Dozent: PD Dr. Markus Junker
Assistent: Andreas Claessens

BLATT 14

(30.01.2017)

Aufgabe 1

Skizzieren Sie Turingmaschinen, die

(a) bei Eingabe von n (im unären System, d.h. n Striche) 2^n berechnet.

(b) bei Eingabe von n (im unären System, d.h. n Striche) $n!$ berechnet.

Hinweis: Sie können annehmen, dass es eine Turingmaschine gibt, die multiplizieren kann.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m, n) \mapsto \frac{1}{2}(m^2 + n^2 + 2mn + 3m + n)$$

eine Bijektion ist.

(b) Sei $\mathbb{N}^*$ die Menge der endlichen Tupel aus $\mathbb{N}$ und sei p_i die i-te Primzahl.
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N},\ (n_1, \dots, n_k) \mapsto p_1^{n_1+1} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k+1}$$

eine Injektion ist. Dabei ist das „leere Produkt“ gleich 1.
Hinweis: Sie können voraussetzen, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass sich jede semientscheidbare Menge $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uniformisieren lässt, d.h. es gibt eine berechenbare partielle Funktion f mit

- $f(x)$ ist genau dann unbestimmt, wenn es kein $y \in \mathbb{N}$ gibt mit $(x, y) \in R$.
- $(x, f(x)) \in R$ für alle x, für die $f(x)$ existiert.

Aufgabe 4

Sei $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die folgendermaßen definierte Ackermann-Funktion

$$\begin{aligned} A(0,y) &= y+2 \\ A(x+1,0) &= A(x,1) \\ A(x+1,y+1) &= A(x, A(x+1,y)) \end{aligned}$$

Sei $A_n(y) := A(n,y)$

(a) Bestimmen Sie A_0, A_1, A_2 und A_3.

(b) Zeigen Sie, dass A wohldefiniert und intuitiv berechenbar ist, d.h. dass für jedes $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eindeutig ist und man $A(x,y)$ theoretisch von Hand bestimmen kann.

Bonusaufgabe

Sei A die Ackermannfunktion aus Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass es kein n gibt mit $A_n(y) \geq A(y,y)$ für alle $y \in \mathbb{N}$.
Mögliches Vorgehen: Zeigen Sie folgende Ungleichungen:

- $A(x,y) > y$
- $A(x,y) < A(x,y+1)$
- $A(x,y+1) \leq A(x+1,y)$
- $A(x,y) < (Ax+1,y)$

Abgabe bis Montag 06.02.2017, 10:15 Uhr,
im Briefkasten in Gebäude 51 (siehe Briefkastenaufschrift)
Auf die Abgaben gehören die Namen der Abgebenden und die Gruppennummer!!!