda?

4. Tentukan semua tupel bilangan real  $(x, y, z)$  yang memenuhi

$$\sqrt{x^3 - y} = z - 1$$

$$\sqrt{y^3 - z} = x - 1$$

$$\sqrt{z^3 - x} = y - 1$$

5. Diberikan sebuah segilima beraturan  $ABCDE$ , Misalkan  $F$  adalah perpotongan  $AC$  dan  $BD$  serta  $D$  adalah titik tengah segmen garis  $DE$ . Misalkan juga  $G$  pada  $AD$  sehingga  $2AD = 3AG$ . Buktikan bahwa  $F, G, H$  kolinear
6. Diberikan sebuah segitiga  $ABC$ . Titik  $P$  adalah perpotongan garis singgung lingkaran luar segitiga  $ABC$  di  $A$  dengan perpanjangan garis  $BC$ . Misalkan  $Q, R$  adalah hasil refleksi dari  $P$  terhadap  $AB, AC$  secara berturut-turut. Buktikan bahwa  $PQ \perp BC$
7. Misalkan  $x, y$  adalah bilangan asli dan  $x^2 - 4y + 1$  merupakan kelipatan dari  $(x - 2y)(1 - 2y)$ . Apakah  $|x - 2y|$  harus merupakan bilangan kuadrat?
8. Pada sebuah papan berukuran  $2016 \times 2016$ , Anthony meletakkan  $2016^2$  buah gelas kosong pada setiap kotak satuan. Anthony kemudian memilih  $x$  buah baris dan menuangkan larutan potassium klorat kedalam setiap gelas pada  $x$  baris tersebut. Gelas yang lainnya kemudian diisi dengan sebuah Gummy Bear. Anthony kemudian memilih  $y$  buah kolom dan mengisi setiap gelas pada  $y$  buah kolom tersebut dengan sebuah Gummy Bear. Gelas lainnya selain yang terletak pada  $y$  kolom tersebut dituangkan larutan potassium klorat. Gelas akan meledak jika dan hanya jika Gummy Bear bercampur dengan potassium klorat.

- a) Mungkinkah tepat seperempat dari total gelas meledak?
  - b) Tentukan semua pasangan  $(x, y)$  yang mungkin sehingga Anthony dapat membuat tepat setengah dari total gelas meledak.
9. Sugiyem dan Ucok bermain sebuah permainan pada papan catur  $2019 \times 2019$ . Mula-mula, Ucok menaruh tutup pada sebagian petak catur. Permainan kemudian dilakukan dengan Sugiyem dan Ucok secara bergantian menaruh benteng pada suatu petak catur. Mereka tidak boleh menaruh benteng pada petak catur yang ditutupi dan tidak ada dua benteng yang saling menyerang. Sugiyem berada pada giliran pertama. Tentukan minimal petak yang harus ditutupi oleh Ucok sehingga Ucok dapat memenangkan permainan.
10. Representasi dari  $\frac{17}{20}$  sebagai jumlahan sebagai berikut

$$\frac{17}{20} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}$$

disebut *IMBA* dalam  $k$  buah suku jika setiap  $a_i$  berbeda dan paling banyak hanya satu dari  $a_i$  yang bukan dalam bentuk  $2^x$  untuk suatu  $x$  bilangan nonnegatif.

- a) Tentukan nilai  $k$  terkecil sehingga  $\frac{17}{20}$  mempunyai representasi *IMBA* dalam  $k$  buah suku.
- b) Tunjukkan bahwa ada tak hingga banyaknya representasi *IMBA* dari  $\frac{17}{20}$

**Selamat Menikmati**