KTOM

Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

14 – 16 April 2016

Berkas Soal

Tuliskan jawaban akhir setiap soal dengan mengisi formulir di bit.ly/ktom-A-Apr-16. *Setiap soal bernilai 1 angka.*

1. Diberikan jajaran genjang $ABCD$ dengan titik E di dalam segitiga ABC sehingga luas $\triangle DEA$ dan $\triangle AEB$ berturut-turut adalah 969 dan 696, hitung luas $\triangle AEC$.

2. Misalkan ABC siku-siku di C. Pada segmen AC diambil titik E kemudian dibuat segitiga siku-siku ADE diluar segitiga ABC dengan $\angle ADE = 90°$. Diketahui $AB = 750, BC = 210, CE = 470, AD = 20$, dan panjang $BD = m\sqrt{n}$ dalam bentuk yang paling sederhana. Tentukan nilai $m + n$.

3. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = \sqrt{52}, AC = \sqrt{61}, BC = 9$. Misalkan γ adalah lingkaran melalui A dan menyinggung BC di titik tengahnya. Misalkan γ memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ di A dan P. Tentukan panjang segmen AP.

4. Segitiga ABC dengann panjang sisi BC, CA, AB berturut-turut adalah $11, 13, 20$. Misalkan I adalah titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC. Luas segitiga yang ketiga titik sudutnya adalah titik berat dari $\triangle ABI, \triangle BCI, \triangle ACI$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan asli yang relatif prima. Tentukan $a + b$.

5. Diberikan segitiga ABC dengan panjang $BC = 21$. Misalkan D adalah titik tengah BC dan E adalah titik tengah AD. Misalkan F adalah perpotongan BE dengan AC. Diketahui AB menyinggung lingkaran luar segitiga BFC. Hitunglah kuadrat dari panjang BF.

6. Tentukan jumlah semua bilangan real x yang memenuhi persamaan:
$$\sqrt[3]{\frac{x-3}{2014}} + \sqrt[3]{\frac{x-2}{2015}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{2016}} = \sqrt[3]{\frac{x-2014}{3}} + \sqrt[3]{\frac{x-2015}{2}} + \sqrt[3]{x-2016}$$

7. Tentukan nilai $x + y$ terbesar, dimana $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ yang memenuhi persamaan:
$$(\cos 2x + 3)(\cos 2y + 3) = 2(\cos x + 1)(\cos y + 1)(\cos x \cos y + 1)$$

8. Tentukan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari:
$$\frac{1}{2017} + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2016^2}$$

9. Misalkan $X = 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333\cdots333}_{\text{2016 angka 3}}$ dan Y adalah jumlah digit-digit dari X. Tentukanlah nilai Y.

10. Cari jumlah dari akar akar real persamaan
$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2016$$

11. Berapa banyak pasangan bilangan asli (a, b) dengan $1 \leq a, b \leq 15$ sehingga untuk semua k asli, $(ak + b)^{(ak+b)}$ bukan bilangan kuadrat sempurna?

12. Sebuah bilangan disebut tank apabila representasi basis tiga bilangan tersebut jika dibaca dalam basis 10 habis dibagi 7. Sebagai contoh, 21 merupakan bilangan tank karena representasi basis 3 dari 21 adalah $(210)_3$, dan $7|210$. Berapa banyak bilangan tank yang memiliki tepat 9 digit di basis 3?

13. Misal a_n dan b_n berturut-turut menyatakan banyak digit 4^n dan 25^n. Tentukan nilai $a_1 + a_2 + ... + a_{69} + b_{69} + ... + b_1$

14. Ada berapa tripel bilangan bulat (a, b, c) (tanpa memperhatikan urutan) sehingga a, b, c adalah panjang sisi-sisi segitiga siku-siku yang luasnya sama dengan kelilingnya.

15. Ada berapa bilangan prima tiga digit $\overline{abc}$ yang ketiga digitnya bukan 0 sehingga $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki solusi rasional?

16. Sejumlah orang duduk dalam meja melingkar dimana dua kursi yang berdekatan memiliki jarak yang sama. Apabila diketahui bahwa orang ke 17 tepat berhadapan dengan orang ke 41, berapakah jumlah orang yang ada dalam meja melingkar tersebut?

17. Kevin memilih secara acak salah satu dari $\{1, -1\}$, lalu dia menulis angka yang dia pilih di papan tulis. Jika Kevin melakukan proses ini 2016 kali, dan p peluang hasil kali angka-angka di papan tulis positif, tentukan nilai $100p$

18. Diberikan bilangan bulat positif 5-digit $\overline{abcde}$. Jika kesepuluh bilangan-bilangan 2-digit $\overline{ab}, \overline{ac}, \overline{ad}, \overline{ae}, \overline{bc}, \overline{bd}, \overline{be}, \overline{cd}, \overline{ce}, \overline{de}$ (contohnya, jika $a = 1, b = 2$ maka $\overline{ab} = 12$) diurutkan dari kecil sampai besar, diperoleh bilangan $33, 37, 37, 37, 38, 73, 77, 78, 83, 87$. Carilah nilai $\overline{abcde}$.

19. Dalam suatu negara ada 5 kota. Negara tersebut ingin membangun 9 jalan identik diantara kota-kota tersebut (setiap jalan menghubungi tepat 2 kota) sedemikian sehingga setiap pasang kota terhubungi oleh 0, 1, atau 2 buah jalan. Tentukan lah banyak cara melakukan pembangunan jalan.

20. Di semua kotak pada sebuah tabel 100×100 tertulis sebuah bilangan. Di baris paling atas, bilangan-bilangan $0, 1, \ldots, 99$ ditulis dari kiri ke kanan. Di baris paling kiri, bilangan-bilangan $0, 1, \ldots, 99$ ditulis dari atas ke bawah. Jumlah bilangan-bilangan pada sebuah persegi 2×2 selalu 20. Carilah bilangan yang ditulis di kotak paling bawah kanan.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda pada lembar jawaban yang sudah disediakan. Jika memerlukan halaman lebih, silakan gunakan halaman kosong tambahan dengan tetap memperhatikan urutan soal. Setiap soal bernilai 7 angka.

1. Diberikan segitiga ABC dengan K dan L titik tengah AB dan AC berturut-turut. Suatu lingkaran Γ yang berpusat di pusat lingkaran luar ABC memotong segmen AK dan AL di P dan Q berturut-turut. Buktikan bahwa $AP \times PB = AQ \times QC$.

2. Misalkan P adalah himpunan $n \geq 3$ titik pada bidang. Tinjau setiap segitiga yang titik-titik sudutnya merupakan anggota P. Misalkan Q adalah himpunan gabungan semua titik berat segitiga-segitiga ini (dengan mengasumsikan bahwa titik beratnya tidak ada yang berimpit). Tunjukkan bahwa titik berat dari himpunan P sama dengan titik berat dari himpunan Q. (Titik berat suatu himpunan didefinisikan sebagai rata-rata koordinat dari anggotanya)

3. Diketahui barisan bilangan riil $a_1, a_2, \cdots, a_{2016}$ yang memenuhi $a_1+a_2+\cdots+a_{2016} = 0$ dan $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{2016}| = 1$. Tentukan nilai maksimum dari:

$$2|a_1 + 2a_2 + \cdots + 2016a_{2016}|$$

4. Pulau Kappa memiliki 20 rumah, yang memiliki nomor rumah $1, 2, ..., 20$. Henry, seorang kontraktor perusahaan telekomunikasi, ingin menghubungkan rumah-rumah tersebut dengan kabel telepon, sehingga:

   (a) Jika rumah A dapat menghubungi rumah B secara langsung dengan memakai jaringan perusahaan telepon Henry, maka B dapat pula menghubungi A secara langsung lewat jaringan perusahan telepon Henry.

   (b) Untuk semua rumah A dan B yang berbeda, nomor rumah A habis membagi nomor rumah B atau nomor rumah B habis membagi nomor rumah A **jika dan hanya jika** dapat ditemukan rumah C sehingga rumah A dan B keduanya terhubung ke rumah C.

   Mungkinkah Henry mewujudkan keinginannya?

5. Diberikan segitiga lancip ABC. Titik D, E, F terletak pada sisi BC, CA, AB sehingga AD, BE, CF adalah garis tinggi dari segitiga ABC. Titik X terletak didalam segitiga sehingga $\angle XAB = \angle XBC$ dan $\angle XAC = \angle CXB$. Misalkan Y adalah titik tengah AX. Buktikan bahwa Y terletak pada lingkaran luar segitiga DEF.