作者	**生姜 DrGinger**
脚本	**生姜 DrGinger**
视频	**崔崔 CuiCui**
开源学习资源	**https://github.com/Visualize-ML**
平台	**https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang** **https://space.bilibili.com/3546865719052873** **https://space.bilibili.com/513194466**

9.2 3 x 3 正交矩阵

本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 单位矩阵、旋转矩阵、镜像矩阵、置换矩阵，以及它们的复合矩阵都是正交矩阵。
- ▶ 矩阵乘法展第一视角展开正交矩阵的格拉姆矩阵。
- ▶ 投影矩阵合成单位矩阵。
- ▶ 两次投影：先标量投影，再向量投影。
- ▶ 正交补空间包含了垂直于原空间的所有向量。

上一节从单位矩阵、旋转矩阵两个实例入手，用平面几何视角讲解 2 × 2 正交矩阵。本节“升维”，从三维几何视角讲解 3 × 3 正交矩阵。

3 × 3 单位矩阵

3 × 3 单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 也是一个正交矩阵，即满足

$$\boldsymbol{I}_{3\times3} @ \boldsymbol{I}_{3\times3}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_{3\times3}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{I}_{3\times3} = \boldsymbol{I}_{3\times3} \tag{1}$$

先看格拉姆矩阵 $\boldsymbol{I}_{3\times3}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{I}_{3\times3} = \boldsymbol{I}_{3\times3}$，用矩阵乘法第一视角展开

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_{3\times3} \tag{2}$$

请大家根据图 1 自行分析 (2) 主对角线元素、非主对角线元素的特点。

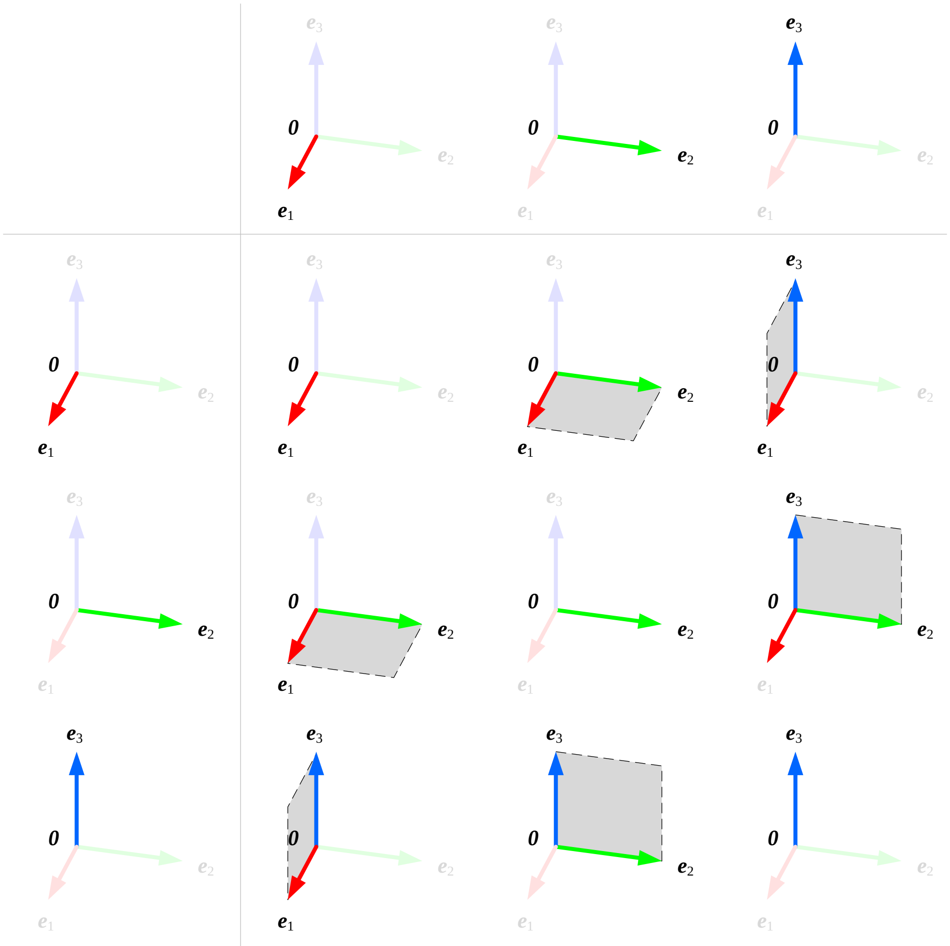

图 1. 用矩阵乘法第一视角展开矩阵乘法 $\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}$

合成单位矩阵

再看 $\boldsymbol{I}_{3\times3} @ \boldsymbol{I}_{3\times3}{}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_{3\times3}$，用矩阵乘法第二视角展开

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1{}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_2{}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_3{}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 @ \boldsymbol{e}_1{}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{e}_2 @ \boldsymbol{e}_2{}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{e}_3 @ \boldsymbol{e}_3{}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_{3\times3} \tag{3}$$

如图 2 所示，我们看到的是三个正交投影矩阵的叠加，结果是单位矩阵。

比如，$\boldsymbol{e}_1 @ \boldsymbol{e}_1{}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{x}$ 代表将向量 $\boldsymbol{x}$ 投影到 x_1 轴；$\boldsymbol{e}_2 @ \boldsymbol{e}_2{}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{x}$ 代表将向量 $\boldsymbol{x}$ 投影到 x_2 轴，以此类推。下面让我们逐个讲解。

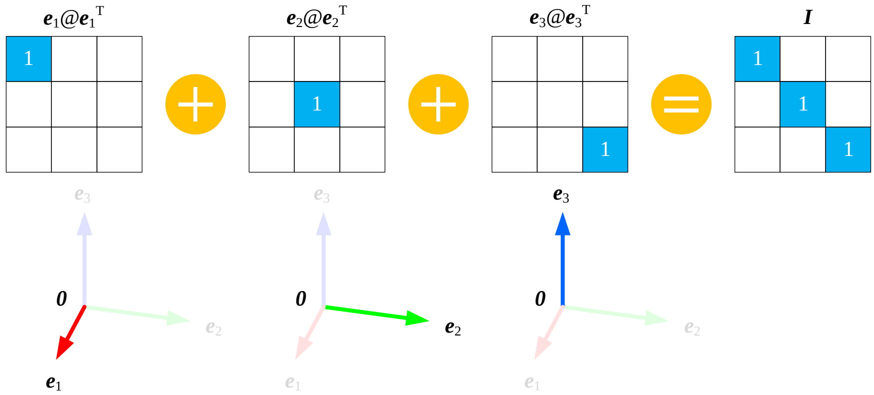

图 2. 三个正交投影矩阵叠加得到单位矩阵 I

朝 e_1 方向正交投影

三维列向量 x 朝方向向量 (单位向量) e_1 方向投影，对应的投影矩阵 P_1 为

$$P_1 = e_1 @ e_1^{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

投影矩阵 P_1 是秩一矩阵，也是对称矩阵，即满足

$$\left(e_1 @ e_1^{T}\right)^{T} = e_1 @ e_1^{T} \tag{5}$$

如图 3 所示，投影结果对应如下矩阵乘法

$$P_1 x = e_1 @ e_1^{T} @ x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{e_1 @ e_1^{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

列向量 x 在 span(e_1) 的坐标，就是 x 在 e_1 方向上标量投影结果，即

$$e_1^{T} @ x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \tag{7}$$

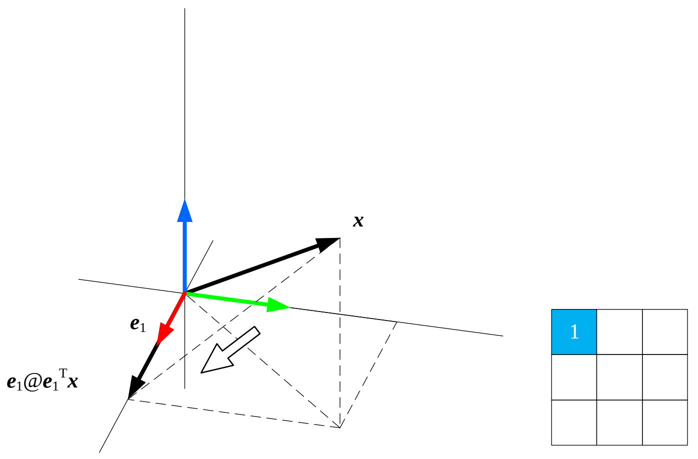

图 3. 三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向正交投影

比较 (6)、(7)，我们可以把正交投影写成两部分

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{e}_1}_{\text{Direction}} @ \underbrace{\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{x}}_{\text{Scalar}} \tag{8}$$

这实际上就是“二次投影”——先把 $\boldsymbol{x}$ 投影到 span($\boldsymbol{e}_1$)，这部分是标量投影；然后在三维空间中描述投影结果，这一步相当于向量投影。

等式 (8) 右侧转置得到

$$\underbrace{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{e}_1}_{\text{Scalar}} @ \underbrace{\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}}_{\text{Direction}} \tag{9}$$

上式，相当于用行向量 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 代表三维空间中的一点。

朝 $\boldsymbol{e}_2$ 方向正交投影

三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 朝 $\boldsymbol{e}_2$ 方向投影，投影矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 为

$$\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{e}_2 @ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

投影矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 同样是秩一矩阵，也是对称矩阵。

如图 4 所示，投影结果对应如下矩阵乘法

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2 @ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_2 @ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 span($\boldsymbol{e}_2$) 的坐标，就是标量投影结果，即

$$\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \tag{12}$$

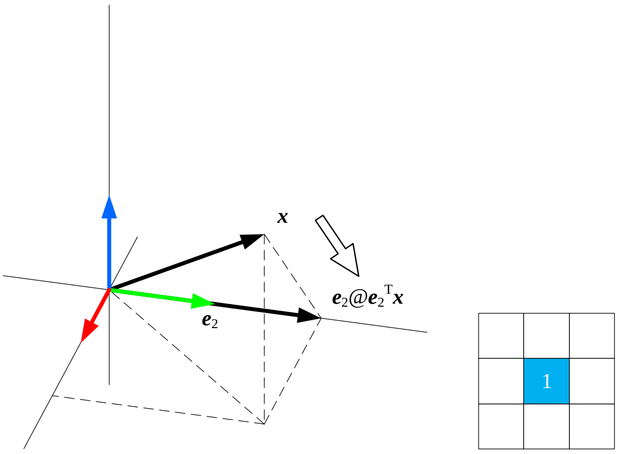

图 4. 三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{e}_2$ 方向正交投影

朝 $\boldsymbol{e}_3$ 方向正交投影

三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 朝 $\boldsymbol{e}_3$ 方向投影，对应的投影矩阵 $\boldsymbol{P}_3$ 为

$$\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{e}_3 @ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

如图 5 所示，投影结果对应如下矩阵乘法

$$\boldsymbol{P}_3 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_3 @ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_3 @ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 span($\boldsymbol{e}_3$) 的坐标，就是标量投影结果，即

$$\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \tag{15}$$

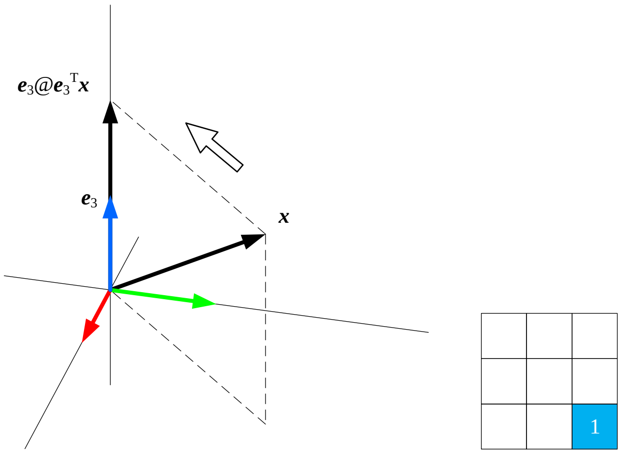

图 5. 三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{e}_3$ 方向正交投影

向量合成

$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{x}$ 均含有 $\boldsymbol{x}$ 的部分信息。但是，如图 6 所示，把三个正交投影分量叠加

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3\right)\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{e}_1@\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_2@\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_3@\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{I}@\boldsymbol{x} \tag{16}$$

我们便在 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 中还原 $\boldsymbol{x}$ 所有信息！

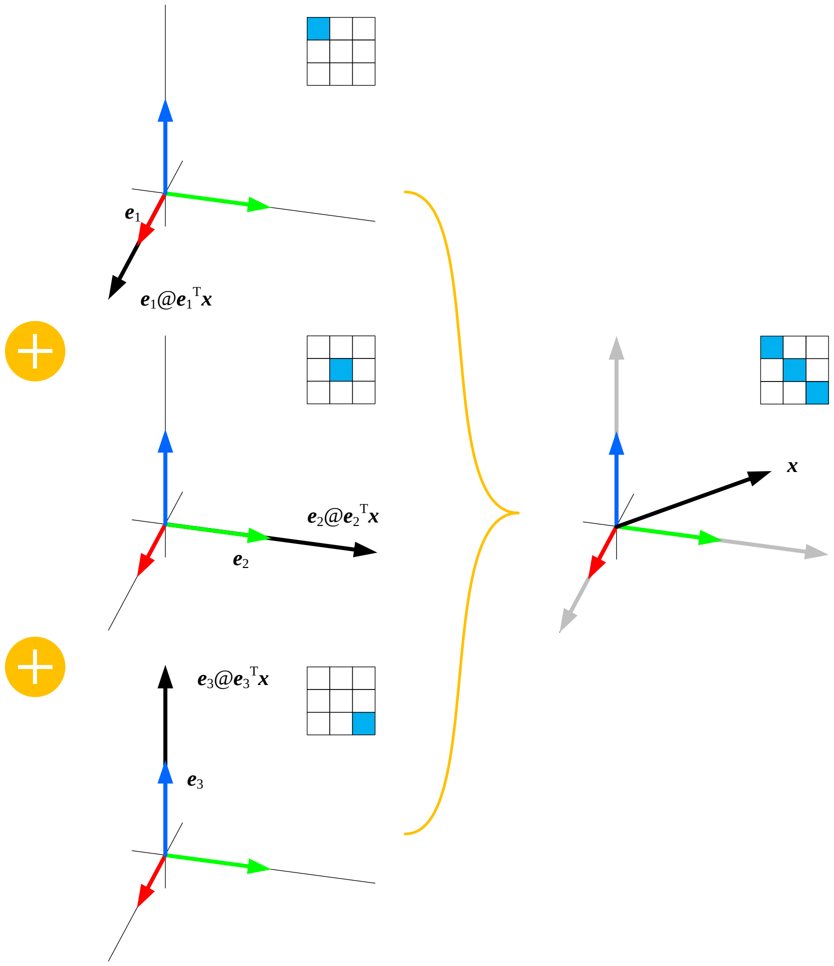

图 6. $[e_1, e_2, e_3]$ 中还原三维列向量 x

正交补

(3) 可以整理得到三个有趣的等式

$$\begin{aligned} I - e_1 @ e_1^T &= e_2 @ e_2^T + e_3 @ e_3^T \\ I - e_2 @ e_2^T &= e_1 @ e_1^T + e_3 @ e_3^T \\ I - e_3 @ e_3^T &= e_1 @ e_1^T + e_2 @ e_2^T \end{aligned} \tag{17}$$

这三个矩阵又代表什么呢？大家是否想到了用法向量的正交矩阵。

举个例子，如下等式

$$\left(I - e_1 @ e_1^T\right) x = \left(e_2 @ e_2^T + e_3 @ e_3^T\right) x = \left(e_2 @ e_2^T\right) x + \left(e_3 @ e_3^T\right) x \tag{18}$$

左侧代表向 x_2x_3 平面正交投影。

x_2x_3 平面的法向量为 e_1，向这个平面投影对应的投影矩阵为 $I - e_1 @ e_1^T$。具体如图 7 所示。

等式右侧代表分别向 x_2 轴、x_3 轴投影，再叠加。值得注意的是，span(e_1)、span(e_2, e_3) 互为正交补。

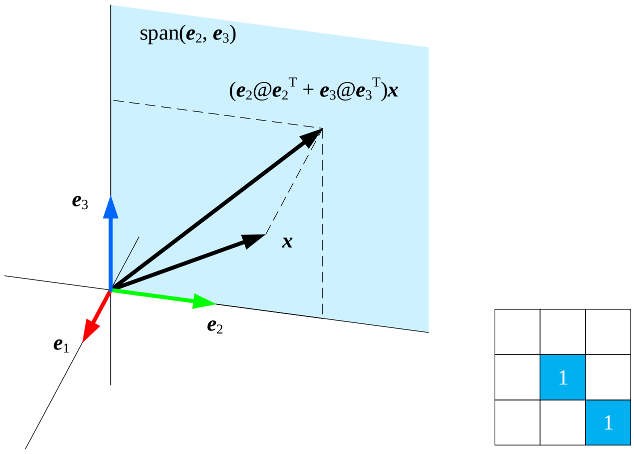

图 7. 三维列向量朝 x_2x_3 平面投影

再看一个例子，请大家看下式

$$\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_2@\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{e}_1@\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_3@\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{e}_1@\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}+\left(\boldsymbol{e}_3@\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x} \tag{19}$$

左侧代表向 x_1x_3 平面正交投影，$\boldsymbol{e}_2$ 是 x_1x_3 平面的法向量。图 8 所示为三维列向量朝 x_1x_3 平面投影。

等式右侧代表分别向 x_1 轴、x_3 轴投影，再叠加。

也就是说，span($\boldsymbol{e}_2$)、span($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$)互为正交补。向两个空间的正交投影得到的都是部分信息；两者拼凑得到全部信息。

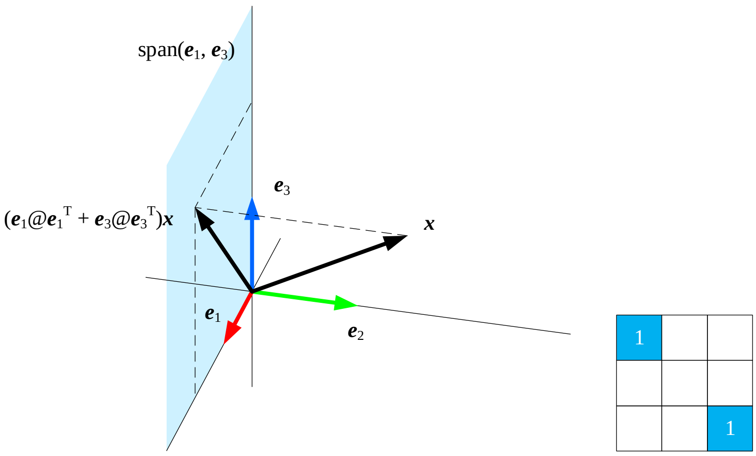

图 8. 三维列向量朝 x_1x_3 平面投影

请大家自行分析如下等式和图 9

$$\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_3@\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{e}_1@\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_2@\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{e}_1@\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}+\left(\boldsymbol{e}_2@\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x} \tag{20}$$

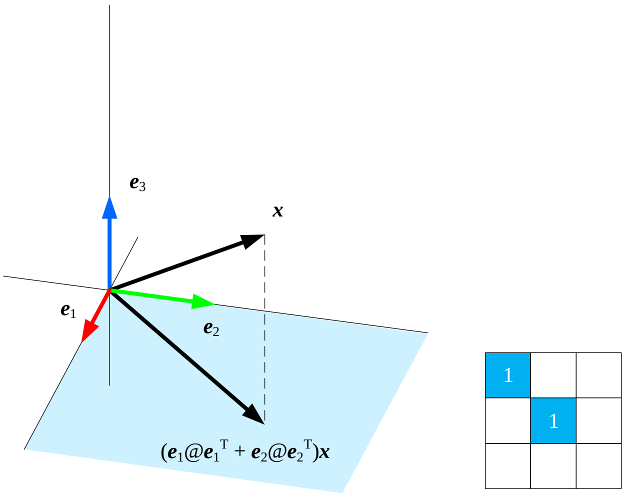

图 9. 三维列向量朝 x_1x_2 平面投影

3 × 3 旋转矩阵

给定如下三维 (绕原点) 旋转矩阵 $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1} & \underbrace{\begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_3} \end{bmatrix} \tag{21}$$

矩阵 $\boldsymbol{V}$ 也是正交矩阵，满足

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I} \tag{22}$$

先看格拉姆矩阵 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$，把 $\boldsymbol{V}$ 写成 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$，用矩阵乘法第一视角展开

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}@\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}@\boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}@\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}@\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}@\boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}@\boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}@\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}@\boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}@\boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_{3\times 3} \tag{23}$$

$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$ 的主对角线元素为 $\boldsymbol{V}$ 的列向量和自身的内积，L^2 范数平方；$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$ 非主对角线元素为 $\boldsymbol{V}$ 的列向量的成对内积，均为 0，这是因为 $\boldsymbol{V}$ 的列向量两两正交。

合成单位矩阵

再看 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$，用矩阵乘法第二视角展开

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_1@\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{v}_2@\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{v}_3@\boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_{3\times 3} \tag{24}$$

我们看到的是三个正交投影矩阵的叠加，结果是单位矩阵。

朝 v_1 方向正交投影

三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 朝方向向量 (单位向量) $\boldsymbol{v}_1$ 方向投影，对应的投影矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 为

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 16/25 & 12/25 & 0 \\ 12/25 & 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

上述投影矩阵是秩一矩阵，也是对称矩阵。

投影结果对应如下矩阵乘法

$$\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 16/25 & 12/25 & 0 \\ 12/25 & 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16x_1/25 + 12x_2/25 \\ 12x_1/25 + 9x_2/25 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 span($\boldsymbol{v}_1$) 的坐标，即标量投影为

$$\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4x_1/5 + 3x_2/5 \tag{27}$$

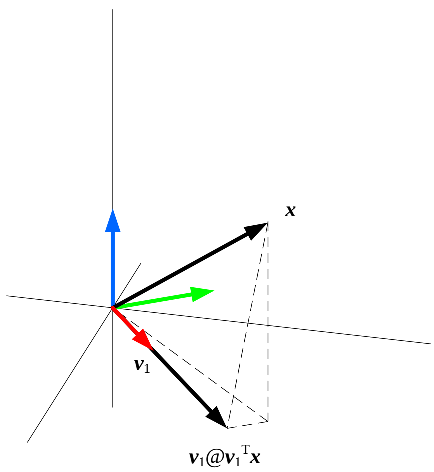

图 10. 三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{v}_1$ 方向正交投影

朝 v_2 方向正交投影

三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 朝方向向量 (单位向量) $\boldsymbol{v}_2$ 方向投影，对应的投影矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 为

$$\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 9/25 & -12/25 & 0 \\ -12/25 & 16/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

投影结果对应如下矩阵乘法

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9/25 & -12/25 & 0 \\ -12/25 & 16/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1/25 - 12x_2/25 \\ -12x_1/25 + 16x_2/25 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 span($\boldsymbol{v}_2$) 的坐标，就是标量投影结果，即

$$\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -3x_1/5 + 4x_2/5 \tag{30}$$

朝 $\boldsymbol{v}_3$ 方向正交投影

三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 朝方向向量 (单位向量) $\boldsymbol{v}_3$ 方向投影，对应的投影矩阵 $\boldsymbol{P}_3$ 为

$$\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{v}_3 @ \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

投影结果对应如下矩阵乘法

$$\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_3 @ \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_3 @ \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{32}$$

列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 span($\boldsymbol{v}_3$) 的坐标，就是标量投影结果，即

$$\boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \tag{33}$$

向量合成

把 (26)、(29)、(32) 叠加还原 $\boldsymbol{x}$ 所有信息

$$\left(\boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{v}_3 @ \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 16x_1/25 + 12x_2/25 \\ 12x_1/25 + 9x_2/25 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9x_1/25 - 12x_2/25 \\ -12x_1/25 + 16x_2/25 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{34}$$

正交补

(3) 也可以整理得到三个有趣的等式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{v}_3 @ \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{I} - \boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{v}_3 @ \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{I} - \boldsymbol{v}_3 @ \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{35}$$

先看第一个等式，

$$\left(I - v_1 @ v_1^{\mathrm{T}}\right) x = \left(v_2 @ v_2^{\mathrm{T}}\right) x + \left(v_3 @ v_3^{\mathrm{T}}\right) x \tag{36}$$

左侧代表向 span(v_2, v_3) 平面正交投影，这个平面的法向量为 v_1。

等式右侧代表分别向 span(v_2)、span(v_3) 轴投影，再叠加。span(v_1)、span(v_2, v_3)互为正交补。

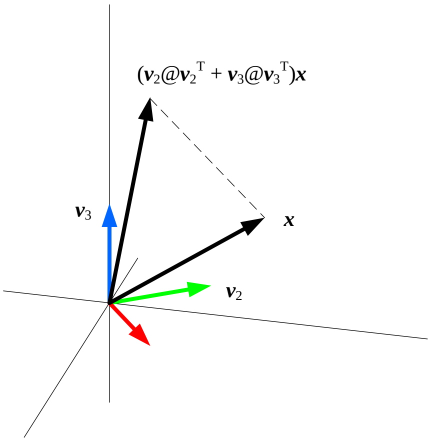

图 11. 三维列向量 x 朝 span(v_2, v_3) 投影

再看第二个等式

$$\left(I - v_2 @ v_2^{\mathrm{T}}\right) x = \left(v_1 @ v_1^{\mathrm{T}}\right) x + \left(v_3 @ v_3^{\mathrm{T}}\right) x \tag{37}$$

等式 (37) 左侧代表向 span(v_1, v_3) 正交投影，这个平面的法向量为 v_2。

等式 (37) 右侧代表分别向 span(v_1)、span(v_3) 轴投影，再叠加。span(v_2)、span(v_1, v_3)互为正交补。

最后看第三个等式

$$\left(I - v_3 @ v_3^{\mathrm{T}}\right) x = \left(v_1 @ v_1^{\mathrm{T}}\right) x + \left(v_2 @ v_2^{\mathrm{T}}\right) x \tag{38}$$

请大家自定分析等式 (38) 和图 12。

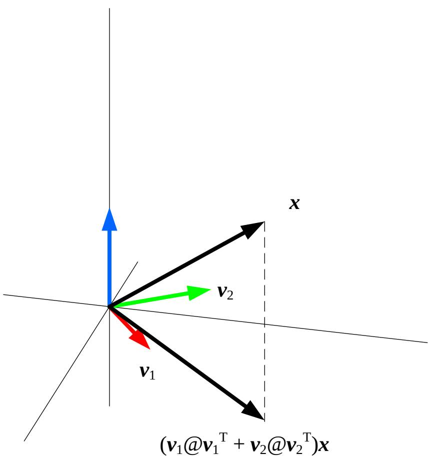

图 12. 三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 朝 span($\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$) 投影

Q1. 请判断哪些矩阵为正交矩阵。

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Q2. 几何角度来看，**Q1** 中的正交矩阵对应怎样的几何变换？