Fisnik Zeqiri 4306430
Felix Karg 4342014

31. Oktober 2016

Antworten zum Übungsblatt Nr. 1

Aufgabe 1

Sei $P(a, b)$ der beschriebene Russische-Bauern-Multiplikations-Algorithmus.

IA : Für $P(a, 1) = a * 1$ ist die Ausgabe also direkt a.
IV : Sei $P(a, b) = a * b$.
IS : Dann ist auch $P(a, b + 1) = a * (b + 1)$.
Ist b gerade, wird bei $b + 1$ nun außerdem der momentane Wert addiert, also

$$P(a, b) + a = a * b + a = a * (b + 1)$$

.
Ist b ungerade, wird bei $b+1$ nun nicht mehr a addiert, stattdessen gibt es einen weiteren schritt bei dem a mit zwei multipliziert wird. Also:

$$P(a, b + 1) = P(a, b - 1) + 2 * a = a * (b - 1) + 2 * a = a * (b + 1)$$

Aufgabe 2

a) $A \cap B = \emptyset$

b) $A^3 = A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (2, 3, 2), (2, 3, 3), (3, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 3)\}$

c) $B \setminus (A \cup B) = \emptyset$

d) $Pot(B) \setminus \{B\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

Aufgabe 3

a) $|\mathbb{B}_n| = 2^{n+1}$, weil 2^n Werte nach 2^1 abgebildet werden können.

b) $|\mathbb{B}_{n,m}| = 2^{n+m}$, da 2^n Werte nach 2^m abgebildet werden können.

Aufgabe 4

a) Assoziativität :

$$\begin{aligned}
x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z && (1)\\
<=> x + (y + z - y * z) - x * (y + z - y * z) &= (x + y - x * y) + z - (x + y - x * y) * z && (2)\\
<=> x + y + z - y * z - x * y + x * z - x * y * z &= x + y - x * y + z - z * x - z * y - z * x * y && (3)\\
<=> x + y + z + x * z - y * z - 2 * x * y &= x + y + z + x * z - y * z - 2 * x * y && (4)\\
\square & && (5)
\end{aligned}$$

Teil 2:

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \tag{6}$$
$$<=> x * (y * z) = (x * y) * z \tag{7}$$
$$<=> x * y * z = x * y * z \tag{8}$$
$$\square \tag{9}$$

b) Absorption :

$$x \vee (x \wedge y) = x \tag{10}$$
$$x + (x * y) - x * (x * y) = x \tag{11}$$
$$x + x * y - x * x * y = x \tag{12}$$
$$x + x * (1 - x * y) = x \tag{13}$$

$x*(1-x*y)$ kann nur dann überhaupt 1 werden, wenn $x = 1$ ist, 0 dann nur noch wenn außerdem $y = 0$. In beiden Fällen wird jeweils entweder der Wert von x oder weniger zu x addiert, was man mit

$$x + z = x$$

zusammenfassen kann, wobei $z \leq x$ ist, und auch wenn dann nur addiert wird. Daher ist es Äquivalent zu

$$x = x$$

. $\square$

Teil 2:

$$x \wedge (x \vee y) = x \tag{14}$$
$$x * (x + y - x * y) = x \tag{15}$$
$$x * x + x * y - x * x * y = x \tag{16}$$

Da wir in $\mathbb{B}$ sind, ist $x^2 = x$, woraus folgt dass

$$x + x * y - x * y = x$$

Was gekürzt auch nur

$$x = x$$

ist. $\square$

c) Komplementregel :

$$x \vee (y \wedge \neg y) = x \tag{17}$$
$$x + (y * (-y)) - x * (y * (-y)) = x \tag{18}$$
$$\tag{19}$$

Da wir in $\mathbb{B}$ sind, ist $y * (-y)$ zwingendermaßen 0. Gekürzt steht also

$$x = x$$

da. $\square$
Teil 2:

$$x \wedge (y \vee \neg y) = x \tag{20}$$
$$x * (y + (-y) - y * (-y)) = x \tag{21}$$

Da $y * (-y)$ immer 0, und $y + (-y)$ immer 1 ist, ist es gekürzt also:

$$x * 1 = x \tag{22}$$
$$x = x \tag{23}$$
$$\square \tag{24}$$