3. Übung zur Analysis I

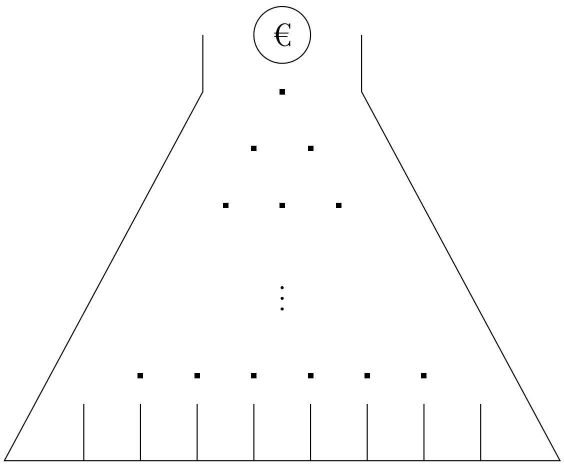
Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Caren Schinko, M. Sc.

31. Oktober 2016*

11. **(a)** **m.** Beweise: Für a, $b \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}_0$ gilt die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

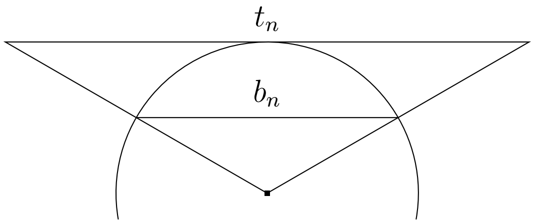
(b) **s.** In das abgebildete *Galtonsche Nagelbrett* mit n Reihen von Nägeln werden oben 2^n Münzen eingeworfen, die über die Nägel schließlich in eines der $n+1$ unten angebrachten Löcher fallen:



Dabei sei der Durchmesser der Münzen gleich dem horizontalen Nagelabstand. Ferner soll eine Münze von einem Nagel stets mit derselben Wahrscheinlichkeit nach links und nach rechts fallen. Welches ist die wahrscheinlichste Verteilung der Münzen auf die Fächer?

*Die bearbeiteten Übungsblatter sind bis 9:55 Uhr am 7. November 2016 in den Analysis-Briefkasten einzuwerfen.

12. **(a)** **s. Berechnung der Bogenlänge des Einheitskreises über einer Sehne (Teil 2).** Analog zu Aufgabe 9 läßt sich der Bogen B über eine Sehne s der Länge ℓ durch Tangentenzüge τ_n ($n = 1, 2, 4, 8, \dots$) mit jeweils gleich langen Seiten der Länge t_n annähern. Dabei ergibt sich t_n gemäß folgendem Bild aus b_n:



Berechne (zum Beispiel unter Benutzung von h_n aus dem Bild zu Aufgabe 9) t_n in Abhängigkeit von b_n und zeige, daß für $T_{2^n} = 2^n \cdot t_{2^n}$ mit $n \in \mathbf{N}_0$ gilt:

$$B_{2^n} \leq B_{2^{n+1}} \leq T_{2^{n+1}} \leq T_{2^n}.$$

(b) **m.** Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Funktion arcsin und dem Problem der Bogenberechnung am Einheitskreis? Mache eine Skizze.

(c) **s.** Schreibe ein (Scheme-)Programm unter Ausnutzung der Erkenntnis aus (b) zur Berechung von arcsin für $x \in \,]-1, 1[$.

13. Es seien n, $m \in \mathbf{N}_0$ natürliche Zahlen, $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen mit $a_n = b_m = 1$ und P und Q die „Polynomfunktionen“

$$P\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \quad \text{bzw.} \quad Q\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot t^k.$$

Dann gilt:

(a) **s.** Es gibt eine Zahl $R \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $t \in \mathbf{R}$ mit $|t| \geq R$ gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot |t|^n \leq |P(t)| \leq 2 \cdot |t|^n.$$

(Tipp: Du brauchst nur (?) $|t| \geq 1$ zu betrachten. Ist $M := \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$, so kannst (?) Du $R := \max\{1, 2M\}$ wählen.)

(b) **m.** Zu der „gebrochen-rationalen“ Funktion $f := P/Q$ gibt es eine Zahl $R \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $t \in \mathbf{R}$ mit $|t| \geq R$ gilt:

$$\frac{1}{4} \cdot |t|^{n-m} \leq |f(t)| \leq 4 \cdot |t|^{n-m}.$$

Was kannst Du hieraus für das Wachstum der Funktion f für betraglich große t schließen?

14. m. Es seien a, b, $c \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen. Bestimme die Intervalle, auf denen Funktion

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto at^2 + bt + c$$

positiv ist.

(Tip: Betrachte zunächst den Fall $a = 1$. Was ist mit dem Fall $a = 0$?)

15. s. Berechne eine Formel für $\sum_{k=1}^{n} k^2$, das heißt eine Funktion $f\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$, so daß für alle $n \in \mathbf{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = f(n), \tag{1}$$

und zwar auf folgende Weise: In dem Ansatz $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$ bestimme zunächst die Koeffizienten a, b, c und d, so daß (1) für „kleine" n gilt. Anschließend prüfe das Ergebnis durch vollständige Induktion.