Dozent: PD Dr. Markus Junker
Assistent: Andreas Claessens

BLATT 5

(14.11.2016)

Aufgabe 1

Sei $F = F(A_0, \ldots, A_N)$ eine Formel, in der nur die Aussagenvariablen $A_0, \ldots, A_N$ vorkommen. Dann sei $F(\neg A_0, \ldots, \neg A_N)$ die Formel, die aus F hervorgeht, indem simultan alle Vorkommen von A_i in F durch $\neg A_i$ ersetzt werden.

(i) Zeigen Sie per Induktion über den Aufbau von Formeln die *verallgemeinerten Regeln von de Morgan*, d.h. wenn F eine Formel ist, in der die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ nicht vorkommen, so gilt

$$\neg F(A_0, \ldots, A_N) \;\sim\; F^*(\neg A_0, \ldots, \neg A_N)$$

(ii) Zeigen Sie: Wenn G und H Formeln sind, in denen die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ nicht vorkommen und

$$F = ((\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)) \sim (G \leftrightarrow H)$$

dann gilt $F^* \sim \neg(G^* \leftrightarrow H^*)$.

Aufgabe 2

(i) Zeigen Sie, dass Komplemente in Boole'schen Algebren eindeutig bestimmt sind, d.h. aus $a \sqcup b = 1$ und $a \sqcap b = 0$ folgt bereits $b = a^c$.

(ii) Folgern Sie daraus, dass in allgemeinen Boole'schen Algebren die de Morgan'schen Regeln gelten, d.h.

$$(a \sqcup b)^c = a^c \sqcap b^c$$
$$(a \sqcap b)^c = a^c \sqcup b^c$$

Hinweis zu (i): Rechnen Sie $b \sqcup 0$ und $b \sqcap 1$ aus, indem Sie $a \sqcap a^c = 0$ und $a \sqcup a^c = 1$ ausnutzen.

Aufgabe 3

Eine *Unteralgebra* einer Boole'schen Algebra $\mathcal{B}$ ist eine unter $\sqcup, \sqcap$ und ^{c} abgeschlossene Teilmenge, die 0 und 1 enthält. Eine Teilmenge G von $\mathcal{B}$ *erzeugt* $\mathcal{B}$, wenn $\mathcal{B}$ die kleinste Unteralgebra von $\mathcal{B}$ ist, die G enthält (Die Elemente von G heißen dann Erzeuger oder Generatoren von $\mathcal{B}$).
Geben Sie alle Unteralgebren der Tarski-Lindenbaum-Algebra $\mathcal{F}_2$ an und bestimmen Sie, wieviele Paare von Erzeugern $\mathcal{F}_2$ hat.

Aufgabe 4

Eine Klausel heißt *Hornklausel*, wenn sie höchstens ein positives Literal enthält. Zeigen Sie:

(i) Eine Resolvente von Hornklauseln ist wieder eine Hornklausel.

(ii) Eine Menge von Hornklauseln, die nicht die leere Klausel enthält, ist stets erfüllbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: Es kommen keine positiven Literale vor, oder es kommen keine negativen Literale vor, oder es kommen keine einelementigen Klauseln vor.

(iii) Zeigen Sie: Eine Menge von Hornformeln ist genau dann erfüllbar, wenn man durch sukzessive *Unit-Resolution* nicht die leere Klausel erhält. Unit-Resolution heißt, dass nur Resolventen von einer einelementigen Klausel mit einer anderen Klausel betrachten werden.

Abgabe bis Montag 21.11.2016, 10:15 Uhr,
im Briefkasten in Gebäude 51 (siehe Briefkastenaufschrift)
Auf die Abgaben gehören die Namen der Abgebenden und die Gruppennummer!!!