

## BLATT 13

(23.01.2017)

### Aufgabe 1

- (a) Sei  $\phi$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel und sei die  $\mathcal{L}^*$ -Aussage  $\phi^*$  eine Skolem'sche Normalform von  $\phi$ . Zeigen Sie

$$\models (\phi^* \rightarrow \phi)$$

- (b) Sei  $\phi$  eine  $\mathcal{L}$ -Aussage und die  $\mathcal{L}^*$ -Aussage  $\phi_*$  sei eine Herbrand'sche Normalform von  $\phi$ . Zeigen Sie

$$\models (\phi \rightarrow \phi_*)$$

*Zur Erinnerung: Für Aussagen gilt  $\models (\phi \rightarrow \psi)$  genau dann, wenn für alle Modelle  $\mathfrak{M}$  gilt  $\mathfrak{M} \models \phi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \psi$ .*

### Aufgabe 2

Sei  $e$  eine Konstante und  $\circ$  ein zweistelliges Funktionszeichen,  $\mathcal{L} = \{e, \circ\}$  und  $\gamma$  die  $\mathcal{L}$ -Aussage

$$(\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 (v_0 \circ v_1) \circ v_2 \doteq v_0 \circ (v_1 \circ v_2) \wedge \forall v_0 v_0 \circ e \doteq v_0 \wedge \forall v_0 e \circ v_0 \doteq v_0 \wedge \forall v_0 v_0 \circ v_0 \doteq e)$$

wobei wir aufgrund der besseren Lesbarkeit auf eine genaue prädikatenlogische Notation verzichten wollen, d.h. wir schreiben  $\circ$  zwischen den Zeichen, auf die  $\circ$  wirkt, und es ist auch erlaubt, zusätzliche Klammern einzufügen.

- (a) Ermitteln Sie eine Skolemsche Normalform  $\phi^*$  der Formel  $\phi = (\gamma \wedge \neg \forall v_0 \forall v_1 v_0 \circ v_1 \doteq v_1 \circ v_0)$ .
- (b) Zeigen Sie mit der Herbrand'schen Methode, dass  $\phi^*$  widersprüchlich ist, d.h. finden Sie variablenfreie  $\mathcal{L}^*$ -Terme  $\tau_{ij}$  so, dass  $\psi(\tau_{11}, \tau_{12}, \dots) \wedge \dots \wedge \psi(\tau_{n1}, \tau_{n2}, \dots)$  widersprüchlich ist.
- (c) Aus (a) und (b) folgt  $\{\gamma\} \models \forall v_0 \forall v_1 v_0 \circ v_1 \doteq v_1 \circ v_0$ . Was bedeutet dieses Ergebnis in „mathematischer Umgangssprache“ (Beachten Sie, dass jedes Modell von  $\gamma$  eine Gruppe ist, da das letzte Konjunktionsglied die Existenz von Inversen beinhaltet)?

*Hinweis zu (a):* Ziehen Sie zuerst die Existenzquantoren nach vorne, damit Sie in den nächsten Aufgaben weniger zu schreiben haben (es kommen nur neue Konstantenzeichen dazu und keine neuen Funktionszeichen).

*Hinweis zu (b):*  $\phi$  ist genau dann widersprüchlich, wenn  $\neg\phi$  allgemeingültig ist.

### Aufgabe 3

Es sei  $c$  ein Konstantenzeichen,  $h$  ein- und  $f, g$  zweistellige Funktionszeichen. Unifizieren Sie, falls möglich, folgende Terme (unter Angabe des Unifikators):

(a)  $gv_0ghcgv_2v_3$  und  $gggv_5v_1hvhghcv_0$

(b)  $gv_4ggfgv_1v_6fv_5v_{12}gfv_{10}cv_2fv_7v_8$  und  $gffv_3v_9fv_{11}v_{11}ggv_2gfv_{10}cfv_6v_0v_4$

## Aufgabe 4

Sei  $A = \{0, \dots, n-1\}$  mit  $n > 1$  und  $A^*$  die Menge der endlichen Tupel mit Elementen aus  $A$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : A^* \rightarrow \mathbb{N}, (w_0, \dots, w_l) \mapsto \sum_{i=0}^l (w_i + 1) \cdot n^i$$

eine Bijektion ist.

## Bonusaufgabe

Es sei  $c$  ein Konstantenzeichen,  $T$  ein dreistelliges Relationszeichen und

$$\begin{aligned} \Phi = \{ & \forall v_0 \exists v_1 T v_0 v_1 c, \forall v_0 T v_0 c v_0, \forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 T v_0 v_1 v_2, \\ & \forall v_0 \dots \forall v_5 ((T v_0 v_1 v_3 \wedge T v_1 v_2 v_4 \wedge T v_3 v_2 v_5) \rightarrow T v_0 v_4 v_5), \\ & \forall v_0 \dots \forall v_5 ((T v_0 v_1 v_3 \wedge T v_1 v_2 v_4 \wedge T v_0 v_4 v_5) \rightarrow T v_3 v_2 v_5) \} \end{aligned}$$

und

$$\phi = \forall v_0 T c v_0 v_0$$

.

Wir wollen mit nachfolgender Methode zeigen, dass  $\Phi \models \phi$ , was gleichbedeutend damit ist, dass  $\Psi = \Phi \cup \{\neg\phi\}$  widersprüchlich ist .

- Bringen Sie die Aussagen in  $\Psi$  in Skolemsche Normalform.
- Bringen Sie die quantorenfreien Teile in konjunktive Normalform.
- Setzen Sie geeignete Terme ein und wenden Sie dann die Resolutionsmethode auf die entstehenden Klauseln an.

*Bemerkung:* Interpretiert man  $T$  als den Graphen einer Funktion  $\circ$ , d. h.  $Tabc \iff a \circ b = c$ , bedeutet dies, dass bei Assoziativität und Existenz von Rechtsinversen ein rechtsneutrales Element auch linksneutral ist.

Abgabe bis Montag 30.01.2017, 10 Uhr,  
im Briefkasten in Gebäude 51 (siehe Briefkastenaufschrift)  
Auf die Abgaben gehören die Namen der Abgebenden und die Gruppennummer!!!