

Solution by Audrey Felicio Anwar**SIMAK UI 2015 Mat IPA Nomor 7**

Diberikan sistem persamaan

$$x + y^2 = y^3$$

$$y + x^2 = x^3$$

Banyaknya pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem di atas adalah...

Solusi

Kurangkan kedua persamaan, kita peroleh $(x-y) + (y-x)(x+y) = (y-x)(x^2 + xy + y^2)$. Pindah ruas dan faktorkan, kita peroleh $(x-y)(1-x-y+x^2+xy+y^2) = 0$. Kali 2 kedua ruas, $(x-y)[(x^2-2x+1) + (y^2-2y+1) + (x^2+2xy+y^2)] = 0$. Maka,

$$(x-y)[(x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2] = 0$$

Jika $x \neq y$, maka $(x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$, namun $(x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ karena bilangan kuadrat tidak ada yang negatif. Kesamaan terjadi, maka $x = 1, y = 1$, dan $x = -y$. Kontradiksi karena $x \neq -y$. Tidak ada solusi. Jika $x = y$, substitusi kembali ke persamaan awal, $x^3 - x^2 - x = 0 \implies x(x^2 - x - 1) = 0$. Kita peroleh $(x, y) = (0, 0), (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}), (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$. Ada 3 pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi.