Kapitel 2 – Kodierung

1. Kodierung von Zeichen
2. **Kodierung von Zahlen**
3. Anwendung: ReTI

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Dr. Tobias Schubert, Dr. Ralf Wimmer

Professur für Rechnerarchitektur

WS 2016/17

Zahlensysteme

Definition

Ein Zahlensystem ist ein Tripel $S = (b, Z, \delta)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $b \geq 2$ ist eine natürliche Zahl, die Basis des Stellenwertsystems.
- Z ist eine b-elementige Menge von Symbolen, den Ziffern.
- $\delta : Z \to \{0, 1, \ldots, b-1\}$ ist eine Abbildung, die jeder Ziffer umkehrbar eindeutig eine natürliche Zahl zwischen 0 und $b-1$ zuordnet.

Beispiele für Zahlensysteme

- Dualsystem:
  $b = 2 \quad Z = \{0, 1\}$
- Oktalsystem:
  $b = 8 \quad Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- Dezimalsystem:
  $b = 10 \quad Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Hexadezimalsystem:
  $b = 16 \quad Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Festkommazahlen

Definition

Eine Festkommazahl ist eine endliche Folge von Ziffern aus einem Zahlensystem zur Basis b mit Ziffernmenge Z.

- Sie besteht aus $n+1$ Vorkommastellen ($n \geq 0$) und $k \geq 0$ Nachkommastellen.
- Der Wert $\langle d \rangle$ einer nicht-negativen Festkommazahl $d = d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0 d_{-1} \ldots d_{-k}$ mit $d_i \in Z$ ist gegeben durch

$$\langle d \rangle = \sum_{i=-k}^{n} b^i \cdot \delta(d_i)$$

Festkommazahlen: Schreibweise

- Vorkomma- und Nachkommastellen werden zur Verdeutlichung durch ein Komma oder einen Punkt getrennt:
  $d = d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0 . d_{-1} \ldots d_{-k}$
- Um anzudeuten, welches Zahlensystem zu Grunde liegt, wird gelegentlich die Basis als Index an die Ziffernfolge angehängt.
  - Beispiel $(n = 3, k = 0)$:

$$
\begin{aligned}
0110_2 &= 6 \\
0110_8 &= 72 \\
0110_{10} &= 110 \\
0110_{16} &= 272
\end{aligned}
$$

Negative Festkommazahlen

(Im Folgenden wird Basis 2 angenommen.)

- Bei der Darstellung negativer Festkommazahlen nimmt die höchstwertigste Stelle d_n eine Sonderrolle ein:
  - Ist $d_n = 0$, so handelt es sich um eine nichtnegative Zahl.
- Bei der Darstellung negativer Zahlen gibt es folgende Alternativen:
  - Darstellung durch Betrag und Vorzeichen:

    $$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_{BV} := (-1)^{d_n} \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i$$
  - Einer-Komplement-Darstellung:

    $$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_1 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n(2^n - 2^{-k})$$
  - Zweier-Komplement-Darstellung:

    $$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_2 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n\, 2^n$$

Betrag und Vorzeichen

$$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_{BV} := (-1)^{d_n} \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \, 2^i$$

Beispiel: $n = 2, k = 0$

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_{BV}$	0	1	2	3	0	-1	-2	-3

- Der Zahlenbereich ist symmetrisch:
  - Kleinste Zahl: $-(2^n - 2^{-k})$, größte Zahl: $2^n - 2^{-k}$
- Man erhält zu a die inverse Zahl, indem man das erste Bit komplementiert.
- Zwei Darstellungen für die Null (000 und 100 im Beispiel).
- „Benachbarte Zahlen” haben gleichen Abstand 2^{-k}.

UNI FREIBURG

Einer-Komplement

$$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_1 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n(2^n - 2^{-k})$$

Beispiel: $n = 2, k = 0$

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_1$	0	1	2	3	-3	-2	-1	0

- Der Zahlenbereich ist symmetrisch: $-(2^n - 2^{-k}) \ldots 2^n - 2^{-k}$
- Zwei Darstellungen für die Null (000 und 111 im Beispiel).
- „Benachbarte Zahlen” haben gleichen Abstand 2^{-k}.
- Man erhält zu a die inverse Zahl, indem man alle Bits komplementiert (siehe Lemma nächste Folie).

Einer-Komplement: Inversion

Lemma

Sei a eine Festkommazahl, a' die Festkommazahl, die aus a durch Komplementieren aller Bits ($0 \to 1, 1 \to 0$) hervorgeht. Dann gilt $[a']_1 = -[a]_1$.

Beweisidee: Addiert man Bits $n-1 \cdots -k$ von a und a', erhält man $111\dots11$. Das ist aber gerade $(2^n - 2^{-k}) = (a_n + a'_n) \cdot (2^n - 2^{-k})$.

$$\begin{array}{ll}
(a_{n-1},\dots,a_{-k}) & 011011 \\
(a'_{n-1},\dots,a'_{-k}) & 100100 \\
\hline
 & 111111
\end{array}$$

mit $< 111111 > = < (a_{n-1},\dots,a_{-k}) > + < (a'_{n-1},\dots,a'_{-k}) >$

Zweier-Komplement

$$[d_n, d_{n-1}, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-k}]_2 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i\, 2^i - d_n\, 2^n$$

Beispiel: $n = 2, k = 0$

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_2$	0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

- Der Zahlenbereich ist asymmetrisch: $-2^n \ldots 2^n - 2^{-k}$
- Die Zahlendarstellung ist eindeutig, auch für die Null.
- „Benachbarte Zahlen" haben gleichen Abstand 2^{-k}.
- Man erhält zu a die inverse Zahl, indem man alle Bits komplementiert und an der niederwertigsten Stelle 1 addiert (siehe Lemma nächste Folie).

Zweier-Komplement: Inversion

Lemma

Sei a eine Festkommazahl, a' die Festkommazahl, die aus a durch Komplementieren aller Bits $(0 \to 1, 1 \to 0)$ hervorgeht. Dann gilt $[a']_2 + 2^{-k} = -[a]_2$.

Beweisidee: Addiert man Bits $n-1 \ldots 0$ von a und a', erhält man $111\ldots11$. Addiert man noch $000\ldots01$ hinzu, so erhält man gerade $2^n = (a_n + a'_n) \cdot 2^n$.

$$\begin{array}{lr} (a_{n-1},\ldots,a_{-k}) & 011011 \\ (a'_{n-1},\ldots,a'_{-k}) & 100100 \\ \text{“}2^{-k}\text{”} & 000001 \\ \hline & 1000000 \end{array}$$

mit

$$< 1000000 >=< (a_{n-1},\ldots,a_{-k}) > + < (a'_{n-1},\ldots,a'_{-k}) > +2^{-k}$$

Vorteil von Zweier-Komplement

- Wir werden später Schaltungen betrachten, die zwei Zahlen als Eingaben nehmen und ihre Summe oder Differenz an den Ausgängen bereit stellen (Addierer, Subtrahierer).
- Es stellt sich heraus, dass diese Schaltungen besonders einfach sind, wenn Negativzahlen im Zweier-Komplement dargestellt werden.
- Daher wird in der Praxis oft die Zweier-Komplement-Darstellung verwendet.

Festkommazahlen - Übersicht

Betrag mit Vorzeichen

$$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots, d_{-k}]_{BV} := (-1)^{d_n} \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \, 2^i$$

Einerkomplement

$$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots, d_{-k}]_1 := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \, 2^i - d_n(2^n - 2^{-k})$$

Zweierkomplement

$$[d_n, d_{n-1}, \dots, d_0, d_{-1}, \dots := \sum_{i=-k}^{n-1} d_i \, 2^i - d_n$$

$n = 2, \; k = 0$

a	000	001	010	011	100	101	110	111
$[a]_{BV}$	0	1	2	3	0	-1	-2	-3
$[a]_1$	0	1	2	3	-3	-2	-1	0
$[a]_2$	0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

	symmetrisch	symmetrisch	asymmetrisch
kleinste Zahl	$-(2^n - 2^{-k})$	$-(2^n - 2^{-k})$	-2^n
größte Zahl	$2^n - 2^{-k}$	$2^n - 2^{-k}$	$2^n - 2^{-k}$
Inverses durch	kompl. 1. Bit	kompl. alle Bits	kompl. alle Bits, add. 1
Null	2 Darstellungen	2 Darstellungen	1 Darstellung
Abstand	2^{-k}	2^{-k}	2^{-k}

Probleme von Festkommazahlen

- Betrachte die Menge aller Zahlen, die eine Zweier-Komplement-Darstellung mit n Vor- und k Nachkommastellen haben.
  - Keine ganz großen bzw. kleinen Zahlen darstellbar!
    - Zahlen mit größtem Absolutbetrag: -2^n und $2^n - 2^{-k}$
    - Zahlen mit kleinstem Absolutbetrag: -2^{-k} und 2^{-k}
- Operationen sind nicht abgeschlossen!
  - $2^{n-1} + 2^{n-1}$ ist nicht darstellbar, obwohl die Operanden darstellbar sind.
- Assoziativ- und Distributivgesetz gelten nicht, da bei ihrer Anwendung evtl. der darstellbare Zahlenbereich verlassen wird!
  - Beispiel: $(2^{n-1} + 2^{n-1}) - 2^{n-1} \neq 2^{n-1} + (2^{n-1} - 2^{n-1})$

Gleitkomma-Zahlen

- Die verfügbaren Bits werden in Vorzeichen S, Exponent E und Mantisse M unterteilt.
- $a = (-1)^S \cdot M \cdot 2^E$.
- Einfache Genauigkeit (insg. 32 Bit)

31	30 29 28 27 26 25 24 23	22 21 20 19 ... 3 2 1 0
S	Exponent E	Mantisse M

- Doppelte Genauigkeit (insg. 64 Bit)

63	62 61 60 59 ... 54 53 52	51 50 49 48 ... 3 2 1 0
S	Exponent E	Mantisse M

  - Implementierungsdetails: siehe z.B. IEEE754-Standard