Bonusblatt

(12.12.2016)

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Menge der Formeln der Tiefe 3 in den drei Aussagenvariablen A_0, A_1, A_2 und dem Junktorensystem $\wedge, \vee, \neg$. Wie groß ist der Anteil (in Prozent) der Formeln, die logisch äquivalent sind

(a) zu $\top$

(b) zu $\perp$

(c) zu A_0

(d) zu $(A_0 \wedge A_1)$

Schreiben Sie hierzu ein Programm, das diese berechnet. Das Programm ist hierbei **nicht** Teil der Abgabe, sondern nur die prozentualen Anteile.

Aufgabe 2

Sei $\mathfrak{B}$ eine endliche boolesche Algebra, sei M die Menge der Atome von B und für jedes Element $b \in \mathfrak{B}$ definieren wir die Menge

$$A(b) := \begin{cases} \{a \in M \mid a \leq b\} & \text{falls } b \neq 0 \\ \emptyset & \text{falls } b = 0 \end{cases}$$

Des Weiteren sei die Abbildung $f : \mathfrak{B} \to \mathcal{P}(M)$ durch

$$f(b) := A(b)$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) Unter jedem Element $b \neq 0$ in $\mathfrak{B}$ liegt ein Atom (d.h. $A(b) \neq \emptyset$).

(b) Für jedes $b \in \mathcal{B}$ gilt $b = \bigsqcup A(b)$, wobei $\bigsqcup \emptyset = 0$ ist (dies zeigt, dass f surjektiv ist).

(c) Wenn $b \neq b'$, dann gilt auch $A(b) = A(b')$ (dies zeigt, dass f injektiv ist).

(d) $f(b \sqcap b') = A(b) \cap A(b')$ und $f(b \sqcup b') = A(b) \cup A(b')$

(e) $f(b^c) = A(b)^c$, $f(0) = \emptyset$ und $f(1) = M$.

Anmerkung: Dies zeigt, dass f ein Isomorphismus zwischen der booleschen Algebra und der Potenzmengenalgebra über der Menge der Atome ist.

Aufgabe 3

Sei T eine unendliche aussagenlogische Formelmenge und ϕ eine aussagenlogische Formel mit $T \vdash \phi$. Zeigen Sie, dass es eine endliche Formlemenge $T_0 \subset T$ gibt mit $T_0 \vdash \phi$.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{G}$ ein Graph mit den Elementen I. Ein Graph ist färbbar in den Farben Rot, Blau und Grün, wenn man die Elemente des Graphen so anmalen kann, dass zwei benachbarte Elemente (zwischen denen es eine Kante gibt) verschiedene Farben haben.

(a) Drücken Sie die Färbbarkeit eines Graphen mit den Aussagenvariablen R_i, B_i und G_i für $i \in I$ aus, wobei die Aussagenvariable R_i genau dann mit 1 belegt wird, wenn das Element i mit der Farbe Rot gefärbt wird; analog für B_i und G_i. Das heißt, finden Sie eine Menge aussagenlogischer Formeln, die genau dann erfüllbar ist, wenn der Graph färbbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein unendlicher Graph genau dann gefärbt ist, wenn jeder endliche Teilgraph gefärbt ist.

Abgabe bis Montag 21.12.2016, 10 Uhr,
im Briefkasten in Gebäude 51 (siehe Briefkastenaufschrift)
Auf die Abgaben gehören die Namen der Abgebenden und die Gruppennummer!!!