

Análise de Complexidade de Tempo do Método Bubble Sort

Eduardo Costa de Paiva

eduardocspv@gmail.com

Frederico Franco Calhau

fredericoffc@gmail.com

Gabriel Augusto Marson

gabrielmarson@live.com

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

18 de dezembro de 2015

Lista de Figuras

2.1	Complexidade de custo do método da bolha (Vetor Aleatório)	10
2.2	Complexidade de tempo do método da bolha (Vetor Aleatório)	11
2.3	Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados (Vetor Aleatório)	11
2.4	Complexidade de custo do método da bolha (Vetor Ordenado Crescente) . .	12
2.5	Complexidade de tempo do método da bolha (Vetor Ordenado Crescente) .	12
2.6	Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados (Vetor Ordenado Crescente)	13
2.7	Complexidade de custo do método da bolha (Vetor Ordenado Decrescente) .	13
2.8	Complexidade de tempo do método da bolha (Vetor Ordenado Decrescente)	14
2.9	Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados (Vetor Ordenado Decrescente)	14
2.10	Complexidade de custo do método da bolha (Vetor Parcialmente Ordenado Crescente)	15
2.11	Complexidade de tempo do método da bolha (Vetor Parcialmente Ordenado Crescente)	15
2.12	Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados (Vetor Parcialmente Ordenado Crescente)	16
2.13	Complexidade de custo do método da bolha (Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente)	16
2.14	Complexidade de tempo do método da bolha (Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente)	17
2.15	Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados (Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente)	17

Lista de Tabelas

3.1	Vetor Aleatorio	18
3.2	Vetor Ordenado Crescente	18
3.3	Vetor Ordenado Decrescente	19
3.4	Vetor Parcialmente Ordenado Crescente	19
3.5	Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente	19
3.6	Dados para Análise de Memória	20

Lista de Listagens

1.1	BubbleSort.py	7
1.2	testeGeneric.py	8
1.3	monitor.py	8
A.1	testdriver.py	23

Sumário

Lista de Figuras	2
Lista de Tabelas	3
1 Introdução	6
1.1 Diretório	6
1.2 Códigos de programas	7
2 Gráficos	10
3 Tabelas	18
4 Análise	21
5 Citações e referências bibliográficas	22
Apêndice	23
A Códigos extensos	23
A.1 testdriver.py	23

Capítulo 1

Introdução

Este documento foi feito com o intuito de exibir uma análise do algoritmo Bubble Sort com relação a tempo. Além disso, será feita uma comparação da curva de tempo do que se espera do algoritmo, ou seja, $O(n^2)$ com o caso prático.

1.1 Diretório

Dada a seguinte organização das pastas, utilizamos o arquivo testdriver.py, executando, uma função conveniente por vez. Para mais informações vá até ao apêndice.

OBS.: É necessário instalar o programa tree pelo terminal. Isso pode ser feito da seguinte maneira.

```
> sudo apt-get install tree
```

A seguir é mostrada a organização das pastas sendo que os diretórios significativas para o projeto são Codigos e Relatorio além do raiz:

```
tree --charset=ASCII -d
.
|-- Codigos
|   |-- Bubble
|   |   |-- __pycache__
|   |-- Bucket
|   |   |-- __pycache__
|   |-- Counting
|   |   |-- __pycache__
|   |-- Heap
|   |   |-- __pycache__
|   |-- Insertion
|   |   |-- __pycache__
|   |-- Merge
|   |   |-- __pycache__
|   |-- Quick
|   |   |-- __pycache__
|   |-- Radix
|   |-- Selection
|       |-- __pycache__
```

```

|-- Other
|-- Plot
|-- __pycache__
`-- relatorio
    |-- imagens
    |   |-- Bubble
    |   |-- Bucket
    |   |-- Counting
    |   |-- Heap
    |   |-- Insertion
    |   |-- Merge
    |   |-- Quick
    |   |-- Radix
    |   `-- Selection
    |-- Relatorio_Bubble
    |-- Relatorio_Bucket
    |-- Relatorio_Counting
    |-- Relatorio_Heap
    |-- Relatorio_Insertion
    |-- Relatorio_Merge
    |-- Relatorio_Selection
    `-- Resultados
        |-- Bubble
        |-- Bucket
        |-- Counting
        |-- Heap
        |-- Insertion
        |-- Merge
        |-- Quick
        `-- Selection

```

48 directories

1.2 Códigos de programas

Seguem os códigos utilizados na análise de tempo do algoritmo Bubble Sort.

1. BubbleSort.py: Disponível na Listagem 1.1.

Listagem 1.1: BubbleSort.py

```

1 import numpy as np
2
3 @profile
4 def bubble_sort(a):
5     """ Implementação do método da bolha """
6     for i in range(len(a)):
7         for j in range(len(a)-1-i):
8             if a[j] > a[j+1]:
9                 t = a[j]
10                a[j] = a[j+1]
11                a[j+1] = t
12
13 #     print(a)  O PRINT BUGA O TESTDRIVER

```

2. testeGeneric.py Disponível na Listagem 1.2

Listagem 1.2: testeGeneric.py

```

1  ##adicionei - Serve para importar arquivos em outro diretório
2  ###  A CADA NOVO MÉTODO MUDAR O IMPORT,  A CHAMADA DA FUNÇÃO E O SYS.
    PATH
3
4  import sys
5  sys.path.append('/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final
    /Codigos/Radix')
6  sys.path.append('/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final
    ')
7
8  sys.setrecursionlimit(200000)
9
10 from monitor import *
11 from memoria import *
12
13 from RadixSort import *
14 import argparse
15
16 parser = argparse.ArgumentParser()
17 parser.add_argument("n", type=int, help="número de elementos no vetor
    de teste")
18 args = parser.parse_args()
19
20 v = criavet(args.n)
21 radix(v)
22
23
24
25 ## A EXECUÇÃO DESSE ARQUIVO EH ASSIM
26 ## NA LINHA DE COMANDO VC MANDA O NOME DO ARQUIVO E O TAMANHO DO
    ELEMNTTO DO vetor
27 ##EXEMPLO testeBubble.py 10
28 ##ele gera um vetor aleatório (criavet) e manda pro bubble_sort

```

3. monitor.py Disponível na Listagem 1.3

Listagem 1.3: monitor.py

```

1  # Para instalar o Python 3 no Ubuntu 14 ou 15
2  #
3  # sudo apt-get install python3 python3-numpy python3-matplotlib
    ipython3 python3-psutil
4  #
5
6  from math import *
7  import gc
8  import random
9  import numpy as np
10
11
12 from tempo import *
13
14 # Vetores de teste
15 def troca(m,v,n): ## seleciona o nível de embaralhamento do vetor
16     m = trunc(m)
17     mi = (n-m)//2

```



```

18     mf = (n+m)//2
19     for num in range(mi,mf):
20         i = np.random.randint(mi,mf)
21         j = np.random.randint(mi,mf)
22         #print("i= ", i, " j= ", j)
23         t = v[i]
24         v[i] = v[j]
25         v[j] = t
26     return v
27
28
29 def criavet(n, grau=0, inf=0, sup=0.9999999999):
30     passo = (sup - inf)/n
31     if grau < 0.0:
32         v = np.arange(sup, inf, -passo)
33         if grau <= -1.0:
34             return v
35         else:
36             return troca(-grau*n, v, n)
37     elif grau > 0.0:
38         v = np.arange(inf, sup, passo)
39         if grau >= 1.0:
40             return v
41         else:
42             return troca(grau*n, v, n)
43     else:
44         #return np.random.randint(inf, sup, size=n)
45         return [random.random() for i in range(n)] # for bucket sort
46
47
48
49 #print(criavet(20))
50
51 #Tipo          grau
52 #aleatorio      0
53 #ordenado_crescente      1
54 #ordenado_decrescente    -1
55 #parcialmente_ordenado_crescente      0.5
56 #parcialmente_ordenado_decrescente    -0.5
57
58
59 def executa(fn, v):
60     gc.disable()
61     with Tempo(True) as tempo:
62         fn(v)
63     gc.enable()

```

4. testdriver.py Referenciado no apêndice A.

Capítulo 2

Gráficos

Seguem os Gráficos utilizadas no processo de análise do método Bubble Sort:

1. Para um vetor aleatório

(a) Complexidade de custo do método da bolha disponível na lista de imagens [2.1](#).

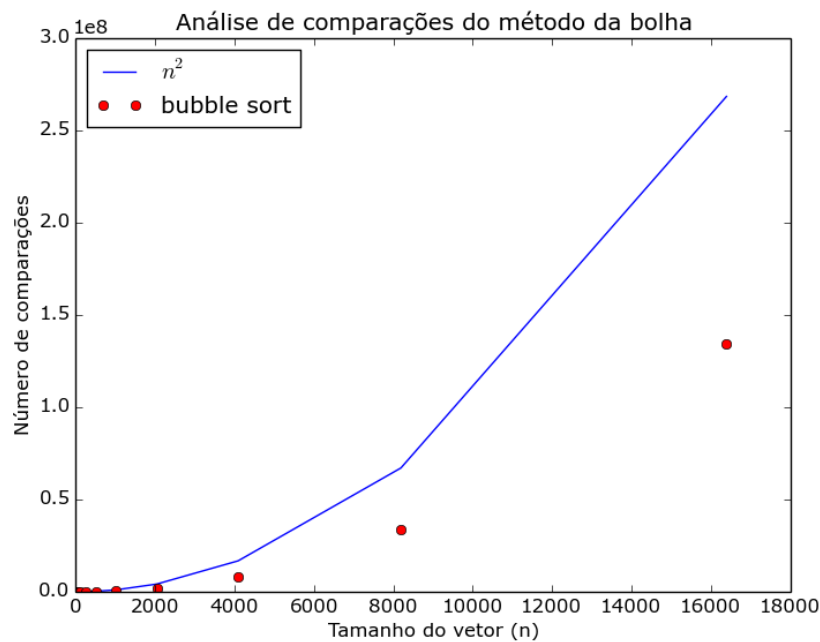


Figura 2.1: Complexidade de custo do método da bolha (Vetor Aleatório)

(b) Complexidade de tempo do método da bolha disponível na lista de imagens [2.2](#).

(c) Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados disponível na lista de imagens [2.3](#).

2. Para um vetor ordenado crescente

(a) Complexidade de custo do método da bolha disponível na lista de imagens [2.4](#).

(b) Complexidade de tempo do método da bolha disponível na lista de imagens [2.5](#).

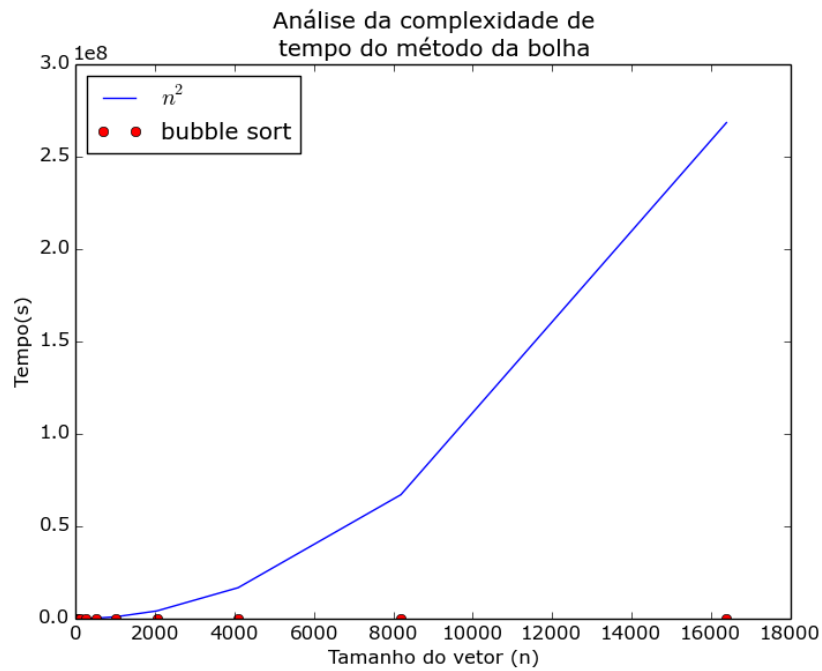


Figura 2.2: Complexidade de tempo do método da bolha (Vetor Aleatório)

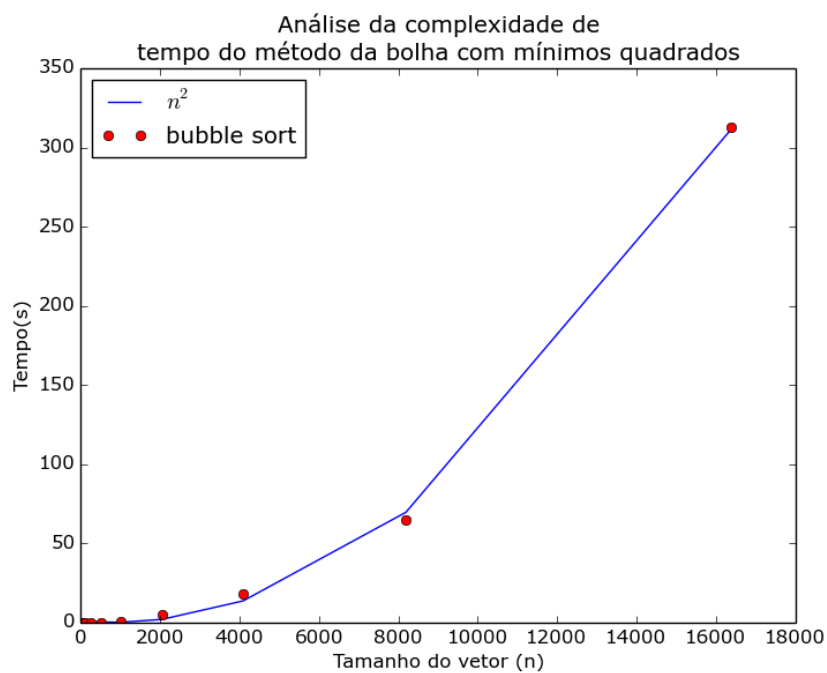


Figura 2.3: Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados (Vetor Aleatório)

(c) Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados disponível na lista de imagens [2.6](#).

3. Para um vetor ordenado decrescente

(a) Complexidade de custo do método da bolha disponível na lista de imagens [2.7](#).

(b) Complexidade de tempo do método da bolha disponível na lista de imagens [2.8](#).

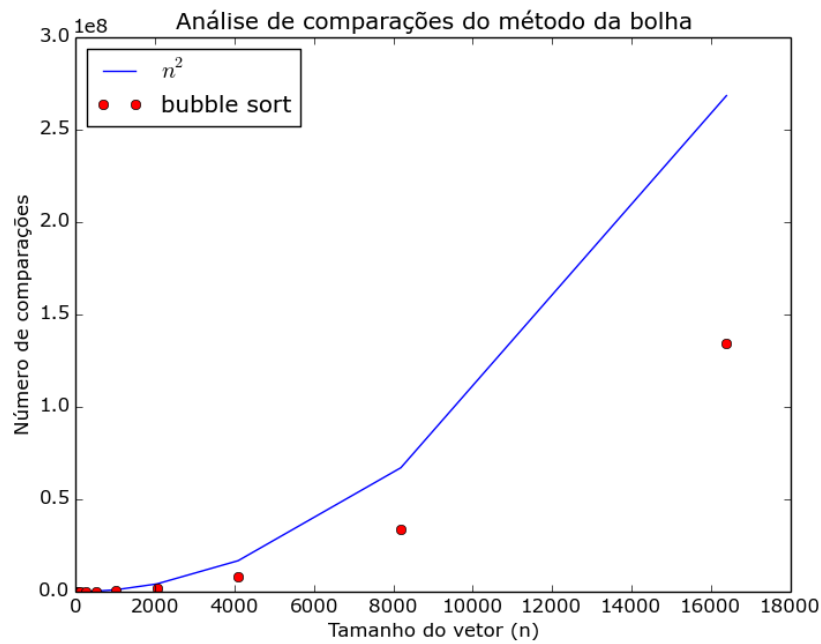


Figura 2.4: Complexidade de custo do método da bolha (Vetor Ordenado Crescente)

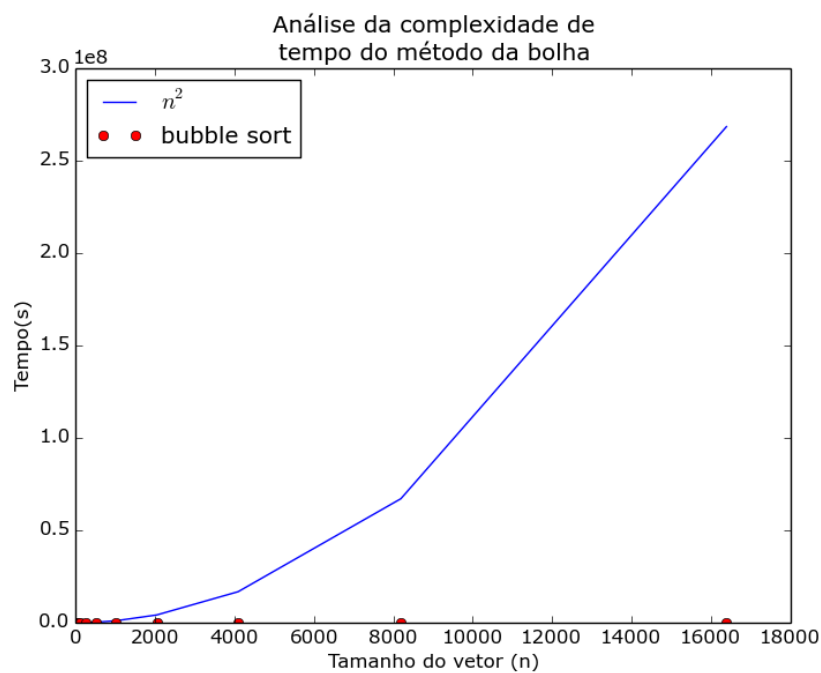


Figura 2.5: Complexidade de tempo do método da bolha (Vetor Ordenado Crescente)

- (c) Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados disponível na lista de imagens [2.9](#).
4. Para um vetor parcialmente ordenado crescente
- (a) Complexidade de custo do método da bolha disponível na lista de imagens [2.10](#).
- (b) Complexidade de tempo do método da bolha disponível na lista de imagens [2.11](#).

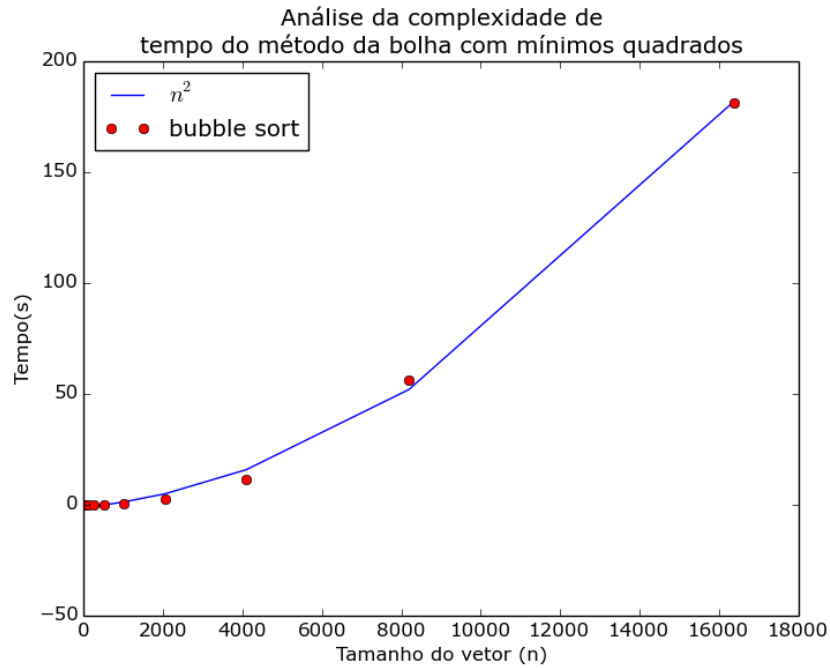


Figura 2.6: Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados (Vetor Ordenado Crescente)

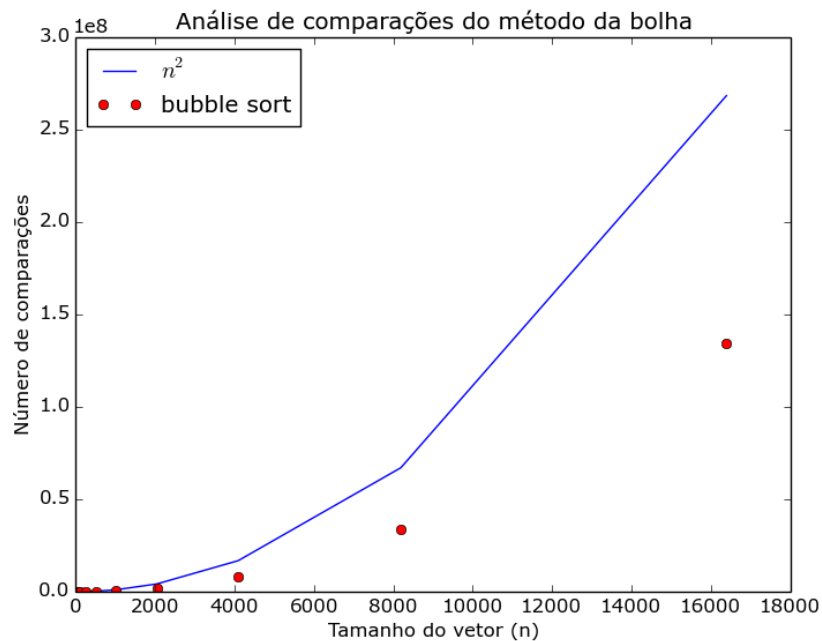


Figura 2.7: Complexidade de custo do método da bolha (Vetor Ordenado Decrescente)

- (c) Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados disponível na lista de imagens [2.12](#).
- 5. Para um vetor parcialmente ordenado decrescente
 - (a) Complexidade de custo do método da bolha disponível na lista de imagens [2.13](#).

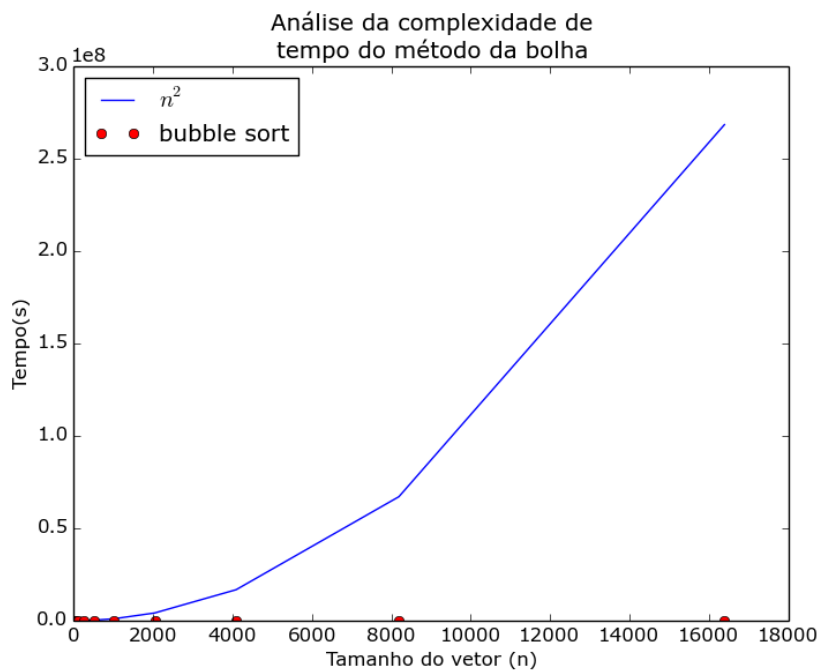


Figura 2.8: Complexidade de tempo do método da bolha (Vetor Ordenado Decrescente)

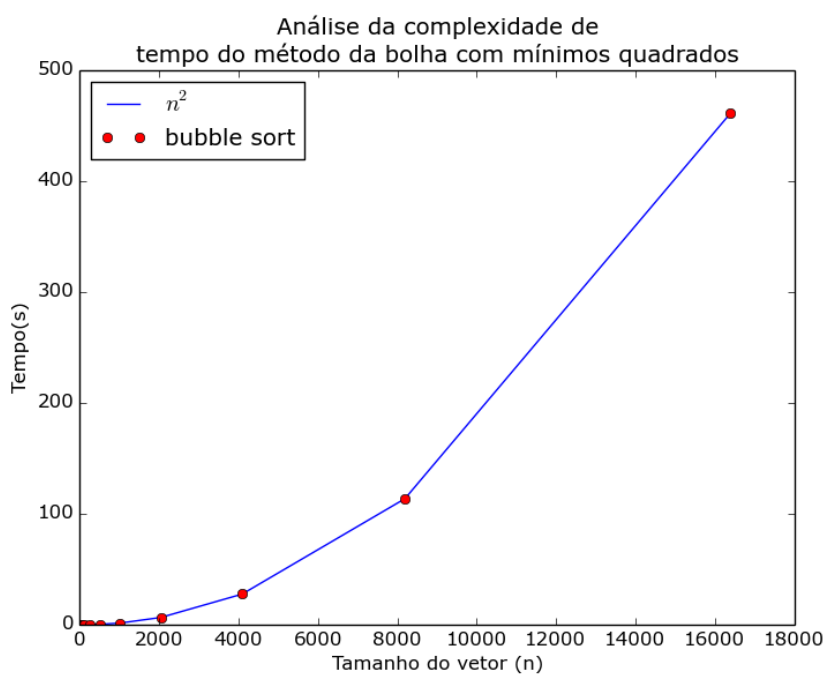


Figura 2.9: Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados (Vetor Ordenado Decrescente)

- (b) Complexidade de tempo do método da bolha disponível na lista de imagens [2.14](#).
- (c) Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados disponível na lista de imagens [2.15](#).

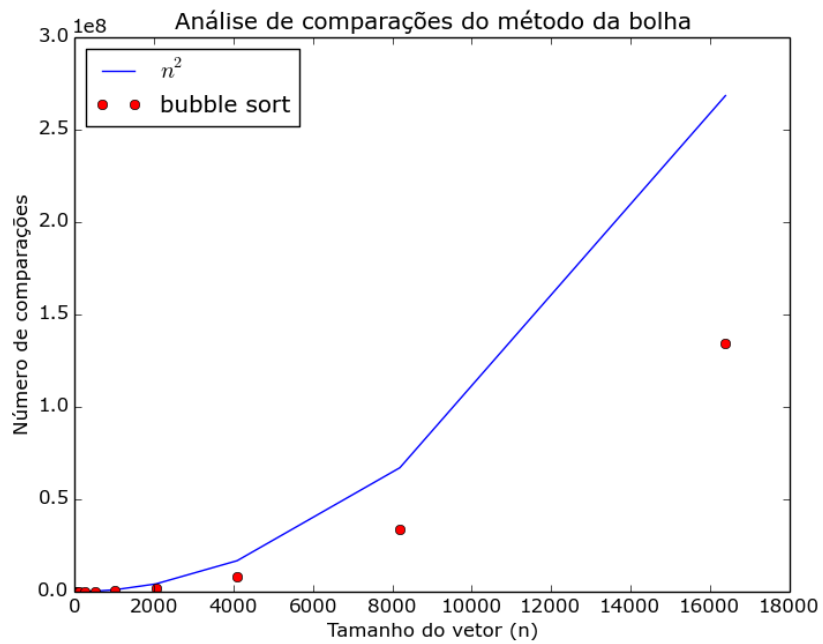


Figura 2.10: Complexidade de custo do método da bolha (Vetor Parcialmente Ordenado Crescente)

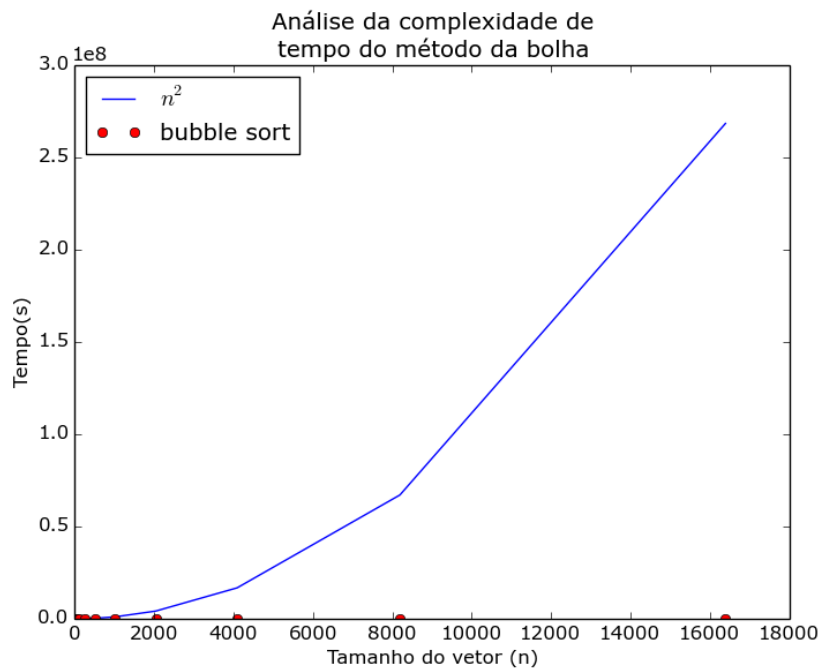


Figura 2.11: Complexidade de tempo do método da bolha (Vetor Parcialmente Ordenado Crescente)

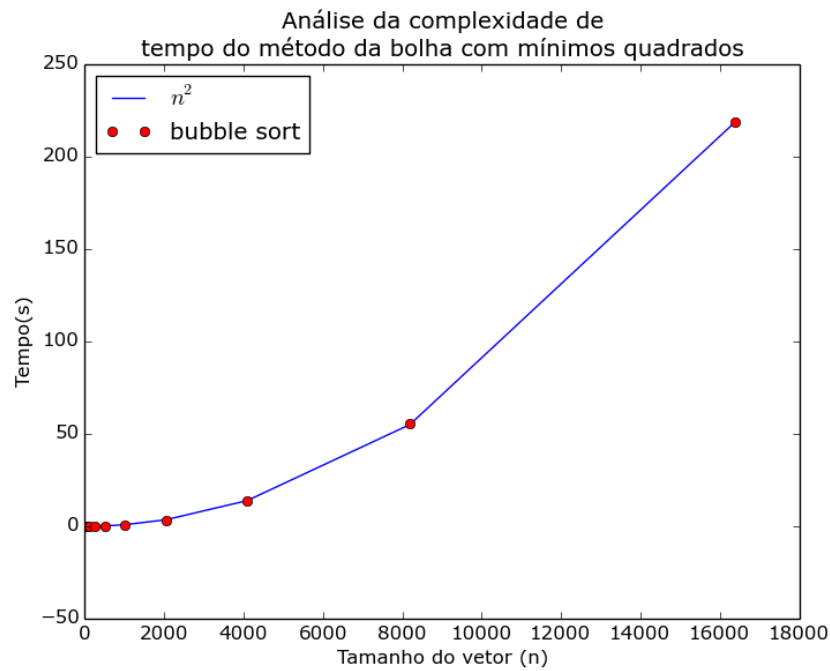


Figura 2.12: Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados (Vetor Parcialmente Ordenado Crescente)

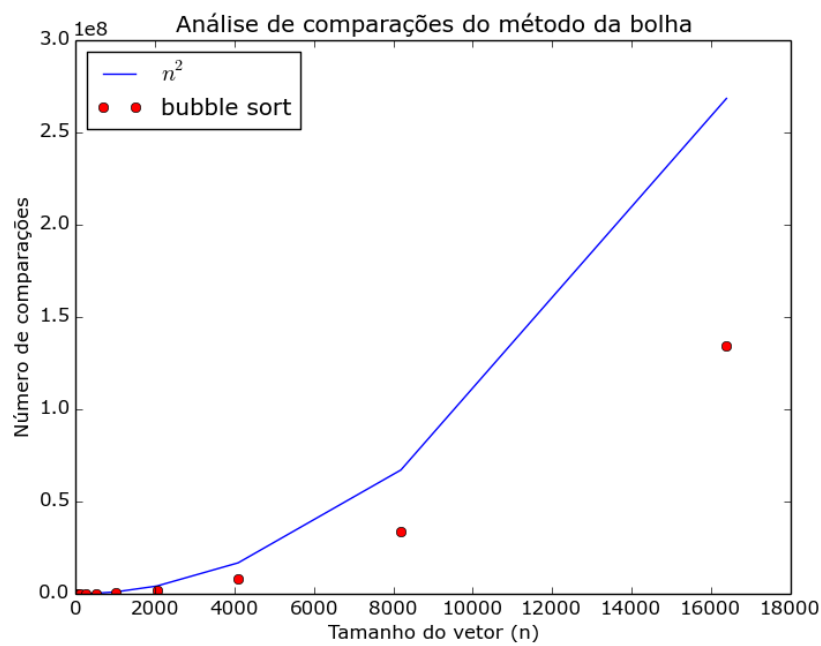


Figura 2.13: Complexidade de custo do método da bolha (Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente)

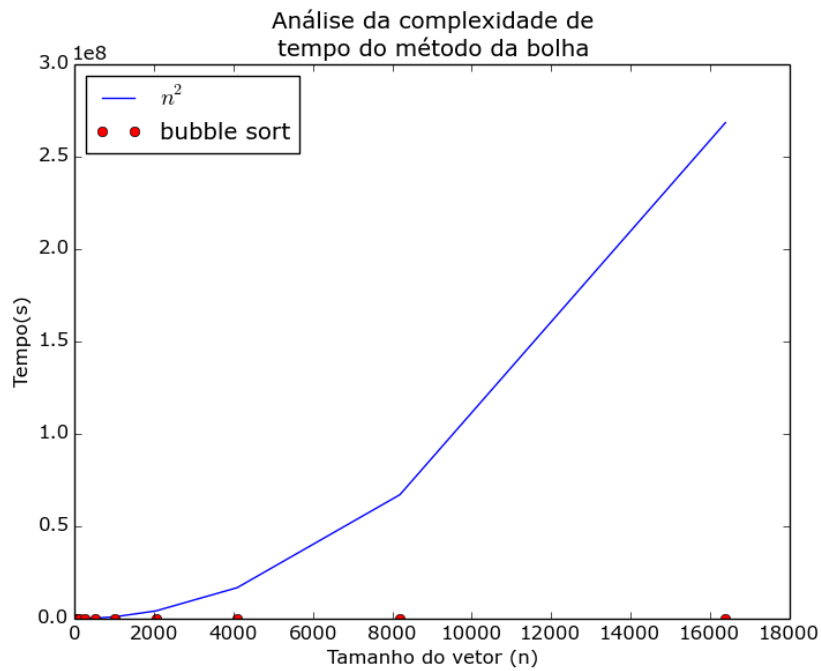


Figura 2.14: Complexidade de tempo do método da bolha (Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente)

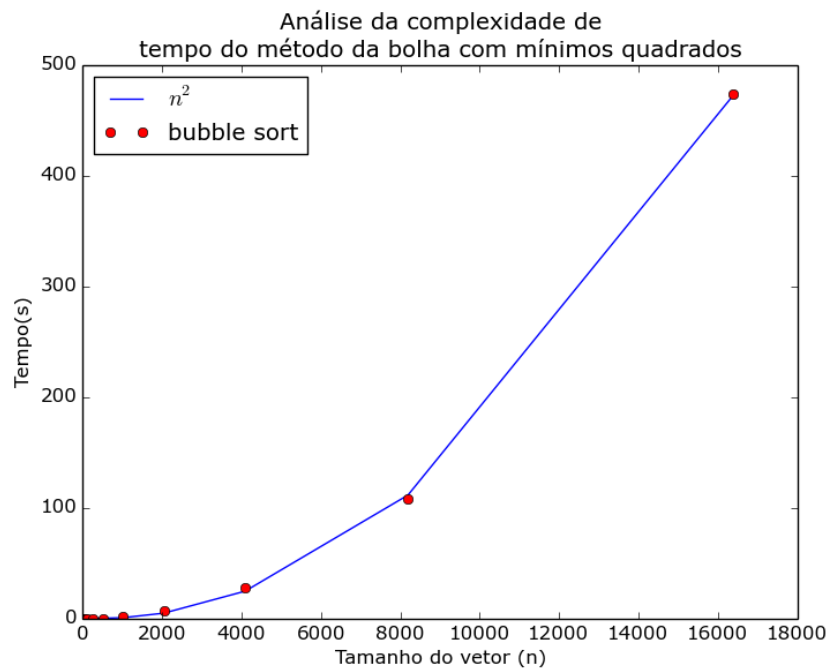


Figura 2.15: Complexidade de tempo do método da bolha com mínimos quadrados (Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente)

Capítulo 3

Tabelas

Seguem as tabelas utilizadas para a análise do método Bubble Sort.

Tabela 3.1: *Vetor Aleatorio*

Tamanho do Vetor	Comparações	Tempo(s)
32	496	0.000756
64	2016	0.003263
128	8128	0.012834
256	32640	0.050149
512	130816	0.200732
1024	523776	0.882822
2048	2096128	4.874270
4096	8386560	18.039000
8192	33550336	65.256400
16384	134209536	312.534000

Tabela 3.2: *Vetor Ordenado Crescente*

Tamanho do Vetor	Comparações	Tempo(s)
32	496	0.000457
64	2016	0.001817
128	8128	0.007373
256	32640	0.028836
512	130816	0.114824
1024	523776	0.513465
2048	2096128	2.845550
4096	8386560	11.410900
8192	33550336	56.293100
16384	134209536	181.343000

Tabela 3.3: *Vetor Ordenado Decrescente*

Tamanho do Vetor	Comparações	Tempo(s)
32	496	0.001207
64	2016	0.004553
128	8128	0.018195
256	32640	0.073946
512	130816	0.299655
1024	523776	1.427660
2048	2096128	6.381420
4096	8386560	28.260700
8192	33550336	113.214000
16384	134209536	461.349000

Tabela 3.4: *Vetor Parcialmente Ordenado Crescente*

Tamanho do Vetor	Comparações	Tempo(s)
32	496	0.000867
64	2016	0.003210
128	8128	0.013136
256	32640	0.053045
512	130816	0.208341
1024	523776	0.825390
2048	2096128	3.348710
4096	8386560	13.570900
8192	33550336	55.394400
16384	134209536	218.900000

Tabela 3.5: *Vetor Parcialmente Ordenado Decrescente*

Tamanho do Vetor	Comparações	Tempo(s)
32	496	0.001050
64	2016	0.004241
128	8128	0.017106
256	32640	0.067391
512	130816	0.267413
1024	523776	1.584400
2048	2096128	6.835360
4096	8386560	28.157500
8192	33550336	108.491000
16384	134209536	473.634000

Tabela 3.6: *Dados para Análise de Memória*

Tamanho do Vetor	Memória (MiB)
32	24.074000
64	24.043000
128	23.996000
256	24.250000
512	24.066000

Capítulo 4

Análise

Podemos observar que todas as curvas de todos os gráficos, exceto os de complexidade de tempo sem a interpolação dos mínimos quadrados (Gráficos [2.2](#), [2.5](#), [2.8](#), [2.11](#), [2.14](#)), apresentaram uma correspondência forte com a curva da função $F(x) = x^2$, o que nos permite concluir que, dada a complexidade de tempo do algoritmo Bubble Sort por $G(x)$ então $F(x) = c * G(x)$ sendo que c é uma constante maior que zero e $x > x_0$. Portanto, o Bubble Sort é $O(n^2)$.

Capítulo 5

Citações e referências bibliográficas

[1] Algoritmos: Teoria e Prática. Thomas H. Cormen Today

Apêndice A

Códigos extensos

A.1 testdriver.py

Listagem A.1: testdriver.py

```
1 import subprocess
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import sys , shutil
5
6
7 ##PRA CADA NOVO METODO TEM QUE MUDAR
8 #Sys.path()
9
10 ## PARA CADA VETOR NOVO OU NOVO MÉTODO TEM QUE MUDAR
11 #Para o executa_teste a chamada das funções e o shutil.move()
12 #para os plots a chamada das funções e o savefig
13
14 sys.path.append('/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/
    Codigos/Selection') ## adicionei o código de ordenação
15 sys.path.append('/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/
    relatorio/Resultados/Selection') ## adicionei o resultado do
    executa_teste
16
17
18 def executa_teste(arqteste, arqsaida, nlin, intervalo):
19     """Executa uma sequência de testes contidos em arqteste, com:
20         arqsaida: nome do arquivo de saída, ex: tBolha.dat
21         nlin: número da linha no arquivo gerado pelo line_profiler contendo
22             os dados de interesse. Ex: 14
23         intervalo: tamanhos dos vetores: Ex: 2 ** np.arange(5,10)
24     """
25     f = open(arqsaida,mode='w', encoding='utf-8')
26     f.write('#          n      comparações          tempo(s)\n')
27
28     for n in intervalo:
29         cmd = ' '.join(["kernprof -l -v", "testeGeneric.py", str(n)])
30         str_saida = subprocess.check_output(cmd, shell=True).decode('utf-8')
31         linhas = str_saida.split('\n')
32         unidade_tempo = float(linhas[1].split()[2])
```

```

33     #print("CMD:", cmd, "\nSTR_SAIDA: ", str_saida, "\nLINHAS: ", linhas
        , "\nUNIDADE_TEMPO: ", unidade_tempo)
34     #print("Linhas4:", linhas[4], " ----> Linhas 4 float: ", linhas[4].
        split()[2])
35     tempo_total = float(linhas[3].split()[2])
36     lcomp = linhas[nlin].split()
37     num_comps = int(lcomp[1])
38     str_res = '{:>8} {:>13} {:.13.6f}'.format(n, num_comps, tempo_total
        )
39     print(str_res)
40     f.write(str_res + '\n')
41     f.close()
42     shutil.move("tSelection_vetor_aleatorio.dat", "/home/gmarson/Git/
        AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/relatorio/Resultados/Selection/
        tSelection_vetor_aleatorio.dat")
43
44 #executa_teste("testeGeneric.py", "tSelection_vetor_aleatorio.dat", 14, 2
        ** np.arange(5,15))
45
46 def plota_teste1(arqsaida):
47     n, c, t = np.loadtxt(arqsaida, unpack=True)
48     #print("n: ", n, "\nc: ", c, "\nt: ", t)
49     #n eh o tamanho da entrada , c eh o tanto de comparações e t eh o
        tempo gasto
50     plt.plot(n, n ** 2, label='$n^2$') ## custo esperado bubble Sort
51     plt.plot(n, c, 'ro', label='selection sort')
52
53     # Posiciona a legenda
54     plt.legend(loc='upper left')
55
56     # Posiciona o título
57     plt.title('Análise de comparações do método da seleção')
58
59     # Rotula os eixos
60     plt.xlabel('Tamanho do vetor (n)')
61     plt.ylabel('Número de comparações')
62
63     plt.savefig('relatorio/imagens/Selection/selection_plot_1_aleatorio.
        png')
64     plt.show()
65
66
67
68 def plota_teste2(arqsaida):
69     n, c, t = np.loadtxt(arqsaida, unpack=True)
70     plt.plot(n, n ** 2, label='$n^2$')
71     plt.plot(n, t, 'ro', label='selection sort')
72
73     # Posiciona a legenda
74     plt.legend(loc='upper left')
75
76     # Posiciona o título
77     plt.title('Análise da complexidade de \ntempo do método da seleção')
78
79     # Rotula os eixos
80     plt.xlabel('Tamanho do vetor (n)')
81     plt.ylabel('Tempo (s)')
82

```


A.1

```
83     plt.savefig('relatorio/imagens/Selection/selection_plot_2_aleatorio.
        png')
84     plt.show()
85
86
87
88
89 def plota_teste3(arqsaida):
90     n, c, t = np.loadtxt(arqsaida, unpack=True)
91
92     # Calcula os coeficientes de um ajuste a um polinômio de grau 2 usando
93     # o método dos mínimos quadrados
94     coefs = np.polyfit(n, t, 2)
95     p = np.polyld(coefs)
96
97     plt.plot(n, p(n), label='$n^2$')
98     plt.plot(n, t, 'ro', label='selection sort')
99
100    # Posiciona a legenda
101    plt.legend(loc='upper left')
102
103    # Posiciona o título
104    plt.title('Análise da complexidade de \ntempo do método da seleção com
        mínimos quadrados')
105
106    # Rotula os eixos
107    plt.xlabel('Tamanho do vetor (n)')
108    plt.ylabel('Tempo(s)')
109
110    plt.savefig('relatorio/imagens/Selection/selection_plot_3_aleatorio.
        png')
111    plt.show()
112
113 plota_teste1("/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/
        relatorio/Resultados/Selection/tSelection_vetor_aleatorio.dat")
114 plota_teste2("/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/
        relatorio/Resultados/Selection/tSelection_vetor_aleatorio.dat")
115 plota_teste3("/home/gmarson/Git/AnaliseDeAlgoritmos/Trabalho_Final/
        relatorio/Resultados/Selection/tSelection_vetor_aleatorio.dat")
116
117
118 def plota_teste4(arqsaida):
119     n, c, t = np.loadtxt(arqsaida, unpack=True)
120
121     # Calcula os coeficientes de um ajuste a um polinômio de grau 2 usando
122     # o método dos mínimos quadrados
123     coefs = np.polyfit(n, c, 2)
124     p = np.polyld(coefs)
125
126     plt.plot(n, p(n), label='$n^2$')
127     plt.plot(n, c, 'ro', label='bubble sort')
128
129    # Posiciona a legenda
130    plt.legend(loc='upper left')
131
132    # Posiciona o título
133    plt.title('Análise da complexidade de \ntempo do método da bolha')
134
135    # Rotula os eixos
```

```
136 plt.xlabel('Tamanho do vetor (n)')
137 plt.ylabel('Número de comparações')
138
139 plt.savefig('bubble4.png')
140 plt.show()
141
142 def plota_teste5(arqsaida):
143     n, c, t = np.loadtxt(arqsaida, unpack=True)
144
145     # Calcula os coeficientes de um ajuste a um polinômio de grau 2 usando
146     # o método dos mínimos quadrados
147     coefs = np.polyfit(n, c, 2)
148     p = np.poly1d(coefs)
149
150     # set_yscale('log')
151     # set_yscale('log')
152     plt.semilogy(n, p(n), label='$n^2$')
153     plt.semilogy(n, c, 'ro', label='bubble sort')
154
155     # Posiciona a legenda
156     plt.legend(loc='upper left')
157
158     # Posiciona o título
159     plt.title('Análise da complexidade de \ntempo do método da bolha')
160
161     # Rotula os eixos
162     plt.xlabel('Tamanho do vetor (n)')
163     plt.ylabel('Número de comparações')
164
165     plt.savefig('bubble5.png')
166     plt.show()
```
