Preface

前言

笔者不才,在"数学不难"系列之前还著有"机器学习"系列,两个系列同属"鸢尾花书"学习框架。

"机器学习"系列全套 7 本,致力于提供面向"准人工智能时代"的有趣、有料、有益的"数学 + 编程 + 可视化 + 机器学习"的学习生态。这套书全系已经出版,收获到了广大读者的肯定,这反而让笔者战战 栗栗、如履薄冰。

为什么创作"数学不难"系列?

既然有了"机器学习"系列,为什么还要另开炉灶?

简单来说,五年前,从开始在 GitHub 开源"机器学习系列"的第一本书稿,虽然笔者已经尽量拉低视角,但仍然有很多"零基础"读者陆续反馈"机器学习"系列的数学部分"太难" (当然也有高手反馈太简单)。此外,很多读者反馈"机器学习"系列 7 本书体系庞大,从数学到机器学习,最容易遇到的障碍就是数学基础概念部分。

而"数学不难"就是关注零基础读者学习感受的新作品。"数学不难"每个分册尽量把基础概念掰开揉碎,讲得清清楚楚,全力提高可学性。

"数学不难"不仅是"机器学习"系列的数学基础学习伙伴,更是帮助不同阶段学习者夯实数学基础的 刚需使命:

- ▶ 适用于中学生夯实信息学竞赛的数学基础。
- ▶ "数学 + 编程 + 可视化"帮助本科生领会数学之美,同时学以致用。
- ▶ 毕业后回炉再造,串联知识网络,加深理解,构建更扎实的数学思维。
- ▶ 为考研数学备考提供清晰的思路,更轻松地掌握数学工具,减轻学习负担。
- 帮助编程学习者、程序员理解编程背后的数学原理。
- ▶ 零基础学数学、入门编程的好帮手、让文科生也能一网打尽核心知识、减小焦虑、跨界无忧。

AIGC 全程伴读

AI 的高速发展,已经让大语言模型 (DeepSeek、ChatGPT等) 成为学习的良师益友。大语言模型作为工具,正在以前所未有的速度渗透到各个领域,从文本生成、代码编写到科学研究和金融分析,它的触角几乎无处不在。教育方面,大语言模型可以组织知识,构建个性化学习路径,还可以提供实时解答、可视化复杂概念,并增强学习的互动性。

AI 伴读已经是教育的趋势,有着巨大的现实意义。

"数学不难"也尝试让大语言模型成为教学的生态的一部分,并试图引导读者将 AI 伴读这种学习方式深入到读者未来的学习模式中。

"数学不难"系列不同于"机器学习"系列

"机器学习"系列把"编程 + 可视化 + 数学 + 机器学习"这几个关键元素融会贯通,其学习终点是机器学习;而"数学不难"则强调数学概念的透彻理解,并作为工具应用起来,其学习起点和重点都是数学。

"机器学习"系列是 7 本一套的宏大机器学习体系;"数学不难"则聚焦数学板块(线性代数、高等数学、概率统计)为单位,"轻巧并专注"。

在数学难度上,"数学不难"更适合零基础读者,更简单,更基础;但是,"数学不难"在基础数学知识网络上更全面。

"机器学习"系列特别强调"可视化编程"中的"编程能力"; "数学不难"中的"编程 + 可视化"仅仅是拆解并实施数学概念的手段,而不是目的。

"数学不难"相对"机器学习"系列,即便是相同的知识点,因为需要解决的问题不一样,所以内容也全部重写,绝大部分图片重新创作,可视化方案更为简洁。

学过"机器学习"系列的读者,如果感觉毫无障碍,则无需阅读"数学不难";如果感觉层峦叠嶂,可以通过"数学不难"扫清障碍后反身再学习"机器学习"系列,相信一定豁然开朗。

先学"数学不难"打好基础的读者,如果有需要,可以进一步学习"数学大系",迈向机器学习算法、应用——这才是数学 + 编程所产生的生产力之所在。

AI 时代,数学不是没用而是变得更重要了

AI 工具的盛行,让很多工作变得简单高效。我们需要思考一个问题:如果 AI 能干这么多事情,未来我们的职业竞争力来自哪里?

一个现实场景:一家企业优化了 60%的程序员,留下的主要是架构师和算法工程师。过去,他们带领团队协作完成开发工作,而现在,他们与 AI 并肩协作,高效完成任务。

数学,是理解世界的基础,是解决问题的重要工具,是驱动类似 DeepSeek、ChatGPT 等炙手可热的大语言模型运行的底层逻辑。面对日益智能的大语言模型,我们不仅要学会使用它们,更要具备足够的数学素养,以理解其原理、识别其局限,避免被'忽悠'或误导。

有了 DeepSeek、ChatGPT, 也不需要大家死记硬背定理公式!

理解,而不是死记硬背。只有掌握扎实的数学基础,我们才能与这些智能工具'平等'对话,充分发挥其潜力,提高工作、学习效率。在这个智能化时代,数学不再只是学科知识,而是每个人都应具备的核心竞争力。

把"为数学而数学"留给"天才";让"普通人"平等地、高效地理解、使用数学工具箱中常用工具,是"数学不难"的追求。

对于"普通人",不管是理工科,还是文科,学好线性代数(外加矩阵论的一部分知识)、高等数学(单变量、多变量微积分,外加优化方法)、概率统计(一元、多元),应付大部分的数学应用场景就足够了。

总而言之,基础数学知识"理解力"是决定职业天花板高度的决定性指标之一。

编程不是目的,编程是工具,是手段

在人工智能快速发展的今天,编程早已不仅仅是程序员的技能,而成为每个人都应掌握的"第二语言"。和掌握一门外语一样,编程已经成为"必修课"!就像英语曾是全球化时代的通行证一样,编程正在成为数据时代的重要工具。

在"数学不难"中,学习编程的目的,并不是让所有人都成为"码农",而是为了更高效地解决实际问题,让数学、科学、工程、金融等领域的理论真正落地,转化为可执行的方案。即便使用 DeepSeek、ChatGPT 等等工具来生成代码,你仍然需要清楚地提出需求,理解代码的功能,知道如何修改和优化,并掌握部署方法。

AI 工具的确提高了编程效率,但也对编程能力提出了更高的要求,要求使用者具备逻辑思维、问题分析和代码调试的能力。

"数学不难"也试图帮助大家入门、提升编程能力,解决具体问题。

解决方案: 编程 + 数学

笔者认为,边学数学,边用 Python 编程计算验证,是"普通人"学习数学、学习编程的高效方案。

编程让数学工具落地,缩短理论到实践的距离;数学赋予编程逻辑与深度,拓展技术的边界。

数学提供了严谨的逻辑思维和强大的计算能力,而 Python 等编程语言则让这些数学工具得以快速实现。

特别是在自学过程中,"**边学数学,边用 Python 计算**"是一种高效的方法,它不仅帮助大家加深对数学概念的理解,还能培养实践能力,让知识不再停留在纸面上,而是成为可以被验证、应用的工具。

最优解:编程+数学+可视化

可视化是鸢尾花书"机器学习"系列的利器!可视化当然也是"数学不难"的看家法宝!

数学不仅仅是一系列符号和公式、更是对世界规律的抽象表达。

真实物质世界是几何世界。人类是视觉学习者,复杂概念应该通过可视化呈现,使学习过程更直观、易懂。笔者认为,最好的学习方式,莫过于将抽象的数学概念可视化,让每个公式都能在脑海中形成直观的几何画面。

"数学不难"给每一个话题,配备大量优质平面可视化方案,以及可视化视频。"数学 + 编程 + 可视化"这种学习方式不仅能大幅降低理解难度,更能让知识在大脑中留下深刻的印象,真正做到"过目不忘"。

相比于死记硬背,数学可视化让我们从直觉上掌握核心概念,从而更轻松地运用数学工具解决实际问题。掌握这种学习方法,就意味着你不仅在学数学,更是在训练思维,让每个公式都成为解决问题的有力武器。

⚠ 注意,并不是所有读者都需要掌握复杂的可视化编程,因此,"数学不难"虽然提供大量的可视化方案,但是编程部分强调"计算",而不是画图。有"可视化编程"需求的读者可以参考"机器学习"系列。

感谢

特别感谢同学们、读者朋友们的信任!"机器学习"系列开源、出版得到了还能多同学的大力支持。 很多同学留言、邮件告诉笔者,他们把"机器学习"系列从头到尾翻了很多遍,配套代码也都跑了不止一

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466

欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

遍,而且收获满满。很多同学还提出批评意见。在笔者眼里,这些互动比任何"奖项"都更加珍贵。它们不仅证明了这套书的价值,更是推动笔者不断更新内容、优化可视化方案、打磨细节的最大动力。

特别感谢清华大学出版社的栾大成老师一路陪伴。毫不夸张地说,没有栾大成老师,就没有鸢尾花书"机器学习"系列,也不会有"数学不难"!这几年,笔者几乎每天都要和栾大成老师"聊上几句",聊天话题不限于创意、结构、内容、排版、校对、印刷、图书周边、生活工作琐碎……

"数学不难"创作团队又增加了一位新伙伴——崔影 (崔崔)! 崔崔拥有哈工大、加拿大 McMaster 大学 双硕士学位,是我多年的好友,和我一样特别热爱数学可视化。从编程、调试、敲定素材,到剪片、后 期处理,"数学不难"配套的视频都是崔崔担纲完成整个制作流程。

Acknowledgement

致谢

To my parents.

谨以此书献给我的母亲父亲

How to Use the Book

使用本书

"数学不难"有哪些创作特点?

读者看不懂,是作者的问题。全媒体直接连线作者:请大家告诉我哪里看不懂,我来改!

不预设门槛, **不做筛选**。特别**关注零基础读者的学习体验**, 假设读者什么都不知道。

以提高兴趣,满足好奇心,产生内驱力,为目标。

学以致用,以用为主,用数学工具解决具体问题。

铺垫式、启发式学习法。把知识连成网络,在不同位置以不同角度、强化同一概念的理解。

不贪多,不求全,讲透知识才周全。

创新,创造,观念引导,而**不死记硬背,不刷题,不拼解题技巧**。把死记硬背留给语言模型。

赏心悦目,**数学一定要美**。践行"数学 + 艺术",用《可视之美》的图像水准挖掘"简单"数学概念背后的几何直觉。

"数学不难"提供**更丰富、更精彩**的可视化方案,放飞你的想象力。用图像解释每一个公式、每一个 定理,图像细节丰满,但每个细节都服务于知识点,确保过目不忘。

把数学打扮成人见人爱的样子, 公式尽量少, 讲解口语化。

"数学不难"每节提供习题,提供一个**可扩展的学习框架**。提供更高效、不容易忘记的学习路径。**结合大语言模型** (DeepSeek, ChatGPT等) **的学习体验**。有引导的自主学习,习题中用 DeepSeek\ChatGPT学习拓展知识点。

免费开源!保持"机器学习"系列的优良传统。PDF 书稿,Python 代码,视频,全部免费开源。

▲ 特别声明:虽然"数学不难"覆盖且不限于大学本科数学绝大部分知识点,但并不试图取代传统数学教学模式,仅仅作为一个补充,提供另一条学习路径,短期内也没有教学课件的制作计划。"数学不难"也会推介进阶经典教材,向这些图书致敬。

"数学不难"适合哪些读者?

写给觉得抽象数学符号很枯燥, 但是**对几何图形敏感的人**。

觉得数学"好玩儿",数学"很美"的读者。

想**开窍**,提高**好奇心**,提升**求知欲**,提升**空间想象力**。

不仅仅满足于"题海战术、解题技巧"的读者。

再捡起来数学。如果你放弃数学,或被告知放弃数学,不妨试试"数学不难"!

数学底子好的读者,可以关注"数学不难"的美学体验。

想把"数学+编程+可视化"三者结合起来的读者。

想知道数学有什么用、数学怎么用的读者。

学编程, 但又**漫无目的**的读者。

配套资源

"数学不难"提供的配套资源有以下几个:

- ◀ 纸质图书;
- ▼ PDF 稿件,方便移动终端学习;请大家注意,纸质图书经过出版社五审五校修改,内容细节上会和 PDF 文件有出入。
- Python 代码文件 (Jupyter Notebooks);
- ◀ 有趣有料短视频,提升空间想象力、几何直觉。

本系列丛书的 PDF 书稿、Python 代码文件下载地址为:

→ https://github.com/Visualize-ML

Python 代码文件会不定期修改,请大家注意更新。图书配套的 PDF 书稿也上传到这个 GitHub 账户。因此,建议大家注册 GitHub 账户,给书稿文件夹标星 (star) 或分支克隆 (fork)。

想专门学习 **Python 编程**的读者,建议在 DeepSeek/ChatGPT 等工具帮助下,学习《编程不难》。 书稿、配套 Python 代码下载地址为

▲ https://github.com/Visualize-ML/Book1 Python-For-Beginners

想提升**可视化编程**的读者,建议在 DeepSeek/ChatGPT 等工具帮助下,学习《可视之美》。书稿、配套 Python 代码下载地址为

■ https://github.com/Visualize-ML/Book2 Beauty-of-Data-Visualization

想学**机器学习**算法的读者,建议在 DeepSeek/ChatGPT 等工具帮助下,学习《数据有道》、《机器学习》。书稿、配套 Python 代码下载地址为

- ◆ https://github.com/Visualize-ML/Book6_First-Course-in-Data-Science
- https://github.com/Visualize-ML/Book7_Visualizations-for-Machine-Learning

想巩固**机器学习的数学基础**,建议在 DeepSeek/ChatGPT 等工具帮助下,学习《数学要素》、《矩阵力量》、《统计至简》。书稿、配套 Python 代码下载地址为

- https://github.com/Visualize-ML/Book3_Elements-of-Mathematics
- ◆ https://github.com/Visualize-ML/Book4 Power-of-Matrix
- https://github.com/Visualize-ML/Book5 Essentials-of-Probability-and-Statistics

实践平台

本书作者编写代码时采用的 IDE (integrated development environment) 是 Spyder,目的是给大家提供 简洁的 Python 代码文件。

但是,建议大家采用 JupyterLab 或 Jupyter notebook 作为本系列丛书配套学习工具。

简单来说,Jupyter 集合"浏览器 + 编程 + 文档 + 绘图 + 多媒体 + 发布"众多功能与一身,非常适合探 究式学习。

运行 Jupyter 无需 IDE,只需要浏览器。Jupyter 容易分块执行代码。Jupyter 支持 inline 打印结果,直 接将结果图片打印在分块代码下方。Jupyter 还支持很多其他语言,比如 R 和 Julia。

使用 markdown 文档编辑功能,可以编程同时写笔记,不需要额外创建文档。Jupyter 中插入图片和 视频链接都很方便。此外,还可以插入 Latex 公式。对于长文档,可以用边栏目录查找特定内容。

Jupyter 发布功能很友好,方便打印成 HTML、PDF 等格式文件。

大家可以下载安装 Anaconda,JupyterLab、Spyder、PyCharm 等常用工具都集成在 Anaconda 中。下 载 Anaconda 的地址为:

◆ https://www.anaconda.com/

有关安装 Anaconda、使用 JupyterLab,请大家参考《编程不难》前三章,下载地址为

■ https://github.com/Visualize-ML/Book1_Python-For-Beginners

意见建议

欢迎大家对本系列丛书提意见和建议,丛书专属邮箱地址为:

◀ jiang.visualize.ml@gmail.com

一直以来,"鸢尾花书"都延续着一个传统:对于提出了关键意见和宝贵建议的读者,我们会准备一 些周边小礼物(鸢尾花伞、登顶包、单肩背...),聊表心意。

Contents





聊聊线性代数和《线性代数不难》

简单来说,线性代数是研究向量、矩阵及其线性变换关系的数学分支。

线性代数是现代科学和工程的数学语言。线性代数不仅是从单变量微积分过渡到多变量微积分的桥 梁,更是从一元概率统计走向多元统计分析的核心工具。在机器学习、计算机视觉、自然语言处理、机 器人控制、图像处理、量化金融、数据分析等前沿领域,线性代数几乎无处不在。

线性代数是一门本科阶段普遍开设的基础课程。笔者认为,大学本科教育的核心使命是培养专业人 才, 而不是"筛选"或"淘汰"学生; 因此, 高中时期那种以"死记硬背""刷题""分数"为导向的教学模式, 已 不再适用于高等教育。

因此,线性代数的教学不应成为一道人为设置的门槛,而应当成为帮助学生建立现代科学思维的重 要起点。每一位大学毕业生,都应该能将线性代数作为工具箱中游刃有余、得心应手的数学工具,在未 来的学习、科研与工作中自如运用。

这也对教师教学、课程设计、教材编排提出了更高要求。线性代数的教学不应仅停留在符号堆砌和 公式推导,更应结合图形直观、实际应用与编程计算工具,帮助学生理解向量空间、线性变换、矩阵运 算背后的几何与结构。现代教学可以充分利用可视化、编程实践、建模案例,让学生"看见数学之美"、 "活学活用数学",从而激发他们的学习兴趣与应用能力。

笔者认为现在的线性代数教学确实存在一些问题, 具体来说。

- ▶ 忽视几何直觉。很少用二维/三维图像展示抽象概念,导致学生"看不懂也想不到"。比如,很多教材开 篇就引入行列式,几乎不解释其几何直观含义。
- ▶ 重计算、轻理解。练习题偏向套路、技巧、难题怪题,忽视几何本质理解和建模能力的培养。很多教 材"定义-定理-例题"模式过于机械,只关注"答题",不关注"学懂"、"会用"。
- ▶ 不注重理论联系实际。缺乏和实际问题、真实世界或其他学科的联系。多数教材极少提及线性代数在 现实中的应用案例,比如数据分析、图像处理、机器学习、图论与网络等等。
- ▶ 教学脱离现代工具。需要结合 Python 编程、可视化、动画来教学。大部分教材满纸公式,不主动结 合图形、Python 编程、可视化工具来加深理解,构建应用场景。

《线性代数不难》试图解决这些问题。

▶ 系统性引入几何直觉。用大量图形、动画展示诸如向量、矩阵、矩阵乘法、线性变换、行列式、逆矩 阵、线性方程、特征值分解、奇异值分解等等概念背后的几何直觉,甚至试图让读者领略"数学之 美"!

- ▶ 将重点从"解题"转向理解和应用。通过引入实际应用,比如主成分分析、图像压缩、最小二乘拟合等 等,让读者真正看到数学工具的实际用途,真正做到"学有所用"。
- ▶ 合理设计知识结构。先从向量、矩阵入手,配齐矩阵乘法、行列式、逆矩阵、向量空间等核心工具之 后,再深入到线性方程组求解、线性变换、特征值分解、奇异值分解等高阶话题,其中穿插线性代 数工具的应用案例。
- ▶ 边学数学,边学编程,边学可视化。将 Python 编程、Jupyter Notebook、图形化交互工具、大语言模 型等融入教学, 让学生在"写代码"中学懂数学, 在"动手可视化"中建立模型思维。

() / 本书结构

《线性代数不难》分上下两册。上册的话题包括向量、矩阵、矩阵乘法、行列式、逆矩阵、向量空 间、线性方程组等相对比较基础的话题;下册则则会涉及高阶线性代数、矩阵论、数据分析机器学习话 题,比如线性变换、特征值分解、奇异值分解、主成分分析、最小二乘拟合、瑞利商、矩阵范数、判别 分析等等。

本书是《线性代数不难》的上册,一共有7章,下面简单介绍每章的核心内容。

向量

向量可以说是线性代数中最具几何直觉的概念,因此我们把向量相关话题放在了本书的第一章。这 一章先是从代数角度介绍了向量,特别引出了 RGB 颜色作为实例,这个例子将会贯穿本章始终。然 后,我们把向量放在坐标系中,开始建立向量的几何直觉。接着,介绍了向量的各种常见运算,比如加 减、标量乘法、单位化、内积、投影、范数等等。这些话题的引出都和几何图形紧密相连。

矩阵

行向量、列向量都是特殊的矩阵。自然而然地,第二章我们开始介绍矩阵。先是介绍了矩阵的常见 性质、形状、基本运算。请大家特别关注矩阵形状,因为很多线性代数运算都是以特殊矩阵形状为前提 条件。矩阵转置很简单,但是也是大家常常犯错的话题之一,因此本章特地拿出一节讲解矩阵转置。然 后,本章专门拿出三节初探矩阵乘法,我们首先关注的是矩阵乘法的规则,然后用四组例子解释矩阵乘 法中蕴含的几何变换;有了几何变换这个视角,再来学习矩阵乘法性质就变得特别容易。

矩阵乘法

在线性代数体系中,矩阵乘法扮演极其核心的角色。因此,我们专门拿出一章讲解矩阵乘法。这一 章关注矩阵乘法的不同视角,比如内积、外积、列向量线性组合、行向量线性组合。内积是理解矩阵乘 法规则的最朴素的视角。外积视角将会在后续的谱分解、奇异值分解、主成分分析等话题发挥重要作 用。列向量、行向量线性组合视角实际上在铺垫向量空间、线性方程组、线性变换等等话题。这一章最 后又从分块矩阵乘法角度对这章内容进行进一步"升华"。

行列式

和很多上来就讲行列式的教材不同,本册把行列式放在相对靠后的位置。本书把行列式看作是计算 逆矩阵、求解线性方程组等等应用中的一个工具。但是,在讲解行列式时,本书则关注行列式的几何直 觉。这一章的第一节先介绍了 2 × 2 方阵的行列式和平行四边形面积的关系;这一节我们将看到不同方 阵类型对应的平行四边形。第二节进一步"升维"介绍了 3 × 3 方阵的行列式和平行六面体的关系。有了这 些几何视角的铺垫,理解行列式性质就特别容易。这一章最后还介绍了用拉普拉斯展开求解行列式。

逆矩阵

几何视角让逆矩阵的理解变得特别直接!简单来说,逆矩阵就是完成几何操作的逆变换。矩阵乘法对应的几何操作存在逆操作,矩阵便可逆;否则,不可逆。这一章就是按照这个思路安排的。我们先用缩放、旋转、剪切等几何变换介绍了逆矩阵;然后,同样利用几何视角,我们探讨了逆矩阵性质。这章最后介绍了如何利用伴随矩阵法计算逆矩阵;同时,也回顾了拉普拉斯展开计算行列式。

向量空间

有了前文的向量、矩阵、矩阵乘法、行列式、逆矩阵等话题的铺垫,理解向量空间核心概念变得特别轻松。这一章还是用来 RGB 颜色空间色例子。注意,RGB 颜色空间显然不是向量空间,但是不妨碍我们用颜色丰富的 RGB 空间来讲解向量空间的各种概念。本章在介绍各种基底时,也是给大家展示了各种平行四边形网格,这是本书的"传统技能"了。

线性方程组

也和很多线性代数教材不一样,本书把线性方程组放在了最后。线性方程组被视作矩阵乘法、行列式、逆矩阵等线性代数概念的一个应用案例。本章还是用几何视角,先把二元一次方程看作是直线,探讨线性方程组解的特点。然后,再用矩阵乘法第三视角 (列向量线性组合) 进一步分析线性方程组。这一章最后介绍初等行变换求解线性方程组、逆矩阵,讲解过程也是糅合各种几何视角。

下面, 让我们正式开始《线性代数不难》之旅, 让线性代数变得真的不难!