Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Bulanan Juli 2016

22–25 Juli 2016

Berkas Soal

Bagian A

Tuliskan jawaban akhir setiap soal dengan mengisi formulir di bit.ly/ktom-A-jul-16. *Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai atas jawaban yang salah. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.*

1. Henry, Ilhan, Johan, dan empat orang lainnya mengikuti suatu perlombaan. Pada akhir perlombaan, masing-masing dari ketujuh orang tersebut diberi peringkat dari 1, 2, . . ., sampai 7. Jika diketahui bahwa peringkat Johan lebih tinggi daripada peringkat Ilhan, dan peringkat Ilhan lebih tinggi daripada peringkat Henry, tentukan banyaknya susunan peringkat yang mungkin.

2. Diketahui bahwa jumlah dari 10 buah bilangan prima berurutan adalah x, yang merupakan bilangan ganjil. Tentukan nilai terbesar yang mungkin bagi x.

3. Diberikan sebuah segitiga ABC dengan D adalah titik tengah BC. Diketahui bahwa $\angle ADC = 60^\circ$, $AB = 10$, dan $AC = 8$. Jika luas segitiga ABC adalah $x\sqrt{y}$, dengan x dan y adalah bilangan asli dan y tidak habis dibagi oleh kuadrat dari bilangan prima apa pun, tentukan nilai dari $x + y$.

4. Tentukan jumlah semua bilangan dua angka yang memenuhi selisih kuadrat bilangan tersebut dengan kuadrat bilangan yang diperoleh dengan membalikkan kedua angka dari bilangan tersebut adalah 1584. (Catatan: $\overline{0a}$ sama dengan bilangan satu angka $\overline{a}$).

5. Diberikan sebuah segitiga ABC dengan BE dan CF adalah dua garis tingginya. Apabila $\angle BAC = 60^\circ$ dan $p(XYZ)$ menyetakan keliling segitiga XYZ, tentukan nilai dari $210 \times \frac{p(AEF)}{p(ABC)}$.

6. Untuk setiap bilangan bulat positif k, misalkan α_k adalah bilangan real positif yang memenuhi persamaan $x^2 - kx - 1 = 0$. Tentukan bilangan bulat positif n terkecil sedemikian sehingga $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geq 2016$.

7. Misalkan P adalah sebuah segi-banyak beraturan dengan $n \geq 4$ sisi. Empat titik sudut berbeda A, B, C, dan D dipilih secara acak dari segi-banyak tersebut (permutasi dihitung berbeda). Misalkan peluang bahwa garis AB dan CD berpotongan di dalam segi-banyak adalah $\frac{a}{b}$, dengan a dan b adalah bilangan asli yang memenuhi $FPB(a, b) = 1$. Tentukan nilai dari $a \times b$.

8. Misalkan ABC adalah sebuah segitiga sama kaki dengan $AB = AC$ dan $\angle A = 100^\circ$. Titik D terletak pada sinar AC sedemikian sehingga $AD = BC$. Tentukan besar $\angle ABD$ (dalam derajat).

9. Misalkan
$$S = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 2016 \cdot 2^{2016}.$$
Jika x adalah bilangan ganjil terbesar yang habis membagi S, dan y adalah bilangan bulat terbesar sedemikian sehingga 2^y habis membagi S, tentukan nilai dari $x + y$.

10. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) dengan $|x| \leq 100$ dan $|y| \leq 100$ yang memenuhi persamaan $x^2 + 4y = 4xy + 1$.

11. Diberikan segitiga lancip ABC dengan panjang diameter lingkaran luar 25. AD, BE, dan CF adalah garis tinggi dari segitiga tersebut. Jika keliling dari segitiga DEF adalah 32, tentukan luas dari segitiga ABC.

12. Diberikan sebuah bilangan bulat n dengan $3 \leq n \leq 2016$. Sebanyak n bilangan bulat disusun melingkar sedemikian sehingga setiap bilangan lebih besar dari jumlah bilangan yang berada pada urutan pertama dan kedua dari sebelah kanan bilangan tersebut. Misalkan $A(n)$ menyatakan nilai terbesar dari banyaknya bilangan positif di antara n bilangan tersebut. Tentukan banyaknya nilai berbeda untuk $A(n)$, untuk setiap n yang mungkin.

13. Misal $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan yang memenuhi $a_0 = 0, a_1 = 1$, dan $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 0$. Tentukan bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga $61 | a_k$.

14. Misalkan x, y, z adalah bilangan real yang memenuhi persamaan

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz = 2\sqrt{x + y - z} - x - 2y + 2z - \frac{5}{4}.$$

Tentukan nilai dari $100(x + y + z)$.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda pada lembar jawaban yang sudah disediakan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai atas jawaban yang salah.

1. Diberikan sebuah segitiga lancip ABC. Buat titik D pada BC sedemikian sehingga AD tegak lurus dengan BC dan titik E pada CA sedemikian sehingga BE tegak lurus dengan CA. Misalkan H adalah titik potong AD dan BE.

   (a) Tunjukkan bahwa $ABDE$ merupakan segiempat tali busur (segiempat di mana keempat titik sudutnya terletak pada sebuah lingkaran).

   Ingat, Anda tidak boleh membuat asumsi tambahan, seperti ABC adalah segitiga sama sisi. Jawaban yang memuat hanya gambar (meskipun akurat dan berhasil 'memperlihatkan' apa yang ingin dibuktikan) bukanlah bukti yang valid; Anda harus membuktikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk sebarang segitiga yang memenuhi kriteria pada soal.

   (b) Tunjukkan bahwa $EHDC$ juga merupakan segiempat tali busur.

   (c) Manfaatkan bagian (a) dan (b) untuk menunjukkan bahwa $\angle HCD = \angle HAB$.

   (d) Misalkan perpanjangan CH memotong AB di titik F. Tunjukkan bahwa CF tegak lurus dengan AB.

   Perhatikan bahwa ketiga ruas garis AD, BE, dan CF selalu berpotongan di satu titik (dalam hal ini H). Selanjutnya, garis yang melalui AD atau BE atau CF dinamakan garis tinggi segitiga ABC. Titik H disebut titik tinggi segitiga ABC, yakni perpotongan ketiga garis tinggi segitiga ABC.

   (e) Tentukan titik tinggi dari segitiga ABH. Jelaskan jawaban Anda.

   (f) Tunjukkan bahwa $\angle AHB + \angle ACB = 180°$. Apakah $AHBC$ merupakan segiempat tali busur? Jelaskan jawaban Anda.

2. Bilangan palindrom dengan lima angka didefinisikan sebagai bilangan bulat dengan angka-angka penyusun $\overline{abcba}$, di mana $a \neq 0$. Misalkan S adalah hasil jumlah semua bilangan palindrom dengan lima angka. Tentukan jumlah angka-angka penyusun dari S.

3. Untuk setiap bilangan asli n dan bilangan real positif x, tunjukkan bahwa

$$x^n + \frac{1}{x^n} - 2 \geq n^2 \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right).$$

4. Tentukan semua tripel bilangan prima (p, q, r) sedemikian sehingga $4p + 4q, 4q + 4r, 4r + 4p$ ketiganya merupakan bilangan berpangkat empat (dengan kata lain, berbentuk x^4 untuk sebuah bilangan asli x).