

Solution by Audrey Felicio Anwar, silver medallist OSN Matematika 2018*KTOM Juli 2019 Essay Nomor 1**

Tentukan semua pasangan bilangan real taknegatif (x, y) yang memenuhi $x+y \leq 1$ dan

$$3xy = 2x(1-x) + 2y(1-y)$$

Solusi

Tinjau bahwa $x, y \geq 0$, maka $xy \geq 0$. Perhatikan juga bahwa $1-x \geq y, 1-y \geq x$. Maka,

$$3xy = 2x(1-x) + 2y(1-y) \geq 2xy + 2xy = 4xy$$

$$0 \geq xy$$

Maka, $0 \geq xy \geq 0$. Akibatnya, $xy = 0$. Jika $x = 0$, maka $0 = 2y(1-y)$, kita peroleh $(x, y) = (0, 0), (0, 1)$. Jika $y = 0$, maka $0 = 2x(1-x)$, kita peroleh $(x, y) = (0, 0), (1, 0)$. Maka, semua solusi adalah $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.