| | |
|---|---|
| 作者 | **生姜 DrGinger** |
| 脚本 | **生姜 DrGinger** |
| 视频 | **崔崔 CuiCui** |
| 开源学习资源 | https://github.com/Visualize-ML |
| 平台 | https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang<br>https://space.bilibili.com/3546865719052873<br>https://space.bilibili.com/513194466 |


# 8.2 缩放

**本节你将掌握的核心技能：**

▶ 变换矩阵行列式：面积、体积缩放比例。

▶ 挤压变换：理解在保持面积不变条件下的缩放。

▶ 缩放满足矩阵乘法交换律。

▶ 负缩放因子：缩放中含有镜像。

▶ 缩放因子为 0：几何变换中含有降维，变换不可逆，信息丢失。

在几何变换中，**缩放变换** (scaling transformation) 是最基本的操作之一。缩放可以通过矩阵乘法高效实现，并且可以处理各种情况，如等比例、不等比例缩放、连续缩放、负比例缩放等。本节系统介绍缩放，我们从二维平面入手，再扩展到三维空间。

## 平面等比例缩放

等比例缩放指的是图形在所有方向上按相同比例放大或缩小。平面等比例缩放对应的线性变换矩阵形式如下

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=s\boldsymbol{I} \tag{1}$$

若，$s>1$ 表示放大 (如图 1 (a))；$0<s<1$ 表示缩小 (如图 1 (b))。本书前文介绍过这个 (主对角线元素相同) 的对角矩阵，它的作用相当于矩阵数乘。

(1) 方阵行列式为 $s^2$；这意味着变换之后几何图形面积变化 $s^2$ 倍。

(1) 中方阵 $\boldsymbol{S}$ 的列向量构成正交基。

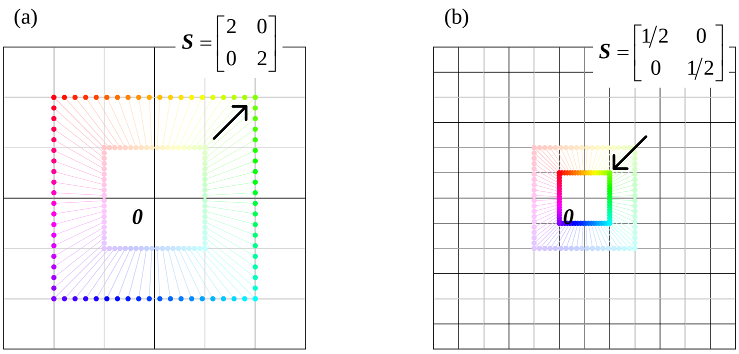


图 1．等比例缩放，二维平面

对向量 $[x_1, x_2]^T$ 进行等比例缩放后，得到新向量为 $[y_1, y_2]^T$：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

缩放完成后，横纵轴的缩放比例一致，图形只是整体放大或缩小。

⚠ 注意，缩放前后，原点位置不发生变换。

不难发现，图 1 (a)、(b) 互为逆操作，也就是说

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{gathered} \tag{3}$$

本书前文提过，若一个对角方阵的主对角线元素均不为零，则其逆矩阵也是对角方阵，主对角线元素是原矩阵对应元素的倒数。如果对角方阵主对角线元素存在不止一个 0，方阵不可逆。

## 不等比例缩放

(平面上) 不等比例缩放指的是水平方向和竖直方向缩放比例不同，变换矩阵为：

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中，$s_1$、$s_2$ 均大于 0，且 $s_1 \neq s_2$。若任意缩放系数为 1，则说明对应方向上没有变换。

请大家自行分析图 2 这两幅图。

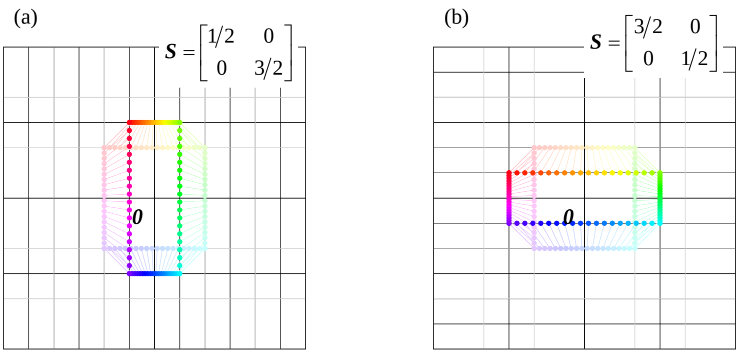


图 2．非等比例缩放，二维平面

本书前文介绍过对角方阵的缩放作用，下面简单回顾一下。

比如，给定 2 × 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$，矩阵乘法 $\boldsymbol{A}$@$\boldsymbol{S}$ 相当于对角方阵主对角线元素依次对 $\boldsymbol{A}$ 列项量进行缩放，即

$$\boldsymbol{AS} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1\boldsymbol{a}_1 & s_2\boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

而矩阵乘法 $\boldsymbol{S}$@$\boldsymbol{A}$ 则相当于对角方阵主对角线元素依次对 $\boldsymbol{A}$ 行向量进行缩放，即

$$\boldsymbol{SA} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{(1)} \\ \boldsymbol{a}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1\boldsymbol{a}^{(1)} & s_2\boldsymbol{a}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

如图 3 所示，$\det(\boldsymbol{S}) \neq 0$，缩放矩阵 $\boldsymbol{S}$ 存在逆，即

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s_1 & 0 \\ 0 & 1/s_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

如果当 $s_1$ 或 $s_2$ 为 0 时，缩放矩阵 $\boldsymbol{S}$ 不可逆，变换不可恢复。

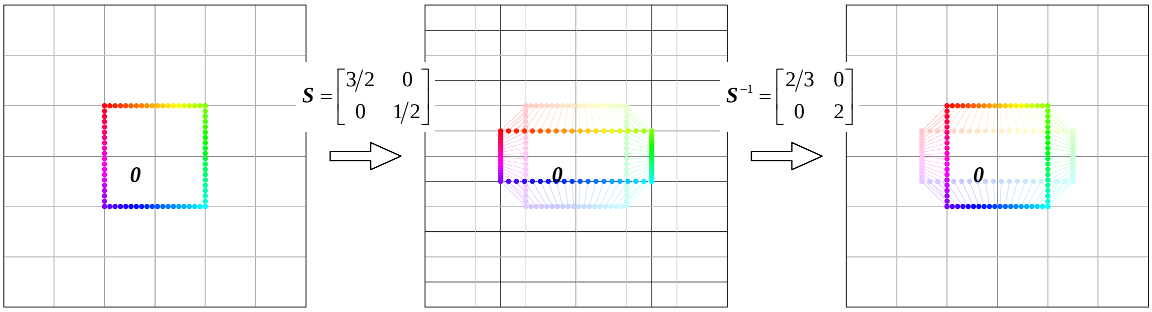


图 3．缩放的逆运算

由于缩放矩阵 $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$ 为对角方阵，因此它的行列式很容易计算

$$\det(\boldsymbol{S}) = s_1 s_2 \tag{8}$$

若 $|\det(\boldsymbol{S})| > 1$，说明平面几何图形面积放大；$0 < |\det(\boldsymbol{S})| < 1$ 则说明面积缩小。$\det(\boldsymbol{S}) = 0$ 则意味着发生降维，信息丢失，方阵不可逆。

## 水平、竖直缩放

仅水平方向发生缩放，对应的变换矩阵为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

这个对角方阵的行列式为 $s$，意味着几何变换前后面积缩放 $s$ 倍。图 4 (a)、(b) 给出两个水平缩放的例子。

仅竖直方向发生缩放，对应的变换矩阵为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \tag{10}$$

图 4 (c)、(d) 给出两个水平缩放的例子。

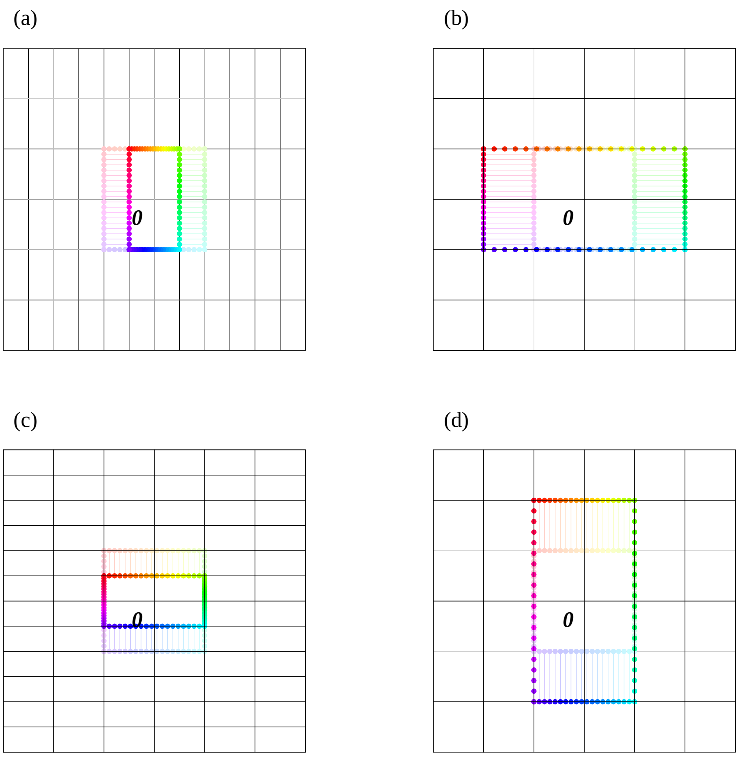


图 4．水平、竖直缩放，二维平面

## 挤压

**挤压** (squeeze) 是一种特殊的不等比例缩放，平面上的挤压指的是一个方向的缩放系数小于 1，而另一个方向的缩放系数大于 1；且两者乘积等于 1，满足 $s_1 s_2 = 1$，即行列式为 1。

比如 $0 < s_1 < 1$ 且 $s_2 > 1$，则图形在 $x_1$ 方向上被压缩，而在 $x_2$ 方向上被拉伸，但总面积保持不变。

图 5 (a) 中，$s_1 = 0.5$ 且 $s_2 = 2$，意味着水平方向缩小 0.5 倍，而竖直方向放大 2 倍，总面积不变。

请大家自行分析图 5 (b)。

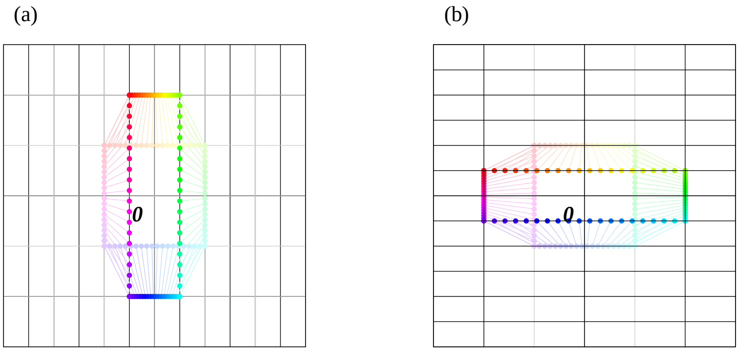


图 5. 挤压

## 连续缩放

本书前文介绍过，在一般情况下，矩阵乘法不满足交换律；即对于两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，即便 $\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B} @ \boldsymbol{A}$ 同时满足乘法规则，通常 $\boldsymbol{A} @ \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} @ \boldsymbol{A}$。

但是，缩放变换中，缩放矩阵 $\boldsymbol{S}$ 是一个对角矩阵，我们可以把缩放矩阵 $\boldsymbol{S}$ 写成两个不同矩阵乘法

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} &= \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{S} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11}$$

(11) 告诉我们，特殊情况下，矩阵乘法可以满足交换律。

(11) 的第一个式子代表先进行 $x_2$ 方向缩放，再完成 $x_1$ 方向缩放，即

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ s_2 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 x_1 \\ s_2 x_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

(11) 的第二个式子则反之，请大家自己写出矩阵乘法运算。

几何上，这说明横轴、纵轴的缩放次序可以调换。

此外，给定任意两个缩放矩阵 $\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2$，满足

$$\boldsymbol{S}_1 @ \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_2 @ \boldsymbol{S}_1 \tag{13}$$

这意味着多个平面缩放操作的先后顺序不会影响最终结果，请大家观察图 6。

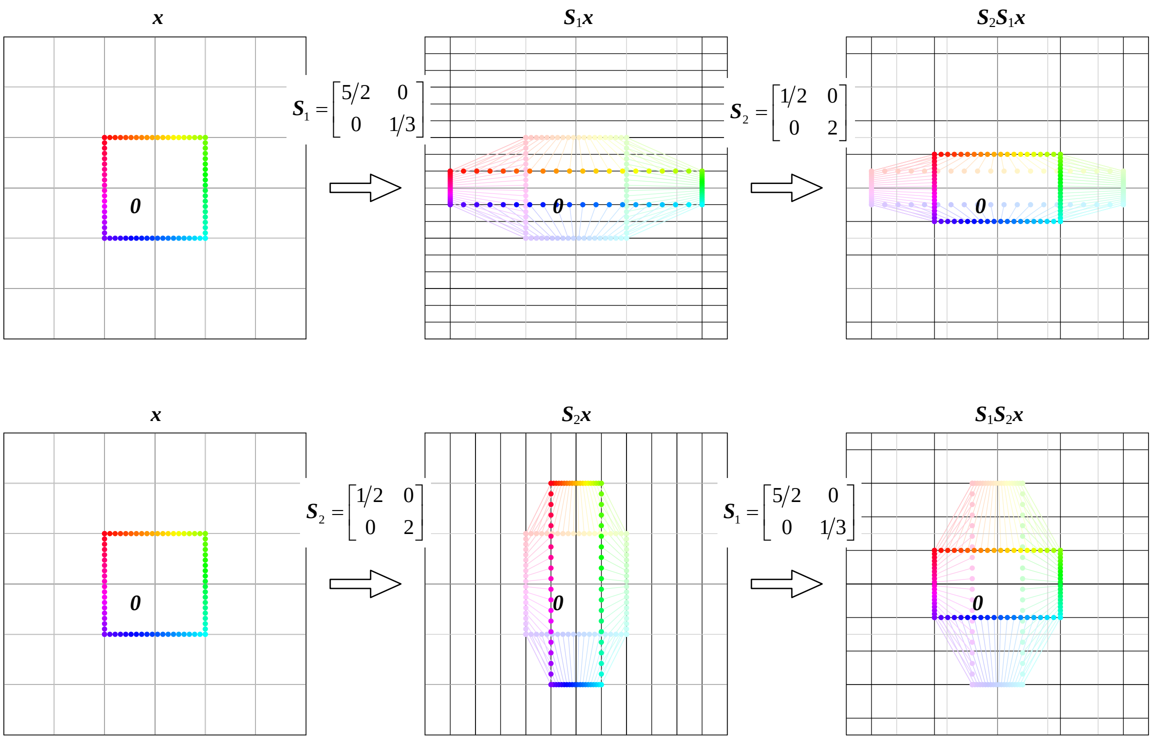


图 6. 两个 2 × 2 缩放矩阵连乘满足交换律

## 缩放系数为负

如果存在缩放系数为负的情况，意味着对应方向上发生翻转。也就是说，负比例缩放相当于“缩放 + 镜像”的复合变换。

图 7 (a) 应对如下矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

上式还告诉我们，这两个几何操作的次序不影响结果。

请大家自行分析图 7 (b)。

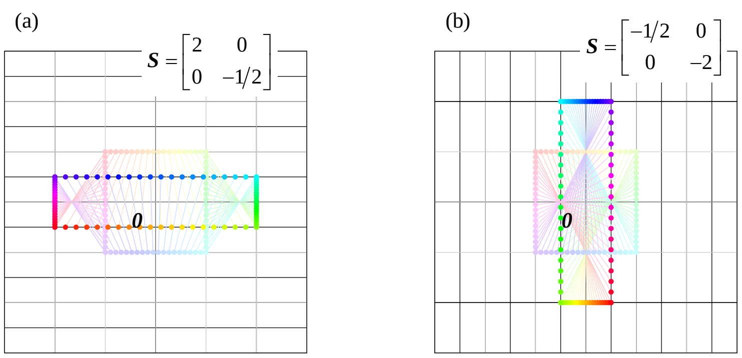


图 7. 缩放因子存在负数情况

### 缩放系数为 0

如果存在缩放系数为 0 的情况，意味着对应方向发生投影。此时，几何变换相当于“缩放 + 投影”的复合变换。

图 8 对应如下运算

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

所有点被投影到纵轴上，信息发生丢失；行列式为 0，这也意味着矩阵不可逆。本节前文提过，如果一个对角方阵的主对角线元素中存在一个或更多的零，则方阵不可逆。

这时，变换矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的列向量不能构成基底，因为列向量之间存在线性相关。

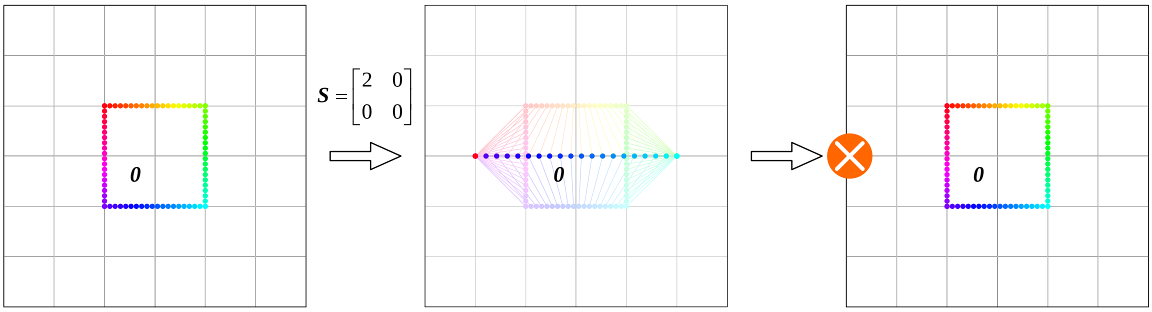


图 8．不可逆地“压扁”

### 可视化平面缩放

代码 1 用来可视化平面缩放，可视化结果如图 9 所示。

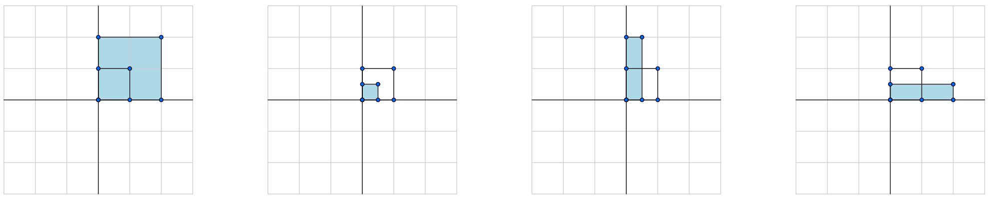

图 9．可视化平面缩放

下面让我们聊聊代码 1 关键语句。

ⓐ 用 numpy.array() 创建线性变换矩阵；请大家尝试其他的 2 × 2 方阵。

ⓑ 定义了一个单位正方形的顶点列表，从左下角出发，并再回到起点形成闭环。每个点是一个二维坐标，组成一个形状为 5×2 的数组。注意，行向量代表平面上一个点。

ⓒ 定义单位向量，分别指向横轴正方向、纵轴正方向。

ⓓ 用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 完成矩阵乘法，即线性变换。

e 为可视化代码。比如，ax.plot(square_data[:,0], square_data[:,1], c = 'k', lw = '0.5', marker = 'o', markerfacecolor = '#0066FF', ls = '--') 这句画出原始正方形的边界线。

square_data[:,0] 表示取正方形所有点的横轴坐标，square_data[:,1] 表示它们的纵轴坐标。

c='k' 表示线的颜色是黑色，lw='0.5' 是线宽为 0.5。

marker='o' 画出每个点的小圆圈，markerfacecolor='#0066FF' 设置圆点为蓝色。

ls='--' 表示线型为虚线。

代码 1. 可视化平面缩放 | LA_Ch08_02_01.ipynb

```python
## 初始化
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

## 线性变换矩阵
A = np.array([[2, 0],
              [0, 2]])

## 单位正方形顶点数据
square_data = np.array([[0, 0],
                        [1, 0],
                        [1, 1],
                        [0, 1],
                        [0, 0]])

## 定义单位向量 e1 和 e2
e1 = np.array([[1],[0]])
e2 = np.array([[0],[1]])

## 线性变换
transformed_square = square_data @ A.T
transformed_e1 = A @ e1
transformed_e2 = A @ e2

## 可视化
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 6))

ax.plot(square_data[:,0], square_data[:,1],
        c = 'k', lw = '0.5',
        marker = 'o', markerfacecolor = '#0066FF', ls = '--')
ax.plot(transformed_square[:,0], transformed_square[:,1],
        c = 'k', lw = '0.5',
        marker = 'o', markerfacecolor = '#0066FF', ls = '-')
ax.fill(transformed_square[:,0], transformed_square[:,1],
        color='lightblue')

ax.set_aspect('equal'); ax.grid(True, c = '0.8')
ax.axhline(y = 0, c = 'k'); ax.axvline(x = 0, c = 'k')
ax.set_xlim(-3, 3); ax.set_ylim(-3, 3)
```

## 三维等比例缩放

在三维空间，等比例缩放矩阵为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \tag{16}$$

其中，$s$ 为缩放因子，不为 0。

对应的坐标变换为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \\ sx_3 \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

在三维空间中，等比例缩放通过一个缩放因子 $s$ 对所有三个维度进行相同的缩放操作。

容易计算 (16) 中变换矩阵行列式为 $s^3$，这意味着几何变换后，体积变化了 $s^3$ 倍。

如图 10 所示，$s > 1$ 时，单位正方体等比例放大；如图 11 所示，$0 < s < 1$ 时，单位正方体等比例放大。

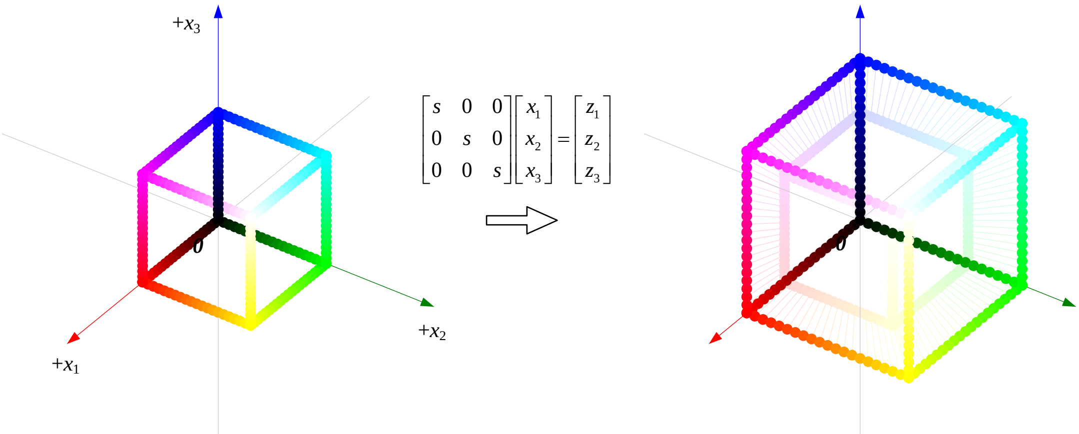


图 10. 等比例放大 ($s > 1$)，三维空间

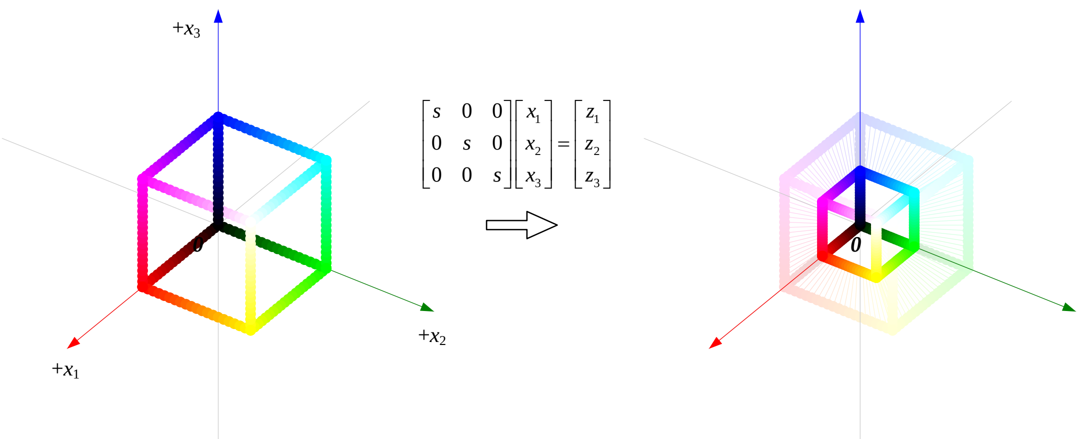


图 11. 等比例缩小 ($0 < s < 1$)，三维空间

我们也可以把 (16) 拆解成沿不同轴分别缩放

$$\boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \tag{18}$$

以上三个矩阵分别对应图 12、图 13、图 14。这三个矩阵对应的行列式都为 $s$，这意味着几何变换导致的体积缩放比例都是 $s$。

(18) 这三个对角方阵不管以何种顺序相乘得到的都是(16)，即

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_3\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_1 \tag{19}$$

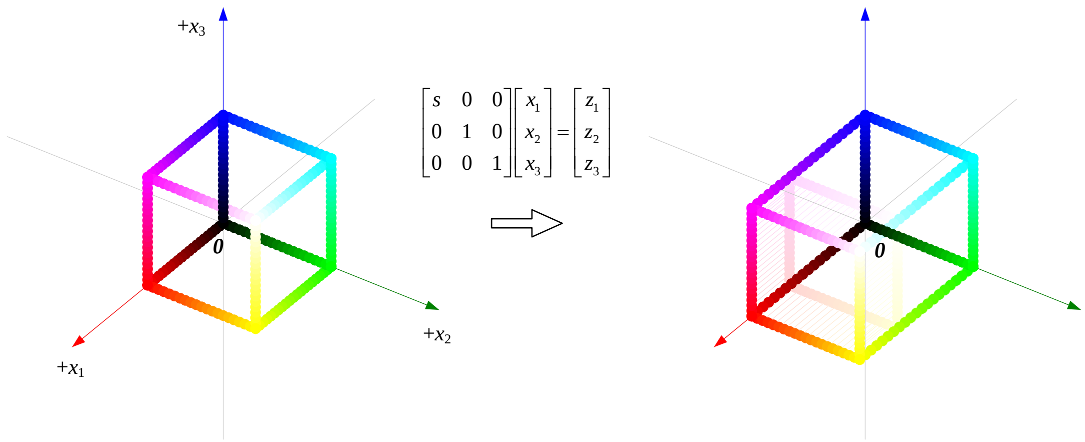


图 12．沿 $x_1$ 轴缩放，三维空间

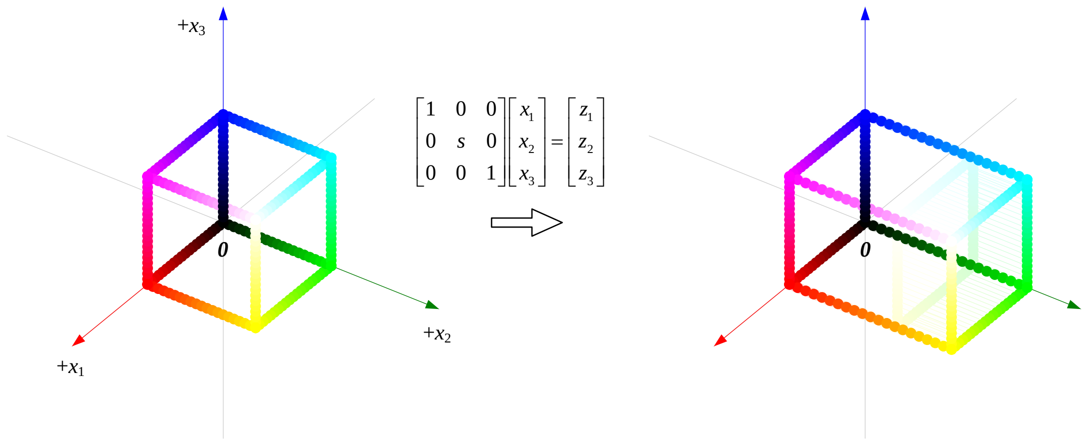


图 13．沿 $x_2$ 轴缩放，三维空间

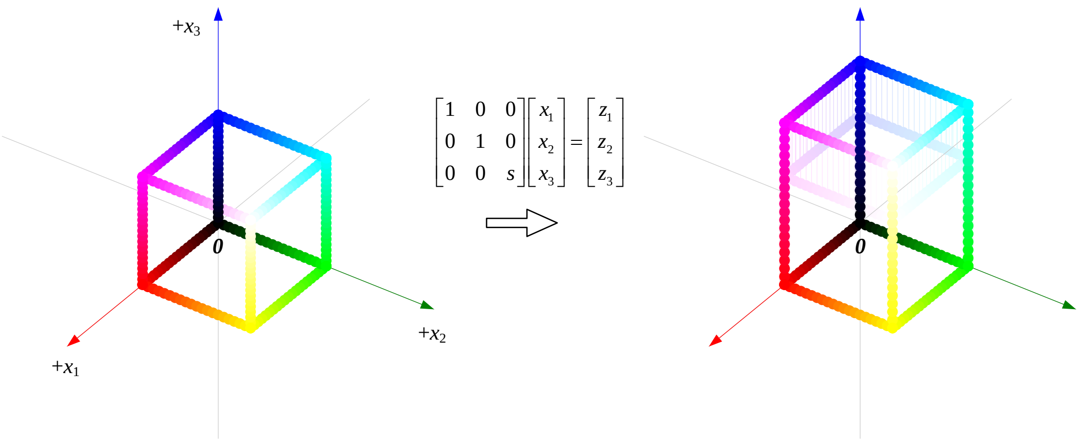


图 14．沿 $x_3$ 轴缩放，三维空间

## 三维非等比例缩放

在三维空间中，非等比例缩放是指对 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 轴分别应用不同的缩放因子。

缩放矩阵扩展为：

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \tag{20}$$

其中，$s_1$ 控制 $x_1$ 方向缩放，$s_2$ 控制 $x_2$ 方向缩放，$s_3$ 控制 $x_3$ 方向缩放。

对应的坐标变换为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1x_1 \\ s_2x_2 \\ s_3x_3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

如图 15 所示，如果缩放因子绝对值大于 1，则沿对应方向放大；缩放因子绝对值小于 1，则沿该方向缩小。

此外，如果缩放因子小于 0，意味着在缩放的基础上，还有镜像操作；如果缩放因子出现 0，这意味着发生“降维”，图形被压扁，如图 16 所示。

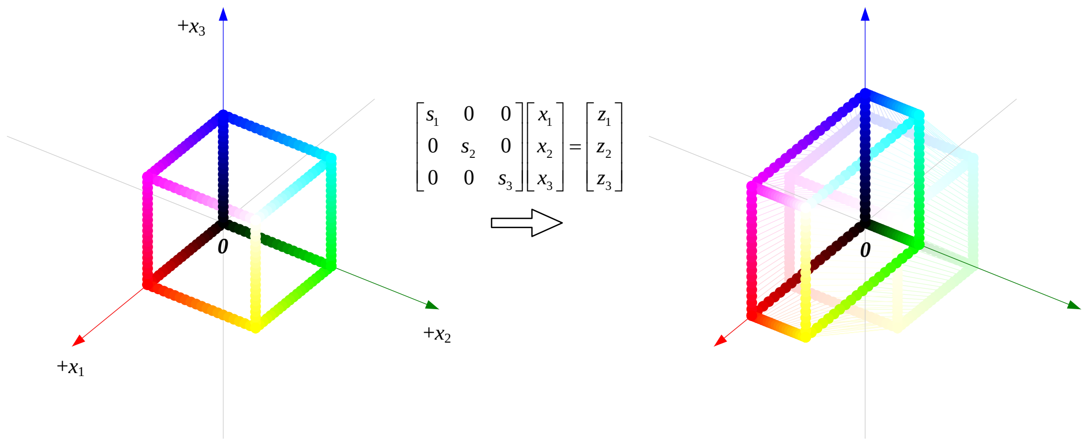


图 15. 非等比例缩放，三维空间

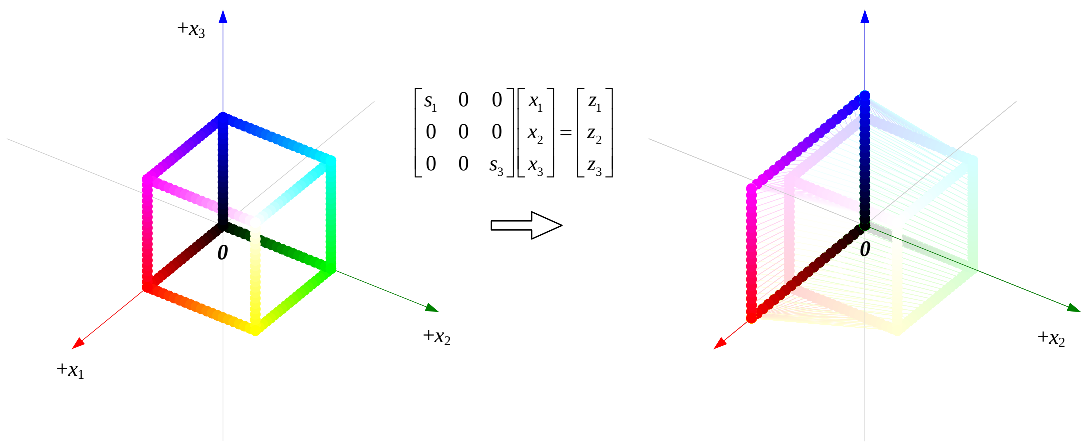


图 16. 缩放 + 压扁，三维空间

请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

**Q1.** 平面上的缩放变换，若横轴放大 2 倍，纵轴缩小 1/2，对应的缩放矩阵？

**Q2.** 三维空间的缩放变换，若 $x_1$ 轴放大 3 倍，$x_2$ 轴缩小 1/3，$x_3$ 轴不变，对应的缩放矩阵？

**Q3.** 给定缩放矩阵 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} -2 & \\ & 2 \end{bmatrix}$，点 (3, 4) 经过缩放变换后，坐标变为多少？

**Q4.** 给定两个缩放矩阵 $\boldsymbol{S}_1=\begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{S}_2=\begin{bmatrix} 3 & \\ & 1 \end{bmatrix}$，对点 (1, 2) 依次用 $\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2$ 缩放，求变换后的坐标。如果交换缩放次序，即先 $\boldsymbol{S}_2$，再 $\boldsymbol{S}_1$，结果如何？

**Q5.** 如果缩放矩阵行列式 $\det(\boldsymbol{S}) = 4$，意味着缩放变换对几何图形有何影响？如果 $\det(\boldsymbol{S}) = -4$，又说明什么？

**Q6.** 编写一个 Python 函数 scale_2D(x1, x2, s1, s2)，输入点坐标 (x1, x2) 和缩放系数 s1、s2，返回变换后的坐标。

**Q7.** 给定 5 个点 (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), (0,0)，编写 Python 代码，使这些点按比例 $s_1 = 2$、$s_2 = 0.5$ 进行缩放，并输出变换后的点集。

**Q8.** 使用 Matplotlib 绘制一个单位正方形，它的四个顶点位于 (1,0), (0,1), (1,1), (0,0)；单位正方形按比例 $s_1 = 2$、$s_2 = 0.5$ 进行缩放，显示原始图形和变换后的图形。

**Q9.** 请用下一节 LA_08_03_01.ipynb 可视化三维缩放。