logo.png

Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan September 2016

23 – 26 September 2016

Berkas Soal

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Misalkan x dan y adalah dua bilangan real berbeda yang memenuhi persamaan $y+6=(x-6)^2$ dan $x+6=(y-6)^2$ secara bersamaan. Tentukan nilai dari x^3+y^3.

2. Terdapat dua koin identik yang lebih cenderung memunculkan angka daripada gambar. Kedua koin tersebut dilemparkan bersama-sama. Diketahui bahwa peluang munculnya tepat sebuah gambar dan sebuah angka adalah 0,48. Jika p adalah peluang munculnya tepat dua buah angka, tentukan nilai $100p$.

3. Tentukan hasil penjumlahan semua bilangan asli n yang kurang dari 100 dan memenuhi $100 \mid n^3+n^2+n+1$.

4. Diberikan segitiga ABC. Garis bagi sudut A memotong BC di titik D. Garis bagi dalam $\angle ADB$ memotong AB di titik E. Jika $BE=7$, $AE=14$, dan $DE \parallel AC$, tentukan kuadrat dari panjang AD.

5. Tentukan banyaknya bilangan real positif x yang memenuhi persamaan

$$\lfloor x \rfloor = \{x\}^2 + 2016\{x\} + 2016,$$

di mana $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x, dan $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

6. Tentukan banyaknya bilangan tiga-angka $\overline{abc}$ sedemikian sehingga a dan c keduanya bukan nol dan bilangan tiga-angka $\overline{abc}$ dan $\overline{cba}$ keduanya habis dibagi 4.

7. Terdapat dua lingkaran Γ_1 dan Γ_2 yang bersinggungan dalam di titik A. Lingkaran Γ_2 terletak di dalam lingkaran Γ_1. Misalkan P adalah sebuah titik pada lingkaran Γ_2 ($P \neq A$). Diketahui bahwa garis singgung lingkaran Γ_2 di titik P memotong lingkaran Γ_1 di titik B dan C. Jika panjang $AB=81$, $BP=27$ dan $AC=54$, tentukan panjang CP.

8. Diketahui bahwa suatu fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi

$$f(x^2+x+3) + 2f(x^2-3x+5) = 6x^2 - 10x + 17.$$

Tentukan nilai dari $f(2016)$.

9. Misalkan N menyatakan banyaknya barisan berhingga $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ dengan $a_i \in \{1,2,3\}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, 2016$ dengan syarat bahwa angka 2 muncul sebanyak ganjil kali pada barisan tersebut. Jika $2N+1$ dapat dinyatakan dalam bentuk m^n, dengan m suatu bilangan prima dan n suatu bilangan bulat positif, tentukan nilai dari $m+n$.

10. Tentukan banyaknya tripel bilangan asli (a,b,c) yang memenuhi persamaan

$$abc = 3a + 3b + 3c + 24.$$

11. Misalkan $\triangle ABC$ memenuhi $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 75^\circ$, dan $AC = 40$. Misalkan pula D dan E terletak pada BC dan AC, berturut-turut, sehingga AD dan BE adalah garis tinggi $\triangle ABC$. Selanjutnya, misalkan DE memotong garis yang melewati C dan sejajar AB di titik F. Notasikan M sebagai titik tengah sisi AB. Jika CM memotong lingkaran luar $\triangle CDE$ di titik G, hitunglah kuadrat dari panjang FG.

12. Tentukan nilai terkecil dari fungsi

$$f(a,b,c,d) = \left\lfloor \frac{a+b+c+d}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+b+c+d}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+b+c+d}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+b+c+d}{d} \right\rfloor,$$

di mana a, b, c, dan d adalah bilangan real positif dan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x.

13. Misalkan S adalah himpunan semua bilangan bulat yang berbentuk $2^a + 2^b$, di mana $0 \le a < b < 40$. Jika peluang suatu bilangan bulat dari S yang dipilih secara acak habis dibagi 9 adalah $\frac{p}{q}$, di mana p dan q adalah bilangan bulat positif yang relatif prima, tentukan nilai dari $p + q$.

14. Sebutlah sebuah bilangan enam-angka $\overline{abcdef}$ *tubis* jika bilangan tersebut habis dibagi 3, bilangan lima-angka $\overline{bcdef}$, bilangan empat-angka $\overline{cdef}$, bilangan tiga-angka $\overline{def}$, bilangan dua-angka $\overline{ef}$, dan bilangan satu-angka $\overline{f}$ semuanya tidak habis dibagi 3, dan semua angka penyusun dari bilangan $\overline{abcdef}$ tidak bernilai nol. Tentukan banyaknya bilangan enam-angka tubis.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Diberikan bilangan-bilangan real positif a, b, dan c.

   (i) Tunjukkan bahwa $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.
   (*Petunjuk: manfaatkan ketaksamaan AM-GM*)

   (ii) Tunjukkan bahwa
   $$\frac{a}{b} \geq \frac{2a}{1+b^2} \geq 2a - ab. \tag{*}$$

   Perhatikan bahwa dengan menyubstitusi (a, b) dengan (b, c) dan (c, a) ke ketaksamaan (*), dan dilanjutkan dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan yang didapat dengan ketaksamaan (*), kita peroleh
   $$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{2a}{1+b^2} + \frac{2b}{1+c^2} + \frac{2c}{1+a^2} \geq 2(a+b+c) - (ab+bc+ca). \tag{**}$$

   (iii) Perhatikan ketaksamaan (i) dan (**). Apakah dapat diambil kesimpulan bahwa $\frac{2a}{1+b^2} + \frac{2b}{1+c^2} + \frac{2c}{1+a^2} \geq 3$ untuk setiap bilangan real positif a, b, dan c? Jika dapat, buktikan. Jika tidak, berikan contoh a, b, c yang menyangkal pernyataan tersebut.

   (iv) Jika diketahui $a + b + c = 3$, tunjukkan bahwa $\frac{2a}{1+b^2} + \frac{2b}{1+c^2} + \frac{2c}{1+a^2} \geq 3$. Kapan kesamaan terjadi?

2. Sebanyak $2n$ ($n \geq 2$) koin adil (seimbang dan identik) dilempar. Tunjukkan bahwa peluang munculnya tepat n sisi angka adalah lebih dari $\frac{1}{2^n}$.

3. Diberikan H adalah titik tinggi dari segitiga lancip ABC. Misalkan AD, BE, dan CF adalah garis-garis tinggi segitiga ABC, dan P dan Q merupakan perpotongan lingkaran luar segitiga DEF dengan lingkaran luar segitiga BHC. Buktikan bahwa $AP = AQ$.

4. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat positif dengan $a > b > 1$. Diketahui bahwa
   $$a + b \mid ab + 1 \text{ dan } a - b \mid ab - 1.$$
   Buktikan bahwa $a < b\sqrt{3}$.