

Kapitel 3 – Kombinatorische Logik

1. Kombinatorische Schaltkreise
 2. **Normalformen, zweistufige Synthese**
 3. Berechnung eines Minimalpolynoms
 4. Arithmetische Schaltungen
 5. Anwendung: ALU von ReTI
-

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Dr. Tobias Schubert, Dr. Ralf Wimmer

Professur für Rechnerarchitektur
WS 2016/17

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 2 \quad \text{reell}$$
$$f(x,y,z) = \underbrace{x'y}_{\text{Monom}} + xy'$$

■ Ziel:

Wir werden zeigen, dass sich jede boolesche Funktion als ein **Polynom**, also eine **Disjunktion** (ODER-Verknüpfung) von **Monomen**, die ihrerseits **Konjunktionen** (UND-Verknüpfungen) von Eingangsvariablen und negierten Eingangsvariablen sind, darstellen lässt.

■ Wir werden für solche Darstellungen **Kostenkriterien** aufstellen und diese optimieren.

■ **Monome** und **Polynome** sind spezielle **boolesche Ausdrücke** (s. auch Kap. 7)

Beispielfunktion

- 3 Eingangsvariablen x_1, x_2, x_3
- Wird im Folgenden zur Illustration verwendet.

x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Definition

Als **Literal** einer booleschen Funktion $f \in \mathbb{B}_n$ wird der Ausdruck x_i oder x'_i bezeichnet, wobei $x_i, i \in 1, \dots, n$, eine Eingangsvariable von f .

- x_i (auch x_i^1 geschrieben) wird **positives Literal**,
 x'_i (auch x_i^0 geschrieben) wird **negatives Literal** genannt.

- Literale werden zur kompakten Beschreibung von booleschen Funktionen verwendet. So bezeichnet das Literal x_i die boolesche Funktion $g \in \mathbb{B}_n$ mit $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ genau dann, wenn $\alpha_i = 1$. Analog gilt: x'_i bezeichnet die boolesche Funktion $h \in \mathbb{B}_n$ mit $h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ genau dann, wenn $\alpha_i = 0$. Wir schreiben vereinfachend auch $g = x_i$ bzw. $h = x'_i$.

Definition

„leeres“ Monom

„Verknüpfung“

- Ein **Monom** ist eine Konjunktion von Literalen, in der kein Literal mehr als einmal vorkommt und zu keiner Variable sowohl das positive als auch das negative Literal vorkommt. Außerdem ist „1“ ein Monom.

- $x_1 x_2 x'_3$ und $x'_1 x_3$ sind Monome, $x_2 x_3 x'_3$ ist kein Monom.

- Ein Monom heißt **vollständig** oder **Minterm**, wenn jede Variable entweder als positives oder als negatives Literal vorkommt.

- Wenn drei Variablen x_1, x_2, x_3 betrachtet werden, ist $x_1 x_2 x'_3$ ein Minterm, $x'_1 x_3$ ist kein Minterm.

- Für eine Eingabebelegung $\alpha \in \mathbb{B}^n$ heißt

$m(010) \rightarrow \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$

$$m(\alpha) = \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \quad (\text{Notation: } x_i^1 := x_i, x_i^0 := x'_i)$$

der zu α gehörende Minterm.

- Beispiel: Das Monom $m = x_i x_j'$ bezeichnet die boolesche Funktion $f \in \mathbb{B}_n$ mit $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ genau dann, wenn $\alpha_i = 1$ und $\alpha_j = 0$. Wir schreiben vereinfachend auch $f = x_i x_j'$.

- Eine Disjunktion von paarweise verschiedenen Monomen heißt **Polynom**. Sind alle Monome des Polynoms vollständig, so heißt das Polynom **vollständig**.

Beispiel: Bei einer booleschen Funktion mit drei Variablen x_1, x_2, x_3 wäre:

- $x'_1x_2 + x'_2x_3$ ein Polynom.
- $x'_1x'_2x_3 + x_1x'_2x_3$ ein vollständiges Polynom.
- Das Polynom $x'_1x_2 + x'_2x_3$ beschreibt die boolesche Funktion $f \in \mathbb{B}_3$ mit $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ genau dann, wenn $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ oder $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$. Wir schreiben vereinfachend auch $f = x'_1x_2 + x'_2x_3$.

Disjunktive Normalform

$$\text{DNF} = \overline{x_1} x_2 + \overline{x_2} x_3$$

$$\text{KNF} = (\overline{x_1} \vee x_2) \cdot (\overline{x_2} \vee x_3)$$

- Eine **disjunktive Normalform** (DNF) von f ist ein Polynom, das f beschreibt. Eine **kanonische disjunktive Normalform** (KDNF) von f ist ein vollständiges Polynom von f .
- $f_1 = x_1'x_2' + x_2'x_3 + x_1x_2$ ist in DNF, aber nicht in KDNF.

$$f_1 = \overline{x_1} x_2 + \overline{x_2}$$

$$f_2 = \overline{x_1} x_2 + \frac{x_1 \overline{x_2} + \overline{x_1} \overline{x_2}}{(x_1 + \overline{x_1}) \overline{x_2}} = \overline{x_2}$$

Bestimmung der kanonischen disjunktiven Normalform

- Für $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ heißt $ON(f) := \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid f(\alpha) = 1\}$ die **Erfüllbarkeitsmenge** von f .
- Die KDNF ist gegeben durch $f = \sum_{\alpha \in ON(f)} m(\alpha)$
- Die KDNF ist (bis auf Anordnung von Literalen in Mintermen und von Termen im Polynom) eindeutig.
- Beispiel: KDNF für $f_1 = x'_1 x'_2 + x'_2 x_3 + x_1 x_2$

$$\begin{aligned} f_1 &= m(000) + m(001) \\ &\quad + m(101) + m(110) + m(111) \\ &= x'_1 x'_2 x'_3 + x'_1 x'_2 x_3 \\ &\quad + x_1 x'_2 x_3 + x_1 x_2 x'_3 + x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

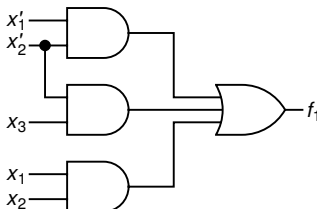
x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Anmerkung: Analog zur Erfüllbarkeitsmenge ist $OFF(f) := \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid f(\alpha) = 0\}$ als die **Unerfüllbarkeitsmenge** definiert.

- Erste Möglichkeit: Benutze „gewöhnliche“ UND- und ODER-Gatter.
- Zweite Möglichkeit: PLAs
 - Programmierbare logische Felder können nur Funktionen in DNF implementieren.
 - Sie benötigen dafür weniger Transistoren als eine Realisierung mit UND- und ODER-Gattern.

Realisierung durch Logikgatter

- Bilde erst alle Monome durch UND-Gatter.
- Verbinde dann alle Monome mit ODER-Gattern.
 - Notation: Man verzichtet in der Regel auf die Abbildung von Invertern.

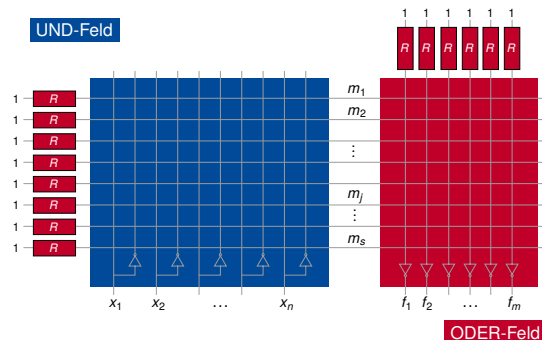


- Die Kosten ergeben sich dann aus allen benötigten UND- und ODER-Gattern.

Programmierbare logische Felder (PLA)

Zweistufige Darstellung zur Realisierung von booleschen Polynomen.

$$f_j = m_{j1} + m_{j2} + \dots + m_{jk} \text{ mit } m_{iq} \text{ aus } \{m_1, \dots, m_s\}$$



Enthält Monom m_j k Literale, so werden k Transistoren in der entsprechenden Zeile des **UND-Feldes** benötigt.

Besteht die Beschreibung von Funktion f_t aus p Monomen, so benötigt man p Transistoren in der entsprechenden Spalte des **ODER-Feldes**.

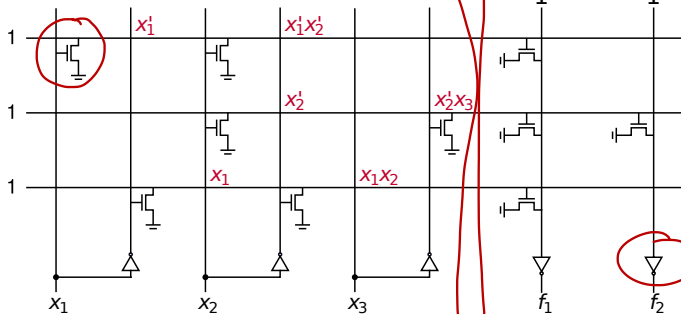
Fläche: $\sim (m + 2n) \times (\text{Anzahl der benötigten Monome})$

Beispiel

$$f_1 = x_1'x_2' + x_2'x_3 + x_1x_2$$

$$f_2 = x_2'x_3$$

1-Leitung 0 $\Leftrightarrow x_1=1 \vee x_2=1$

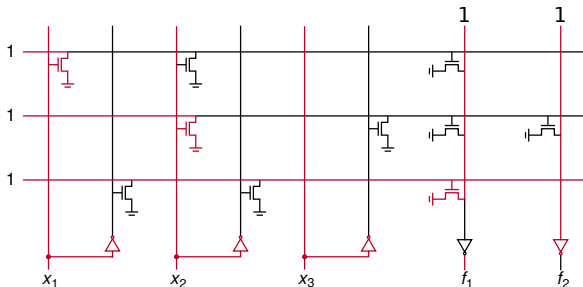


Beispiel

$$f_1 = x_1'x_2' + x_2'x_3 + x_1x_2$$

$$f_2 = x_2'x_3$$

Bei Belegung von $x_1 = 1, x_2 = 1$ und $x_3 = 1$ liegt folgende Situation vor:



- Sei $q = q_1 \cdot \dots \cdot q_r$ ein Monom, dann sind die **Kosten** $|q|$ von q gleich der Anzahl der zur Realisierung von q benötigten Transistoren im PLA, also $|q| := r$.
- Seien p_1, \dots, p_m Polynome, dann bezeichne $M(p_1, \dots, p_m)$ die Menge der in diesen Polynomen verwendeten Monome.
 - Die **primären Kosten** $cost_1(p_1, \dots, p_m)$ einer Menge p_1, \dots, p_m von Polynomen sind gleich der Anzahl der benötigten Zeilen im PLA, um p_1, \dots, p_m zu realisieren, also $cost_1(p_1, \dots, p_m) = |M(p_1, \dots, p_m)|$.
 - Die **sekundären Kosten** $cost_2(p_1, \dots, p_m)$ einer Menge $\{p_1, \dots, p_m\}$ von Polynomen sind gleich der Anzahl der benötigten Transistoren im PLA, also
$$cost_2(p_1, \dots, p_m) = \underbrace{\sum_{q \in M(p_1, \dots, p_m)} |q|}_{\text{und-Feld}} + \underbrace{\sum_{i=1, \dots, m} |M(p_i)|}_{\text{oder-Feld}}.$$

- Sei im Folgenden $cost = (cost_1, cost_2)$ die Kostenfunktion mit der Eigenschaft, dass für zwei Polynommengen $\{p_1, \dots, p_m\}$ und $\{p'_1, \dots, p'_m\}$ die Ungleichung

$$cost(p_1, \dots, p_m) \leq cost(p'_1, \dots, p'_m)$$

gilt, wenn

- entweder $cost_1(p_1, \dots, p_m) < cost_1(p'_1, \dots, p'_m)$
- oder $cost_1(p_1, \dots, p_m) = cost_1(p'_1, \dots, p'_m)$
und $cost_2(p_1, \dots, p_m) \leq cost_2(p'_1, \dots, p'_m)$



Welche der folgenden PLAs ist die kostengünstigste Lösung?

- a. PLA 1 mit 10 Zeilen und 19 Transistoren.
- b. PLA 2 mit 15 Zeilen und 30 Transistoren.
- c. PLA 3 mit 12 Zeilen und 15 Transistoren.
- d. PLA 4 mit 12 Zeilen und 19 Transistoren.

Das Problem der zweistufigen Logikminimierung

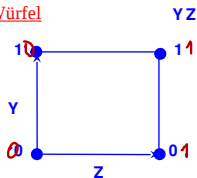
- **Gegeben:** Eine boolesche Funktion $f = (f_1, \dots, f_m)$ in n Variablen und m Ausgängen in Form einer Tabelle der Dimension $(n+m) \cdot 2^n$ oder einer Menge von m Polynomen $\{q_1, \dots, q_m\}$ mit $f_i = q_i$.
- **Gesucht:** m Polynome p_1, \dots, p_m , so dass p_i für alle i der Funktion f_i entspricht und die **Kosten** $cost(p_1, \dots, p_m)$ **minimal** sind.
- Ab sofort werden nur noch Funktionen mit einem Ausgang betrachtet.

Veranschaulichung von Monomen und Polynomen

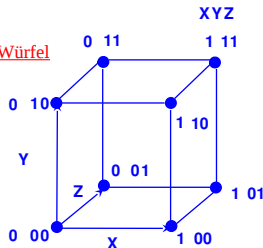
1-dim Würfel



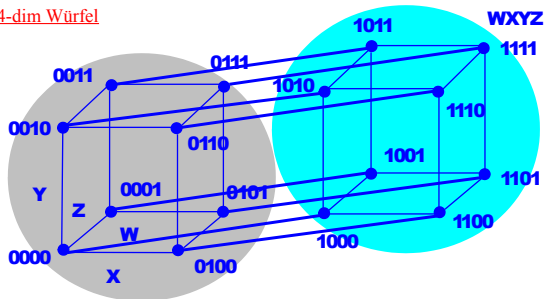
2-dim Würfel



3-dim Würfel



4-dim Würfel

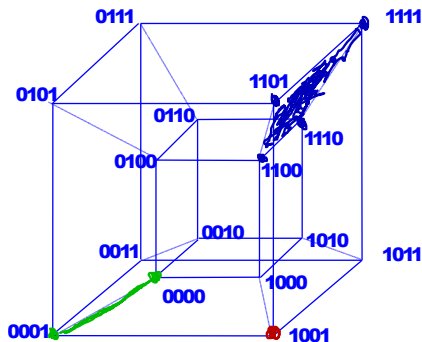


Veranschaulichung durch Würfel

- Jede boolesche Funktion f in n Variablen und einem Ausgang kann über einen n -dimensionalen Würfel durch Markierung der $ON(f)$ -Menge spezifiziert werden.

- **Beispiel:**

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{x_1 x_2}_{\text{blue}} + \underbrace{x_1' x_2' x_3'}_{\text{green}} + \underbrace{x_1 x_2' x_3' x_4}_{\text{red}}$$



Monome und Polynome als Teilwürfel

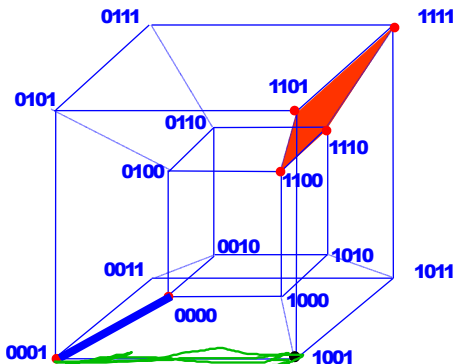
- Monome der Länge k entsprechen $(n - k)$ -dimensionalen Teilwürfeln!
- Ein Polynom entspricht einer Vereinigung von Teilwürfeln.

- **Beispiel:**

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= x_1 x_2 + x_1' x_2' x_3'$$

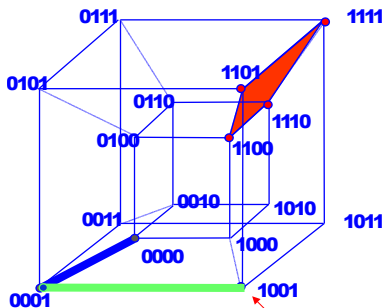
$$+ x_1 x_2' x_3' x_4$$



- **Gegeben:** Boolesche Funktion f in n Variablen und **einem** Ausgang, in Form eines markierten n -dimensionalen Würfels.
- **Gesucht:** Eine **minimale Überdeckung** der markierten Knoten durch **maximale Teilwürfel** im n -dimensionalen Würfel.

Entspricht einer Minimallösung:

$$x_1 x_2 + x'_1 x'_2 x'_3 + x'_2 x'_3 x_4$$



nicht maximal !!

Zweistufige Logikminimierung als Überdeckungsproblem auf dem Würfel

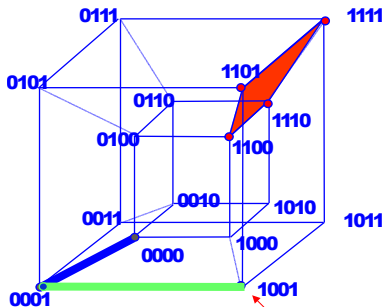
- **Gegeben:** Boolesche Funktion f in n Variablen und einem Ausgang, in Form eines markierten n -dimensionalen Würfels.



- **Gesucht:** Eine **minimale Überdeckung** der markierten Knoten durch **maximale Teilwürfel** im n -dimensionalen Würfel.

Entspricht einer Minimallösung:

$$x_1 x_2 + x'_1 x'_2 x'_3 + x'_2 x'_3 x_4$$



nicht maximal !!

Gegeben ein PLA mit $m > 1$ Ausgängen und jede Funktion ist durch ein Minimalpolynom, also eine Minimallösung, die die Funktion überdeckt wie auf der vorherigen Folie, realisiert. Sind die gesamten Kosten des PLA folglich auch minimal?

- a. Ja.
- b. Nein.

Definition

Eine boolesche Funktion $f \in \mathbb{B}_n$ ist **kleiner gleich** einer anderen booleschen Funktion $g \in \mathbb{B}_n$ ($f \leq g$), wenn $\forall \alpha \in \mathbb{B}_n : f(\alpha) \leq g(\alpha)$. (Das heißt, wenn f an einer Stelle 1 ist, dann auch g .)

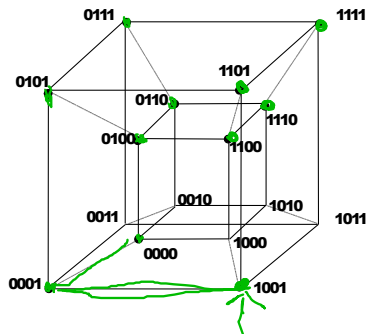
Definition

Sei f eine boolesche Funktion mit einem Ausgang. Ein **Implikant** von f ist ein Monom q mit $q \leq f$. Ein **Primimplikant** von f ist ein maximaler Implikant q von f , das heißt es gibt keinen Implikanten s ($s \neq q$) von f mit $q \leq s$.

Implikanten und Primimplikanten können durch n -dimensionale Würfel veranschaulicht werden.

Veranschaulichung durch Würfel

- Ein **Implikant** von f ist ein Teilwürfel, der nur markierte Knoten enthält.
- Ein **Primimplikant** von f ist ein maximaler Teilwürfel mit dieser Eigenschaft.

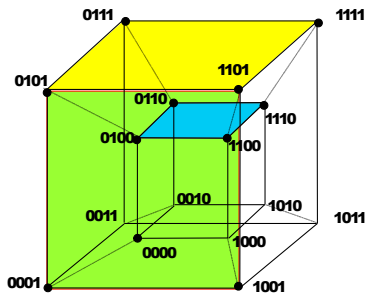


Implikanten

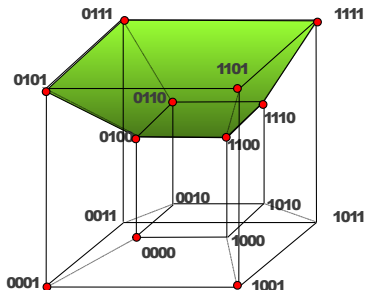
- alle markierten Knoten
- alle Kanten, deren Ecken alle markiert sind
- alle Flächen, deren Ecken alle markiert sind
- alle 3-dimensionalen Würfel, deren Ecken alle markiert sind

Allgemein

- Die Implikanten sind die Teilwürfel, deren Ecken alle markiert sind.



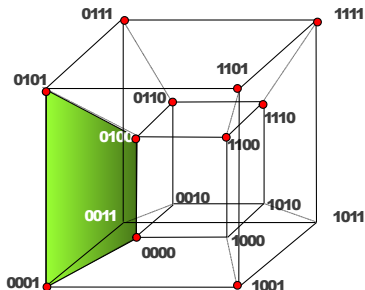
Bestimmung von Primimplikanten



Es gibt 3 **Primimplikanten**, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

■ x_2

Bestimmung von Primimplikanten

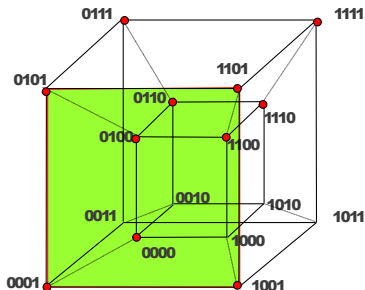


Es gibt 3 **Primimplikanten**, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

■ x_2

■ $x'_1 x'_3$

Bestimmung von Primimplikanten



Es gibt 3 **Primimplikanten**, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2
- $x'_1 x'_3$
- $x'_3 x_4$

Polynome und Implikanten einer Funktion f

Lemma

Die Monome eines Polynoms p von f sind alle Implikanten von f .

Beweis:

- Enthält ein Polynom p von f ein Monom m , welches nicht Implikant von f ist, so gilt nicht: $m \leq f$
- Das heißt es gibt eine Belegung $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der Variablen (x_1, \dots, x_n) mit
 - $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$
 - $m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$, also auch $p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$
- Das heißt Monom m ist ein Teilwürfel, bei dem eine Ecke nicht markiert ist.

Demnach ist Polynom p kein Polynom von f .

⇒ **Widerspruch!**

