Kapitel 2 – Kodierung

1. Kodierung von Zeichen
2. **Kodierung von Zahlen**
3. Anwendung: ReTI

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Dr. Tobias Schubert, Dr. Ralf Wimmer

Professur für Rechnerarchitektur

WS 2016/17

Zahlensysteme

Definition

Ein Zahlensystem ist ein Tripel $S = (b, Z, \delta)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $b \geq 2$ ist eine natürliche Zahl, die Basis des Stellenwertsystems.
- Z ist eine b-elementige Menge von Symbolen, den Ziffern.
- $\delta : Z \to \{0, 1, \ldots, b-1\}$ ist eine Abbildung, die jeder Ziffer umkehrbar eindeutig eine natürliche Zahl zwischen 0 und $b-1$ zuordnet.

Beispiele für Zahlensysteme

- Dualsystem:
  $b = 2 \quad Z = \{0, 1\}$

  $\delta(0) \to 0$
  $\delta(1) \to 1$

- Oktalsystem:
  $b = 8 \quad Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

- Dezimalsystem:
  $b = 10 \quad Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

  $\delta(A) = 10$

  $\delta : Z \to \mathbb{N}$

- Hexadezimalsystem:
  $b = 16 \quad Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

  10 11 12 13 14 15

Festkommazahlen

Definition

Eine Festkommazahl ist eine endliche Folge von Ziffern aus einem Zahlensystem zur Basis b mit Ziffernmenge Z.

- Sie besteht aus $n+1$ Vorkommastellen ($n \geq 0$) und $k \geq 0$ Nachkommastellen.

  $\rightsquigarrow$ nicht-negative Zahl

- Der Wert $\langle d \rangle$ einer nicht-negativen Festkommazahl $d = d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0 d_{-1} \dots d_{-k}$ mit $d_i \in Z$ ist gegeben durch

$$\langle d \rangle = \sum_{i=-k}^{n} b^i \cdot \delta(d_i)$$

Festkommazahlen: Schreibweise

Bsp. $n = 1, k = 2$

$d_2 = 01,10_2 \cong$ „$1, \frac{1}{2}$" $= 1{,}5_{10}$

$d_0 \quad d_{-1} \quad d_{-2}$

$2^{-2} = 1/4$

$2^{-1} = 1/2$

- Vorkomma- und Nachkommastellen werden zur Verdeutlichung durch ein Komma oder einen Punkt getrennt:
  $d = d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0 . d_{-1} \ldots d_{-k}$
- Um anzudeuten, welches Zahlensystem zu Grunde liegt, wird gelegentlich die Basis als Index an die Ziffernfolge angehängt.
  - Beispiel ($n = 3, k = 0$) :

Keine Nachkommastelle

$d_3 \; d_2 \; d_1 \; d_0$

0110_2	$=$	6	$= 2^2 + 2^1 = 4 + 2 = 6$
0110_8	$=$	72	$= 8^2 + 8^1 = 64 + 8 = 72$
0110_{10}	$=$	110	✓
0110_{16}	$=$	272	$= 16^2 + 16 = 256 + 16 = 272$

UNI FREIBURG

Negative Festkommazahlen

(Im Folgenden wird Basis 2 angenommen.)

- Bei der Darstellung negativer Festkommazahlen nimmt die höchstwertigste Stelle d_n eine Sonderrolle ein: $d_n = 1 \to$ negative Zahl
  - Ist $d_n = 0$, so handelt es sich um eine nichtnegative Zahl.
- Bei der Darstellung negativer Zahlen gibt es folgende Alternativen:

  $d_n = 0 \to (-1)^0 = 1$

  $d_n = 1 \to (-1)^1 = -1$

  - Darstellung durch Betrag und Vorzeichen:

    $$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots, d_{-k}]_{BV} := (-1)^{d_n} \underbrace{\sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i}$$

    ← Spiegeln „an der 0"

  - Einer-Komplement-Darstellung:

    $$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots, d_{-k}]_1 := \underbrace{\sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i} - d_n(2^n - 2^{-k})$$

  - Zweier-Komplement-Darstellung:

    $$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots, d_{-k}]_2 := \underbrace{\sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i} - d_n\, 2^n$$

  } „Verschieben des Wertebereichs!"

UNI FREIBURG

Betrag und Vorzeichen

Bsp.: $n=3, k=2$

Vz ~ $\underbrace{d_3 d_2 d_1 d_0}_{} . \underbrace{d_{-1}}_{1/2} \underbrace{d_{-2}}_{1/4}$

$$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots, d_{-k}]_{BV} := (-1)^{d_n} \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i$$

7,75 max. Wert $= 2^n - 2^{-k} = 2^3 - 2^{-2} = 8 - 1/4 = 7{,}75$

Beispiel: $n = 2, k = 0$ → keine Nachkommastellen

·(−1)

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_{BV}$	0	1	2	3	0	-1	-2	-3

Bsp. mit $n=2, k=0$: $2^n - 2^{-k} = 2^2 - 2^0 = 4 - 1 = 3$

- Der Zahlenbereich ist symmetrisch:
  - Kleinste Zahl: $-(2^n - 2^{-k})$, größte Zahl: $2^n - 2^{-k}$
- Man erhält zu a die inverse Zahl $= -a$, indem man das erste Bit komplementiert.
- Zwei Darstellungen für die Null (000 und 100 im Beispiel).
- „Benachbarte Zahlen" haben gleichen Abstand 2^{-k}.

Einer-Komplement

$[a]_1 + [a']_1 = \sum a_i'' + \sum a_i'' - \begin{matrix} a_n \cdot (\ldots) \\ a_n' \cdot (\ldots) \end{matrix} = 0$ $\quad = 2^n - 2^{-k}$

größte darst. Wert

$$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_1 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n (2^n - 2^{-k})$$

Beispiel: $n = 2, k = 0$

100 101 11.. 1000 001 010 011

-3 -2 -1 . 1 2 3

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_1$	0	1	2	3	-3	-2	-1	0

$\cong 010$ komp. aller Bits $101 \cong -2$

- Der Zahlenbereich ist symmetrisch: $-(2^n - 2^{-k}) \ldots 2^n - 2^{-k}$
- Zwei Darstellungen für die Null (000 und 111 im Beispiel).
- „Benachbarte Zahlen" haben gleichen Abstand 2^{-k}.
- Man erhält zu a die inverse Zahl, indem man alle Bits komplementiert (siehe Lemma nächste Folie).

Einer-Komplement: Inversion

Lemma

Sei a eine Festkommazahl, a' die Festkommazahl, die aus a durch Komplementieren aller Bits ($0 \to 1, 1 \to 0$) hervorgeht. Dann gilt $[a']_1 = -[a]_1$.

z.z.: $[a]_1 + [a']_1 = 0$

$= [a_1] - [a]_1$

Beweisidee: Addiert man Bits $n-1 \cdots -k$ von a und a', erhält man $111\ldots11$. Das ist aber gerade $(2^n - 2^{-k}) = \underbrace{(a_n + a'_n)}_{=1} \cdot (2^n - 2^{-k})$.

$(a_{n-1}, \ldots, a_{-k})$	011011
$(a'_{n-1}, \ldots, a'_{-k})$	100100
	111111

größte darstellb. Zahl / Betrag

mit $< 111111 > = < (a_{n-1}, \ldots, a_{-k}) > + < (a'_{n-1}, \ldots, a'_{-k}) >$

Zweier-Komplement

100 101 110 111 000 001 010 011

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3

$$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots, d_{-k}]_2 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n\, 2^n$$

Beispiel: $n = 2, k = 0$

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_2$	0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

$= 2^2 - 1 = 3$

- Der Zahlenbereich ist asymmetrisch: $-2^n \dots 2^n - 2^{-k}$
- Die Zahlendarstellung ist eindeutig, auch für die Null.
- „Benachbarte Zahlen" haben gleichen Abstand 2^{-k}.
- Man erhält zu a die inverse Zahl, indem man alle Bits komplementiert und an der niederwertigsten Stelle 1 addiert (siehe Lemma nächste Folie).

UNI FREIBURG

Zweier-Komplement: Inversion

$n=5,\ k=0 \qquad d_5\ d_4\ d_3\ d_2\ d_1\ d_0$

$17_{10} = 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1$

$-17_{10} = 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1$

$2^5 \quad 8 \quad 4 \quad 2 \quad 1$

$= 15$

$15 - 32 = -17_{10}$

Lemma

Sei a eine Festkommazahl, a' die Festkommazahl, die aus a durch Komplementieren aller Bits ($0 \to 1, 1 \to 0$) hervorgeht. Dann gilt $[a']_2 + 2^{-k} = -[a]_2$.

→ kleinste Betrag

Beweisidee: Addiert man Bits $n-1 \dots 0$ von a und a', erhält man $111\dots11$. Addiert man noch $000\dots01$ hinzu, so erhält man gerade $2^n = (a_n + a'_n) \cdot 2^n$.

$$
\begin{array}{lr}
(a_{n-1}, \dots, a_{-k}) & 011011 \\
(a'_{n-1}, \dots, a'_{-k}) & 100100 \\
\text{“}2^{-k}\text{”} & 000001 \\
\hline
 & 1000000
\end{array}
$$

→ $2^n = (2^n - 2^{-k}) + 2^{-k} = 2^n$

mit

$$< 1000000 > = < (a_{n-1}, \dots, a_{-k}) > + < (a'_{n-1}, \dots, a'_{-k}) > + 2^{-k}$$

UNI FREIBURG

Vorteil von Zweier-Komplement

Addition nach Schulmethode

$$\begin{array}{r} -17 \\ +23 \\ \hline 40 \end{array}$$

falsch

- Wir werden später Schaltungen betrachten, die zwei Zahlen als Eingaben nehmen und ihre Summe oder Differenz an den Ausgängen bereit stellen (Addierer, Subtrahierer).

- Es stellt sich heraus, dass diese Schaltungen besonders einfach sind, wenn Negativzahlen im Zweier-Komplement dargestellt werden.

- Daher wird in der Praxis oft die Zweier-Komplement-Darstellung verwendet.

Festkommazahlen - Übersicht

Betrag mit Vorzeichen	Einerkomplement	Zweierkomplement
$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots, d_{-k}]_{BV} := (-1)^{d_n} \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i$	$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots, d_{-k}]_1 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n(2^n - 2^{-k})$	$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots, d_{-k}]_2 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n\, 2^n$

$n = 2,\ k = 0$

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_{BV}$	0	1	2	3	0	-1	-2	-3
$[a]_1$	0	1	2	3	-3	-2	-1	0
$[a]_2$	0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

	symmetrisch	symmetrisch	asymmetrisch
kleinste Zahl	$-(2^n - 2^{-k})$	$-(2^n - 2^{-k})$	-2^n
größte Zahl	$2^n - 2^{-k}$	$2^n - 2^{-k}$	$2^n - 2^{-k}$
Inverses durch	kompl. 1. Bit	kompl. alle Bits	kompl. alle Bits, add. 1
Null	2 Darstellungen	2 Darstellungen	1 Darstellung
Abstand	2^{-k}	2^{-k}	2^{-k}

Festkommazahlen - Übersicht

Betrag mit Vorzeichen	**Einerkomplement**	**Zweierkomplement**
$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_{BV} := (-1)^{d_n} \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i$	$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_1 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n(2^n - 2^{-k})$	$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n$

$n = 2,\ k = 0$

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_{BV}$	0	1	2	3	0	-1	-2	-3
$[a]_1$	0	1	2	3	-3	-2	-1	0
$[a]_2$	0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

	symmetrisch	symmetrisch	asymmetrisch
kleinste Zahl	$-(2^n - 2^{-k})$	$-(2^n - 2^{-k})$	-2^n
größte Zahl	$2^n - 2^{-k}$	$2^n - 2^{-k}$	$2^n - 2^{-k}$
Inverses durch	kompl. 1. Bit	kompl. alle Bits	kompl. alle Bits, add. 1
Null	2 Darstellungen	2 Darstellungen	1 Darstellung
Abstand	2^{-k}	2^{-k}	2^{-k}

b) $-7-(-7)=-7+7=0$

-7

7

Frage: Welche der Aussagen sind wahr für die Zahl $[1001]_2$?

$d_3\ d_2\ d_1\ d_0$

$n=3$

$k=0$

a. $[1001]_2 = [0111]_{BV}$ Nein

b. $[1001]_2 - [1001]_2 = [10010]_2$ -14 Nein

c. $[1001]_2$ ist das (additive) Inverse zu $[0111]_2$ ✓

d. $[1001]_2 = [1000]_1$ ✓

-7

$1001 \xrightarrow{\text{INV.}} 0110 \xrightarrow{+1} 0111$ ✓

$(-2^n+2^{-k})+0=-7$

Probleme von Festkommazahlen

- Betrachte die Menge aller Zahlen, die eine Zweier-Komplement-Darstellung mit $\underline{n}$ Vor- und $\underline{k}$ Nachkommastellen haben.
  - Keine ganz großen bzw. kleinen Zahlen darstellbar!
    - Zahlen mit größtem Absolutbetrag: -2^n und $2^n - 2^{-k}$
    - Zahlen mit kleinstem Absolutbetrag: -2^{-k} und 2^{-k}
- Operationen sind nicht abgeschlossen!
  - $\underline{2^{n-1} + 2^{n-1}}$ ist nicht darstellbar, obwohl die Operanden darstellbar sind.
- Assoziativ- und Distributivgesetz gelten nicht, da bei ihrer Anwendung evtl. der darstellbare Zahlenbereich verlassen wird!
  - Beispiel: $\underbrace{(2^{n-1} + 2^{n-1})}_{\text{Überlauf} \to 0} \underset{-2^{n-1}}{- 2^{n-1}} \neq \underbrace{2^{n-1}}_{2^{n-1}} + \underbrace{(\underbrace{2^{n-1}} - \underbrace{2^{n-1}})}_{=0}$

Gleitkomma-Zahlen

Vor + Nachkommastellen

„Position des Komma einzustellen"

- Die verfügbaren Bits werden in Vorzeichen S, Exponent E und Mantisse M unterteilt.

Gleitkomma:

0

- $a = (-1)^S \cdot M \cdot 2^E$.

Festkomma:

0

- Einfache Genauigkeit (insg. 32 Bit)

31	30 29 28 27 26 25 24 23	22 21 20 19 ... 3 2 1 0
S	Exponent E	Mantisse M

- Doppelte Genauigkeit (insg. 64 Bit)

63	62 61 60 59 ... 54 53 52	51 50 49 48 ... 3 2 1 0
S	Exponent E	Mantisse M

  - Implementierungsdetails: siehe z.B. IEEE754-Standard

UNI FREIBURG