作者	**生姜 DrGinger**
脚本	**生姜 DrGinger**
视频	**崔崔 CuiCui**
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

8.7 仿射变换

本节你将掌握的核心技能：

▶ 区分线性变换、仿射变换：线性变换原点不变，仿射变换包含平移。

▶ 引入齐次坐标：平移以及本章前文所有几何操作都能统一为矩阵乘法。

▶ 用 3×3 矩阵乘法完成平面仿射变换。

▶ 用 4×4 矩阵乘法完成三维仿射变换。

▶ 用矩阵分块法理解仿射变换矩阵乘法。

前文提过，线性变换是特殊的**仿射变换** (affine transformation)。两者的区别在于是仿射变换包含平移。

线性变换仅能对图形进行比例缩放、旋转、剪切等操作，且原点始终保持不变，即原点被固定为不动点。也就是说，线性变换中，原点始终被映射到原点。

而仿射变换则可以在线性变换的基础上加入平移操作，使得图形能够移动到新的位置。也就是说，原点可以被移动到其他位置。

本节将介绍几种常见的仿射变换，请大家对比本章前文阅读本章。

平面平移

用列向量表达坐标时，平移可以写成：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{t} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{t}$ 为平移向量

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

(2) 代入 (1) 得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

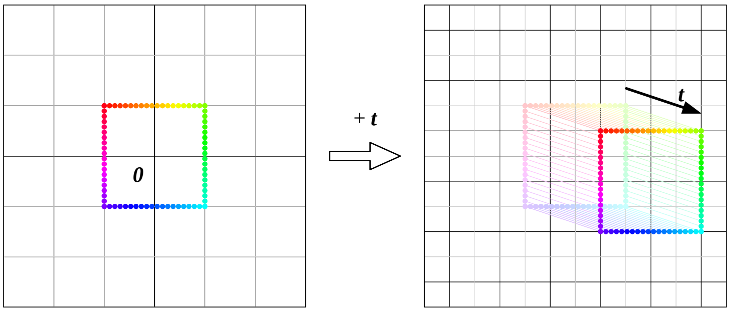


图 1. 向量加法完成平面平移操作

从 2 × 2 矩阵到 3 × 3 矩阵

使用 3 × 3 矩阵完成平面仿射变换是因为**齐次坐标** (homogeneous coordinates) 的引入，使得我们可以利用矩阵乘法方便地表达几何变换 (比如，平移、缩放、旋转等等)，并支持组合变换。

简单来说，齐次坐标就是将一个原本是 n 维的向量用一个 $n + 1$ 维向量来表示。

本章前文告诉我们，如果仅仅使用 2 × 2 矩阵，我们不能描述平面平移。而使用 3 × 3 矩阵，包括平移在内的平面几何变换都可以通过下式完成，具体如下

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

这样，对于一系列几何变换，只需将它们对应的矩阵相乘即可。

类似地，三维几何变换也可以 4 × 4 矩阵乘法实现。

下面，让我们先从平面平移说起。

矩阵乘法完成平面平移

平面上，平移是将图形沿某个方向移动，不改变形状和大小。

使用 3 × 3 矩阵，平面平移可以用如下矩阵乘法完成

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中，t_1 代表图形在水平方向的移动距离；t_2 为竖直方向的移动距离。

展开上式得到的是两个等式：

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + t_1 \\ z_2 = x_2 + t_2 \end{cases} \tag{6}$$

上述的平移逆运算，也可以通过矩阵乘法完成：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} @ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_1 \\ 0 & 1 & -t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

这个等式还告诉我们，若上三角矩阵是可逆的，则其逆矩阵仍为上三角矩阵。一个上三角矩阵可逆，当且仅当它的对角线元素都不为 0。

图 2 给出一个例子，请大家自行分析。

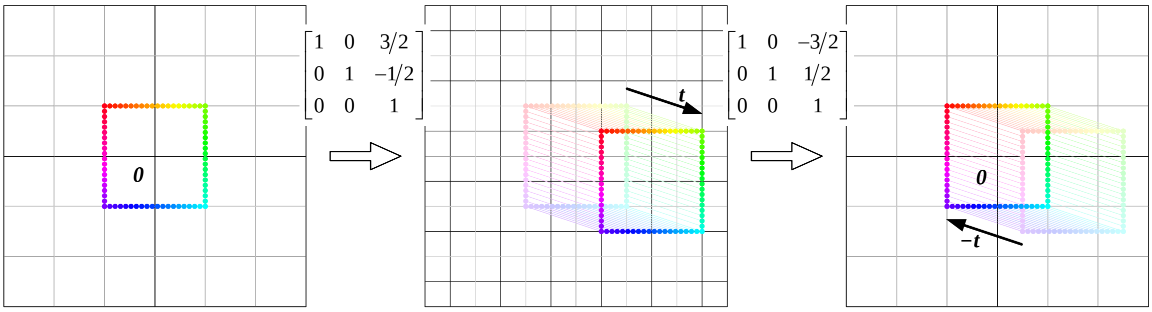


图 2. 利用 3×3 矩阵乘法完成平面平移操作、逆操作

分块矩阵乘法

从分块矩阵乘法角度，（5）这个运算其实很好理解。首先将 3×3 平移矩阵分块

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{2\times 2} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{O}_{1\times 2} & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

这样，平移对应的乘法运算可以写成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{2\times 2} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{O}_{1\times 2} & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{2\times 2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

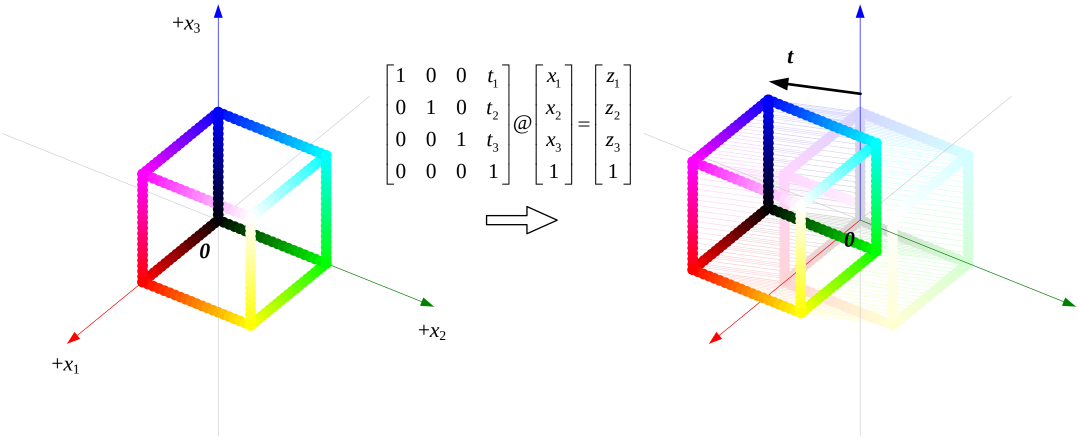
相信大家都已经看到了加法等式 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{z}$。

三维空间平移

图 3 所示为用 4×4 矩阵乘法完成三维空间的平移，对应的矩阵乘法运算

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

请大家自行分析图 3 对应逆向平移对应的矩阵乘法运算。



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

图 3．利用 4 × 4 矩阵乘法完成三维空间平移

平面缩放

回顾本章前文介绍的平面缩放，平面等比例缩放保持图形比例一致，只改变其大小。

使用 3 × 3 矩阵，平面等比例可以用如下乘法完成

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

其中，s 为缩放因子。$s > 1$ 表示放大；$0 < s < 1$ 表示缩小；$s = 1$ 表示没有缩放。而 $s < 0$ 时，除了缩放还有镜像，相当于复合几何变换。特殊情况，$s = 0$ 则是一种投影降维。

请大家也用分块矩阵乘法展开 (11)。

利用 (11)，等比例缩放的逆运算为

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} @ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

非等比例缩放在不同方向有不同的缩放比例。

使用 3 × 3 矩阵，平面等比例可以用如下乘法完成

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

其中，s_1 为水平方向的缩放因子；s_2 为竖直方向的缩放因子。

请大家分析图 4，也请大家也用分块矩阵乘法展开 (13)。

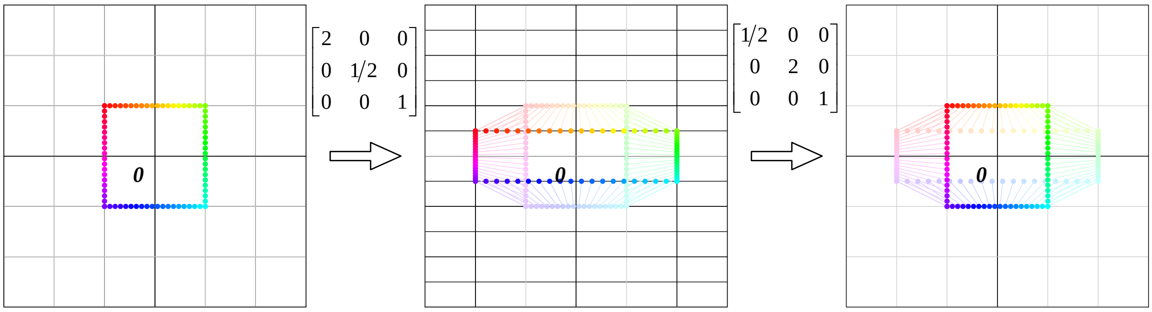


图 4．利用 3 × 3 矩阵乘法完成非等比例缩放操作、逆操作

平面旋转

本章前文提过，平面 (绕原点) 逆时针旋转变换让图形绕原点逆时针旋转一个角度。

使用 3 × 3 矩阵，平面 (绕原点) 逆时针旋转可以用如下乘法完成

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中，θ 为旋转角度，逆时针为正方向。

请大家也用分块矩阵乘法展开 (14)。

利用 (14)，等比例缩放的逆运算为

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} @ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

请大家分析图 5 对应的矩阵乘法。

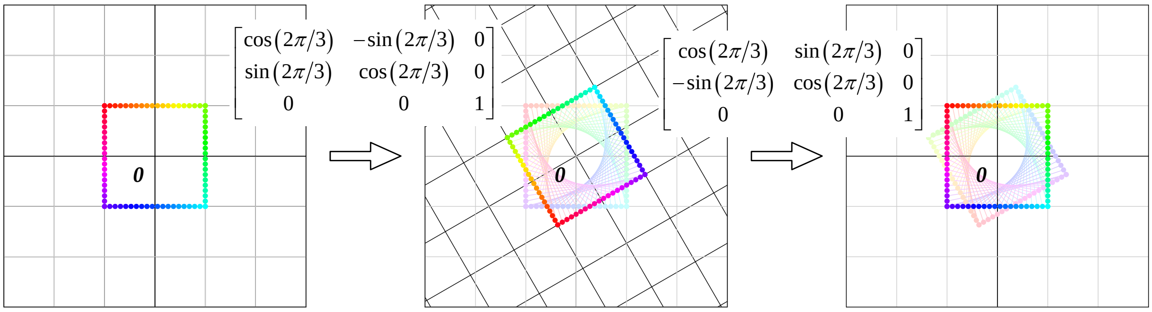


图 5. 利用 3 × 3 矩阵乘法完成旋转缩放操作、逆操作

组合

利用 3 × 3 矩阵，平移、缩放、旋转等平面几何操作可以按不同次序通过矩阵乘法完成，这显著提高了几何变换的灵活性和计算效率。

通过矩阵的结合性，可以将多个几何操作组合成一个矩阵，使得变换的执行简化为一次矩阵乘法，而不需要逐步对每个点进行单独的运算。这种方式对几何计算、图像处理以及计算机图形学有着重要的意义。

值得反复强调的是，一般情况，矩阵乘法是非交换的，这意味着操作的顺序不同，结果也会不同。

图 6 所示为先平移，后旋转。先将图形移动，然后围绕原点旋转，平移量会受到旋转角度的影响。

图 6 对应的矩阵乘法运算如下所示

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{2nd, rotate}} @ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{1st, translate}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \cdot t_x - \sin\theta \cdot t_y \\ \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \cdot t_x + \cos\theta \cdot t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

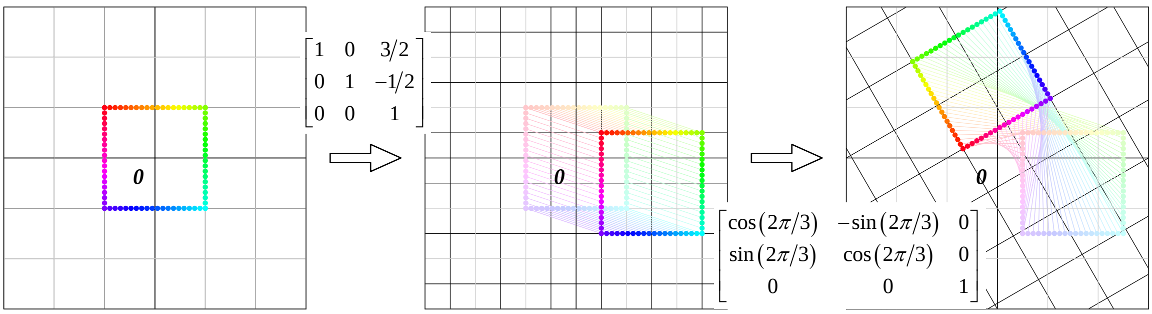


图 6. 利用 3 × 3 矩阵乘法完成先平移、再旋转

图 7 所示为先旋转，后平移。先围绕原点旋转，然后移动，平移量直接按照全局坐标系方向执行，不受旋转影响。

图 7 对应的矩阵乘法运算如下所示

$$
\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{2nd, translate}} @ \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{1st, rotate}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17}
$$

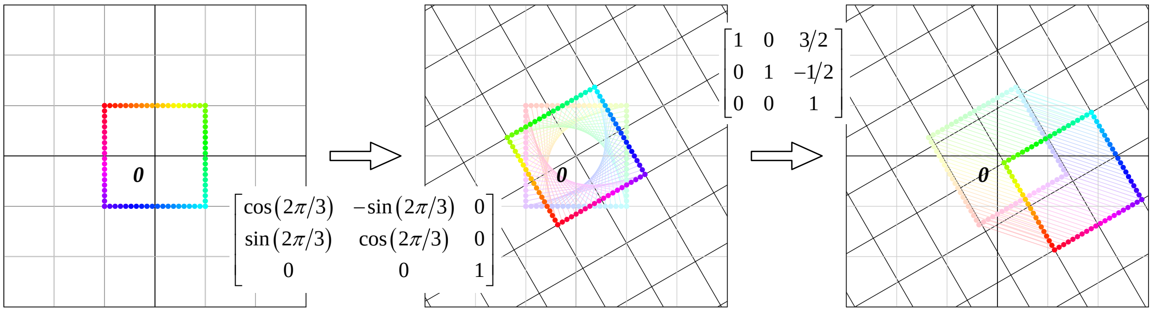
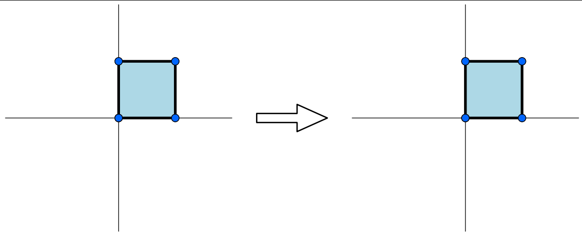
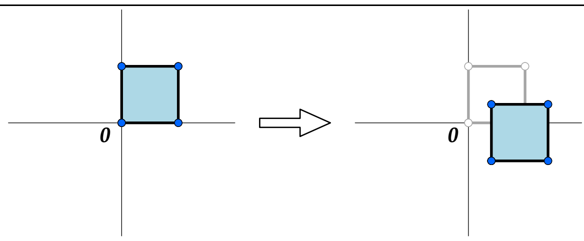
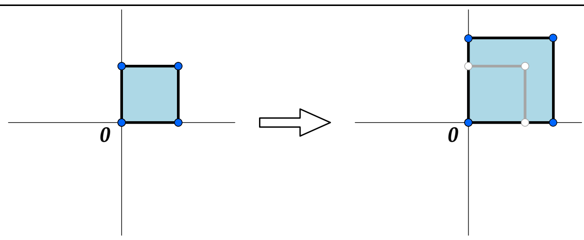


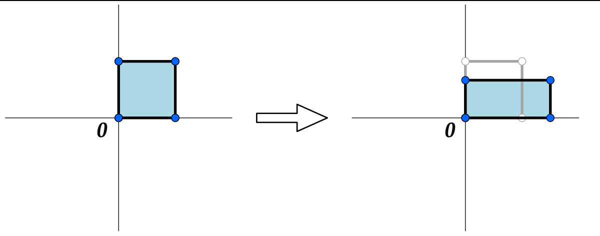
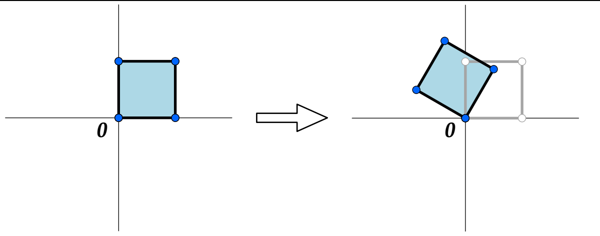
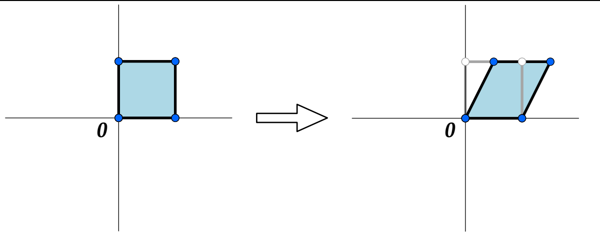
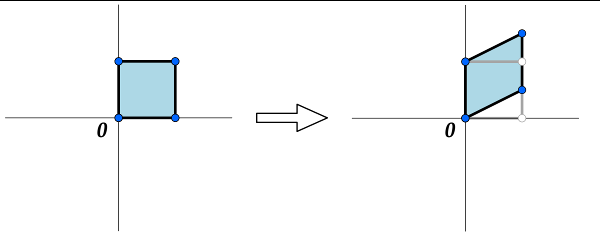
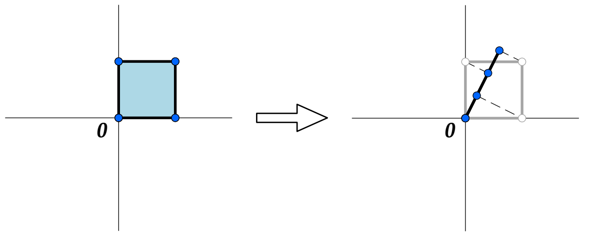
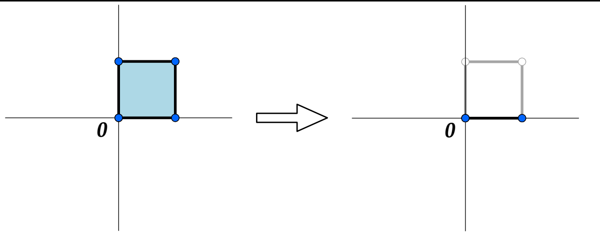
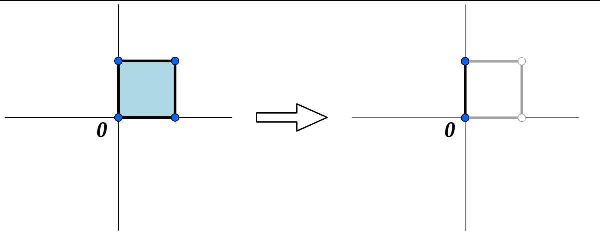
图 7．利用 3 × 3 矩阵乘法完成先旋转、再平移

仿射变换可以看作是线性变换加上平移的扩展形式，其作用范围更广。而线性变换可以看作是特殊的仿射变换。相信通过这一节内容，大家已经看到，因为包含平移，方便高效、灵活完成各种图形变换，仿射变换更广泛地应用于计算机图形学、图像处理中。

? 表 1 比较平面上线性变换、仿射变换矩阵，请大家逐个分析。

表 1．平面上比较线性变换、仿射变换

线性变换	仿射变换	图形变换
没变换（单位矩阵） $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 行列式 1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
平移 不是线性变换	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
等比例缩放 $\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ 行列式 s^2	$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

非等比例缩放 $\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$ 行列式 $s_1 s_2$	$\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
旋转 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 行列式 1	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
沿 x_1 轴剪切 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 行列式 1	$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
沿 x_2 轴剪切 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ 行列式 1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
正交投影 $\frac{1}{a_1^2+a_2^2}\begin{bmatrix} a_2^2 & -a_1 a_2 \\ -a_1 a_2 & a_1^2 \end{bmatrix}$ (过原点) 直线法向量 $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 行列式 0	$\begin{bmatrix} \frac{a_2^2}{a_1^2+a_2^2} & \frac{-a_1 a_2}{a_1^2+a_2^2} & 0 \\ \frac{-a_1 a_2}{a_1^2+a_2^2} & \frac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
向 x_1 轴投影 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 行列式 0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
向 x_2 轴投影 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 行列式 0	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

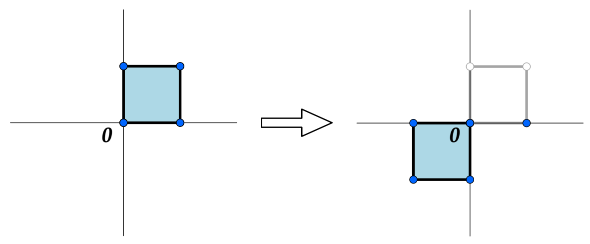
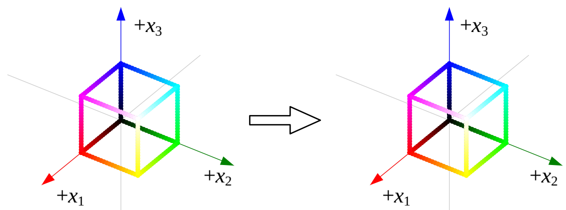
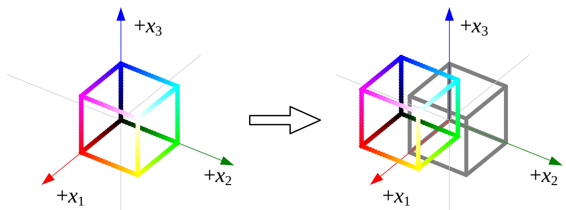
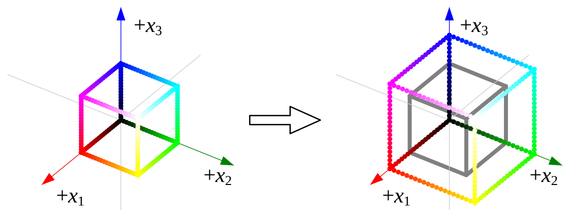
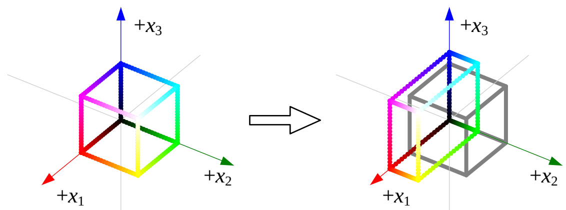
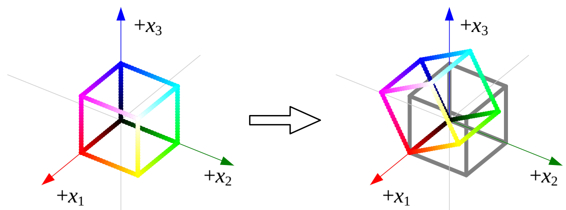
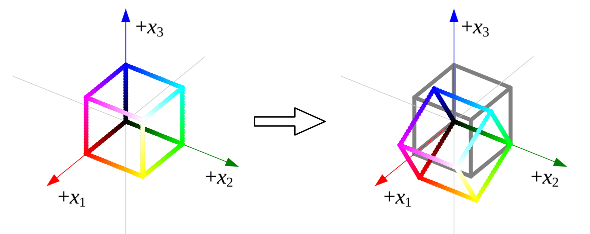
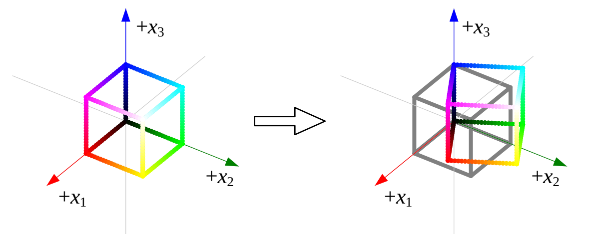
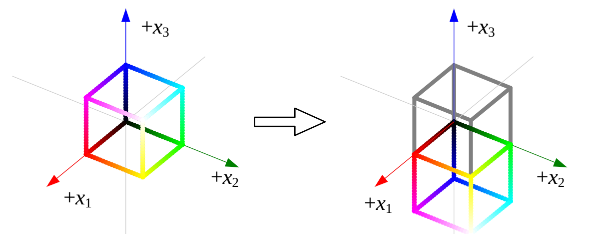
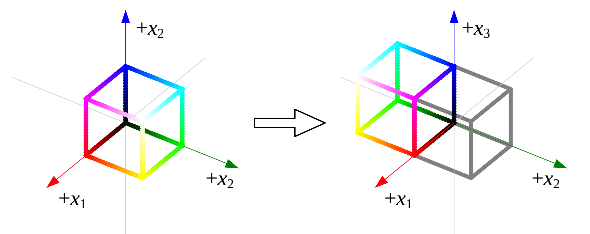
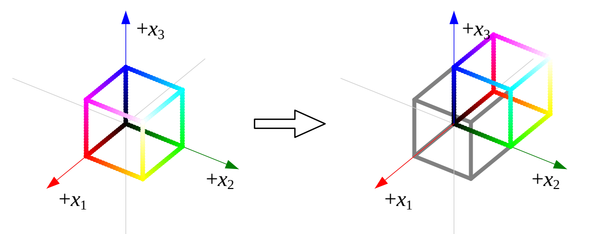
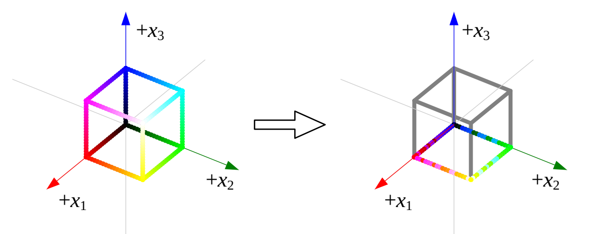
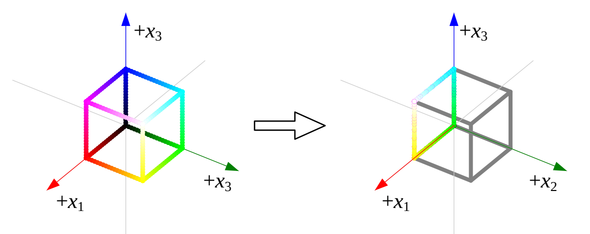
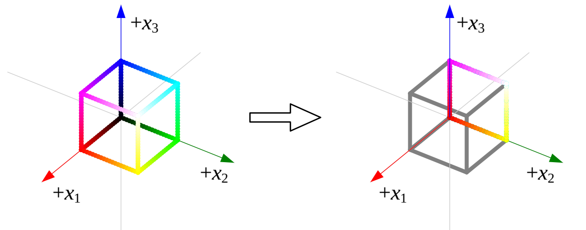
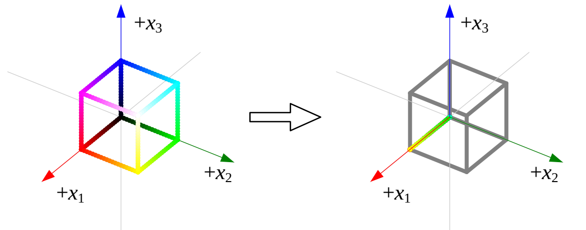
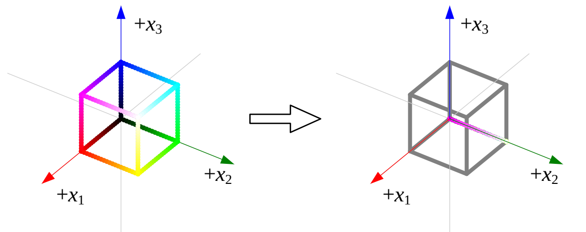
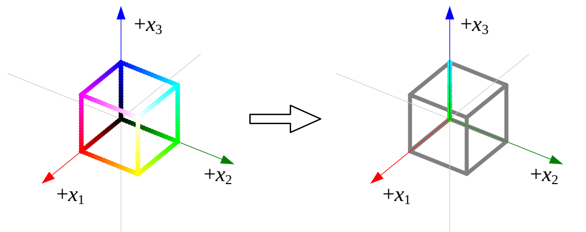
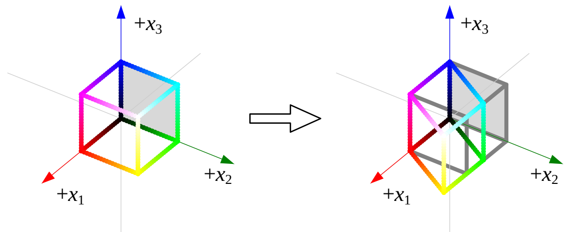
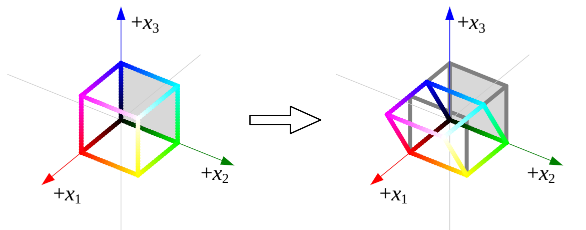
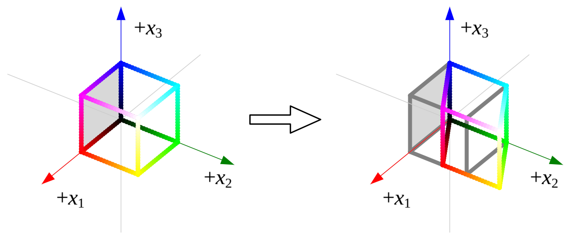
镜像 $\frac{1}{a_1^2+a_2^2}\begin{bmatrix} a_2^2-a_1^2 & -2a_1a_2 \\ -2a_1a_2 & a_1^2-a_2^2 \end{bmatrix}$ (过原点) 直线法向量 $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 行列式-1	$\begin{bmatrix} \frac{a_2^2-a_1^2}{a_1^2+a_2^2} & \frac{-2a_1a_2}{a_1^2+a_2^2} & 0 \\ \frac{-2a_1a_2}{a_1^2+a_2^2} & \frac{a_1^2-a_2^2}{a_1^2+a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

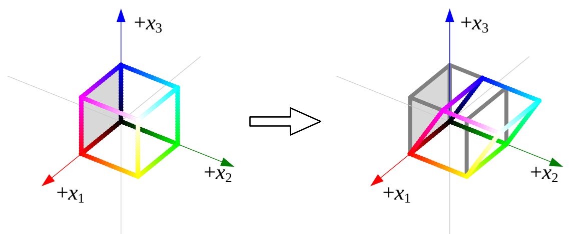
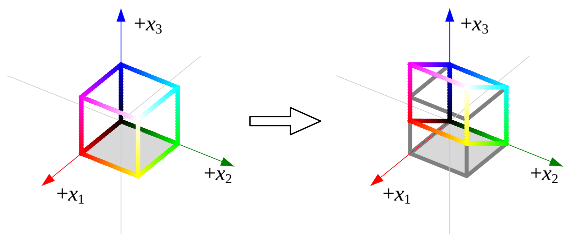
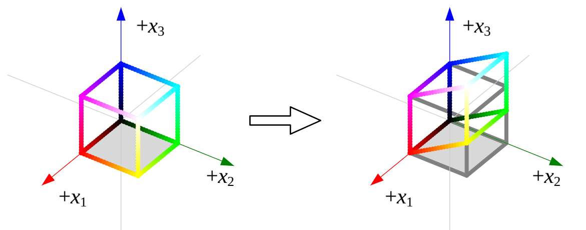
表 2 比较平面上线性变换、仿射变换矩阵，请大家逐个分析。

表 2. 三维空间比较线性变换、仿射变换

线性变换	仿射变换	示例
没变换（单位矩阵） $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 行列式 1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
平移 不是线性变换	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
等比例缩放 s 倍 $\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$ 行列式 s^3	$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
非等比例缩放 $\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$ 行列式 $s_1s_2s_3$	$\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
绕 x_1 轴逆时针旋转 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$ 行列式 1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

绕 x_2 轴逆时针旋转 $\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2\end{bmatrix}$ 行列式 1	$\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	
绕 x_3 轴逆时针旋转 $\begin{bmatrix}\cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0\\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 行列式 1	$\begin{bmatrix}\cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0\\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	
关于 x_1x_2 平面镜像对称 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ 行列式-1	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	
关于 x_1x_3 平面镜像对称 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 行列式-1	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	
关于 x_2x_3 平面镜像对称 $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 行列式-1	$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	
向 x_1x_2 平面投影 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 行列式 0	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	
向 x_1x_3 平面投影 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 行列式 0	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	

向 x_2x_3 平面投影 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 行列式 0	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
向 x_1 轴投影 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 行列式 0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
向 x_2 轴投影 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 行列式 0	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
向 x_3 轴投影 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 行列式 0	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
沿 x_1 轴剪切 $\begin{bmatrix} 1 & k_{1,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & k_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 行列式 1	$\begin{bmatrix} 1 & k_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & k_{1,3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	 
沿 x_2 轴剪切 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_{2,1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 行列式 1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

		
沿 x_3 轴剪切 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_{3,1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$ 行列式 1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{3,1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_{3,2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	 

请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 线性变换、仿射变换有什么本质区别？

Q2. 为什么平移不是线性变换？

Q3. 平面上向量 $\boldsymbol{x}$ 平移 $[1, 1]^{\mathrm{T}}$，如何用矩阵乘法完成运算？

Q4. 想要取消 **Q3.** 平移，如何分别用向量加减法、矩阵乘法完成运算？

Q5. 如何用矩阵乘法完成：平面上，1) 先逆时针绕原点旋转 90 度；2) 再平移 $[1, 1]^{\mathrm{T}}$？

Q6. 如何用矩阵乘法完成：平面上，1) 先平移 $[1, 1]^{\mathrm{T}}$；2) 再逆时针绕原点旋转 90 度？

Q7. 如何用矩阵乘法完成：三维空间上，1) 先平移 $[1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$；2) 再逆时针绕 x_1 轴旋转 90 度？