1. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Caren Schinko, M. Sc.

17. Oktober 2016*

1. Es seien M, M_1, M_2 und N Mengen. Zeige:

(a) **m.** $M \setminus (M \setminus N) = M \cap N$.

(b) **m.** $M \cup (M_1 \cap M_2) = (M \cup M_1) \cap (M \cup M_2)$.

(c) **s.** $M \setminus (M_1 \cap M_2) = (M \setminus M_1) \cup (M \setminus M_2)$.

Es sei beachtet, daß (b) und (c) Spezialfälle der de-Morganschen Regeln sind.

2. **m.** Es seien $f_1 \colon M_1 \to N_1$ und $f_2 \colon M_2 \to N_2$ zwei Abbildungen. Zeige:

$$f_1 \circ f_2 \text{ ist die leere Abbildung} \iff f_2(M_2) \cap M_1 = \emptyset.$$

3. **m. Die Potenzmenge einer Menge ist mächtiger als die Menge.**

(a) Beweise: Für jede Abbildung $f \colon M \to \mathfrak{P}(M)$ ist

$$N_f \coloneqq \{p \in M \mid p \notin f(p)\} \in \mathfrak{P}(M) \setminus f(M).$$

Insbesondere existiert keine surjektive Abbildung $M \to \mathfrak{P}(M)$.
(Tip: Untersuche unter der Annahme $N_f = f(p_0)$, ob $p_0 \in N_f$.)

(b) Gibt es eine injektive Abbildung $M \to \mathfrak{P}(M)$?

(c) Erkläre mit den Überlegungen in (a) das sogenannte Paradoxon vom Barbier: Der Barbier eines Dorfes behauptet, daß er genau die Männer des Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Das kann wohl nicht wahr sein. (Wieso? Wer rasiert dann den Barbier?)
(Tip: $M = ?$ und $(f \colon M \to \mathfrak{P}(M)) = ?$.)

*Die bearbeiteten Übungsblatter sind bis 9:55 Uhr am 24. Oktober 2016 in den Analysis-Briefkasten einzuwerfen.

4. s. Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? (In dieser Aufgabe darf Schulwissen über die vorkommenden Funktionen vorausgesetzt werden.)

(a) $f\colon\ ]-1,1[\ \to \mathbf{R}, t \mapsto \frac{1}{1-|t|}$.

(b) $g\colon \mathbf{R} \to [0,\infty[\,, t \mapsto t^2$.

(c) $h\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}, t \mapsto \exp(2\,\log(t))$.

(d) $i\colon\ [0,\infty[\ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, (r,\varphi) \mapsto (r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi))$.

5. s. Es seien $f\colon M \to N$ eine Abbildung, $(M_i)_{i\in I}$ eine nicht leere Familie von Mengen $M_i \subseteq M$, ebenso $(N_i)_{i\in I}$ eine nicht leere Familie von Mengen $N_i \subseteq N$ und A, $B \subseteq N$.

(a) Zeige, daß $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} N_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(N_i)$.

(b) Zeige, daß $f(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} f(M_i)$ im allgemeinen nicht gilt. Gib die richtige Teilmengenbeziehung an, und beweise diese.

(c) Zeige, daß $f^{-1}(N \setminus B) = M \setminus f^{-1}(B)$, und folgere aus dieser Aussage, daß $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

6. m. Es seien $f\colon M \to N$ eine Abbildung, $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$. Beweise:

(a) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, und Gleichheit gilt in jedem der folgenden Fälle:

(i) f ist injektiv,

(ii) $A = f^{-1}(B)$ für ein beliebiges $B \in \mathfrak{P}(N)$.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, und Gleichheit gilt in jedem der folgenden Fälle:

(i) f ist surjektiv.

(ii) $B = f(A)$ für ein beliebiges $A \in \mathfrak{P}(M)$.

(Anleitung: Beweise zunächst die Inklusionen und dann die Teile (a)(i) und (b)(i), und folgere anschließend unter alleiniger Ausnutzung der bewiesenen Inklusionen die Teile (a)(ii) und (b)(ii).)