Kapitel 3 – Kombinatorische Logik

1. Kombinatorische Schaltkreise
2. **Normalformen, zweistufige Synthese**
3. Berechnung eines Minimalpolynoms
4. Arithmetische Schaltungen
5. Anwendung: ALU von ReTI

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Dr. Tobias Schubert, Dr. Ralf Wimmer

Professur für Rechnerarchitektur

WS 2016/17

Kombinatorische Schaltkreise

- **Ziel:**
  Wir werden zeigen, dass sich jede boolesche Funktion als ein Polynom, also eine Disjunktion (ODER-Verknüpfung) von Monomen, die ihrerseits Konjunktionen (UND-Verknüpfungen) von Eingangsvariablen und negierten Eingangsvariablen sind, darstellen lässt.

- Wir werden für solche Darstellungen Kostenkriterien aufstellen und diese optimieren.

- Monome und Polynome sind spezielle boolesche Ausdrücke (s. auch Kap. 7)

Beispielfunktion

- 3 Eingangsvariablen x_1, x_2, x_3
- Wird im Folgenden zur Illustration verwendet.

x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Literale

Definition

Als Literal einer booleschen Funktion $f \in \mathbb{B}_n$ wird der Ausdruck x_i oder x_i' bezeichnet, wobei $x_i, i \in 1, \ldots, n$, eine Eingangsvariable von f.

- x_i (auch x_i^1 geschrieben) wird positives Literal, x_i' (auch x_i^0 geschrieben) wird negatives Literal genannt.

- Literale werden zur kompakten Beschreibung von booleschen Funktionen verwendet. So bezeichnet das Literal x_i die boolesche Funktion $g \in \mathbb{B}_n$ mit $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$ genau dann, wenn $\alpha_i = 1$.
  Analog gilt: x_i' bezeichnet die boolesche Funktion $h \in \mathbb{B}_n$ mit $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$ genau dann, wenn $\alpha_i = 0$.
  Wir schreiben vereinfachend auch $g = x_i$ bzw. $h = x_i'$.

Monome

Definition

- Ein Monom ist eine Konjunktion von Literalen, in der kein Literal mehr als einmal vorkommt und zu keiner Variable sowohl das positive als auch das negative Literal vorkommt. Außerdem ist „1” ein Monom.
  - $x_1 x_2 x_3'$ und $x_1' x_3$ sind Monome, $x_2 x_3 x_3'$ ist kein Monom.
- Ein Monom heißt vollständig oder Minterm, wenn jede Variable entweder als positives oder als negatives Literal vorkommt.
  - Wenn drei Variablen x_1, x_2, x_3 betrachtet werden, ist $x_1 x_2 x_3'$ ein Minterm, $x_1' x_3$ ist kein Minterm.
- Für eine Eingabebelegung $\alpha \in \mathbb{B}^n$ heißt

$$m(\alpha) = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \quad \text{(Notation: } x_i^1 := x_i, x_i^0 := x_i')$$

der zu α gehörende Minterm.

Monome als Beschreibung boolescher Funktionen

- Beispiel: Das Monom $m = x_i x_j'$ bezeichnet die boolesche Funktion $f \in \mathbb{B}_n$ mit $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$ genau dann, wenn $\alpha_i = 1$ und $\alpha_j = 0$. Wir schreiben vereinfachend auch $f = x_i x_j'$.

Polynome

- Eine Disjunktion von paarweise verschiedenen Monomen heißt Polynom. Sind alle Monome des Polynoms vollständig, so heißt das Polynom vollständig.

  Beispiel: Bei einer booleschen Funktion mit drei Variablen x_1, x_2, x_3 wäre:
  - $x_1' x_2 + x_2' x_3$ ein Polynom.
  - $x_1' x_2' x_3 + x_1 x_2' x_3$ ein vollständiges Polynom.
  - Das Polynom $x_1' x_2 + x_2' x_3$ beschreibt die boolesche Funktion $f \in \mathbb{B}_3$ mit $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ genau dann, wenn $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ oder $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$. Wir schreiben vereinfachend auch $f = x_1' x_2 + x_2' x_3$.

Disjunktive Normalform

- Eine disjunktive Normalform (DNF) von f ist ein Polynom, das f beschreibt. Eine kanonische disjunktive Normalform (KDNF) von f ist ein vollständiges Polynom von f.
  - $f_1 = x_1' x_2' + x_2' x_3 + x_1 x_2$ ist in DNF, aber nicht in KDNF.

Bestimmung der kanonischen disjunktiven Normalform

- Für $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ heißt $ON(f) := \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid f(\alpha) = 1\}$ die Erfüllbarkeitsmenge von f.
- Die KDNF ist gegeben durch $f = \sum_{\alpha \in ON(f)} m(\alpha)$
- Die KDNF ist (bis auf Anordnung von Literalen in Mintermen und von Termen im Polynom) eindeutig.
- Beispiel: KDNF für $f_1 = x_1' x_2' + x_2' x_3 + x_1 x_2$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= m(000) + m(001) \\
&\quad + m(101) + m(110) + m(111) \\
&= x_1' x_2' x_3' + x_1' x_2' x_3 \\
&\quad + x_1 x_2' x_3 + x_1 x_2 x_3' + x_1 x_2 x_3
\end{aligned}
$$

x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

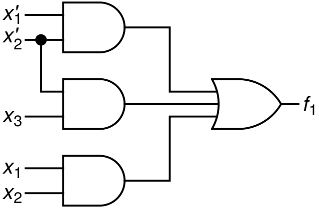
- Anmerkung: Analog zur Erfüllbarkeitsmenge ist $OFF(f) := \{\alpha \in \mathbb{B}^n \mid f(\alpha) = 0\}$ als die Unerfüllbarkeitsmenge definiert.

Realisierungen von DNF

- Erste Möglichkeit: Benutze „gewöhnliche” UND- und ODER-Gatter.
- Zweite Möglichkeit: PLAs
  - Programmierbare logische Felder können nur Funktionen in DNF implementieren.
  - Sie benötigen dafür weniger Transistoren als eine Realisierung mit UND- und ODER-Gattern.

Realisierung durch Logikgatter

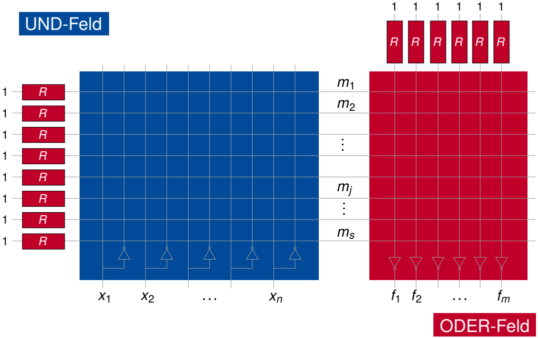
- Bilde erst alle Monome durch UND-Gatter.
- Verbinde dann alle Monome mit ODER-Gattern.
  - Notation: Man verzichtet in der Regel auf die Abbildung von Invertern.



- Die Kosten ergeben sich dann aus allen benötigten UND- und ODER-Gattern.

Programmierbare logische Felder (PLA)

Zweistufige Darstellung zur Realisierung von booleschen Polynomen.
$f_i = m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{ik}$ mit m_{iq} aus $\{m_1, \ldots, m_s\}$



Enthält Monom m_j k Literale, so werden k Transistoren in der entsprechenden Zeile des **UND-Feldes** benötigt.

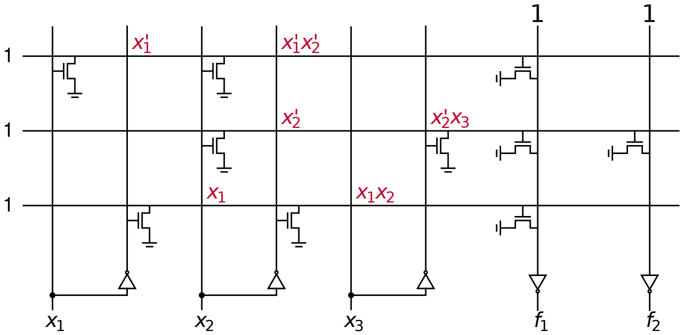
Besteht die Beschreibung von Funktion f_t aus p Monomen, so benötigt man p Transistoren in der entsprechenden Spalte des **ODER-Feldes**.

Fläche: $\sim (m + 2n) \times$ (Anzahl der benötigten Monome)

PLAs: Realisierungsdetails

Beispiel

$f_1 = x_1'x_2' + x_2'x_3 + x_1x_2$
$f_2 = x_2'x_3$

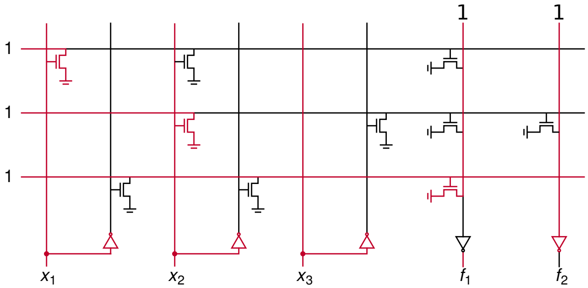


Konkrete Belegung

Beispiel

$f_1 = x_1' x_2' + x_2' x_3 + x_1 x_2$
$f_2 = x_2' x_3$

Bei Belegung von $x_1 = 1, x_2 = 1$ und $x_3 = 1$ liegt folgende Situation vor:



- Sei $q = q_1 \cdot \dots \cdot q_r$ ein Monom, dann sind die Kosten $|q|$ von q gleich der Anzahl der zur Realisierung von q benötigten Transistoren im PLA, also $|q| := r$.
- Seien $p_1, \dots, p_m$ Polynome, dann bezeichne $M(p_1, \dots, p_m)$ die Menge der in diesen Polynomen verwendeten Monome.
    - Die primären Kosten $cost_1(p_1, \dots, p_m)$ einer Menge $p_1, \dots, p_m$ von Polynomen sind gleich der Anzahl der benötigten Zeilen im PLA, um $p_1, \dots, p_m$ zu realisieren, also $cost_1(p_1, \dots, p_m) = |M(p_1, \dots, p_m)|$.
    - Die sekundären Kosten $cost_2(p_1, \dots, p_m)$ einer Menge $\{p_1, \dots, p_m\}$ von Polynomen sind gleich der Anzahl der benötigten Transistoren im PLA, also $cost_2(p_1, \dots, p_m) = \sum_{q \in M(p_1, \dots, p_m)} |q| + \sum_{i=1,\dots,m} |M(p_i)|$.

Kombiniertes Kostenmaß

- Sei im Folgenden $cost = (cost_1, cost_2)$ die Kostenfunktion mit der Eigenschaft, dass für zwei Polynommengen $\{p_1, \ldots, p_m\}$ und $\{p'_1, \ldots, p'_m\}$ die Ungleichung

$$cost(p_1, \ldots, p_m) \leq cost(p'_1, \ldots, p'_m)$$

  gilt, wenn

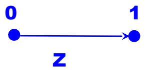
  - entweder $cost_1(p_1, \ldots, p_m) < cost_1(p'_1, \ldots, p'_m)$
  - oder $cost_1(p_1, \ldots, p_m) = cost_1(p'_1, \ldots, p'_m)$
    und $cost_2(p_1, \ldots, p_m) \leq cost_2(p'_1, \ldots, p'_m)$

Das Problem der zweistufigen Logikminimierung

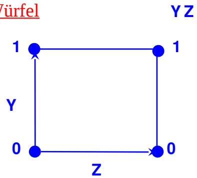
- **Gegeben:** Eine boolesche Funktion $f = (f_1, \ldots, f_m)$ in n Variablen und m Ausgängen in Form einer Tabelle der Dimension $(n+m) \cdot 2^n$ oder einer Menge von m Polynomen $\{q_1, \ldots, q_m\}$ mit $f_i = q_i$.
- **Gesucht:** m Polynome $p_1, \ldots p_m$, so dass p_i für alle i der Funktion f_i entspricht und die Kosten $cost(p_1, \ldots, p_m)$ minimal sind.
- Ab sofort werden nur noch Funktionen mit einem Ausgang betrachtet.

Veranschaulichung von Monomen und Polynomen

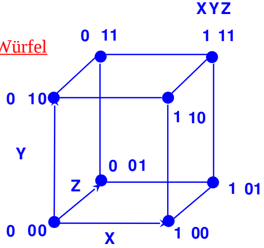
1-dim Würfel



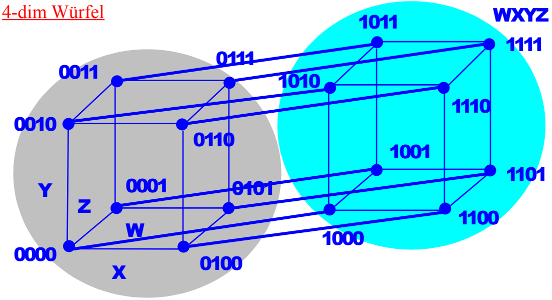
2-dim Würfel



3-dim Würfel

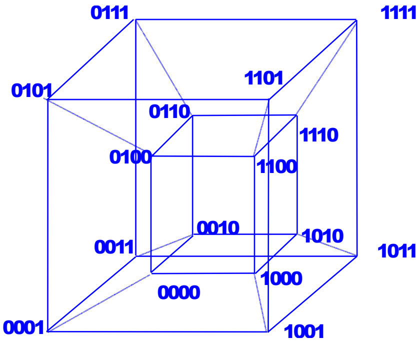


4-dim Würfel



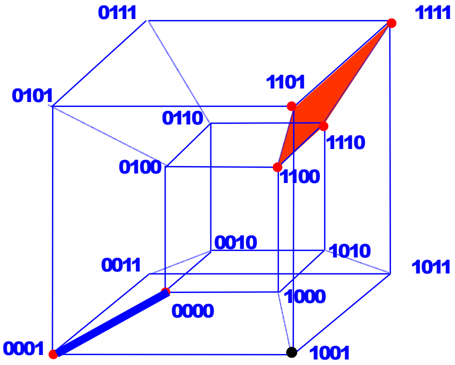
Veranschaulichung durch Würfel

- Jede boolesche Funktion f in n Variablen und einem Ausgang kann über einen n-dimensionalen Würfel durch Markierung der $ON(f)$-Menge spezifiziert werden.
  - **Beispiel**:
    $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_1' x_2' x_3' + x_1 x_2' x_3' x_4$



Monome und Polynome als Teilwürfel

- Monome der Länge k entsprechen $(n-k)$-dimensionalen Teilwürfeln!
- Ein Polynom entspricht einer Vereinigung von Teilwürfeln.
- **Beispiel**:
  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
  $= \boxed{x_1 x_2} + \boxed{x_1' x_2' x_3'}$
  $+ \boxed{x_1 x_2' x_3' x_4}$

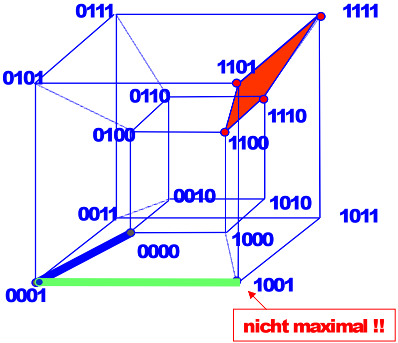


- **Gegeben**: Boolesche Funktion f in n Variablen und **einem** Ausgang, in Form eines markierten n-dimensionalen Würfels.

- **Gesucht**: Eine minimale Überdeckung der markierten Knoten durch maximale Teilwürfel im n-dimensionalen Würfel.

Entspricht einer Minimallösung:

$x_1x_2 + x_1'x_2'x_3' + x_2'x_3'x_4$



Implikanten und Primimplikanten

Definition

Eine boolesche Funktion $f \in \mathbb{B}_n$ ist kleiner gleich einer anderen booleschen Funktion $g \in \mathbb{B}_n$ ($f \leq g$), wenn
$\forall \alpha \in \mathbb{B}_n : f(\alpha) \leq g(\alpha)$.
(Das heißt, wenn f an einer Stelle 1 ist, dann auch g.)

Definition

Sei f eine boolesche Funktion mit einem Ausgang. Ein Implikant von f ist ein Monom q mit $q \leq f$. Ein Primimplikant von f ist ein maximaler Implikant q von f, das heißt es gibt keinen Implikanten s ($s \neq q$) von f mit $q \leq s$.
Implikanten und Primimplikanten können durch n-dimensionale Würfel veranschaulicht werden.

UNI FREIBURG

Veranschaulichung durch Würfel

- Ein Implikant von f ist ein Teilwürfel, der nur markierte Knoten enthält.
- Ein Primimplikant von f ist ein maximaler Teilwürfel mit dieser Eigenschaft.

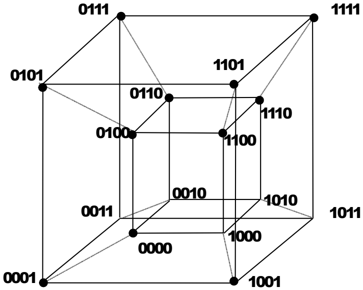
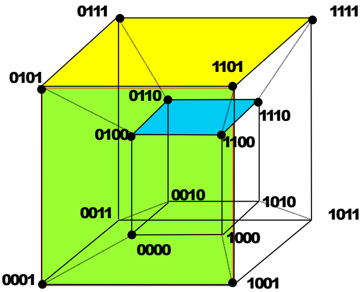


Illustration für konkrete Funktion



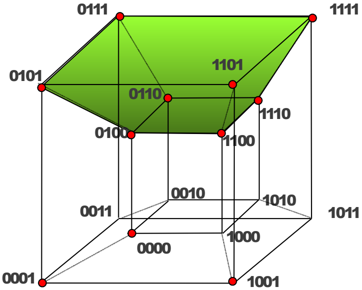
Implikanten

- alle markierten Knoten
- alle Kanten, deren Ecken alle markiert sind
- alle Flächen, deren Ecken alle markiert sind
- alle 3-dimensionalen Würfel, deren Ecken alle markiert sind

Allgemein

- Die Implikanten sind die Teilwürfel, deren Ecken alle markiert sind.

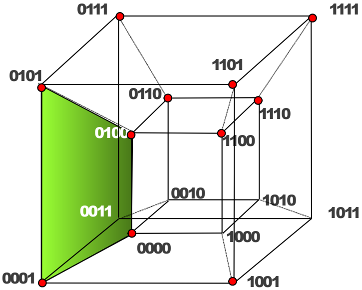
Bestimmung von Primimplikanten



Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2

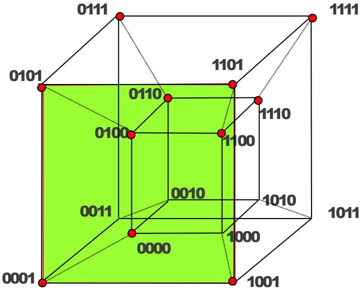
Bestimmung von Primimplikanten



Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2
- $x_1' x_3'$

Bestimmung von Primimplikanten



Es gibt 3 Primimplikanten, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2
- $x_1' x_3'$
- $x_3' x_4$

Polynome und Implikanten einer Funktion f

Lemma

Die Monome eines Polynoms p von f sind alle Implikanten von f.

Beweis:

- Enthält ein Polynom p von f ein Monom m, welches nicht Implikant von f ist, so gilt nicht: $m \leq f$
- Das heißt es gibt eine Belegung $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ der Variablen $(x_1, \ldots, x_n)$ mit
  - $f(\alpha_1, \ldots, a_n) = 0$
  - $m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$, also auch $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$
- Das heißt Monom m ist ein Teilwürfel, bei dem eine Ecke nicht markiert ist.

Demnach ist Polynom p kein Polynom von f.

$\Rightarrow$ **Widerspruch!**