Kapitel 4 – Sequentielle Logik

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Dr. Tobias Schubert, Dr. Ralf Wimmer

Professur für Rechnerarchitektur

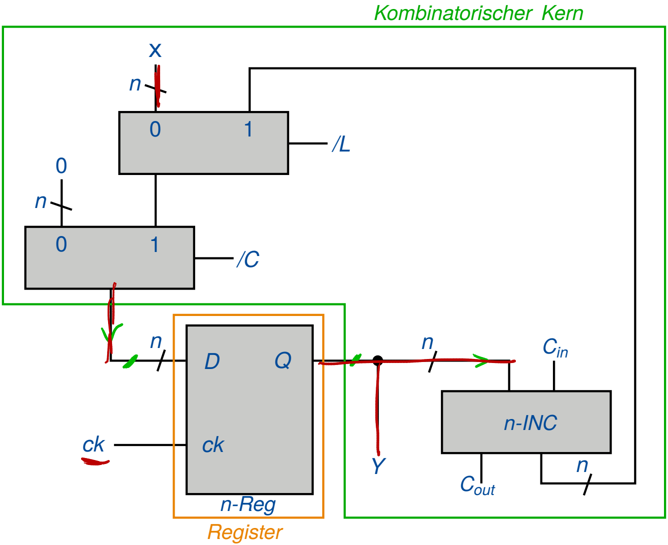
WS 2016/17

UNI FREIBURG

Sequentielle Schaltkreise

- Im Folgenden werden keine allgemeinen Schaltpläne mehr analysiert, sondern sogenannte Schaltwerke (auch (synchrone) sequentielle Schaltkreise genannt).
- Diese bestehen aus einem Register und einem (kombinatorischen) Schaltkreis (auch kombinatorischer Kern genannt).
- Im Gegensatz zu (kombinatorischen) Schaltkreisen können Schaltwerke (= sequentielle Schaltkreise) Zyklen enthalten. Die Zyklen müssen aber durch Flipflops des Registers gehen.
- Der Zustand eines Schaltwerkes ist gegeben durch die im Register gespeicherten Werte.
- Schaltwerke (= sequentielle Schaltkreise) entsprechen endlichen Zustandsautomaten.

Beispiel: Zähler als sequentieller Schaltkreis



Endliche Zustandsautomaten

- Endliche Zustandsautomaten (Finite State Machines, FSMs) sind ein Formalismus, um sequentielles (zeitabhängiges) Verhalten zu spezifizieren.
  - Mealy- und Moore-Automaten
  - In der theoretischen Informatik werden endliche Automaten mit akzeptierenden Zustände betrachtet. Diese sind mit FSMs verwandt, aber nicht identisch.
- Aus einer FSM-Spezifikation kann der sequentielle Schaltkreis hergeleitet werden (Sequentielle Synthese).

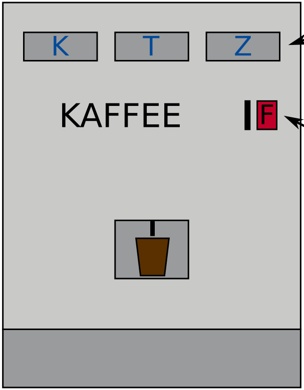
Halbautomat

Definition

Das Quadrupel $H = (I, S, S_0, \delta)$ heißt deterministischer, endlicher Halbautomat. Dabei bezeichnet:

- I eine endliche Menge von erlaubten Eingabesymbolen ("Eingabealphabet"),
- S eine endliche Menge von Zuständen,
- $S_0 \subseteq S$ ist eine endliche Menge von erlaubten Anfangszuständen,
- $\delta : S \times I \to S$ eine Übergangsfunktion.

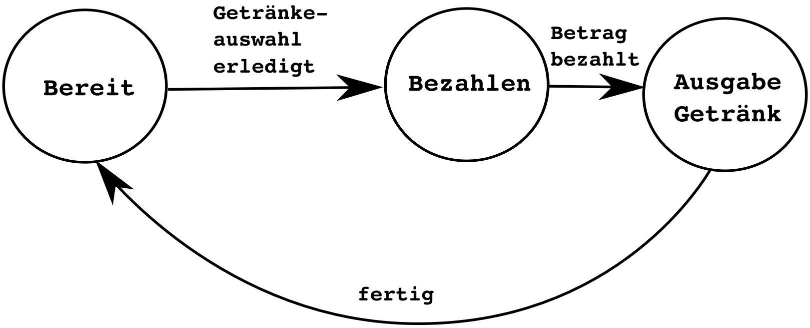
Beispiel: Kaffeeautomat



Auswahl:
Kaffee
Tee
Zucker

korrekter
Münzeinwurf
oder Fertig

Darstellung als Zustandsdiagramm



- Knoten: Zustände des Automaten.
- Kanten: Zustandsübergänge.
- Kantenmarkierung: Eingabe (bzw. Ereignis).

Mealy- und Moore-Automat

Definition

Ein Mealy-Automat $M = (I, O, S, S_0, \delta, \lambda)$ ist ein endlicher deterministischer Halbautomat H erweitert um:

- eine endliche Menge O von Ausgabesymbolen („Ausgabealphabet”),
- eine Ausgabefunktion $\lambda : S \times I \to O$.

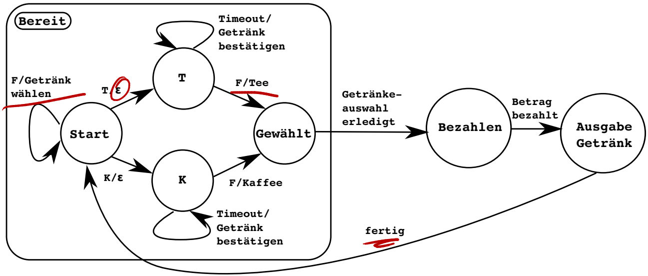
$\delta : S \times I \longrightarrow S$

Definition

Ein Moore-Automat $M = (I, O, S, S_0, \delta, \lambda)$ ist ein endlicher, deterministischer Halbautomat H erweitert um:

- eine endliche Menge O von Ausgabesymbolen,
- eine Ausgabefunktion $\lambda : S \to O$.

Beispiel: Getränkeauswahl - Mealy-Automat



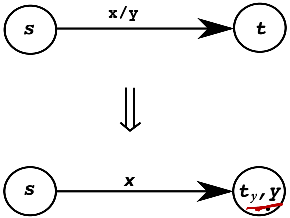
- Knoten: Zustände des Automaten.
- Kanten: Zustandsübergänge.
- Kantenmarkierung: Ein-/Ausgabe (Mealy-Automat).
- Beim Moore-Automaten werden die Zustände mit der Ausgabe beschriftet.
- ε bedeutet keine Eingabe/Ausgabe.

Mealy- vs. Moore-Automat (1/2)

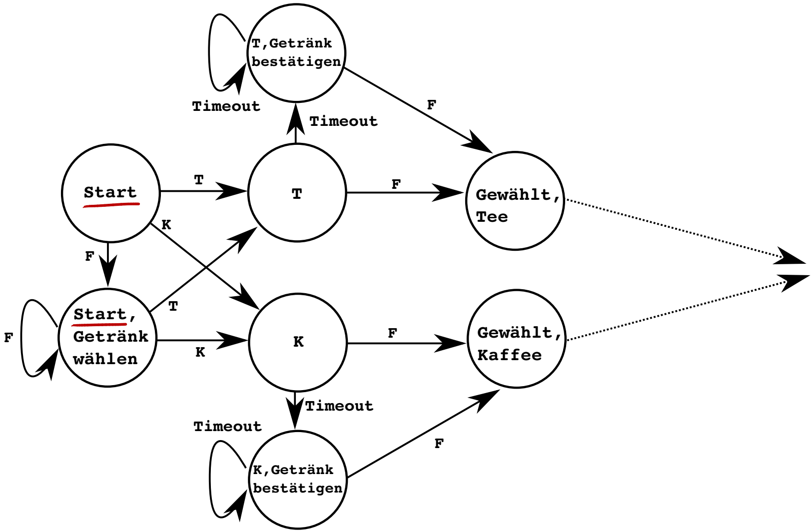
- Beim Mealy-Automaten ist:
  - die Ausgabe abhängig vom aktuellen Zustand und der aktuellen Eingabe,
  - der Folgezustand abhängig vom aktuellen Zustand und der aktuellen Eingabe.
- Ein Moore-Automat ist ein spezieller Mealy-Automat, bei dem die Ausgabe nur vom aktuellen Zustand und nicht von der Eingabe abhängt.
- Moore- und Mealy-Automaten kann man ineinander überführen.

Mealy- vs. Moore-Automat (2/2)

- Überführung Moore $\rightarrow$ Mealy: trivial
- Überführung Mealy $\rightarrow$ Moore:
  Grundidee:“Ziehe Ausgabe in den Zustand”



Beispiel: Moore-Automat von Zustand “Bereit”



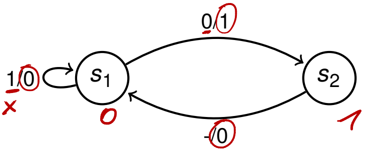
a) Zustands- und Ausgangstafel:

x	*state*	*next-state*	y
1	s_1	s_1	0
0	s_1	s_2	1
-	s_2	s_1	0

b) Flusstafel:

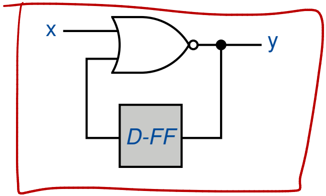
	$x = 0$	$x = 1$
s_1	$s_2, 1$	$s_1, 0$
s_2	$s_1, 0$	$s_1, 0$

c) Zustandsdiagramm:



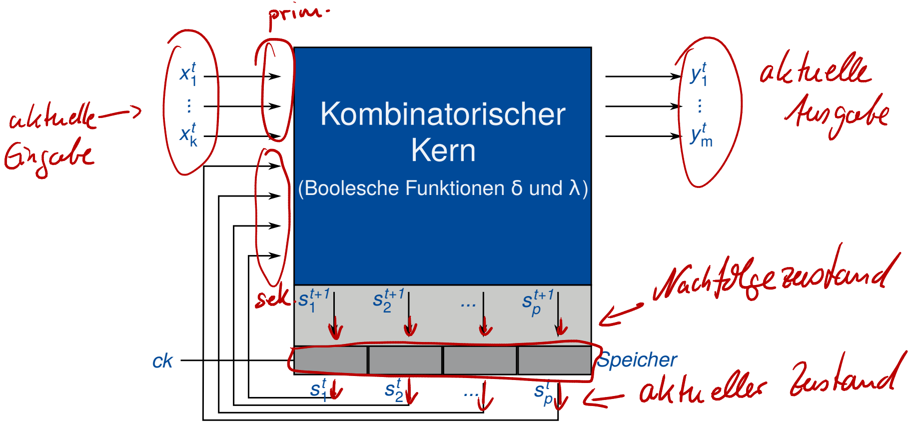
- Im Folgenden: Weg von *c*) zu *d*)

d) Sequentieller Schaltkreis:



$y = \overline{s_1 + x}$

Sequentielle Schaltkreise allgemein



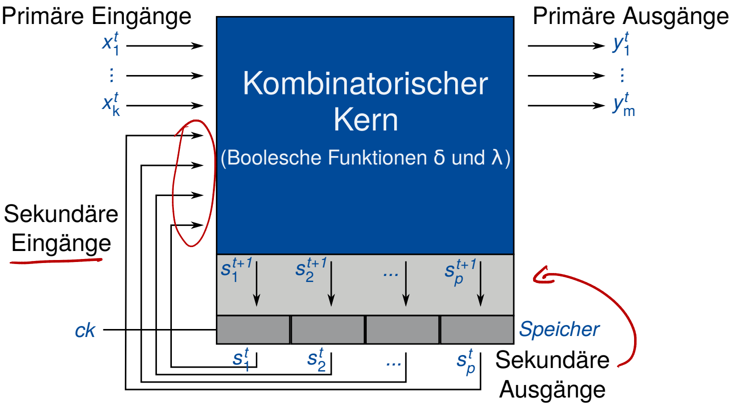
$$
\begin{aligned}
y_i^t &= \lambda_i(x_1^t, x_2^t, \ldots, x_k^t, s_1^t, s_2^t, \ldots, s_p^t) \\
s_i^{t+1} &= \delta_i(x_1^t, x_2^t, \ldots, x_k^t, s_1^t, s_2^t, \ldots, s_p^t)
\end{aligned}
$$

Die Belegung s_t der Flipflops im Register heißt Zustand des sequentielle Schaltkreises zum Zeitpunkt t.

Kombinatorischer Kern

- Der kombinatorische Kern hat vier Arten von Ein- und Ausgängen:
  - Primäre Eingänge bekommen Werte „von außen”.
  - Primäre Ausgänge liefern Werte „nach außen”.
  - Sekundäre Eingänge sind mit den Datenausgängen der Flipflops im Register verbunden. Auf diese Weise kann der aktuelle Zustand des Schaltkreises in Funktionen δ und λ berücksichtigt werden.
  - Sekundäre Ausgänge sind mit den Dateneingängen der Flipflops verbunden. Durch sie wird der nächste Zustand des Schaltkreises spezifiziert.

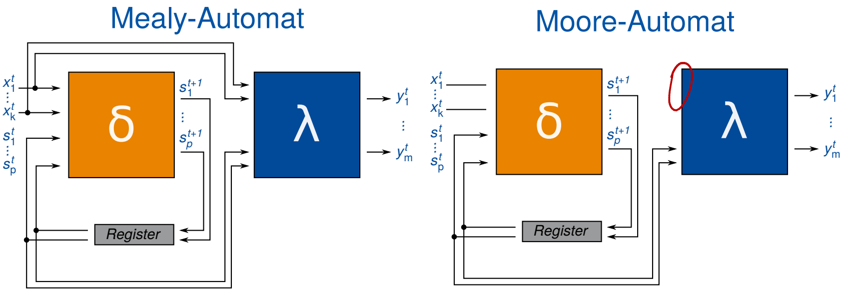
Primäre und sekundäre Ein- und Ausgänge



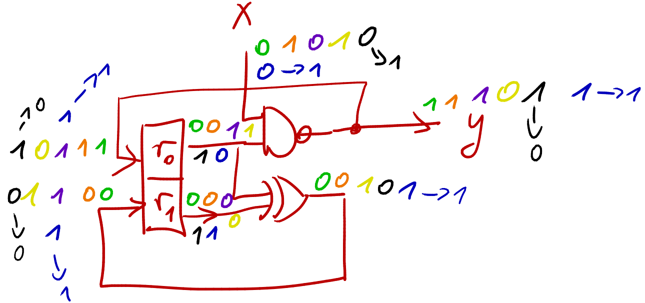
$$y_i^t = \lambda_i(x_1^t, x_2^t, \ldots, x_k^t, s_1^t, s_2^t, \ldots, s_p^t)$$

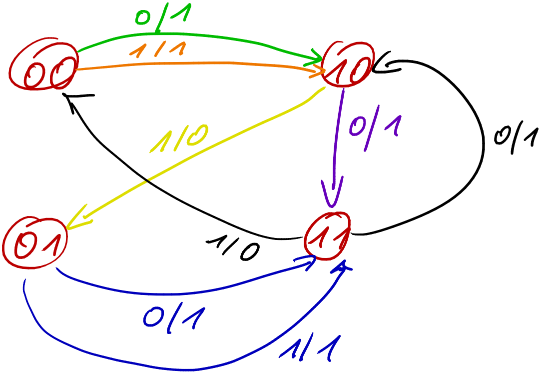
$$s_i^{t+1} = \delta_i(x_1^t, x_2^t, \ldots, x_k^t, s_1^t, s_2^t, \ldots, s_p^t)$$

Sequentielle Schaltung für einen FSM



- Eingabevektor: $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$
- Ausgabevektor: $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$
- Zustandsvektor: $S = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$
- Ausgabefunktion (Mealy): $Y^t = \lambda(X^t, S^t)$
- Übergangsfunktion: $S^{t+1} = \delta(X^t, S^t)$
- Ausgabefunktion (Moore): $Y^t = \lambda(S^t)$


X
y
r0
r1


00
10
01
11
0/1
1/1
1/0
0/1
0/1
1/0
0/1
1/1