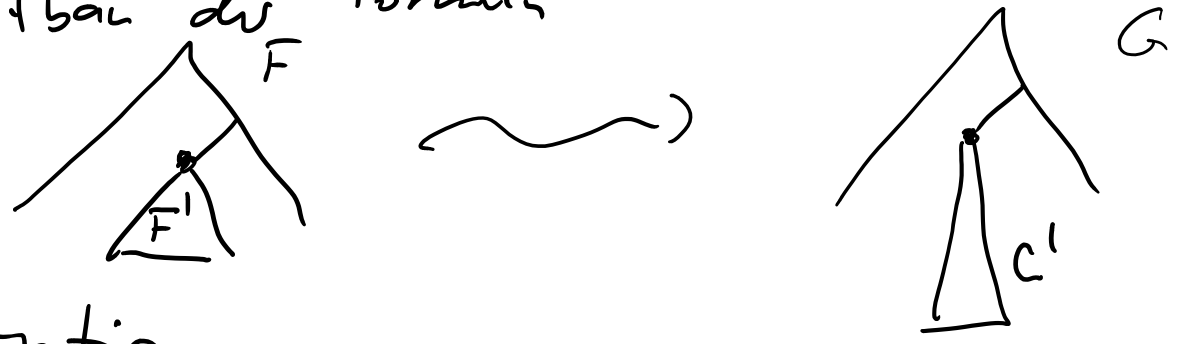
Substitution

31.10.2016

Lemma: Wenn H, H' Zeichenketten sind
und F, F', G' auss. Formeln
mit $F = HF'H'$,
dann ist F' Teilformel von F
und $G := HG'H'$ ist ebenfalls eine Formel.

Beweis über den Aufbau der Formeln



A) Äquivalente Substitution

Wenn $F' \sim G'$, dann $F \sim G$.

Seien F, F' Formeln

Sei $F\left[\frac{F'}{A_i}\right]$ die Formel, die aus F entsteht, indem (gleichzeitig) jedes Vorkommen von A_i in F durch F' ersetzt wird.

(Bsp $\underbrace{((\neg A_2 \to A_1) \wedge A_2)}_{F}$, $F' = \neg A_3$, $i = 2$: $F\left[\frac{\neg A_3}{A_2}\right] = ((\neg\neg A_3 \to A_2) \wedge \neg A_3)$

B) Uniforme Substitution

Wenn $F \sim G$, dann $F\left[\frac{F'}{A_i}\right] \sim G\left[\frac{F'}{A_i}\right]$

Bsp .... aus $(\neg A_0 \vee A_0) \sim \top$ $\xrightarrow{\text{ÄS}}$ $(\neg A_0 \vee \neg\neg A_0) \sim \top$

$\xrightarrow{\text{US}}$ $(\neg(A_0 \wedge A_1) \vee (A_0 \wedge A_1)) \sim \top$

Vorsicht: Wenn A_i in F' vorkommt!

<u>Satz</u>: Aus Unif. Subst + äquiv. Subst. + folgenden Regeln „folgt alles":

$\wedge, \vee$ - Regeln: $\wedge$ und $\vee$ sind kommutativ, assoziativ, idempotent, distributiv zueinander (bis auf $\sim$)

$(A_i \wedge \top) \sim A_i$ $\quad$ $(A_i \vee \top) \sim \top$

$(A_i \wedge \bot) \sim \bot$ $\quad$ $(A_i \vee \bot) \sim A_i$

$\neg$ - Regeln: $\neg\bot \sim \top$ $\quad$ $\neg\top \sim \bot$ $\quad$ $\neg\neg A_i \sim A_i$

$(A_i \vee \neg A_i) \sim \top$ $\quad$ $(A_i \wedge \neg A_i) \sim \bot$

de Morgan'sche Regeln

Def. von Junktoren: $(A_i \to A_j) \sim (\neg A_i \vee A_j)$

$(A_i \leftrightarrow A_j) \sim ((A_i \to A_j) \wedge (A_j \to A_i))$

<u>Beweis kommt</u> später!

trotzdem sollte man auch andere Regeln kennen, z.B.

$$((A_1 \wedge A_2) \to A_3) \sim (A_1 \to (A_2 \to A_3))$$

(Analogie: $f: M_1 \times M_2 \to M_3$ $\qquad m_1 \mapsto f_{m_1}: m_2 \mapsto f(m_1, m_2)$)

$f(m_1, m_2)$ „Currying"

<u>Erinnerung</u> DNF $\displaystyle\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \underbrace{(\neg) A_{ij}}_{\text{Literale}}$

Bsp: $((A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_1 \wedge A_4) \vee (A_2 \wedge \neg A_2))$

ist in disj. Normalform

KNF $\displaystyle\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} (\neg) A_{ij}$

<u>Satz:</u> Zu jeder Formel F gibt es äquivalente Formeln in DNF bzw. KNF (nicht eindeutig!).

<u>Beweis</u> (a) über Wahrheitstafeln, o.E. kommen nur $A_0, \dots, A_n$ in F vor

DNF: $$(\neg)_\beta A_i = \begin{cases} A_i & \text{falls } \beta(A_i) = 1 \\ \neg A_i & \text{falls } \beta(A_i) = 0 \end{cases}$$

$$\beta'\left(\bigwedge_{i=0}^{n} (\neg)_\beta A_i\right) = 1 \iff \beta = \beta'$$

(β, β' Belegungen von $A_0, \dots, A_n$)

$$F \sim \bigvee_{\{\beta \mid \beta(F) = 1\}} \bigwedge_{i=0}^{n} (\neg)_\beta A_i$$

A_0	A_1	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$((\neg A_0 \wedge \neg A_1) \vee (\neg A_0 \wedge A_1) \vee (A_0 \wedge A_1))$$

Bem: 1) DNF wird eindeutig, wenn:
- in jeder $\wedge$ jede in F vorkommende Aussagenvariable genau einmal vorkommt, und kein anderer
- innerhalb der $\wedge$ und $\vee$ ein Reihenfolge (und eine Klammerungsreihenfolge) festgelegt sind.

2) die so konstruierte DNF hat genau die gleichen Aussagenvariablen wie F

KNF: analog mit $0 \leftrightarrow 1$, $\wedge \leftrightarrow \vee$

oder: $\neg F \sim$ „DNF$(\neg F)$"
$\Rightarrow F \sim$ „$\neg$DNF$(\neg F)$"

Bsp: $(A_0 \wedge (A_1 \vee \neg A_1))$ „eindeutige DNF" $((A_0 \wedge \neg A_1) \vee (A_0 \wedge A_1))$
$\sim A_0$

Beweis (b) durch Umformungen:

- ersetze $\to$ und $\leftrightarrow$
- „rechne $\top$ und $\bot$ heraus"
  (bis weder $\top$ noch $\bot$ vorkommen oder nur noch $\bot$ / $\top$ übrig bleibt)
- ziehe (mit de Morgan) Negationen nach innen („rechts")
  und eliminiere Doppelnegationen
- Distributivgesetz: erreicht Form $\bigvee_i \bigwedge_j (\neg) A_{ij}$
- mit Idempotenz, $(A_i \wedge \neg A_i) \sim \bot$
  kann man doppelte Vorkommen eliminieren
- mit $F \sim (F \wedge \top) \sim (F \wedge (A_n \vee \neg A_n)) \sim ((F \wedge A_n) \vee (F \wedge \neg A_n))$
- mit Kommutativität und Assoziativität sortieren!

\+ Beweis, dass (in richtiger Reihenfolge) das Verfahren stoppt und das richtige Ergebnis liefert! ...

Folgerung: $\{\wedge, \vee, \neg, \bot, \top\}$ ist ein vollständiges Junktoren-system, d.h. zu jedem Wahrheitswertverlauf gibt es eine Formel mit diesem Wahrheitswertverlauf, in dem keine anderen Junktoren vorkommen.

Ferner: de Morgan

$\bot \sim (A_0 \wedge \neg A_0)$

$\top \sim (A_0 \vee \neg A_0)$

$(A_0 \wedge A_1) \sim \neg(\neg A_0 \vee \neg A_1)$

$\rightsquigarrow$ $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ sind vollst. Junktorensysteme.

Tarski-Lindenbaum-Algebra

$\sim$ ist Äquivalenzrelation auf der Menge der auss. Formeln

$F/_\sim$ ist die Äqu.klasse von F $\qquad F/_\sim := \{ G \mid F \sim G \}$

Definiere auf den Äquivalenzklassen eine Struktur

$$F/_\sim \wedge G/_\sim := (F \wedge G)/_\sim$$

$$F/_\sim \vee G/_\sim := (F \vee G)/_\sim$$

$$\neg F/_\sim \qquad \neg F/_\sim$$

Die Menge der Äquivalenzklassen ist eine Boole'sche Algebra, die Tarski-Lindenbaum-Algebra

$\mathcal{F}_n$: nur Formeln mit Aussagenvariablen $A_0, \dots, A_{n-1}$

$\mathcal{F}_\infty$: alle Formeln

Def: Ein Boole'sche Algebra ist eine Struktur

$\mathcal{B} = (B, \sqcap, \sqcup, {}^c, 1, 0)$ mit:

- B ist Menge, $\sqcap, \sqcup$ zweistellige Operationen, ^{c} einstellige Operation, $0, 1$ Konstanten

- es gilt: $\sqcup$ und $\sqcap$ sind kommutativ
  assoziativ
  idempotent
  distributiv übereinander (beide Richtungen)

Absorption: $(a \sqcap b) \sqcup a = a$
$(a \sqcup b) \sqcap a = a$

$0 \sqcap a = 0$ $\quad$ $1 \sqcap a = a$
$0 \sqcup a = a$ $\quad$ $1 \sqcup a = 1$

$\left(a^{cc} = a \quad , \quad 0^c = 1 \quad , \quad 1^c = 0 \right)$ nicht nötig.

$a \sqcap a^c = 0 \quad , \quad a \sqcup a^c = 1$

aber auch andere der Axiome folgen aus dem Rest ...

$\overline{\mathcal{F}}_n$ und $\overline{\mathcal{F}}_\infty$ sind Boolesche Algebren mit

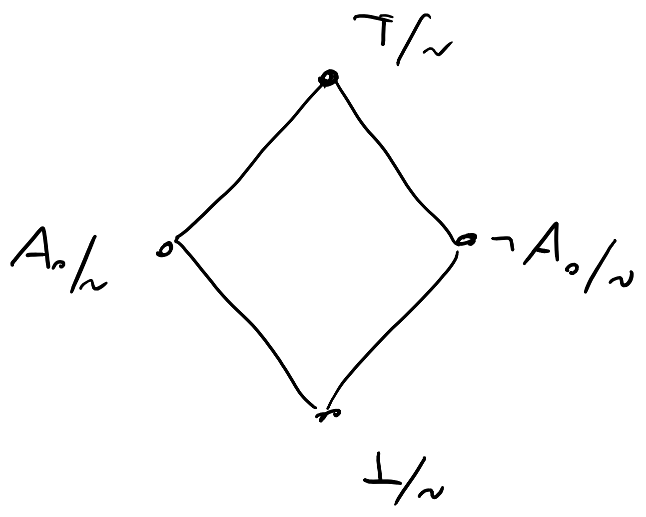
$\sqcap$ ist $\wedge$

$\sqcup$ ist $\vee$

^{c} ist $\neg$

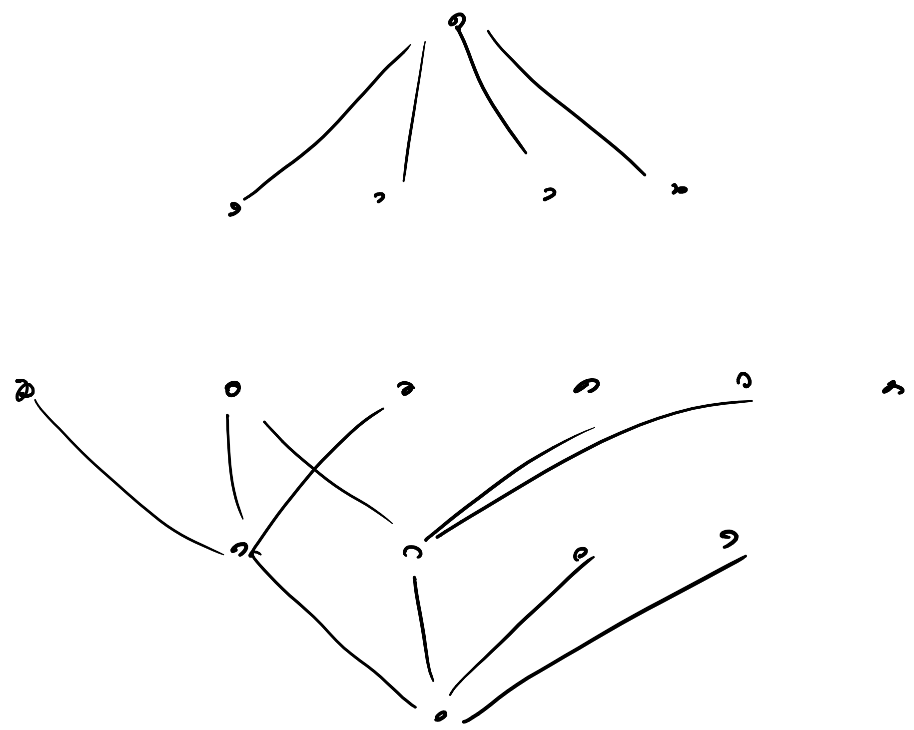
1 ist $\top/\!\sim$

0 ist $\bot/\!\sim$



$\overline{\mathcal{F}}_1$

$\overline{\mathcal{F}}_2$



$\overline{\mathcal{F}}_0$