# BLATT 12

(16.01.2017)

## Aufgabe 1

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, $E$ ein zweistelliges Relationszeichen in $\mathcal{L}$ und $T_E$ die $\mathcal{L}$-Theorie, die aussagt, dass $E$ die Gleichheitsaxiome erfüllt.
Wir definieren nun die Struktur $\mathcal{M}/E$ wie folgt:

- Universum $M/E$ ist die Menge der Äquivalenzklassen von $E$.
- Für die Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$ gilt
$$f^{\mathcal{M}/E}(a_1/E, \ldots, a_n/E) = f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)/E$$
- Für die Relationszeichen $R \in \mathcal{L}$ gilt
$$(a_1/E, \ldots, a_n/E) \in R^{\mathcal{M}/E} \;\Leftrightarrow\; (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Struktur $\mathcal{M}$ wohldefiniert ist, d.h. dass die Auswertung der Funktions- und Konstantenzeichen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.

(b) Sei $\pi : M \to M/E,\ m \mapsto m/E$ die natürliche Projektion. Zeigen Sie, dass $\pi$ ein starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass $E^{\mathcal{M}/E}$ die Gleichheit ist.

## Aufgabe 2

Sei $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{E\}$, wobei $\mathcal{L}$ und $E$ wie in Aufgabe 1 gegeben sind. Sei $\phi$ eine $\mathcal{L}'$-Formel und $\phi^*$ die $\mathcal{L}$-Formel, die aus $\phi$ hervorgeht, indem man jedes $\tau_1 \doteq \tau_2$ durch $E\tau_1\tau_2$ ersetzt.
Zeigen Sie, dass in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ für jede Belegung $\beta$ gilt

$$\mathcal{M} \models \phi^*[\beta] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}/E \models \phi[\beta/E]$$

wobei $\beta/E(v_i) = \beta(v_i)/E$ ist.

## Aufgabe 3

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, $T$ eine $\mathcal{L}$–Theorie und $\psi(v_1, \ldots, v_n, v_0)$ eine $\mathcal{L}$–Formel, in der die $v_i$ nicht als gebundene Variablen vorkommen. Es gelte $T \vdash \forall v_1 \ldots \forall v_n \exists! v_0\, \psi(v_1, \ldots, v_n, v_0)$, wobei $\exists! v_0$ die übliche Abkürzung für „es gibt genau ein $v_0$" ist. Sei $f$ ein neues $n$–stelliges Funktionszeichen, $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{f\}$ und $T' := T \cup \left\{\forall v_1 \ldots \forall v_n\, \psi\big(v_1, \ldots, v_n, \frac{f v_1 \ldots v_n}{v_0}\big)\right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass jede atomare $\mathcal{L}'$-Formel äquivalent zu einer $\mathcal{L}'$-Formel ist, bei der jede atomare Teilformel die Form $v_i \doteq f\tau_1 \ldots \tau_n$, $v_i \doteq \tau_1$ oder $R\tau_1 \ldots \tau_m$ hat, wobei in den Termen $\tau_i$ das Zeichen $f$ nicht vorkommt (In dieser Formel dürfen Existenzquantoren vorkommen). Verwende hierzu Tricks wie $\tau_1 \doteq \tau_2 \sim \exists v_0(v_0 \doteq \tau_1 \wedge v_0 \doteq \tau_2)$.

(b) Zeigen Sie, dass es zu jeder $\mathcal{L}'$–Formel $\phi$ eine $\mathcal{L}$–Formel $\hat{\phi}$ mit $T' \vdash (\phi \leftrightarrow \hat{\phi})$ gibt.
*Hinweis: Verwenden Sie für den Induktionsanfang das Ergebnis von (a).*

## Aufgabe 4

Wir betrachten die Sprache $\mathcal{L} = \{f_0, f_1, c_0, c_1\}$, wobei die Funktionszeichen beide zweistellig sind. Des Weiteren betrachten wir die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$, d.h. $f_0^{\mathcal{M}} = +$, $f_1^{\mathcal{N}} = \cdot$, $c_0^{\mathcal{N}} = 0$ und $c_1^{\mathcal{N}} = 1$.

(a) Werten Sie folgende Formeln in $\mathcal{N}$ aus und entscheiden Sie, ob die Struktur die Formeln erfüllt oder nicht.

$$\begin{aligned}\exists v_0 \exists v_1 \exists v_2 \forall v_4 \forall v_5 \Big( &((f_1 v_4 v_5 \doteq v_0 \to ((v_4 \doteq c_1 \vee v_5 \doteq c_1) \wedge \neg v_4 \doteq v_5)) \\ &\wedge (f_1 v_4 v_5 \doteq v_1 \to ((f_1 v_4 v_5 \doteq v_5 \vee f_1 v_4 v_5 \doteq v_4) \wedge \neg v_1 \doteq c_1 \wedge \neg v_2 \doteq c_0)) \\ &\wedge (f_1 v_4 v_5 \doteq v_2 \to ((v_4 \doteq v_2 \vee v_5 \doteq v_2) \wedge \neg v_2 \doteq c_1 \wedge \neg v_2 \doteq c_0))\big) \\ &\quad \wedge f_0 v_0 v_1 \doteq v_2 \Big)\end{aligned}$$

$$\forall v_0 \, ((v_0 \doteq f_0 f_0 f_0 f_0 11111 \to \forall v_0 \; v_0 \doteq f_0 f_0 f_0 f_0 11111) \to \forall v_1 (\neg v_0 \doteq v_1 \to \exists v_0 \; v_0 + v_0 \doteq v_1))$$

(b) Finden Sie zu folgenden Aussagen jeweils eine äquivalente prädikatenlogische $\mathcal{L}$-Aussage:

- Das Polynom $x^3 - 4x^2 + x + 6$ hat (mindestens) eine Nullstelle in $\mathbb{N}$.
- Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Abgabe bis Montag 23.01.2017, 10 Uhr,
im Briefkasten in Gebäude 51 (siehe Briefkastenaufschrift)
Auf die Abgaben gehören die Namen der Abgebenden und die Gruppennummer!!!