作者	**生姜 DrGinger**
脚本	**生姜 DrGinger**
视频	**崔崔 CuiCui**
开源学习资源	https://github.com/Visualize-ML
平台	https://www.youtube.com/@DrGinger_Jiang https://space.bilibili.com/3546865719052873 https://space.bilibili.com/513194466

8.5 正交投影

本节你将掌握的核心技能：

- ▶ 切向量构造平面投影矩阵。
- ▶ 法向量构造二维、三维、更高维投影矩阵。
- ▶ 切向量、法向量之间的关系。
- ▶ 正交投影矩阵行列式为 0，不可逆。
- ▶ 连续投影结果不变，说明正交投影矩阵幂等。

回顾向量投影

如图 1 所示，朝着非零向量 $\boldsymbol{\tau}$ (起点位于原点) 投影，就是朝过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau}$ 的直线投影，投影矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{\tau} @ \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{\tau}} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|} @ \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|}\right)^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

形象来说，直线的切向量就是描述这条直线“朝哪个方向走”的箭头。

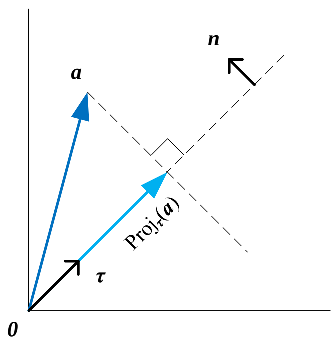

图 1. 过原点直线切向量

把非零向量 $\boldsymbol{\tau}$ 写成方向向量 (单位向量)，(1) 为

$$\boldsymbol{P} = \hat{\boldsymbol{\tau}} @ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

上式显然为秩一矩阵。

本书前文介绍过，秩一矩阵是指可以表示为一个 (非零) 列向量和一个 (非零) 行向量的外积的矩阵，即整个矩阵的所有行（或列）都互相线性相关。

⚠ 注意，(2) 给出的投影矩阵适合朝单一方向投影。对于更高维度空间朝平面/超平面的正交投影，用法向量来构造正交投影矩阵。

本书前文介绍过如何计算向量投影，下面简单回顾一下。

如图 1 所示，向量 $\boldsymbol{a}$ 朝 $\boldsymbol{\tau}$ 向量投影

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\tau} @ \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{a} \tag{3}$$

用本书前文介绍过的向量投影，以内积形式来写，(3) 等价

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{a} = \underbrace{\|\boldsymbol{a}\| \cos\theta}_{\text{Scalar projection}} \times \underbrace{\hat{\boldsymbol{\tau}}}_{\text{Direction vector}} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \times \frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{\tau} \tag{4}$$

几个例子

平面几何形状向横轴 ($x_2 = 0$) 正交投影，横轴对应的切向量 $\boldsymbol{\tau} = [1, 0]^{\mathrm{T}}$，这样投影矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \hat{\boldsymbol{\tau}} @ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

向量 $[x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 向横轴正交投影结果

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

这和图 2 (a) 一致，即 x_1 坐标不变，x_2 为 0。

(a) (b)

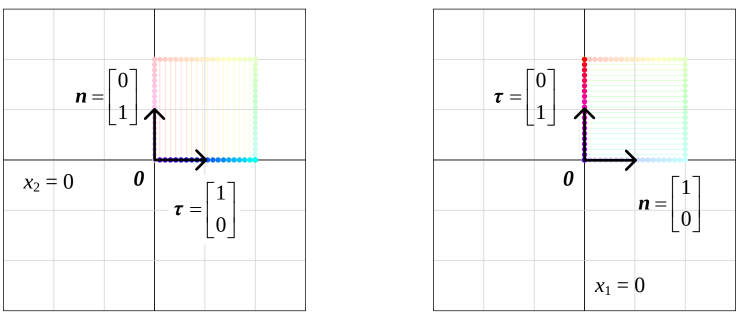

图 2．向横轴、纵轴投影

如图 2 (b) 所示，平面几何形状向纵轴 ($x_1 = 0$，切向量 $\boldsymbol{\tau} = [0, 1]^{\mathrm{T}}$) 正交投影，投影矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \hat{\boldsymbol{\tau}} @ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

向量 $[x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 向纵轴正交投影结果

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

这意味着 x_1 坐标变为 0，x_2 坐标不变。

再看图 3 两个例子。

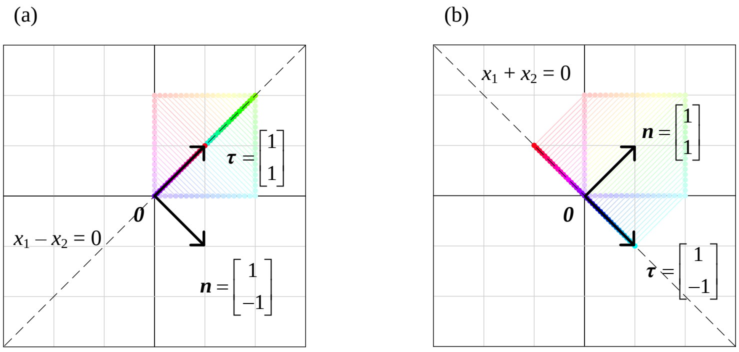

图 3．向 $x_1 - x_2 = 0$、$x_1 + x_2 = 0$ 投影

如图 3 (a) 所示，平面几何形状向 $x_1 - x_2 = 0$ 正交投影，$x_1 - x_2 = 0$ 对应的切向量 $\boldsymbol{\tau} = [1, 1]^{\mathrm{T}}$，将 $\boldsymbol{\tau}$ 单位化得到

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

这样投影矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \hat{\boldsymbol{\tau}} @ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{10}$$

向量 $[x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 向 $x_1 - x_2 = 0$ 正交投影，坐标变化

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_1 + 0.5x_2 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

上式告诉我们投影后横纵坐标相同，这和图 3 (a) 一致，所有点落在了 $x_1 - x_2 = 0$ 这条直线上。

如图 3 (b) 所示，向 $x_1 + x_2 = 0$ 正交投影，$x_1 + x_2 = 0$ 对应的切向量 $\boldsymbol{\tau} = [1, -1]^{\mathrm{T}}$，这样投影矩阵为

$$
\boldsymbol{P} = \hat{\boldsymbol{\tau}} @ \hat{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{12}
$$

向量 $[x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 向 $x_1 + x_2 = 0$ 正交投影，坐标为

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_1 - 0.5x_2 \\ -0.5x_1 + 0.5x_2 \end{bmatrix} \tag{13}
$$

从上式中，我们看到投影后横轴坐标为相反数。这和图 3 (b) 一致，所有点落在了 $x_1 + x_2 = 0$。

平面法向量

简单来说，直线的法向量垂直于直线，平面的方向了垂直于平面。

给定直线 $a_1x_1 + a_2x_2 = b$，对应的法向量为

$$
\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \tag{14}
$$

请大家自行分析图 4 中给出的几个例子。

⚠ 注意，图 4 中直线法向量都是自由向量，它们起点并不在原点。

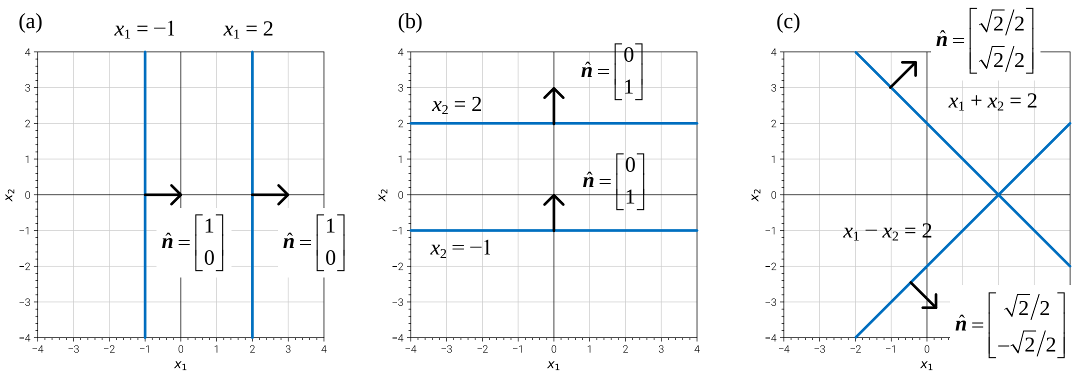

图 4. 平面直线单位法向量

根据向量正交分解，如图 5 所示，我们可以计算 $\boldsymbol{a}$ 朝 $\boldsymbol{n}$ (法向量) 向量正交投影

$$
\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{n} @ \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{n}} \boldsymbol{a} \tag{15}
$$

然后 $\boldsymbol{a}$ 减去 $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{a}$ 这个向量投影，就是 $\boldsymbol{a}$ 向 $\boldsymbol{\tau}$ 正交投影结果

$$
\boldsymbol{a} - \mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{n} @ \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{n}} \boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{n} @ \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{n}} \right) \boldsymbol{a} \tag{16}
$$

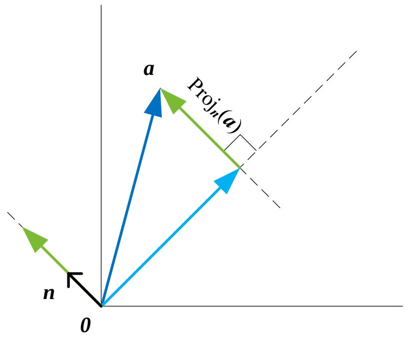

图 5. 过原点直线法向量

这样 $\boldsymbol{a}$ 朝 $\boldsymbol{n}$ 投影矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{n} @ \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{n}} \tag{17}$$

注意，对于高维度空间正交投影，我们一般使用（17）这种以法向量方式定义的投影矩阵；大家很快就会在本节后文看到。

把 (14) 带入 (17) 得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{n} @ \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} @ \boldsymbol{n}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \left(\begin{bmatrix} a_1^2 + a_2^2 & 0 \\ 0 & a_1^2 + a_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_2^2 & -a_1 a_2 \\ -a_1 a_2 & a_1^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{18}$$

请大家分别用切向量、法向量自行计算图 6 中对应的投影矩阵。

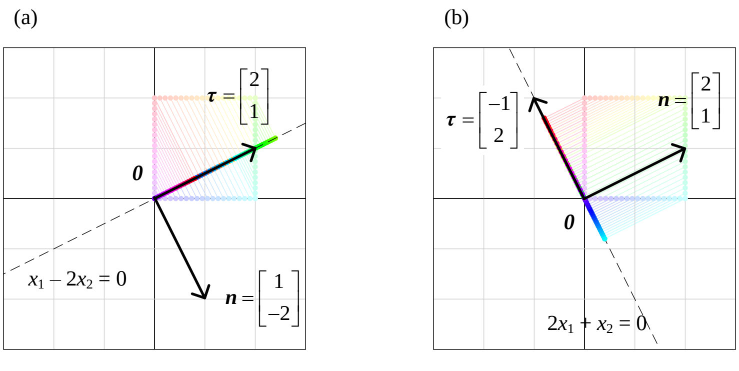

图 6. 两个正交投影变换的例子，法向量

换个角度来推导 (18)，如果 $\boldsymbol{n} = [a_1, a_2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\tau} = [-a_2, a_1]^{\mathrm{T}}$，利用 (1) 得到同样的结果

$$P = \frac{\tau @ \tau^{\mathrm{T}}}{\tau^{\mathrm{T}} @ \tau} = \frac{\begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} -a_2 & a_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -a_2 & a_1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_2^2 & -a_1 a_2 \\ -a_1 a_2 & a_1^2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

正交矩阵：规范正交基

联立 (1) 和 (17)，整理得到

$$\frac{n @ n^{\mathrm{T}}}{n^{\mathrm{T}} @ n} + \frac{\tau @ \tau^{\mathrm{T}}}{\tau^{\mathrm{T}} @ \tau} = I \tag{20}$$

即

$$\hat{n} @ \hat{n}^{\mathrm{T}} + \hat{\tau} @ \hat{\tau}^{\mathrm{T}} = I \tag{21}$$

计算 $\begin{bmatrix} \hat{n} & \hat{\tau} \end{bmatrix}$ 这个方阵格拉姆矩阵

$$\begin{bmatrix} \hat{n} & \hat{\tau} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \hat{n} & \hat{\tau} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \hat{n} & \hat{\tau} \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \hat{n}^{\mathrm{T}} \\ \hat{\tau}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \hat{n} @ \hat{n}^{\mathrm{T}} + \hat{\tau} @ \hat{\tau}^{\mathrm{T}} = I \tag{22}$$

我们发现这个格拉姆矩阵是个单位阵！

这说明单位法向量、切向量构造规范正交基

$$\begin{bmatrix} \hat{n} & \hat{\tau} \end{bmatrix} \tag{23}$$

换个角度来看，上式是一个正交矩阵。

⚠ 注意，(22) 这个式子非常重要，是下一章的关键点之一。

平面正交投影的性质

很容易观察知道，投影矩阵是对称矩阵

$$P = P^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

观察 (18)，我们发现平面正交投影矩阵列向量相关

$$P = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_2^2 & -a_1 a_2 \\ -a_1 a_2 & a_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{bmatrix} & -a_1 \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{25}$$

从 (2) 也能看出，平面正交投影矩阵 P 为秩一矩阵，这和上式结论一致。

⚠ 注意，P 为秩一矩阵仅仅适用于平面正交投影这个场景；对于三维、更高维正交投影，投影矩阵则不是秩一矩阵。

计算平面正交投影矩阵行列式

$$\det(\boldsymbol{P}) = 0 \tag{26}$$

如图 7 所示，这意味着 $\boldsymbol{P}$ 将平面几何图形压缩，导致信息丢失。这也说明，正交投影矩阵不可逆。

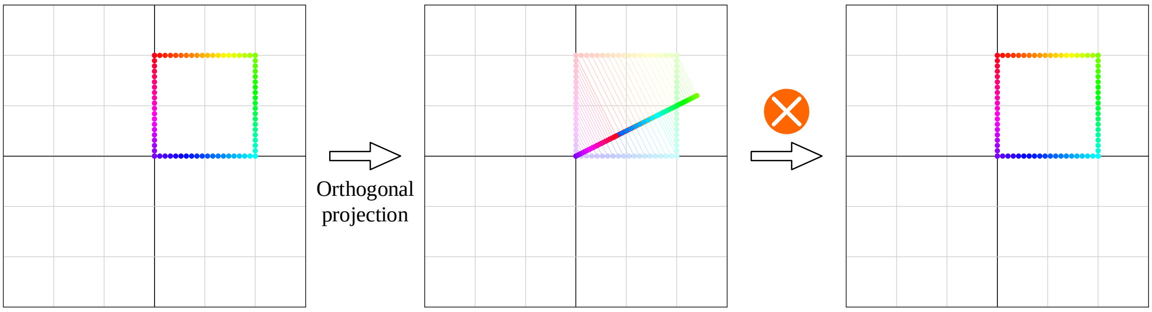

图 7．正交投影变换不可逆

投影矩阵满足

$$\boldsymbol{P} @ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} \tag{27}$$

我们管 $\boldsymbol{P}$ 叫幂等矩阵 (idempotent matrix)；简单来说，幂等矩阵与自身相乘仍等于自身。

如图 8 所示，几何角度来看，上式意味着对一个点投影多次，结果不变。

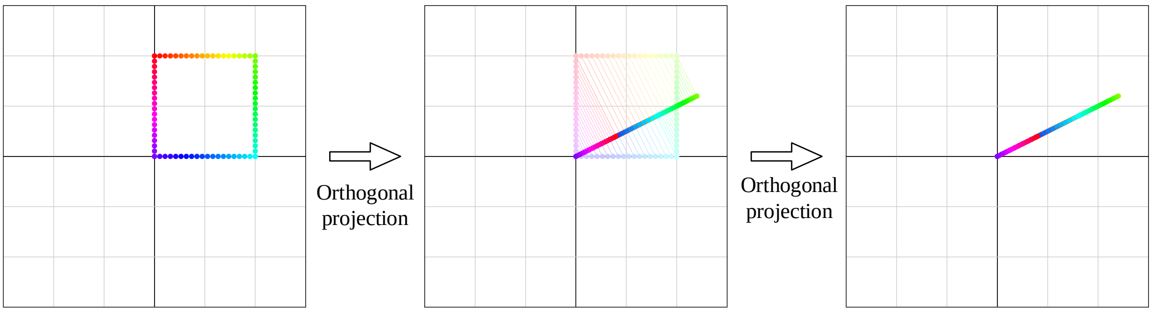

图 8．连续正交投影结果不变

三维投影到平面

三维、更高维度正交投影，法向量就有优势了！

如图 9 所示，对于一个平面而言，它的法向量就是和平面相垂直的向量。

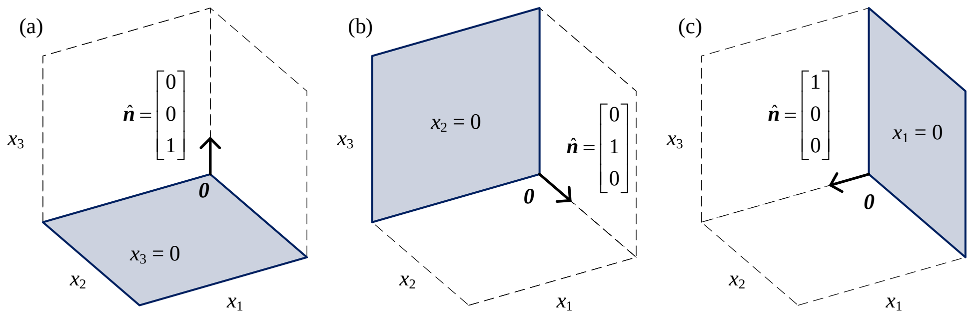

图 9. 平面的法向量

一个平面的单位法向量为 $\hat{\boldsymbol{n}}$，朝这个平面正交投影矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{n}} @ \hat{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

如图 9 (a) 所示，x_1x_2 平面的单位法向量为 $[0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$，向 x_1x_2 平面正交投影矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{n}} @ \hat{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

? 请大家计算 (29) 正交投影矩阵的秩、行列式。投影矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是否还是秩一矩阵？

如图 10 所示，三维列向量 $\boldsymbol{x}$ 关于 x_1x_2 平面镜像后结果为

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

也就是说，x_1、x_2 坐标不变，x_3 坐标为 0。

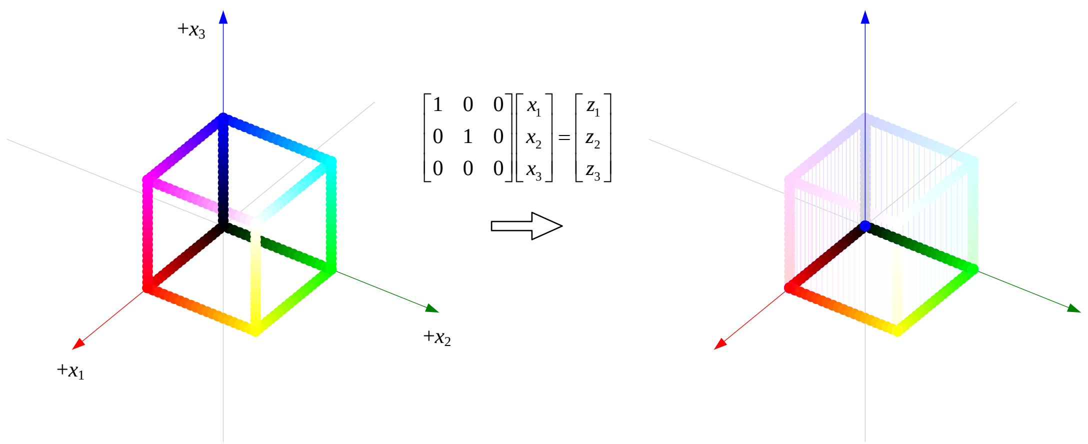

图 10. 朝 x_1x_2 平面正交投影，三维空间

如图 9 (b) 所示，x_1x_3 平面的单位法向量为 $[0, 1, 0]^{\mathrm{T}}$，向 x_1x_3 平面正交投影矩阵为

$$
\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{n}}@\hat{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}@\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{31}
$$

如图 11 所示，x_1、x_3 坐标不变，x_2 坐标为 0。

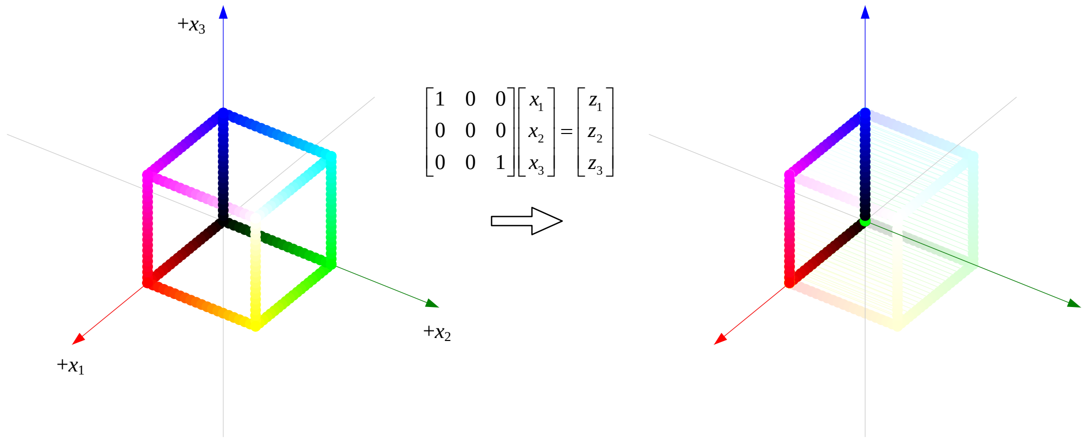

图 11．超 x_1x_3 平面正交投影，三维空间

请大家自行计算图 12 对应的正交投影矩阵，并指出坐标变换。

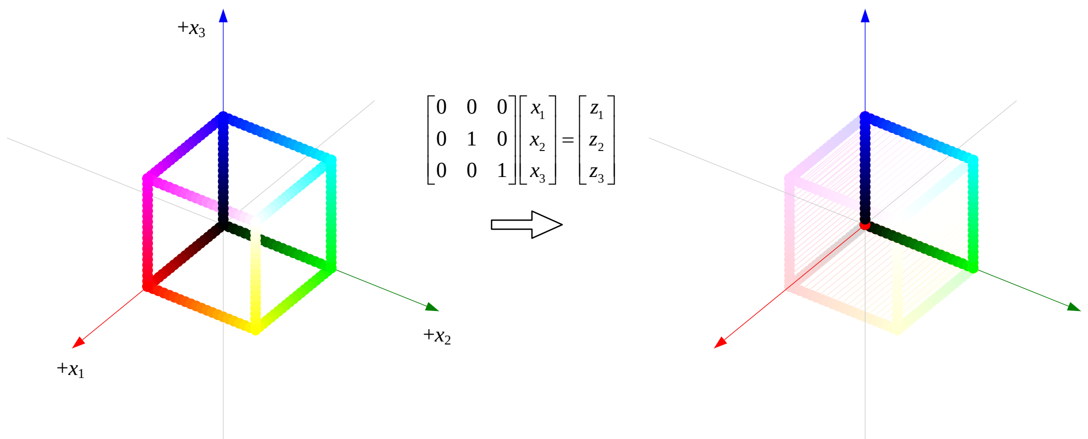

图 12．超 x_2x_3 平面正交投影，三维空间

大家可能会好奇，正交投影丢失的信息去哪了？怎么能补全这部分信息？正交投影还有什么使用场景？这些都是下一章要探讨的话题。

请大家用 DeepSeek/ChatGPT 等工具完成本节如下习题。

Q1. 给定如下平面上过原点直线，分别计算其切向量、法向量、投影矩阵；请用两种方法计算投影矩阵。

▶ $-x_2 = 0$

▶ $-x_1 = 0$

▶ $x_1 - 2x_2 = 0$

▶ $2x_1 - x_2 = 0$

▶ $x_1 + 2x_2 = 0$

▶ $2x_1 + x_2 = 0$

Q2. 给定如下三维空间中过原点平面，分别计算法向量、投影矩阵。

▶ $x_2 = 0$

▶ $x_1 = 0$

▶ $x_1 + x_2 = 0$

▶ $x_1 + x_3 = 0$

▶ $x_2 + x_3 = 0$

▶ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

▶ $x_1 - x_2 - x_3 = 0$

Q3. 计算点 (3, 4) 朝如下单位向量投影 (以这些向量为切向量的过原点直线正交投影)：

▶ $[0, 1]^T$

▶ $[1, 0]^T$

▶ $[3/5, 4/5]^T$

▶ $[4/5, -3/5]^T$

Q4. 过原点的直线和水平轴正方向夹角为 30 度，请计算点 (3, 4) 朝这条直线正交投影。

Q5. 请修改 LA_08_02_01.ipynb，可视化图 2、图 3 几个平面正交投影操作。

Q6. 请修改 LA_08_03_01.ipynb，可视化图 10、图 11、图 12 几个三维正交投影操作。

Q7. 给定如下超平面法向量，计算投影矩阵。

▶ $[0, 0, 0, 1]^T$

▶ $[0, 0, 1, 0]^T$

▶ $[1, 1, 1, 1]^T$

Q8. 给定如下超平面，计算投影矩阵。

▶ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

▶ $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$

Q9. 朝平面上不过原点的直线投影，请思考如何计算投影点？