作者	**生姜 DrGinger**
脚本	**生姜 DrGinger**
视频	**崔崔 CuiCui**
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

9 Projection 投影

把正交投影、正交矩阵付诸实践

这一章是上一章第 5 节——正交投影——的延续。而正交矩阵在正交投影中扮演重要角色。正交矩阵本身也是规范正交基。我们还会在回归、谱分解、奇异值分解、主成分分析等话题中看到正交矩阵。这一章将先从理解 2 × 2 和 3 × 3 正交矩阵的几何视角开始，然后介绍正交矩阵的各种性质，最后介绍正交投影在格拉姆-施密特正交化、QR 分解、回归应用场景，

9.1 2 × 2 正交矩阵

本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 单位矩阵、旋转矩阵、镜像矩阵、置换矩阵，以及它们的组合都是正交矩阵。
- ▶ 单位矩阵代表在标准正交基上的恒等变换。
- ▶ 用正交投影获得向量投影。
- ▶ 平面上，正交投影的向量之和，可以无损还原原始向量。
- ▶ 正交补空间包含了垂直于原空间的所有向量。

单位矩阵、旋转矩阵、镜像矩阵、置换矩阵，以及它们的复合矩阵，都是正交矩阵。正交矩阵广泛用于正交投影，我们会在各种常用几何分解中看到正交矩阵的应用场景。本节从单位矩阵、旋转矩阵两个实例入手，用平面几何视角理解 2 × 2 正交矩阵。

2 × 2 单位矩阵

让我们先看一个极其简单的矩阵乘法。

单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 乘列向量 $\boldsymbol{x}$ 的结果还是 $\boldsymbol{x}$，即

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{x} \tag{1}$$

这个“简单”的矩阵乘法背后却别有洞天！

从矩阵乘法第三视角——列向量线性组合——来看，(1) 可以写成

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=x_1\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_1}+x_2\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_2}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{2}$$

如图 1 所示，(x_1, x_2) 是向量 $\boldsymbol{x}$ 在标准正交基 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 下的坐标。

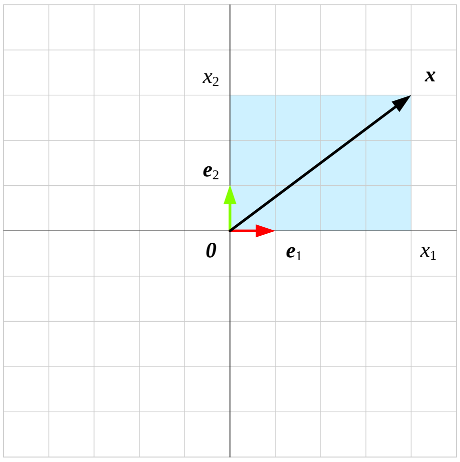

图 1. $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 线性组合张成的平面

再换个角度，在满足形状匹配前提下，矩阵乘法满足分配律，即

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\end{aligned} \tag{3}$$

根据 (3) 第一个等式，(1) 可以写成

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{4}$$

根据矩阵乘法分配律展开

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{5}$$

如图 2 所示，我们发现这是 $\boldsymbol{x}$ 在 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 标准正交基中的正交投影。

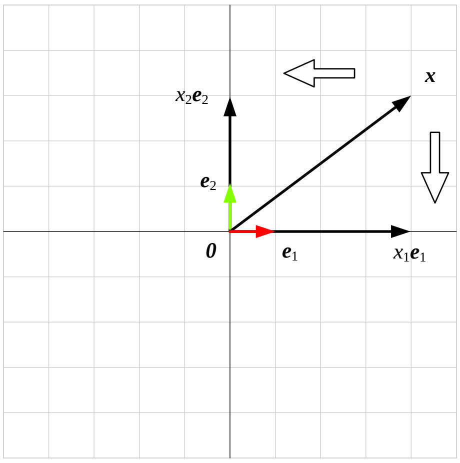

图 2. 向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 标准正交基中的正交投影

朝 $\boldsymbol{e}_1$ 方向正交投影

(5) 怎么和上一章第 5 节介绍的正交投影联系起来呢？

列向量 $\boldsymbol{x}$ 朝方向向量 (单位向量) $\boldsymbol{e}_1$ 方向投影，对应的投影矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 为

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{e}_1 @ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

如图 3 所示，投影结果对应如下矩阵乘法

$$\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_1 @ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

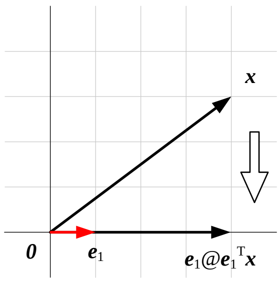

图 3. 二维列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向正交投影

朝 $\boldsymbol{e}_2$ 方向正交投影

列向量 $\boldsymbol{x}$ 朝方向向量 (单位向量) $\boldsymbol{e}_2$ 方向投影，对应的投影矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 为

$$\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{e}_2 @ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

如图 4 所示，投影结果对应如下矩阵乘法

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_2 @ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

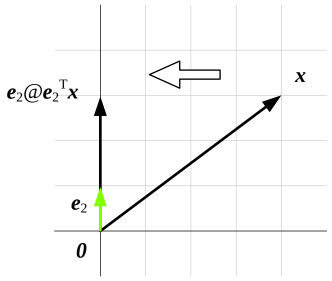

图 4. 二维列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{e}_2$ 方向正交投影

向量合成

(7) 和 (9) 正交投影是都是信息降维；而 (7) 和 (9) 结合却正好拼凑还原原始信息，即

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2\right)\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{e}_1 @ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{e}_2 @ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{I} @ \boldsymbol{x} \tag{10}$$

如图 5 所示，我们还原了 (1)!

在 [$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$] 中，$\boldsymbol{x}$ 完成向量正交分解；反向来看，向量加法相当于合成还原 $\boldsymbol{x}$。

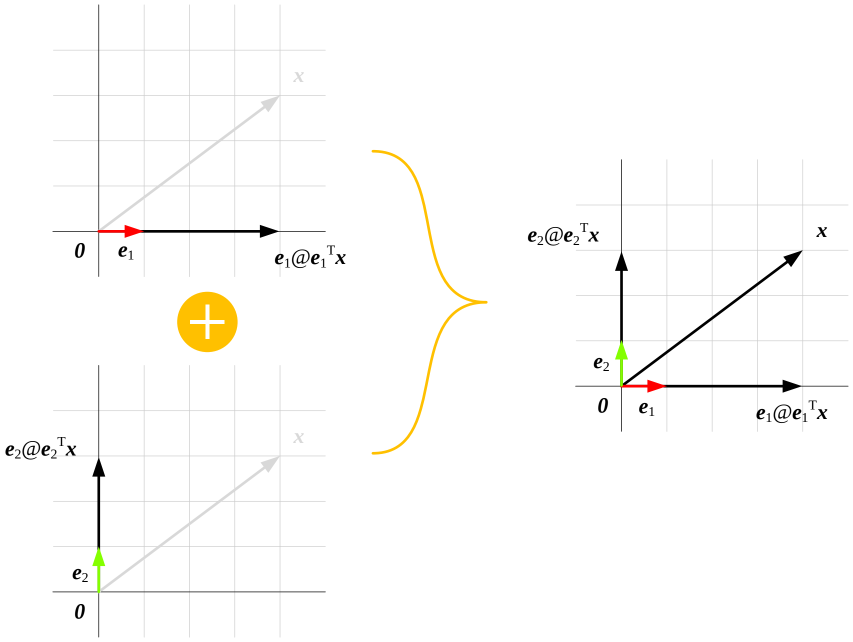

图 5. 还原二维列向量 $\boldsymbol{x}$

合成单位矩阵

在 (10) 中我们还发现了一个等式

$$e_1 @ e_1^{\mathrm{T}} + e_2 @ e_2^{\mathrm{T}} = I \tag{11}$$

这个等式又是怎么来的呢？

让我们看一个更加“奇怪”的矩阵乘法

$$I @ I^{\mathrm{T}} = I_{2\times 2} \tag{12}$$

把单位向量写成行向量形式，即 $[e_1, e_2]$，上式展开得到

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} e_1^{\mathrm{T}} \\ e_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = e_1 @ e_1^{\mathrm{T}} + e_2 @ e_2^{\mathrm{T}} = I \tag{13}$$

这实际上用到的是矩阵乘法第二视角——外积视角。

如图 6 所示，我们实际上还原了单位矩阵。

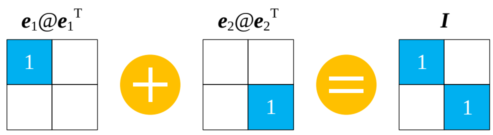

图 6. 还原单位矩阵

再看一个同样“奇怪”的矩阵乘法

$$I^{\mathrm{T}} @ I = I_{2\times 2} \tag{14}$$

把单位向量写成行向量形式，即 $[e_1, e_2]$，上式展开

$$\begin{bmatrix} e_1^{\mathrm{T}} \\ e_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^{\mathrm{T}} @ e_1 & e_1^{\mathrm{T}} @ e_2 \\ e_2^{\mathrm{T}} @ e_1 & e_2^{\mathrm{T}} @ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|e_1\|_2^2 & 0 \\ 0 & \|e_2\|_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \tag{15}$$

上式用到的是矩阵乘法第一视角——内积视角。

(14) 就是单位矩阵 I 的格拉姆矩阵。主对角线元素是 e_1、e_2 向量与自身的内积，即 L^2 范数的平方；非主对角线元素是两两向量内积。

至此，我们看到了标准正交基的“魅力”！同时，我们也看到了格拉姆矩阵的广泛用途。

标准正交基基底向量都是单位向量，且两两正交；更重要的是，它们构成的网格是最自然的单位正方形网格。

整合 (12)、(14) 得到

$$I_{2\times 2} @ I_{2\times 2}^{\mathrm{T}} = I_{2\times 2}^{\mathrm{T}} @ I_{2\times 2} = I_{2\times 2} \tag{16}$$

这告诉我们单位矩阵也是正交矩阵！

(11) 还可以写成

$$\begin{aligned} e_1 @ e_1^{\mathrm{T}} &= I - e_2 @ e_2^{\mathrm{T}} \\ e_2 @ e_2^{\mathrm{T}} &= I - e_1 @ e_1^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{17}$$

这是否让大家想起正交投影中用法向量定义正交投影矩阵？

上式告诉我们平面上横轴 $x_2 = 1$ 对应的法向量为 $\boldsymbol{e}_2$，而纵轴 $x_1 = 1$ 对应的法向量为 $\boldsymbol{e}_1$。

这一点在平面上还不是很容易看清楚，下一节会在 3×3 单位矩阵上看得更清楚。

此外，如图 7 所示，$\text{span}(\boldsymbol{e}_1)$、$\text{span}(\boldsymbol{e}_2)$ 互为正交补。简单来说，正交补空间包含了垂直于原空间的所有向量。

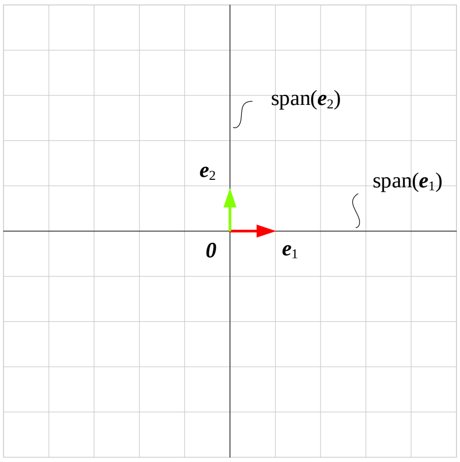

图 7. $\text{span}(\boldsymbol{e}_1)$、$\text{span}(\boldsymbol{e}_2)$ 互为正交补

2 × 2 旋转矩阵

本身前文提过旋转矩阵也是正交矩阵。让我们先看看 2×2 旋转矩阵 $\boldsymbol{V}$，具体实例为

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1} & \underbrace{\begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2} \end{bmatrix} \tag{18}$$

如图 8 所示，向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ 这个规范正交基也有自己的坐标。

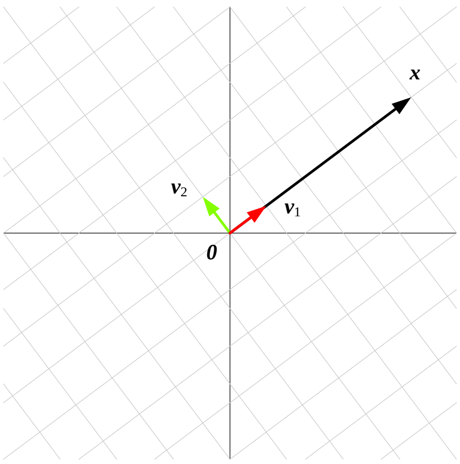

图 8. [$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$] 线性组合张成平面

合成单位矩阵

由于 $\boldsymbol{V}$ 为正交矩阵，其满足

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \tag{19}$$

先看格拉姆矩阵 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}$，把 $\boldsymbol{V}$ 写成 [$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$]，用矩阵乘法第一视角展开

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_{2\times 2} \tag{20}$$

请大家自行分析 (20) 方阵主对角线元素、非主对角线元素的特点。

再看 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$，用矩阵乘法第二视角展开

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_{2\times 2} \tag{21}$$

我们看到的是两个正交投影矩阵的叠加，结果是单位矩阵。

朝 $\boldsymbol{v}_1$ 方向正交投影

二维列向量 $\boldsymbol{x}$ 朝方向向量 (单位向量) $\boldsymbol{v}_1$ 方向投影，对应的投影矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 为

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 16/25 & 12/25 \\ 12/25 & 9/25 \end{bmatrix} \tag{22}$$

投影结果对应如下矩阵乘法

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 16/25 & 12/25 \\ 12/25 & 9/25 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16x_1/25 + 12x_2/25 \\ 12x_1/25 + 9x_2/25 \end{bmatrix} \tag{23}$$

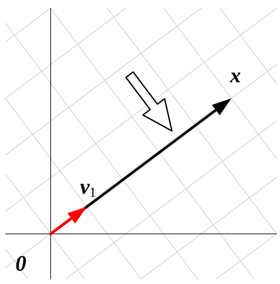

图 9. 二维列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{v}_1$ 方向正交投影

图 9 所示为二维列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{v}_1$ 方向正交投影。带入具体数值，投影结果为

$$
\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}16/25 & 12/25\\ 12/25 & 9/25\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix} \tag{24}
$$

大家是否感到奇怪，为什么向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{v}_1$ 的正交投影结果为 $\boldsymbol{x}$ 本身？原因很简单，$\boldsymbol{x}$ 平行 $\boldsymbol{v}_1$，也就是说 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1)$ 中。

想要计算 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1)$ 的坐标，我们用标量投影即可，即

$$
\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4/5\\ 3/5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}=5 \tag{25}
$$

这个标量值相当于向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{v}_1$ 的坐标，再乘以 $\boldsymbol{v}_1$ 就相当于“二次投影”到平面。

朝 $\boldsymbol{v}_2$ 方向正交投影

二维列向量 $\boldsymbol{x}$ 朝方向向量 (单位向量) $\boldsymbol{v}_2$ 方向投影，对应的投影矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 为

$$
\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-3/5\\ 4/5\end{bmatrix} @ \begin{bmatrix}-3/5\\ 4/5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}9/25 & -12/25\\ -12/25 & 16/25\end{bmatrix} \tag{26}
$$

投影结果对应如下矩阵乘法

$$
\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}9/25 & -12/25\\ -12/25 & 16/25\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9x_1/25-12x_2/25\\ -12x_1/25+16x_2/25\end{bmatrix} \tag{27}
$$

图 10 所示为二维列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{v}_2$ 方向正交投影。带入具体数值，投影结果为

$$
\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}9/25 & -12/25\\ -12/25 & 16/25\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{28}
$$

由于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 正交，$\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{v}_2$ 正交投影为零向量 $\boldsymbol{0}$。

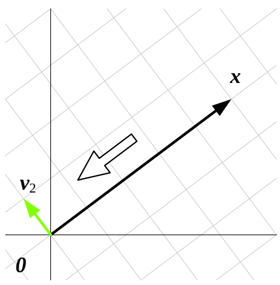

图 10. 二维列向量 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{v}_2$ 方向正交投影

向量合成

如图 11 所示，把(24)、(28) 两者叠加还原 $\boldsymbol{x}$ 所有信息

$$\left(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2\right)\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{v}_1 @ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{v}_2 @ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}16x_1/25+12x_2/25\\12x_1/25+9x_2/25\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9x_1/25-12x_2/25\\-12x_1/25+16x_2/25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \tag{29}$$

如图 12 所示，span($\boldsymbol{v}_1$)、span($\boldsymbol{v}_2$) 互为正交补。

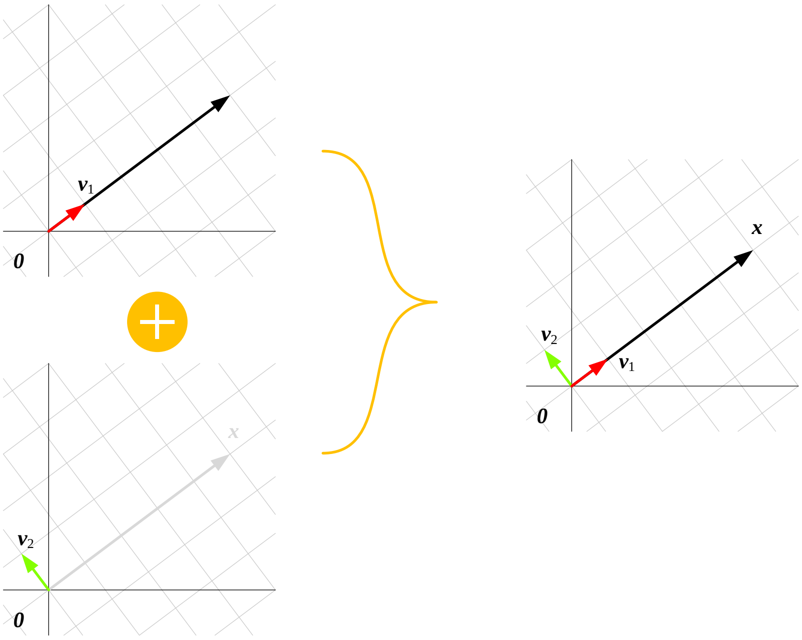

图 11. [$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$] 中还原二维列向量 $\boldsymbol{x}$

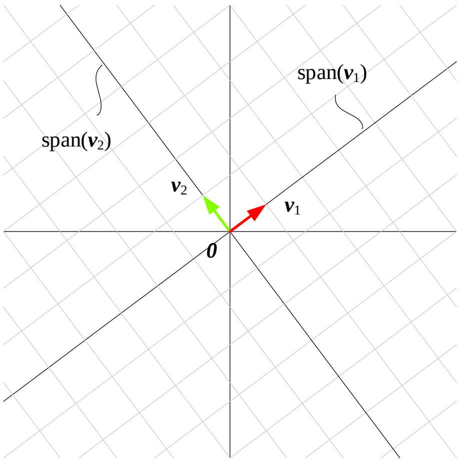

图 12. span($\boldsymbol{v}_1$)、span($\boldsymbol{v}_2$) 互为正交补

下一节升维，我们会从三维几何视角继续分析 3 × 3 正交矩阵。

请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 判断哪些矩阵为正交矩阵。

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

Q2. 几何角度来看，**Q1** 中的正交矩阵对应怎样的几何变换？

Q3. 计算 **Q1** 中的正交矩阵的行列式。

Q4. 如下成对矩阵中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为正交矩阵，请判断 $\boldsymbol{A}@\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{B}@\boldsymbol{A}$ 是否均为正交矩阵？

- $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

Q5. 几何角度来看，**Q4** 中 $\boldsymbol{A}@\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{B}@\boldsymbol{A}$ 对应怎样的几何变换？

Q6. 分别计算如下正交矩阵的逆、转置，大家可以得到怎样的结论？

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$

▶ $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

Q7. 计算平面上 $[2, 3]^{\mathrm{T}}$ 朝 $\boldsymbol{e}_1$ 标量投影、向量投影结果。

Q8. 计算平面上 $[2, 3]^{\mathrm{T}}$ 朝 $\boldsymbol{e}_2$ 标量投影、向量投影结果。

Q9. 将 $[2, 3]^{\mathrm{T}}$ 分别朝 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 向量投影，然后再合成。