| | |
|---|---|
| 作者 | **生姜 DrGinger** |
| 脚本 | **生姜 DrGinger** |
| 视频 | **崔崔 CuiCui** |
| 开源学习资源 | https://github.com/Visualize-ML |
| 平台 | https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang<br>https://space.bilibili.com/3546865719052873<br>https://space.bilibili.com/513194466 |


# 8.6 镜像

**本节你将掌握的核心技能：**

- ▶ 镜像是通过对称轴或对称面，将点映射到其对面位置的几何变换。
- ▶ 用法向量构造镜像矩阵。
- ▶ 镜像矩阵是对称矩阵，也是正交矩阵。
- ▶ 镜像矩阵的逆矩阵就是它本身。
- ▶ 镜像变换保持图形面积，但会翻转方向，使行列式变号。
- ▶ 正交投影矩阵、镜像矩阵的关系，涉及豪斯霍尔德矩阵。

## 平面镜像

**镜像** (reflection)，也叫反射，通过某个对称轴、对称面将一个点映射到其镜像位置。数学上，镜像变换通常使用矩阵乘法完成，并涉及很多线性代数的知识点。

给定一个**法向量**为 $\boldsymbol{n}$ 通过原点的直线，以它为对称轴完成镜像的矩阵

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - 2\cdot\frac{\boldsymbol{n}@\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{n}\|^2} = \boldsymbol{I} - 2\cdot\frac{\boldsymbol{n}@\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}@\boldsymbol{n}} \tag{1}$$

特别地，如果法向量为单位向量 $\hat{\boldsymbol{n}}$，$\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - 2\cdot\hat{\boldsymbol{n}}@\hat{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

举个例子，当 $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ 过原点时，$b = 0$，即 $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$。

(过原点的) 直线 $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ 法向量为

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

关于 $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ 镜像的镜像矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{I} - 2\cdot\frac{\boldsymbol{n}@\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}@\boldsymbol{n}} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \frac{2}{a_1^2+a_2^2}\times\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1^2+a_2^2}\left(\begin{bmatrix}a_1^2+a_2^2 & 0\\ 0 & a_1^2+a_2^2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2a_1^2 & 2a_1a_2\\ 2a_1a_2 & 2a_2^2\end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{a_1^2+a_2^2}\begin{bmatrix}a_2^2-a_1^2 & -2a_1a_2\\ -2a_1a_2 & a_1^2-a_2^2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4}$$

只需选定一个单位法向量，即可构造以这个法向量定义的 (过原点) 超平面的镜像变换。用法向量构造的镜像矩阵不仅适用于二维、三维空间，在任意 $n$ 维欧几里得空间都成立。

## 几组例子

下面让我们看几个特殊的例子。

图 1 (a) 关于横轴 $x_1$ 镜像。横轴对应的方程式为 $x_2 = 0$，容易得到其单位法向量为

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{5}$$

计算其镜像矩阵

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - 2\cdot\hat{\boldsymbol{n}}@\hat{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - 2\times\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{6}$$

向量 $[x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 关于横轴镜像

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ -x_2\end{bmatrix} \tag{7}$$

这和图 1 (a) 结果一致，即 $x_1$ 坐标不变，$x_2$ 坐标取反。

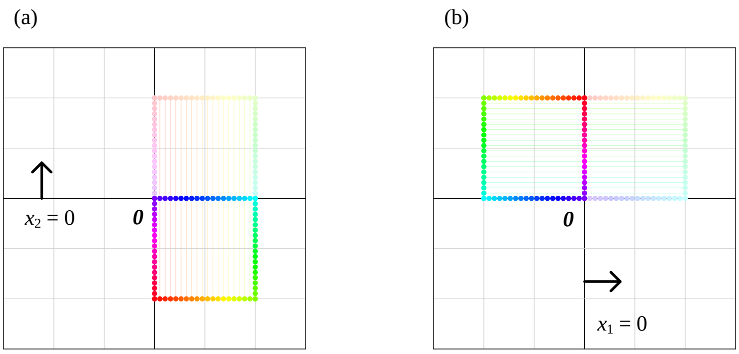


图 1．关于横轴、纵轴对称

图 1 (b) 关于纵轴 $x_2$ 镜像。纵轴对应的方程式为 $x_1 = 0$，其单位法向量为

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

计算对应的镜像矩阵

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - 2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} @ \hat{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

向量 $[x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 关于纵轴镜像

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

这和图 1 (b) 的观察一致，即 $x_1$ 坐标取反，$x_2$ 坐标不变。

再看图 2 中两个例子。

图 2 (a) 过原点的镜像直线为 $x_1 - x_2 = 0$，对应的镜像矩阵为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - 2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} @ \hat{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

请大家自行手算 (11) 中 $\boldsymbol{M}$。

向量 $[x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 关于 $x_1 - x_2 = 0$ 镜像

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

上式相当于横纵轴坐标交换。

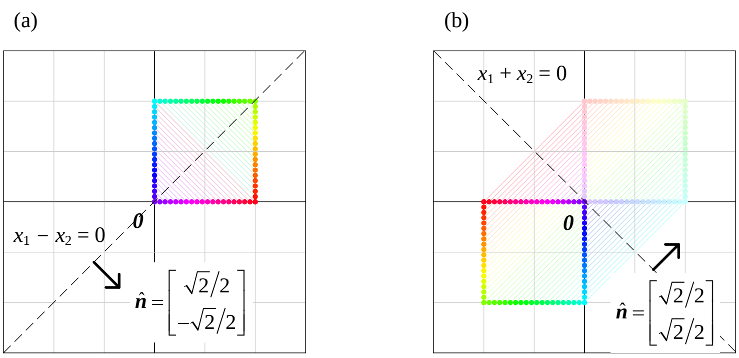


图 2. 关于过原点 45 度、135 度斜线对称

图 2 (b) 过原点的镜像直线为 $x_1 + x_2 = 0$，对应的镜像矩阵为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - 2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} @ \hat{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

请大家计算 (13) 中 $\boldsymbol{M}$。

向量 $[x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 关于 $x_1 + x_2 = 0$ 镜像

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

上式相当于横纵轴坐标交换，并取相反数。

## 矩阵性质

显然，(4) 中方阵 $\boldsymbol{M}$ 为对称矩阵，即满足

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

镜像矩阵 $\boldsymbol{M}$ 也是正交矩阵，即满足

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} \tag{16}$$

这意味着镜像操作的逆操作为本身。同时，这也意味着 $\boldsymbol{M}$ 的列向量也构成规范正交基。

联合 (15)、(16)，我们发现

$$\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{I} \tag{17}$$

这意味着，同一个镜像连续操作两次，还原原始图形，如图 3 示例所示。

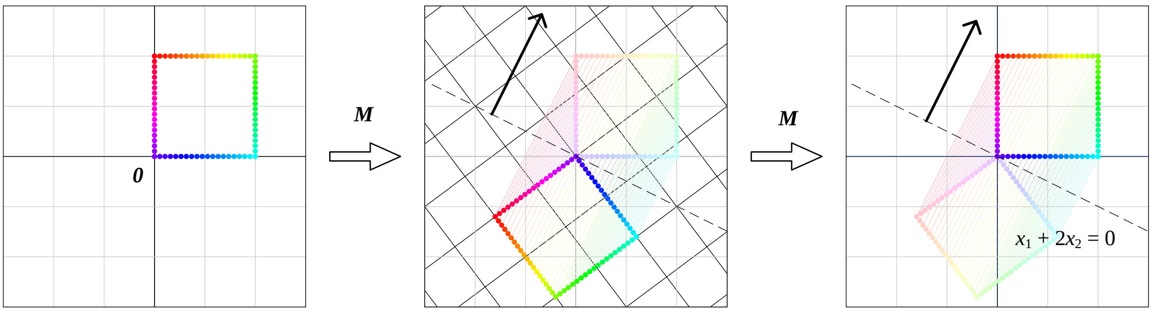


图 3．同一个镜像连续操作两次，还原原始图形

计算 (4) 行列式

$$\det(\boldsymbol{M}) = \det\left(\frac{-1}{a_1^2 + a_2^2}\begin{bmatrix} a_1^2 - a_2^2 & 2a_1a_2 \\ 2a_1a_2 & a_2^2 - a_1^2 \end{bmatrix}\right) = \frac{\left(a_1^2 - a_2^2\right)\left(a_2^2 - a_1^2\right) - 4a_1^2a_2^2}{\left(a_1^2 + a_2^2\right)^2} = \frac{-\left(a_1^2 + a_2^2\right)^2}{\left(a_1^2 + a_2^2\right)^2} = -1 \tag{18}$$

本书前文提过，行列式的正负与几何操作的方向性有关。简单来说，如果行列式为正，则变换保持了基向量的先后顺序。如果行列式为负，则反转了基向量的先后顺序，比如镜像。

虽然镜像不改变图形面积，但是图像发生翻转，列向量次序交换。

推导 (18) 用到了行列式一章讲过的性质。对于 $n \times n$ 方阵 $\boldsymbol{A}$，标量乘法 $k\boldsymbol{A}$ 的行列式为

$$\det(k\boldsymbol{A}) = k^n \det(\boldsymbol{A}) \tag{19}$$

请大家回顾本书前文有关行列式性质的内容。

## 正交投影、镜像之间的关系

(1) 中矩阵 $\boldsymbol{M}$ 有自己的名字——**豪斯霍尔德矩阵** (Householder matrix)。这个豪斯霍尔德矩阵和正交投影有直接关系，下面让我们聊聊这一点。

如图 4 所示，向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 关于过原点法向量为 $\boldsymbol{n}$ 的直线镜像对称。

而两者之差为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向向量投影的两倍，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\,\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{a} \tag{20}$$

上式可以整理得到 (1)，这个问题交给感兴趣的读者。

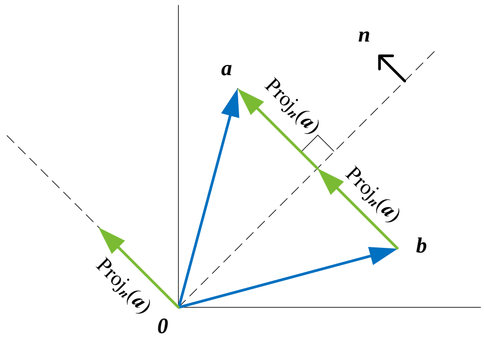


图 4. 豪斯霍尔德矩阵和正交投影

## 三维空间镜像

(1) 这个镜像矩阵也适用于二维平面的镜像。前文提过，对于一个平面而言，它的法向量就是和平面相垂直的向量。

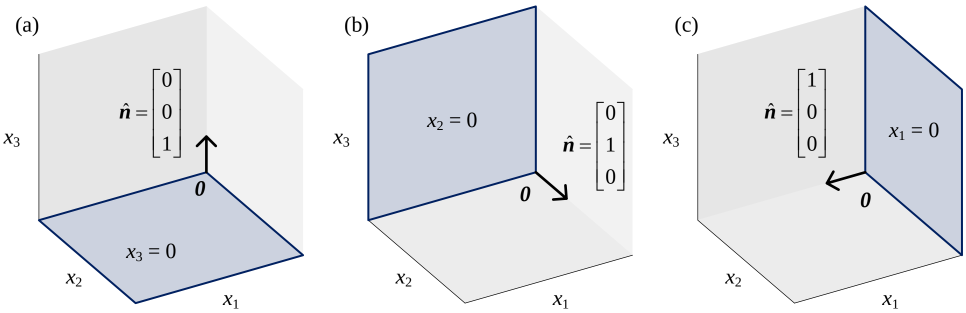


图 5. 平面的法向量

如图 5 (a) 所示，$x_1x_2$ 平面的单位法向量为 $[0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$，镜像矩阵为

$$M = I - 2 \cdot \hat{n} @ \hat{n}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

请大家计算上述镜像矩阵的行列式。

如图 6 所示，三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 关于 $x_1x_2$ 平面镜像后结果为

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \tag{22}$$

也就是说，$x_1$、$x_2$ 坐标不变，$x_3$ 坐标反转。

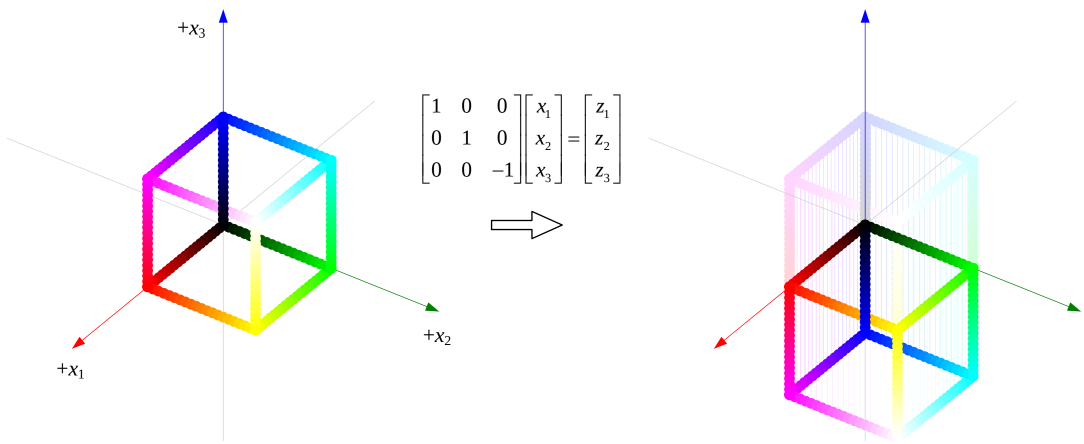


图 6．关于 $x_1x_2$ 平面镜像，三维空间

也请大家根据图 7，回顾本书前文介绍的如何利用右手定则判定（21）行列式正负。

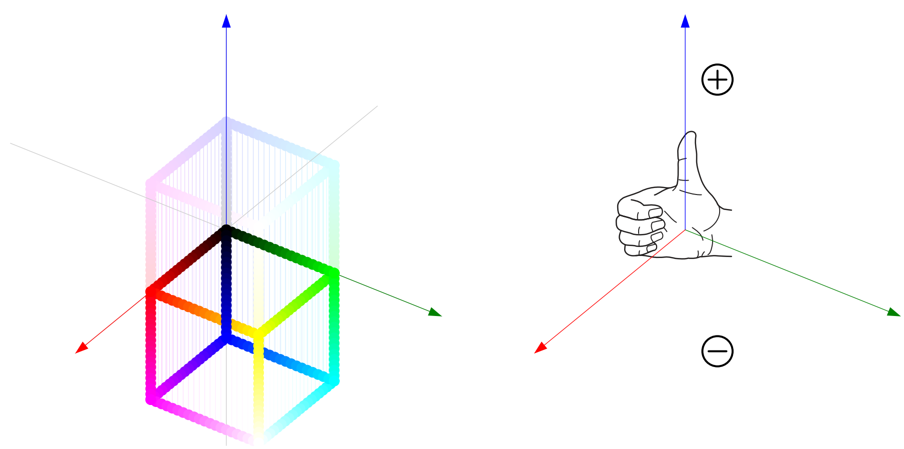

图 7．右手法则判定行列式正负

如图 5 (b) 所示，$x_1x_3$ 平面的单位法向量为 $[0, 1, 0]^\mathrm{T}$，镜像矩阵为

$$
\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - 2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} @ \hat{\boldsymbol{n}}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}
$$

如图 8 所示，$x_1$、$x_3$ 坐标不变，$x_2$ 坐标反转。

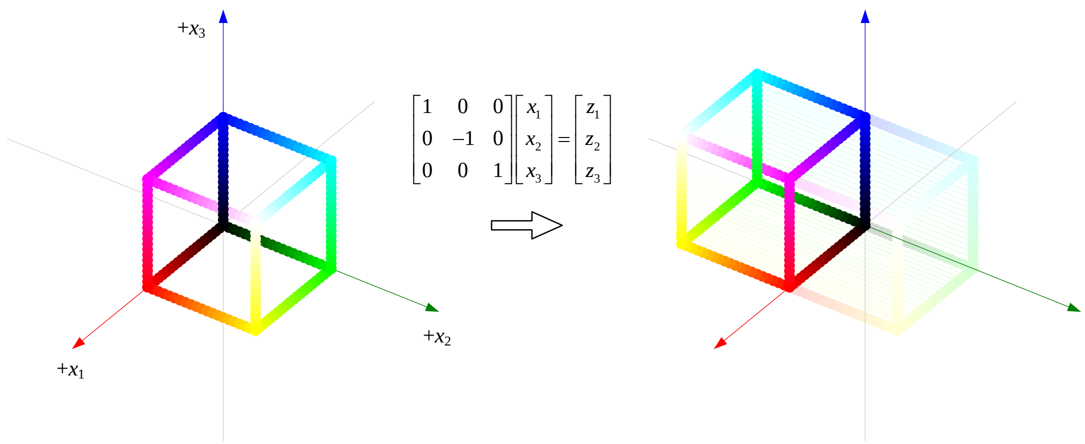


图 8．关于 $x_1x_3$ 平面镜像，三维空间

请大家自行计算图 9 对应的镜像矩阵，并指出坐标变换。

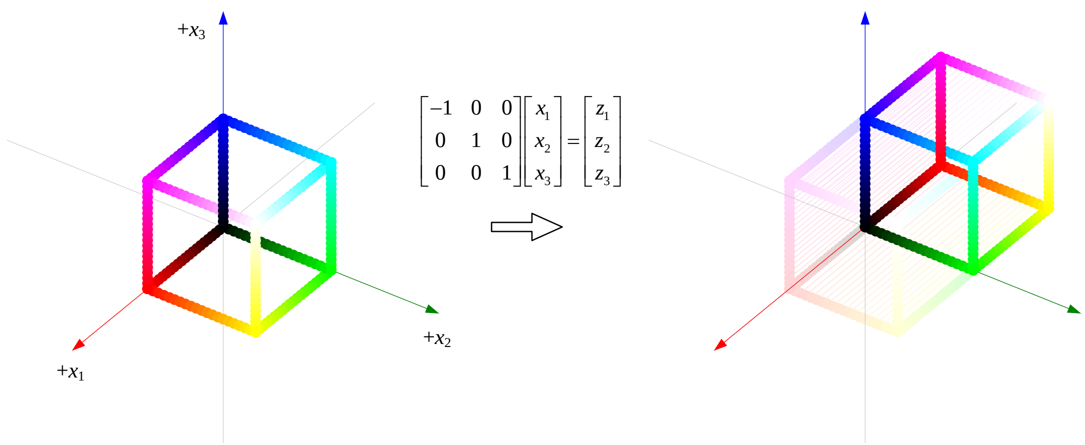


图 9．关于 $x_2x_3$ 平面镜像，三维空间

请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

**Q1.** 给定如下平面上过原点直线，分别计算其法向量、镜像矩阵。

► $-x_2 = 0$

► $-x_1 = 0$

► $x_1 - 2x_2 = 0$

► $2x_1 - x_2 = 0$

► $x_1 + 2x_2 = 0$

► $2x_1 + x_2 = 0$

**Q2.** 给定如下三维空间中过原点平面，分别计算法向量、镜像矩阵。

► $x_2 = 0$

► $x_1 = 0$

► $x_1 + x_2 = 0$

► $x_1 + x_3 = 0$

► $x_2 + x_3 = 0$

► $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

► $x_1 - x_2 - x_3 = 0$

**Q3.** 请修改 LA_08_02_01.ipynb，可视化图 1、图 2 几个平面镜像投影操作。

**Q4.** 请修改 LA_08_03_01.ipynb，可视化图 6、图 8、图 9 几个三维镜像操作。

**Q5.** 给定如下超平面法向量，计算镜像矩阵。

► $[0, 0, 0, 1]^T$

► $[0, 0, 1, 0]^T$

► $[1, 1, 1, 1]^T$

**Q6.** 给定如下超平面，计算镜像矩阵。

► $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

► $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$