作者	**生姜 DrGinger**
脚本	**生姜 DrGinger**
视频	**崔崔 CuiCui**
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

8.4 剪切

本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 剪切保持一个方向坐标不变的同时，按比例调整另一个方向坐标。
- ▶ 通过剪切角控制剪切方向和强度，适用于水平与竖直剪切。
- ▶ 连续沿同一轴剪切合并为一次剪切。
- ▶ 剪切矩阵可逆，逆矩阵仍是上三角或下三角。
- ▶ 主对角线元素均非 0 的对角方阵可以写成“剪切 @ 缩放”或“缩放 @ 剪切”两种形式。
- ▶ 连续沿同一轴剪切操作顺序可交换，即满足矩阵乘法交换律。
- ▶ 在三维中，一个轴剪切可依赖另外两个轴进行，共六种基本剪切方式。

剪切 (shear) 保持某些轴方向上的坐标不变，同时在其他方向上施加一个比例变换。剪切变换通常可以用矩阵乘法运算，在计算机图形学、线性代数、物理仿真等领域有广泛应用。本书后文，大家会在 Cholesky 分解、LDL 分解等话题中用到剪切操作。

水平剪切

水平剪切 (horizontal shear) 让图形在水平方向上发生倾斜，x_2 坐标保持不变。对应的变换矩阵为

$$\boldsymbol{K}_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中，k 是水平剪切因子，即水平方向的偏移比率。

显然上式变换矩阵为上三角矩阵，矩阵行列式为 1；这意味着这个几何变换不改变面积。

变换前的坐标对应向量 $[x_1, x_2]^T$，经过上述剪切后向量为 $[y_1, y_2]^T$

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + kx_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

完成水平剪切后，点 (x_1, x_2) 移动到 $(x_1 + k \cdot x_2, x_2)$。即横轴坐标 x_1 被调整为 $x_1 + k \cdot x_2$；纵轴坐标保持不变。

⚠ 注意，k 不是平移量，是倍数；上式告诉我们，x_2 的大小影响平移量，x_2 正负影响平移方向。

剪切因子 k 控制剪切的方向和强度。观察图 1 (a)，可以发现 $k > 0$ 时，图形向右倾斜；而图 1 (b) 告诉我们，$k < 0$ 是，图形向左倾斜。显然，k 的绝对值越大，剪切程度越强，图形倾斜越明显。

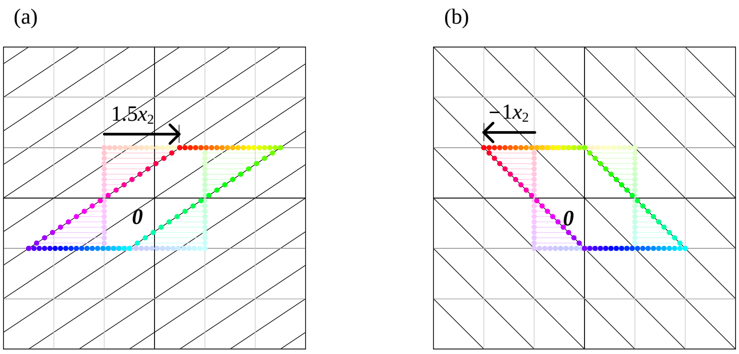

图 1．两个水平剪切变换的例子

竖直剪切

竖直剪切 (vertical shear) 让图形在竖直方向上发生倾斜，x_1 坐标保持不变。对应的变换矩阵为：

$$\boldsymbol{K}_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

上式这个矩阵为下三角矩阵，行列式也是 1；同样意味着这个几何变换不改变面积。

经过竖直剪切后向量为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ kx_1 + x_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

如图 2 所示，完成竖直剪切后，点 (x_1, x_2) 移动到 $(x_1, x_2 + k \cdot x_1)$；也就是说，横轴坐标保持不变；纵轴坐标 x_2 被调整为 $x_2 + k \cdot x_1$。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

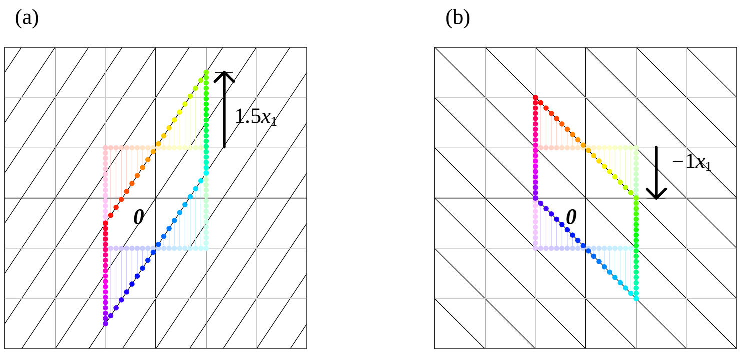

图 2．两个竖直剪切变换的例子

剪切角

我们也可以利用剪切角 θ 来描述平面剪切变换。

水平剪切对应的矩阵运算为

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中，$\cot(\theta)$ 是剪切角的余切。上式意味着，点 (x_1, x_2) 移动到 $(x_1 + \cot(\theta) \cdot x_2, x_2)$。即横轴坐标 x_1 被调整为 $x_1 + \cot(\theta) \cdot x_2$；纵轴坐标保持不变。

如图 3 所示，水平剪切操作中，剪切角 θ 控制剪切的强度和方向。当 $0° < \theta < 90°$，图形向右倾斜。当 $0° > \theta > -90°$，图形向左倾斜。

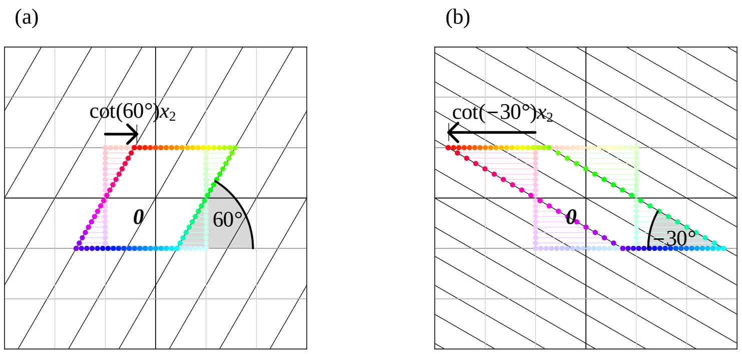

图 3．两个水平剪切变换的例子，利用剪切角

用剪切角 θ 来描述，竖直剪切对应的矩阵运算

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

完成竖直剪切后，点 (x_1, x_2) 移动到 $(x_1, x_2 + \cot(\theta) \cdot x_1)$。即，横轴坐标保持不变；纵轴坐标 x_2 被调整为 $x_2 + \cot(\theta) \cdot x_1$。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

如图 4 所示，竖直剪切操作中，剪切角 θ 同样控制剪切的强度和方向。当 $0° < \theta < 90°$，图形向上倾斜。当 $0° > \theta > -90°$，图形向下倾斜。

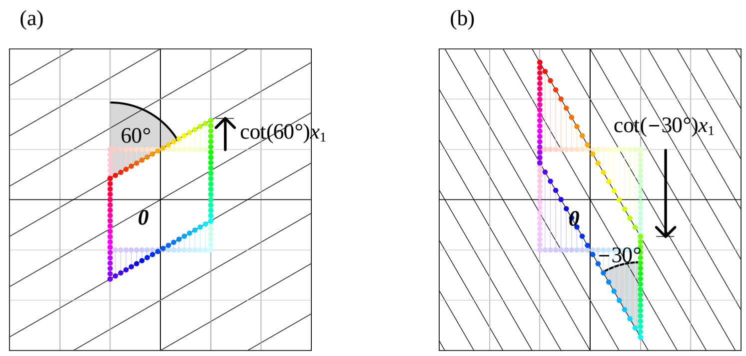

图 4. 两个竖直剪切变换的例子，利用剪切角

剪切逆运算

剪切变换的逆变换矩阵可以通过求逆运算得到。

沿 x_1 轴剪切逆运算矩阵

$$\left(\boldsymbol{K}_{x_1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

也就是说

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{8}$$

请大家自行分析图 5 这个例子。

希望大家能够记得本书前文提到过的**上三角矩阵的逆矩阵也是上三角矩阵**。

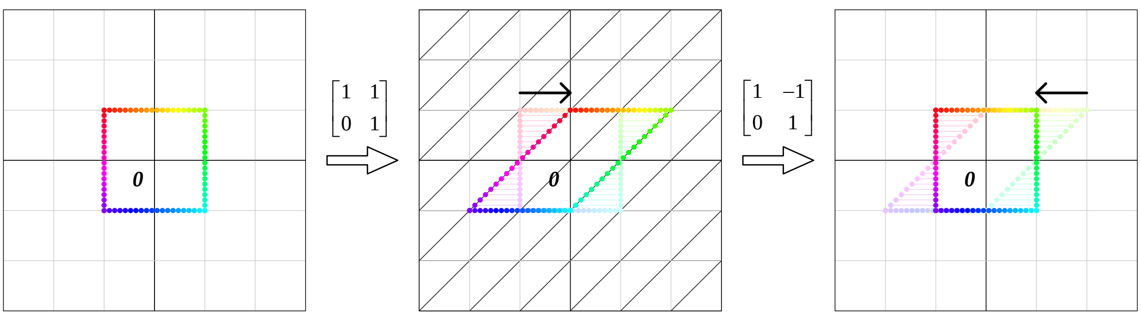

图 5. 沿横轴剪切，以及逆操作

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

沿 x_2 轴剪切逆运算矩阵

$$\left(\boldsymbol{K}_{x_2}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -k & 1\end{bmatrix} \tag{9}$$

下三角矩阵的逆矩阵还是下三角矩阵，这一点也请大家回顾。

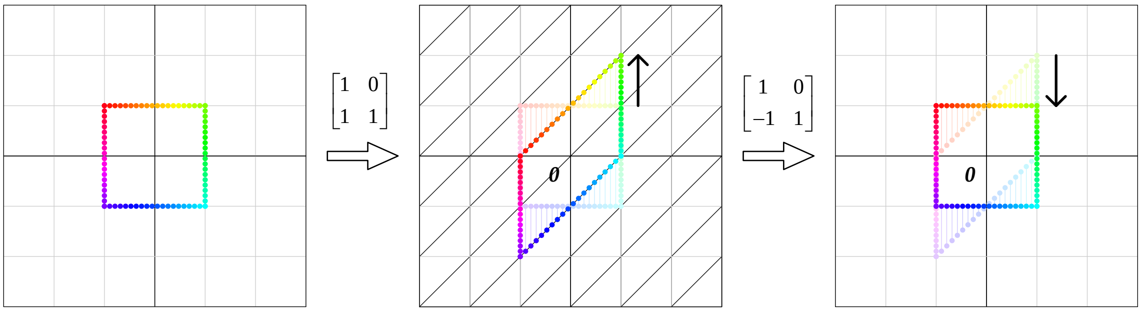

图 6．沿纵轴剪切，以及逆操作

沿同一轴连续剪切

如果对一个点连续施加两次沿同一轴的剪切。

比如，两次沿 x_1 轴进行剪切，其矩阵乘法运算

$$\begin{bmatrix}1 & k_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & k_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & k_1+k_2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{10}$$

交换之后

$$\begin{bmatrix}1 & k_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & k_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & k_1+k_2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{11}$$

上式告诉我们调整同轴剪切顺序后结果不变。

⚠ 注意，(10)、(11) 是矩阵乘法可交换的特例。

图 7 所示为沿横轴连续剪切。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

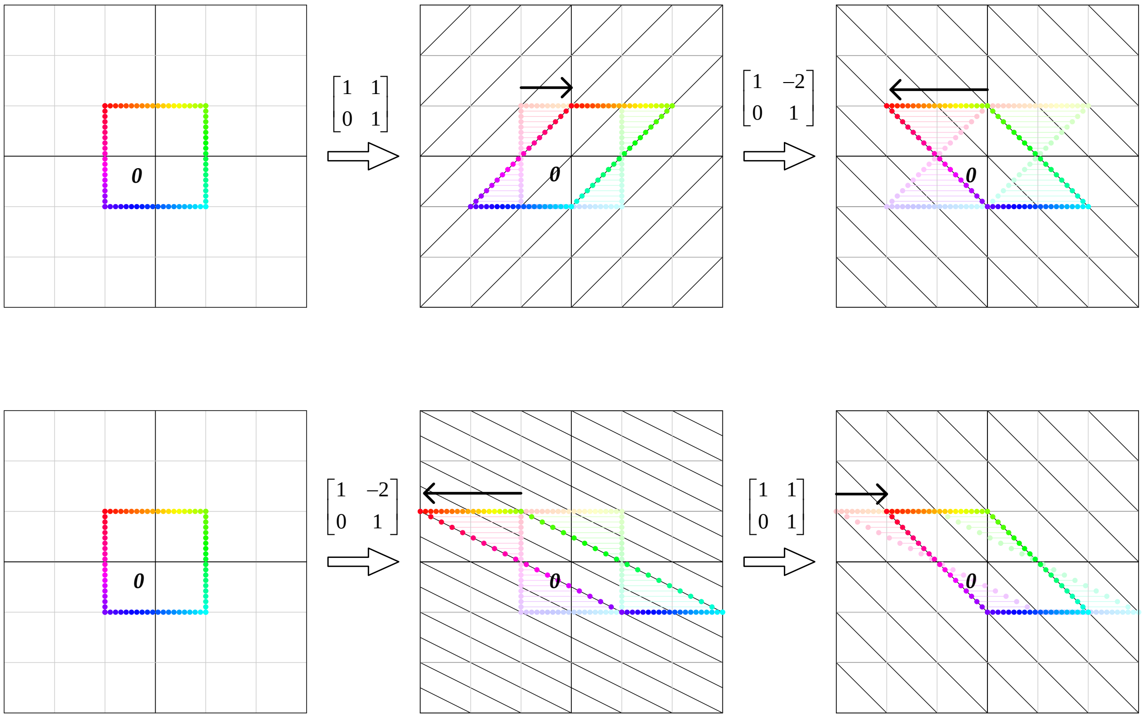

图 7．平面上沿横轴连续剪切

再如，两次沿 x_2 轴进行剪切，对应

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1+k_2 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

调整顺序后

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1+k_2 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

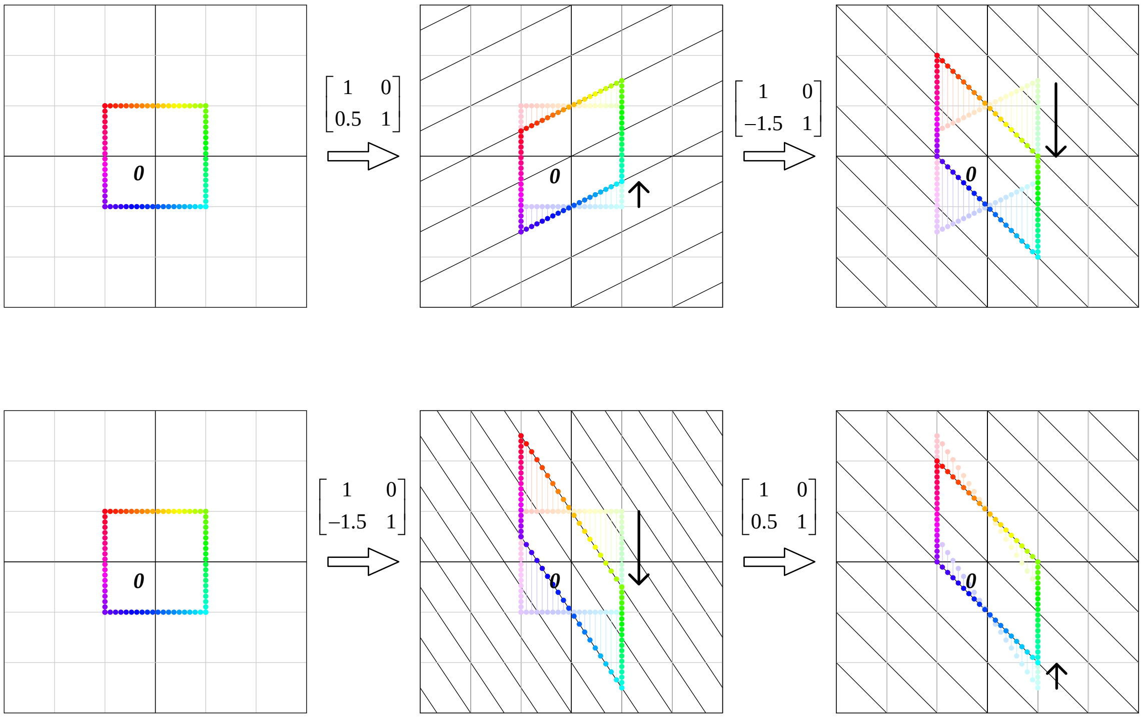

图 8．平面上沿纵轴连续剪切

沿不同轴连续剪切

图 9 所示为沿不同轴连续剪切，结果不同。

图 9 (a) 先沿 x_1 剪切，再沿 x_2 剪切

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & k_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & k_1 \\ k_2 & k_1k_2+1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

图 9 (b) 则先沿 x_2 剪切，再沿 x_1 剪切

$$\begin{bmatrix} 1 & k_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_1k_2+1 & k_1 \\ k_2 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

图 9 (a) 和图 9 (b) 结果完全不同。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

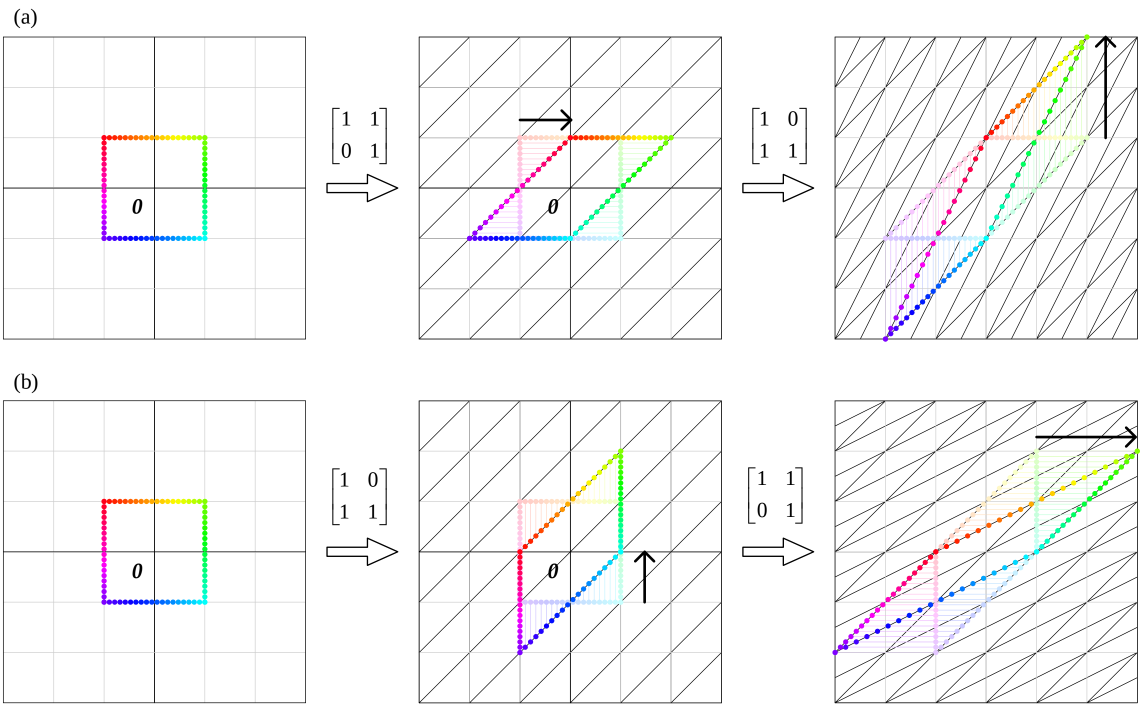

图 9. 平面上沿不同轴连续剪切

缩放 → 剪切

任意 2×2 上三角矩阵，如果对角线元素均非 0，对应的几何操作可以写成“先横轴剪切 ($\boldsymbol{K}$) → 后缩放 ($\boldsymbol{S}$)”这种形式。

举个例子，上三角矩阵，可以写成“$\boldsymbol{S}$ (缩放) @ 横轴剪切 ($\boldsymbol{K}$)：

$$\begin{bmatrix}2/3 & 1/3\\0 & 3/2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2/3 & 0\\0 & 3/2\end{bmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1/2\\0 & 1\end{bmatrix}}_{K} \tag{16}$$

如图 10 所示，$\boldsymbol{SKx}$ 的作用是，对列向量 $\boldsymbol{x}$ 先 $\boldsymbol{K}$ (横轴剪切)，再 $\boldsymbol{S}$ (缩放)。

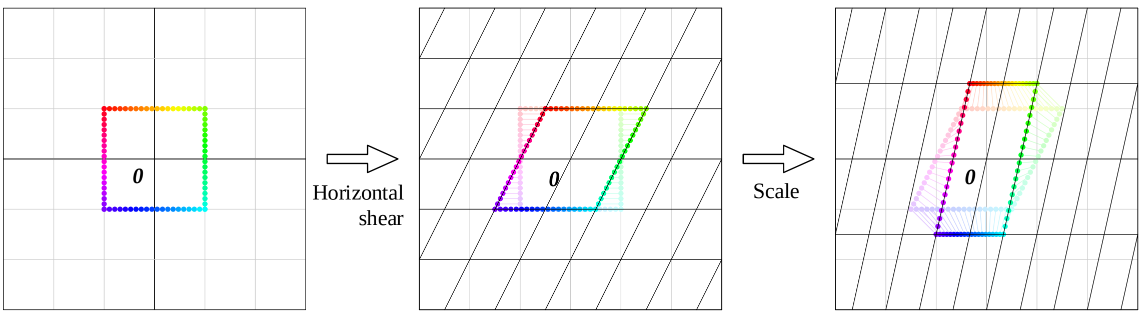

图 10. 先横轴剪切 ($\boldsymbol{K}$) → 后缩放 ($\boldsymbol{S}$)

类似地，任意 2×2 下三角矩阵，如果对角线元素均非 0，对应的几何操作可以写成“先纵轴剪切 ($\boldsymbol{K}$) → 后缩放 ($\boldsymbol{S}$)”这种形式。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

举个例子，下三角矩阵，可以写成"S (缩放) @ 纵轴剪切 (K)：

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 1/3 & 3/2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/9 & 1 \end{bmatrix}}_{K} \tag{17}$$

如图 11 所示，SKx 的作用是，对列向量 x 先 K (纵轴剪切)，再 S (缩放)。

这部分内容将会帮助我们理解 Cholesky 分解、LDL 分解。

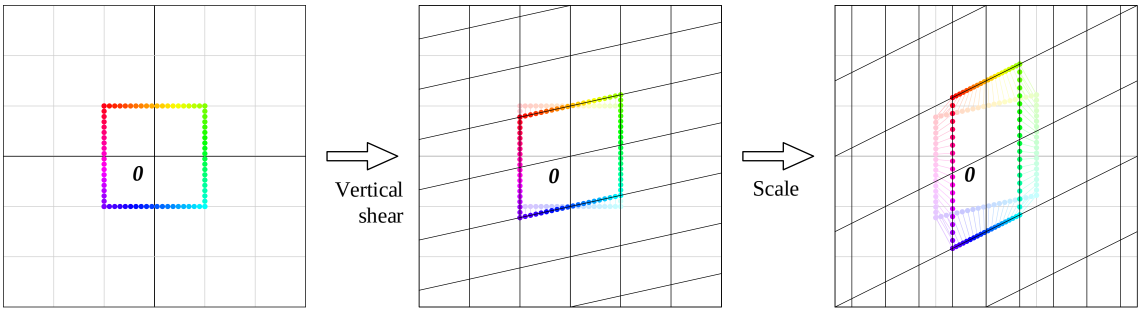

图 11. 先纵轴剪切 (K) → 后缩放 (S)

剪切 → 缩放

反过来，任意 2 × 2 上三角矩阵，如果对角线元素均非 0，对应的几何操作也可以写成"先缩放 (S) → 后横轴剪切 (K)"这种形式。

用 (16) 这个例子，同样一个上三角矩阵也可以写成"横轴剪切 (K) @ S (缩放)：

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2/9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}}_{S} \tag{18}$$

如图 12 所示，KSx 的作用是，对列向量 x 先 S (缩放)，再 K (沿横轴剪切)。

比较图 10、图 12，发现最终结果相同。

注意，(17)、(18) 这两个矩阵乘法互为转置。

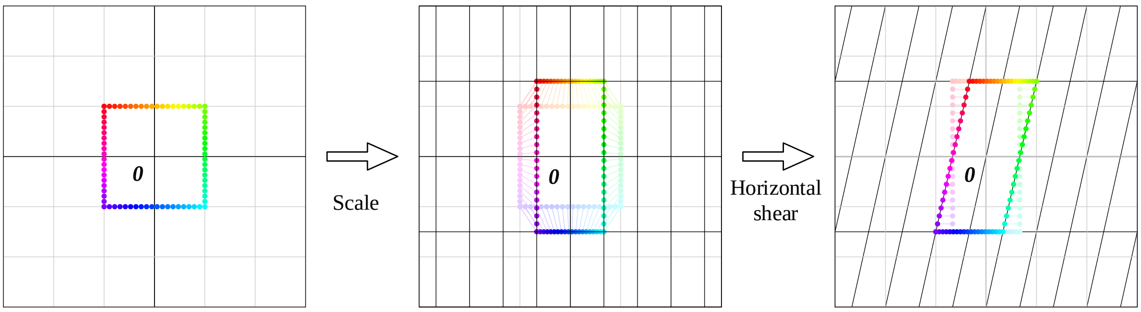

图 12. 先缩放 (S) → 后横轴剪切 (K)

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

类似地，任意 2×2 下三角矩阵，如果对角线元素均非 0，对应的几何操作可以写成“先缩放 ($\boldsymbol{S}$) → 后纵轴剪切 ($\boldsymbol{K}$)”这种形式。比如下例，

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 1/3 & 3/2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}}_{S} \tag{19}$$

⚠ 注意，(16)、(19) 这两个矩阵乘法互为转置。

图 13 和图 11 结果相同。

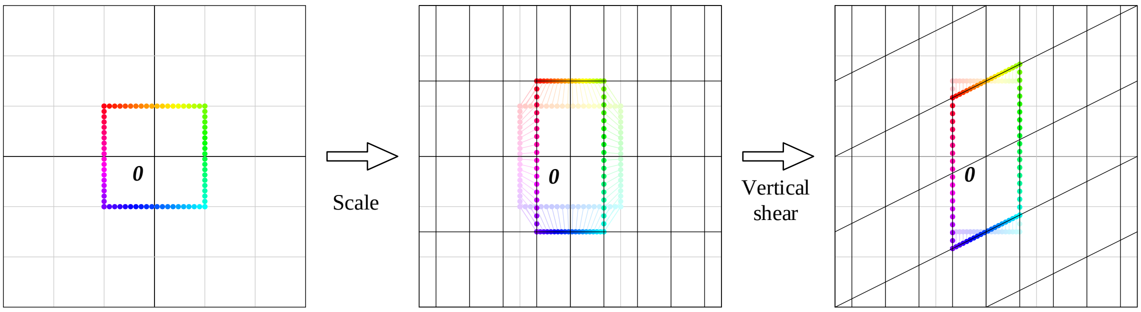

图 13．先缩放 ($\boldsymbol{S}$) → 后纵轴剪切 ($\boldsymbol{K}$)

三维空间沿 x_1 轴剪切

三维空间的剪切变换，可以沿三个方向（x_1、x_2、x_3 轴）分别来看，每个方向的剪切又可以进一步细分为以下两种类型。下面让我们逐个来看。

沿 x_1 轴的剪切，即 x_1 的值随着 x_2 和 x_3 的变化而变化。

如图 14 所示，先看 x_1 的剪切值随着 x_2 变化，对应的矩阵乘法为

$$\begin{bmatrix} 1 & k_{1,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{20}$$

很容易得到操作矩阵的行列式值为 1，也就是说经过几何变换后体积没有变化。

展开上式得到

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + k_{1,2} \cdot x_2 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \tag{21}$$

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

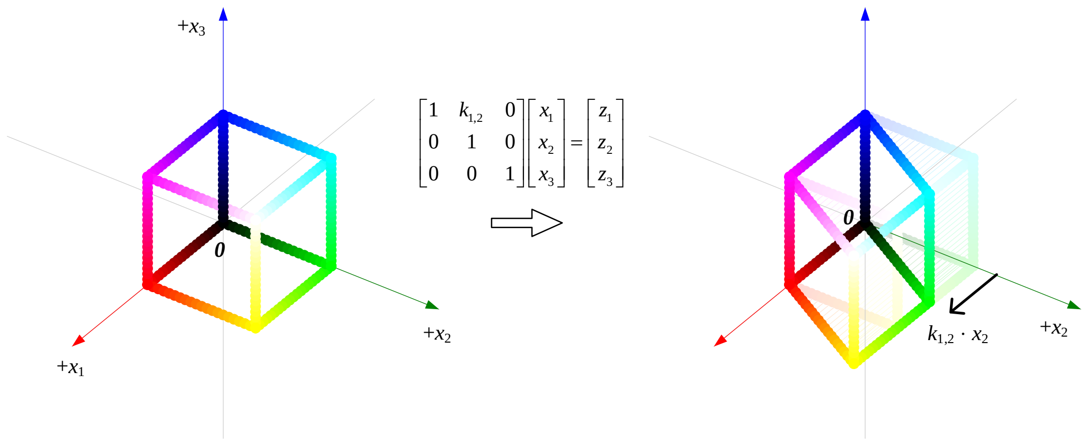

图 14. 沿 x_1 剪切，相对于 x_2，三维空间

再看 x_1 的剪切值随着 x_3 变化，如图 15 所示，对应的矩阵乘法为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{22}$$

展开得到

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + k_{1,3} \cdot x_3 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \tag{23}$$

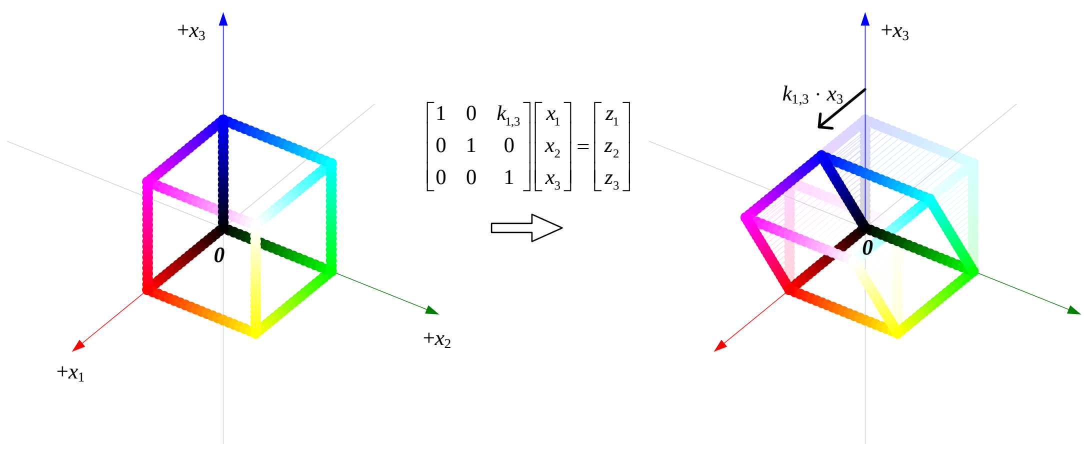

图 15. 沿 x_1 剪切，相对于 x_3，三维空间

我们发现这两个矩阵乘法可交换，即。

$$\begin{bmatrix} 1 & k_{1,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & 0 & k_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 & k_{1,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_{1,2} & k_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

这说明，两个沿同轴的剪切操作的矩阵乘法结果是可交换的；也就是说，这个特殊情况矩阵乘法满足交换律。

如图 16 所示，对应的矩阵乘法为

$$\begin{bmatrix} 1 & k_{1,2} & k_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{25}$$

展开得到

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + k_{1,2}\cdot x_2 + k_{1,3}\cdot x_3 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \tag{26}$$

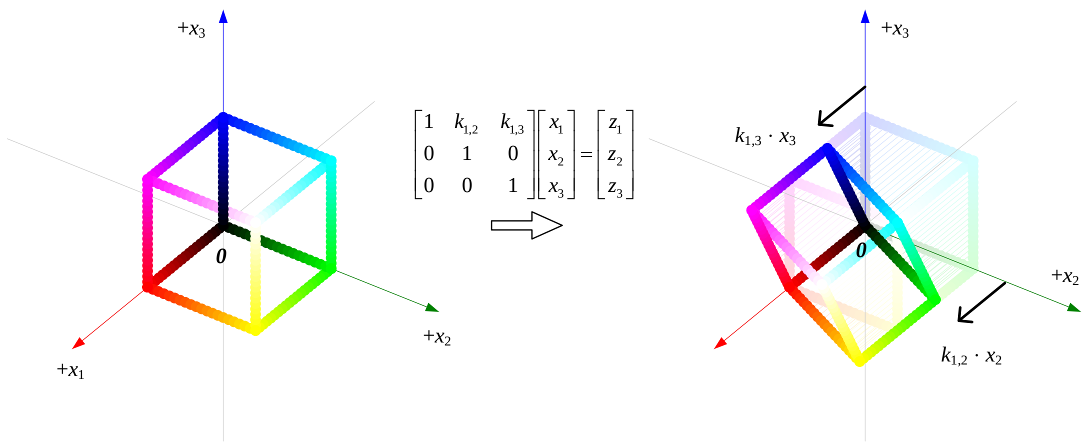

图 16. 沿 x_1 剪切，相对于 x_2 和 x_3，三维空间

三维空间沿 x_2 轴剪切

类似地，沿 x_2 轴的剪切，也有 x_1 和 x_3 两个参考，分别如图 17、图 18 所示。

如图 17 所示，先看 x_2 的剪切值随着 x_1 变化，对应的矩阵乘法为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_{2,1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{27}$$

展开上式得到

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = k_{2,1}x_1 + x_2 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \tag{28}$$

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

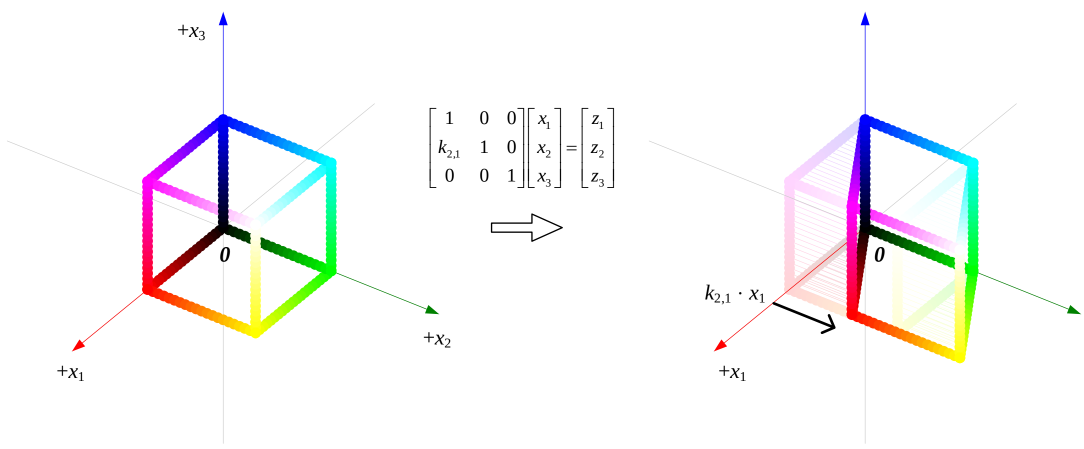

图 17．沿 x_2 剪切，相对于 x_1，三维空间

如图 18 所示，先看 x_2 的剪切值随着 x_3 变化，对应的矩阵乘法为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{29}$$

展开上式得到

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 + k_{2,3}x_3 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \tag{30}$$

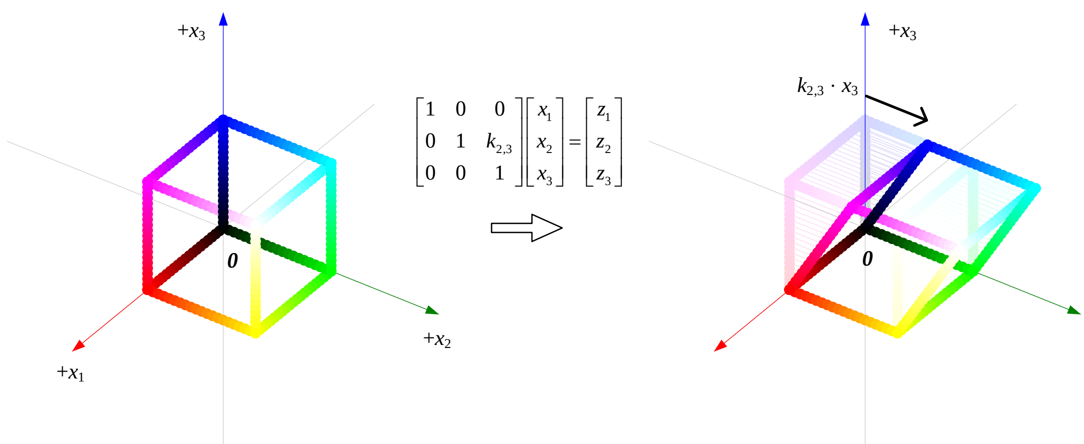

图 18．沿 x_2 剪切，相对于 x_3，三维空间

结合图 17、图 18，我们可以得到图 19，对应矩阵乘法为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_{2,1} & 1 & k_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{31}$$

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

展开得到

$$
\begin{cases}
z_1 = x_1 \\
z_2 = k_{2,1} \cdot x_1 + x_2 + k_{2,3} \cdot x_3 \\
z_3 = x_3
\end{cases}
\tag{32}
$$

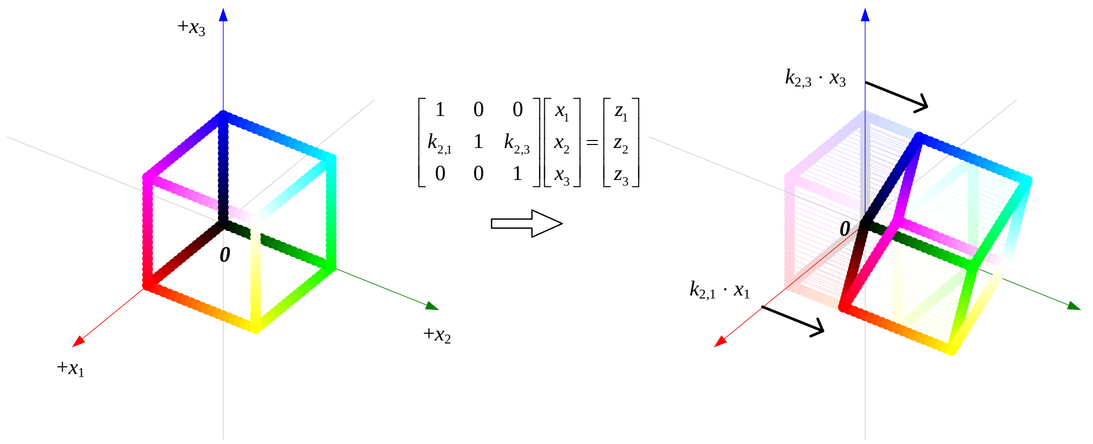

图 19. 沿 x_2 剪切，相对于 x_1 和 x_3，三维空间

三维空间沿 x_3 轴剪切

沿 x_3 轴的剪切，同样有 x_1 和 x_2 两个参考，如图 20、图 21 所示。

请大家自行分析这两幅图。

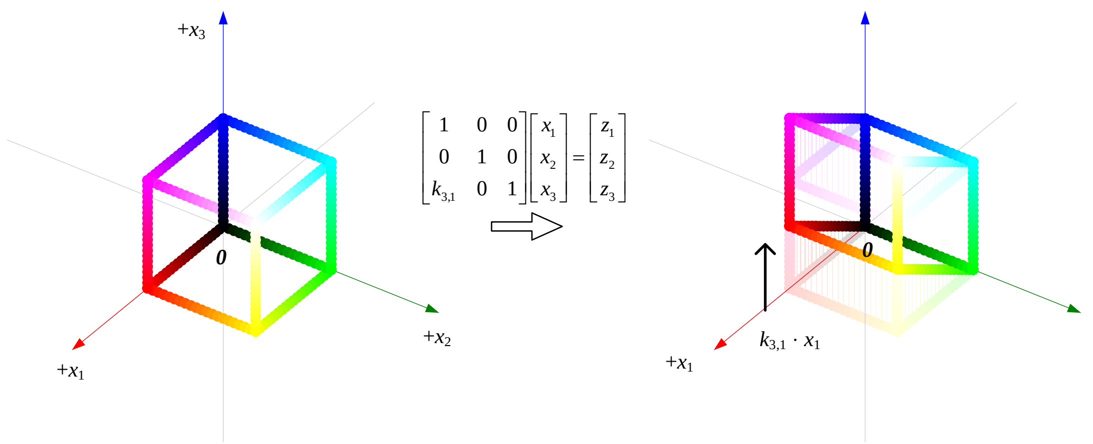

图 20. 沿 x_3 剪切，相对于 x_1，三维空间

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

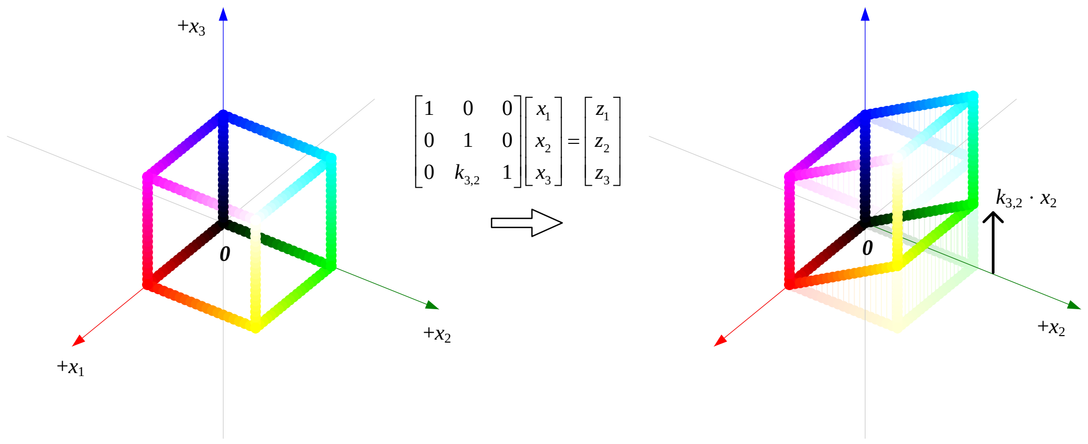

图 21．沿 x_3 剪切，相对于 x_2，三维空间

请大家将图 20 和图 21 对应的两个矩阵相乘，请解释对应的几何操作。

请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 如下矩阵哪些完成平面剪切，哪些不是？

- $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$

Q2. 给定一组平面点坐标 points = [(1, 0), (0, 1), (−1, 0), (0, −1), (0, 0)]，编写 Python 代码计算 $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$ 对应的剪切，并输出剪切后的新坐标。

Q3. 为什么平面剪切不改变面积？

Q4. 对点 (3, 4) 施加水平剪切，剪切因子 $k = 2$，请用矩阵乘法计算变换后的坐标。

Q5. 请计算如下矩阵连乘，并试着从几何角度解释结果。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

▶ $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Q6. 把如下对角方阵分别写成“缩放 @ 剪切”、“剪切 @ 缩放”两种形式。

▶ $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$

Q7. 请修改 LA_08_02_01.ipynb，可视化图 1 ~ 图 9 几个平面剪切操作。

Q8. 请修改 LA_08_03_01.ipynb，可视化图 14 ~ 图 21 几个三维剪切操作。

Q9. 请试着解释如下这些方阵在多维空间的几何操作：

▶ $\begin{bmatrix}1 & 0 & k & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & k & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\k & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：https://github.com/Visualize-ML
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：https://space.bilibili.com/513194466
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com