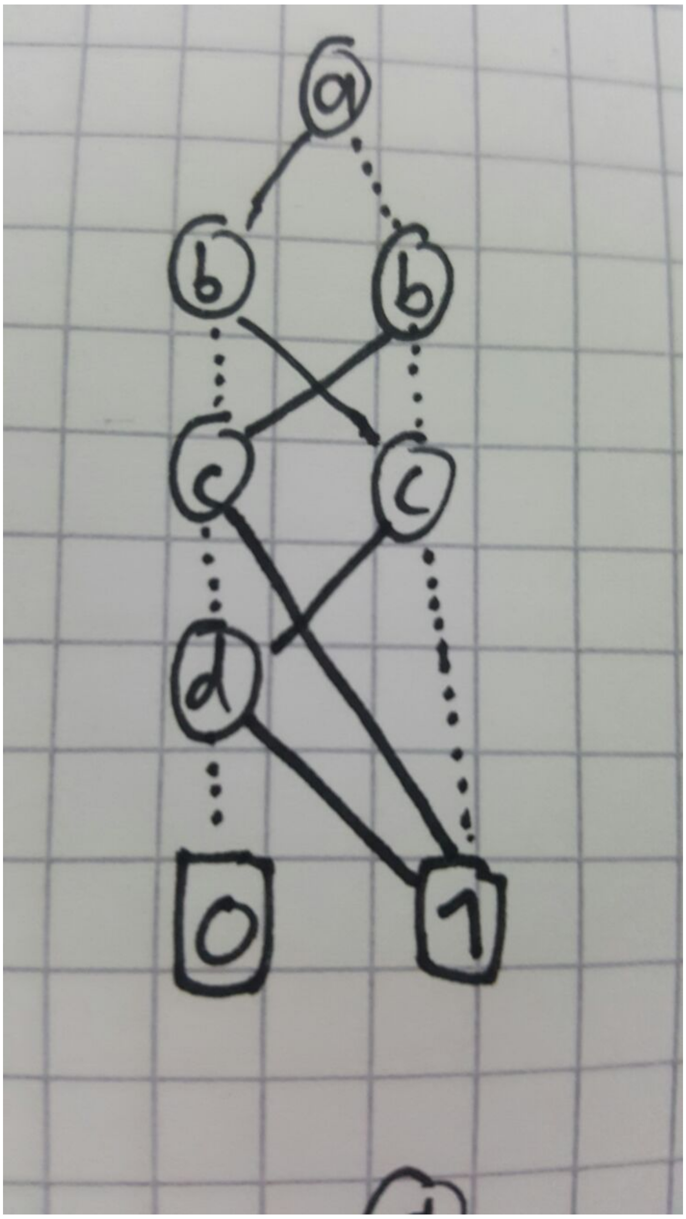
Fisnik Zeqiri 4306430
Felix Karg 4342014

27. Januar 2017

Antworten zum Übungsblatt Nr. 11

Aufgabe 1



- DNF: $(a' \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge' c) \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c') \vee d$
- KNF: $((a \vee b' \vee c') \wedge (a' \vee b \vee c') \wedge (a' \vee b' \vee c) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge d')'$

Aufgabe 2

a)
Bedingend durch die Existenz neutraler Elemente (Axiom) sowie die Idempotenz (Herleitbar) ist offensichtlich dass es entweder ein Element gibt dass gleichzeitig das 0- sowie das 1-Element ist, welches gleichzeitig sein eigenes Komplement sein müsste (dann wären an sich alle Axiome erfüllt), da es allerdings ein weiteres (ungleiches !) Element gibt, lassen sich Konjunktion, Disjunktion und das Komplement offensichtlicherweise nur dann sinnvoll definieren, wenn eines Davon zumindest Äquivalent der 1 ist, und das andere das entsprechende Komplement (also 0) ist. □

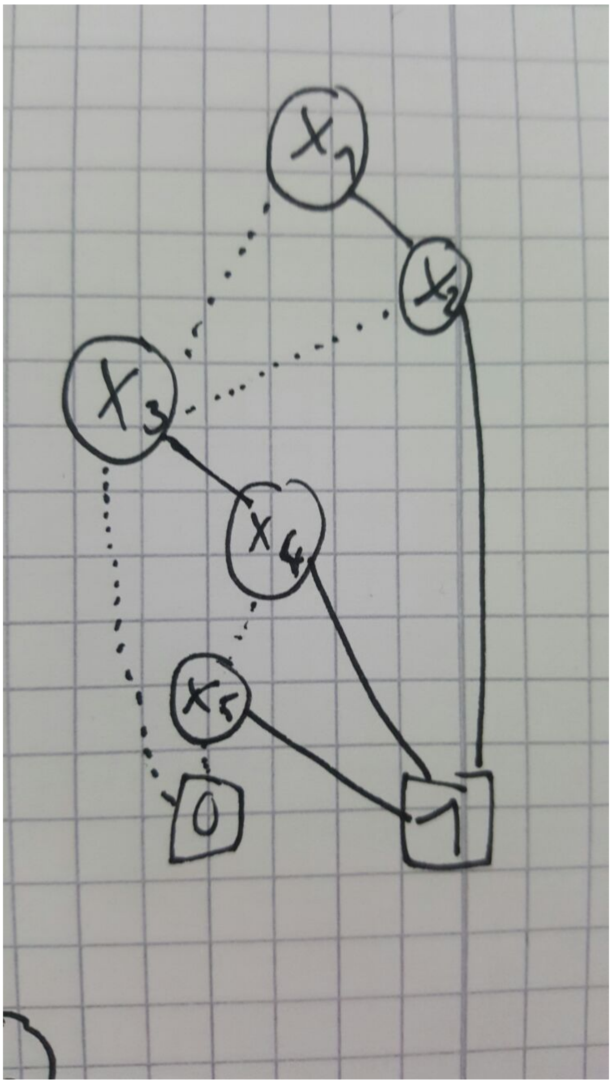
b)
Beh.: Es ist (in einer Booleschen Algebra) nicht möglich, dass ein Element das Komplement seiner selbst ist.
Bew.: Angenommen es gibt so ein Element a. Dann ist laut der Eindeutigkeit des Komplements (herleitbar) sowohl $a * (\ a) = a * a = 1$ als auch $a + (\ a) = a + a = 0$, womit laut Idempotenz (Axiom) a also gleichzeitig $a = 0$ als auch $a = 1$ sein müsste, Widerspruch! Es kann also kein Element das Komplement seiner selbst sein.

In einer Boole'schen Algebra muss es zu jedem Element ein Komplement geben. Addition sowie Multiplikation (in unserem Fall Disjunktion und Konjunktion) lassen sich auch für Drei-Elementrige Körper sinnvoll definieren (Beweis: entweder bekannt oder Übung!), allerdings nicht Negation. Da unser neues Element a ungleich 1 und ungleich 0 ist, muss auch das Komplement ungleich der beiden sein (Doppelte Negation), da wir allerdings nur dieses Dritte Element ('zur Verfügung') haben, müsste es sein eigenes Komplement sein, welches wir bereits bewiesen haben dass es in einer Boole'schen Algebra nicht möglich ist! □

Aufgabe 3

a) $f_{x2} = x_1$
$f_{x3.1} = x_1' + x_2'$
$f_{x3.2} = x_1 x_2$
$f_{x4} = x_1' x_3 + x_1 x_2' x_3$
$f_{x5} = x_1' x_3 x_4' + x_1 x_2' x_3 x_4'$
$f_{on} = f_{x3} * x_3' + f_{x3} * x_3 + f_{x4} * x_4 + f_{x5} * x_5$
$f_{on} = x_1' x_3 x_4 + x_1' x_3 x_4' x_5 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3' + x_1 x_2' x_3 x_4 + x_1 x_2' x_3 x_4' x_5$

b) Das BDD ist geordnet, jedoch nicht reduziert. wenn $x_1 = x_2 = 1$ sind, ist es egal was x_3 ist.



Aufgabe 4

Beh.: Zu jedem Boole'schen Ausdruck $e \in BE(X_n)$ existiert ein Schaltkreis SK_e, der e berechnet.

Bew.: Induktion über Boole'sche Ausdrücke und Schaltkreise.
Boole'sche Algebra: $(M, 0, 1, \vee, \wedge, ^c)$
IA: Die Elemente 0 und 1 lassen sich einfach als SK darstellen, man verbindet einfach GND bzw. VCC mit dem Ausgang.
IV: Für die Boole'schen Ausdrücke a, b gibt es bereits Schaltkreise c, d die diese Berechnen.
IS: Dann gibt es auch Schaltreise für die Ausdrücke a^c, $a \vee b$, $a \wedge b$. Bew.: Um a^c zu be-

rechnen, also das Komplement von a, nehmen wir den a-Berchnenden SK c und negieren das Ergebnis dessen ($notc$).
Um nun $a \vee b$ bzw. $a \wedge b$ zu berechnen, Nehmen wir die Ergebnisse der SK c, d, und Ver-Odern bzw. Ver-Unden die Ergebnisse, Fertig. $\square$

Aufgabe 5

ZZ:
Absorption: $x + (x * y) = x\ x * (x + y) = x$
Komplement: $x + (y *\ \ y) = x\ x * (y +\ \ y) = x$
Für Boole'sche Potenzmengenalgebra Pot(A).

Bekannt: x und y sind jeweils Mengen, $\cup = \vee$, $\cap = \wedge$.

Absorption: $x + (x * y) = x \sim x \cup (x \cap y) = x$.
Der schnitt zwischen x und y ist Zwingend eine Menge kleiner x, wessen Elemente aber zwingend in x enthalten sein müssen (Schnitt). Die Vereinigung mit x ist also eine Vereinigung von x mit Elementen die zwingend schon in x enthalten sein müssen (oder der leeren Menge, aber dann ist die Vereinigung auch x).

Absorption $x * (x + y) = x \sim x \cap (x \cup y) = x$.
Hier wird x mit y Vereinigt, was eine Menge gibt die vermutlich größer x ist, allerdings wird danach wieder mit x geschnitten. Es sollte offensichtlich sein, dass hier nun wieder x das ergebnis ist, da x Geschnitten mit einer Menge die x und mehr Elemente enthält, wieder nur x ist.

Komplement: $x + (y* \sim y) = x \sim x \cup (y \cap y^c) = x$.
y geschnitten mit dem Komplement seiner selbst, also die Ganze Menge ohne y ist gezwungenermaßen die Leere Menge, da in der Negation von y alle Elemente enthalten sind, die nicht in y enthalten sind. x Vereinigt mit der Leeren Menge ist offensichtlicherweise wieder x.

Komplement: $x * (y+ \sim y) = x \sim x \cap (y \cup y^c) = x$.
y Vereinigt mit seinem Komplement ist bekannterweise die Ganze Menge, und x Geschnitten mit der Ganzen Menge ist trivialerweise wieder x.