Intuitionistische Aussagenlogik (3. Juli 2014)

Intuitionistische Logik ist Aussagenlogik ohne das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten $\alpha \vee \neg\alpha$.

Inhalt

Literatur:

Nick Bezhanishvili and Dick de Jongh: Intuitionistic Logic. ESSLLI'05 Course Notes, 2005.
Dirk van Dalen: Logic and Structure.
Grigori Mints: A Short Introduction to Intuitionistic Logic.

Konstruktive Beweise

Mathematische Beweise können nicht-konstruktiv sein.

Beispiel-Satz

Es gibt nicht-rationale Zahlen a und b, so dass a^b rational ist.

Beweis:

$\sqrt{2}$ ist eine nicht-rationale Zahl.

Fall 1: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist rational. Dann kann $a = b = \sqrt{2}$ gewählt werden.

Fall 2: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ist nicht rational.
Dann kann $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $b = \sqrt{2}$ gewählt werden.
$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\,2} = 2$ ist rational. ✓

Obwohl der Satz bewiesen ist, ist nicht klar, welche der beiden Wahlmöglichkeiten für a und b die gewünschte Eigenschaft hat.

Die Brouwer-Heyting-Kolmogorov-Interpretation der Verknüpfungszeichen der intuitionistischen Logik

Wann ist ein Beweis konstruktiv?

- Wenn p ein Beweis für $\alpha \wedge \beta$ ist,
  dann ist $p = \langle a, b \rangle$ ein Paar aus einem Beweis a für α und einem Beweis b für β.
- Wenn p ein Beweis von $\alpha \vee \beta$ ist,
  dann ist $p = \langle a, b \rangle$ ein Paar, so dass b ein Beweis für α ist, falls $a = 0$, und b ein Beweis für β ist, falls $a = 1$.
- Wenn p ein Beweis von $\alpha \to \beta$ ist,
  dann lässt sich mittels p aus jedem Beweis für α ein Beweis für β konstruieren.
- Es gibt keinen Beweis für $\perp$.

Formeln, die intuitionistisch nicht gültig sind

Beispiele:

- $A \vee \neg A$ (allgemeiner: das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten)
- $\neg A \vee \neg\neg A$ (das schwache Gesetz des ausgeschlossenen Dritten)
- $\neg\neg A \to A$ (Doppelnegationsgesetz)
- $(A \to B) \vee (B \to A)$
- $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$ (de Morgansche Regel)
- $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$

Intuitionistische Aussagenlogik formal

Definition 3.1 (Formeln der intuitionistischen Aussagenlogik)

Formeln der intuitionistischen Aussagenlogik sind induktiv definiert wie folgt.

1. Die Konstante $\perp$ und alle atomaren Formeln sind Formeln.
2. Für alle Formeln α und β
   sind $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ und $(\alpha \rightarrow \beta)$ ebenfalls Formeln.

(3. Es gibt keine anderen Formeln.)

$\neg\alpha$ ist abkürzende Schreibweise für $\alpha \rightarrow \perp$.

$\top$ ist abkürzende Schreibweise für $\perp \rightarrow \perp$.

Definition 3.2 (Semantik der intuitionistischen Aussagenlogik)

Ein intuitionistisches Kripke-Modell $\mathcal{M} = (W, \leq, \xi)$ besteht aus

- einem Graph $(W, \leq)$
  mit Welten $W \neq \emptyset$, und reflexiver und transitiver Kantenrelation $\leq$, und
- einer Belegungsfunktion $\xi : W \to$ Atom-Mengen mit
  $u \leq w \Rightarrow \xi(u) \subseteq \xi(w)$ für alle $u, w \in W$ (*Persistenz*).

Die Relation $\models_i$ ist für intuitionistische Kripke-Modelle $\mathcal{M} = (W, \leq, \xi)$, $w \in W$ und Formeln α und β sowie Atome A_i wie folgt definiert:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w \not\models_i \bot & & \\
\mathcal{M}, w \models_i A_i & \text{gdw.} & A_i \in \xi(w) \\
\mathcal{M}, w \models_i \alpha \wedge \beta & \text{gdw.} & \mathcal{M}, w \models_i \alpha \text{ und } \mathcal{M}, w \models_i \beta \\
\mathcal{M}, w \models_i \alpha \vee \beta & \text{gdw.} & \mathcal{M}, w \models_i \alpha \text{ oder } \mathcal{M}, w \models_i \beta \\
\mathcal{M}, w \models_i \alpha \to \beta & \text{gdw.} & \text{für alle } t \in W \text{ mit } w \leq t\text{:} \\
& & \qquad \text{wenn } \mathcal{M}, t \models_i \alpha, \text{ dann } \mathcal{M}, t \models_i \beta
\end{array}
$$

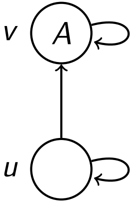
Gültige Formeln

Für $\mathcal{M}, w \models_i \alpha$ sagen wir: α wird in Welt w von Modell $\mathcal{M}$ erfüllt.

Definition 3.3 (Gültigkeit)

Sei α eine intuitionistische Formel.
α heißt *(intuitionistisch) gültig* ($\models_i \alpha$), falls $\mathcal{M}, w \models_i \alpha$ für jedes intuitionistische Modell $\mathcal{M}$ und jede Welt w von $\mathcal{M}$ gilt.

Das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten und das Doppelnegationsgesetz sind intuitionistisch nicht gültig



$\mathcal{M}_1$

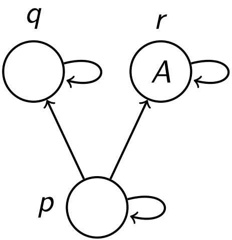
$\mathcal{M}_1, v \models_i A,\ A \vee \neg A,\ \neg\neg A,\ A \to \neg\neg A,\ \neg\neg A \to A$
$\mathcal{M}_1, v \not\models_i\ \neg A$

$\mathcal{M}_1, u \models_i\ \neg\neg A,\ A \to \neg\neg A,\ \neg A \vee \neg\neg A$
$\mathcal{M}_1, u \not\models_i A,\ \neg A,\ A \vee \neg A,\ \neg\neg A \to A$

$A \vee \neg A$ und $\neg\neg A \to A$ sind intuitionistisch nicht gültig.

$(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \vee \beta)$ ist intuitionistisch nicht gültig.

Das schwache Gesetz des ausgeschl. Dritten und eine deMorgan-Regel sind intuitionist. nicht gültig



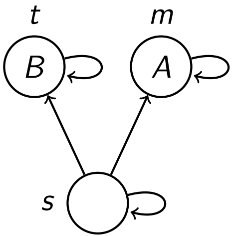
$\mathcal{M}_2$

$\mathcal{M}_2, r \models_{\mathrm{i}} A,\ A \vee \neg A,\ \neg\neg A,\ A \rightarrow \neg\neg A,\ \neg\neg A \rightarrow A$
$\mathcal{M}_2, r \not\models_{\mathrm{i}} \neg A$

$\mathcal{M}_2, q \models_{\mathrm{i}} \neg A,\ A \vee \neg A,\ A \rightarrow \neg\neg A,\ \neg\neg A \rightarrow A$
$\mathcal{M}_2, q \not\models_{\mathrm{i}} A,\ \neg\neg A$

$\mathcal{M}_2, p \models_{\mathrm{i}} A \rightarrow \neg\neg A$
$\mathcal{M}_2, p \not\models_{\mathrm{i}} A,\ \neg A,\ \neg\neg A,\ A \vee \neg A,\ \neg\neg A \rightarrow A,$
$\neg A \vee \neg\neg A$

$\neg A \vee \neg\neg A$ ist intuitionistisch nicht gültig.
$\neg(A \wedge \neg A) \rightarrow (\neg A \vee \neg\neg A)$ ist nicht gültig.



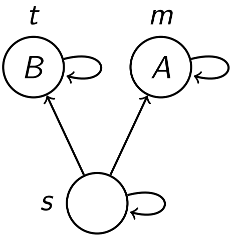
$\mathcal{M}_3$

$$\mathcal{M}_3, m \models_{\mathrm{i}} \; B \to A,\; (A \to B) \vee (B \to A)$$
$$\mathcal{M}_3, m \not\models_{\mathrm{i}} \; A \to B$$

$$\mathcal{M}_3, t \models_{\mathrm{i}} \; A \to B,\; (A \to B) \vee (B \to A)$$
$$\mathcal{M}_3, t \not\models_{\mathrm{i}} \; B \to A$$

$$\mathcal{M}_3, s \models_{\mathrm{i}} \; \neg(A \wedge B)$$
$$\mathcal{M}_3, s \not\models_{\mathrm{i}} \; A \to B,\; B \to A, (A \to B) \vee (B \to A)$$

$(A \to B) \vee (B \to A)$ ist intuitionistisch nicht gültig.



$\mathcal{M}_3$

$$\mathcal{M}_3, m \models_{\mathsf{i}} \neg(A \wedge B),\ \neg B,\ \neg A \vee \neg B$$
$$\mathcal{M}_3, m \not\models_{\mathsf{i}} B,\ A \wedge B$$

$$\mathcal{M}_3, t \models_{\mathsf{i}} \neg(A \wedge B),\ \neg A,\ \neg A \vee \neg B$$
$$\mathcal{M}_3, t \not\models_{\mathsf{i}} A,\ A \wedge B$$

$$\mathcal{M}_3, s \models_{\mathsf{i}} \neg(A \wedge B)$$
$$\mathcal{M}_3, s \not\models_{\mathsf{i}} A,\ B,\ A \wedge B,\ \neg A,\ \neg B,\ \neg A \vee \neg B,\ \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ ist intuitionistisch nicht gültig.

Lemma 3.4 (Persistenz gilt für alle Formeln)

Sei $\mathcal{M} = (W, \leq, \xi)$ ein intuitionistisches Kripke-Modell.
Dann gilt für alle intuitionistischen Formeln α und $u, v \in W$:

1. *Wenn $\mathcal{M}, u \models_{\mathsf{i}} \alpha$ und $u \leq v$, dann $\mathcal{M}, v \models_{\mathsf{i}} \alpha$.*
2. *Wenn $\mathcal{M}, v \not\models_{\mathsf{i}} \alpha$ und $u \leq v$, dann $\mathcal{M}, u \not\models_{\mathsf{i}} \alpha$.*

Natürliches Schließen für intuitionistische Logik

Definition 3.5

Sei Γ eine int.Formelmenge und α eine int. Formel.
$\Gamma \vdash_{\mathrm{i}} \alpha$, falls α mittels Natürlichem Schließen mit den Introduktions- und Eliminationsregeln für $\to$, $\wedge$ und $\vee$ sowie der Regel $(\perp)$ aus Hypothesen in Γ herleitbar ist.

Es dürfen alle Regeln wie für Aussagenlogik verwendet werden,
bis auf (RAA).

Wir werden einen entsprechenden Vollständigkeitssatz beweisen.

Die Regeln des Natürlichen Schließens für int.Logik

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E) \qquad \frac{\bot}{\alpha}\ (\bot)$$

$$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}\ (\wedge I) \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\ (\wedge E) \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\ (\wedge E)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\ (\vee I) \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}\ (\vee I) \qquad \frac{\alpha \vee \beta \qquad \begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\beta]\\ \vdots \\ \varphi\end{array}}{\varphi}\ (\vee E)$$

Natürliches Schließen – formaler

Anders als beim Frege-Kalkül kan man mit Natürlichem Schließen nichts herleiten, ohne Hypothesen zu verwenden.
Formaler könnte man sagen, dass es beim Natürlichen Schließen nicht um das Herleiten von Formeln geht, sondern um das Herleiten von *Sequenten*.

Definition 3.6 (Sequent)

Ein *Sequent* ist ein Paar $\Gamma \triangleright \varphi$,
wobei Γ eine Formelmenge und φ eine Formel ist.
Statt $\Gamma \cup \{\alpha\} \triangleright \varphi$ schreiben wir vereinfachend $\Gamma, \alpha \triangleright \varphi$ etc.

Wir können nun die Regeln des Natürlichen Schließens als Regeln für Sequenten aufschreiben – dadurch wird das bisher etwas schwammige "Auflösen von Hypothesen" klar und einfach definiert.

Natürliches Schließen für intuitionistische Aussagenlogik

1. Die *Elemente* des Natürlichen Schließens sind Sequenten aus intuitionistischen Formeln.
2. Die *Axiome* des Natürlichen Schließens sind Sequenten $\alpha \triangleright \alpha$ für alle intuitionistischen Formeln α.
3. Die *Schlussregeln* des Natürlichen Schließens sind für Formelmengen Γ, Δ und Formeln α, β, φ wie folgt:

   Implikationsregeln:

$$\frac{\Gamma, \beta \triangleright \alpha}{\Gamma \triangleright \beta \to \alpha}\ (\to I) \qquad \frac{\Gamma \triangleright \alpha}{\Gamma \triangleright \beta \to \alpha}\ (\to I)$$

$$\frac{\Gamma \triangleright \alpha \qquad \Delta \triangleright \alpha \to \beta}{\Gamma, \Delta \triangleright \beta}\ (\to E)$$

"Γ, Δ" steht für $\Gamma \cup \Delta$.

Konjunktionsregeln:

$$\frac{\Gamma \rhd \alpha \wedge \beta}{\Gamma \rhd \alpha}\ (\wedge E) \qquad \frac{\Gamma \rhd \alpha \wedge \beta}{\Gamma \rhd \beta}\ (\wedge E) \qquad \frac{\Gamma \rhd \alpha \qquad \Delta \rhd \beta}{\Gamma, \Delta \rhd \alpha \wedge \beta}\ (\wedge I)$$

Disjunktionsregeln:

$$\frac{\Gamma \rhd \alpha}{\Gamma \rhd \alpha \vee \beta}\ (\vee I) \qquad \frac{\Gamma \rhd \beta}{\Gamma \rhd \alpha \vee \beta}\ (\vee I)$$

$$\frac{\Gamma \rhd \alpha \vee \beta \quad \Delta, \alpha \rhd \varphi \quad \Delta', \beta \rhd \varphi}{\Gamma, \Delta, \Delta' \rhd \varphi}\ (\vee E)$$

Falsumregel:

$$\frac{\Gamma \rhd \bot}{\Gamma \rhd \beta}\ (\bot)$$

"Γ, Δ" steht für $\Gamma \cup \Delta$.

4. Eine *Herleitung* eines Sequenten $\Gamma \rhd \alpha$ mittels Natürlichem Schließen ist eine Folge $\Gamma_1 \rhd \alpha_1, \Gamma_2 \rhd \alpha_2, \ldots, \Gamma_\ell \rhd \alpha_\ell$ von Sequenten, an deren Ende $\Gamma \rhd \alpha (= \Gamma_\ell \rhd \alpha_\ell)$ steht und deren Elemente folgende Eigenschaften haben (für $i = 1, 2, \ldots, \ell$):
   - $\Gamma_i \rhd \alpha_i$ ist ein Axiom, oder
   - es gibt $\Gamma_a \rhd \alpha_a$ und ggf. $\Gamma_b \rhd \alpha_b$, $\Gamma_c \rhd \alpha_c$ mit $a, b, c < i$, aus denen $\Gamma_i \rhd \alpha_i$ in einem Schritt mit einer Schlussregel hergeleitet werden kann.

   (Statt *Herleitung* verwendet man gerne auch den Begriff *Beweis*.)

5. Formel α ist ein *Theorem* des Natürlichen Schließens (Schreibweise: $\vdash_{\mathrm{i}} \alpha$), wenn es eine Herleitung von $\emptyset \rhd \alpha$ mittels Natürlichem Schließen gibt. (Statt $\emptyset \rhd \alpha$ schreibt man auch $\rhd \alpha$.)
   Allgemeiner schreiben wir $\Gamma \vdash_{\mathrm{i}} \alpha$, wenn es eine Herleitung von $\Gamma \rhd \alpha$ mittels Natürlichem Schließen gibt.

Lemma 3.7 (Implikation und Negation)

1. $\vdash_{\mathsf{i}} \alpha \to \neg\neg\alpha$
2. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
3. $\vdash_{\mathsf{i}} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$
4. $\vdash_{\mathsf{i}} (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

Beweise zu Lemma 3.7

(1)	α	$\rhd$	α	
(2)	$\neg\alpha$	$\rhd$	$\neg\alpha$	
(3)	$\alpha, \neg\alpha$	$\rhd$	$\bot$	$(\to E)(1),(2)$
(4)	α	$\rhd$	$\neg\neg\alpha$	$(\to I)(3)$
(5)		$\rhd$	$\alpha \to \neg\neg\alpha$	$(\to I)(4)$

---

(1)	$\neg\alpha$	$\rhd$	$\neg\alpha$	
(2)	α	$\rhd$	α	
(3)	$\alpha, \neg\alpha$	$\rhd$	$\bot$	$(\to E)(1),(2)$
(4)	$\alpha, \neg\alpha$	$\rhd$	β	$(\bot)(3)$
(5)		$\rhd$	$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$	$(\to I)(3)$ (oder $\rhd\ \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$)

---

(1)	$\alpha \to \beta$	$\rhd$	$\alpha \to \beta$	
(2)	$\neg\beta$	$\rhd$	$\neg\beta$	
(3)	α	$\rhd$	α	
(4)	$\alpha, \alpha \to \beta$	$\rhd$	β	$(\to E)(1),(3)$
(5)	$\alpha, \alpha \to \beta, \neg\beta$	$\rhd$	$\bot$	$(\to E)(2),(4)$
(6)		$\rhd$	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	$(\to I)(5)$

Was bleibt von der klassischen Aussagenlogik übrig?

Lemma 3.8 (der Rest der deMorgan'schen Regeln)

1. $\vdash_{\mathsf{i}} (\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$
2. $\vdash_{\mathsf{i}} (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$
3. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

Beweis von Lemma 3.8(1)

$$
\begin{array}{rrcll}
(1) & \neg\alpha \vee \neg\beta & \rhd & \neg\alpha \vee \neg\beta & \\
(2a) & \neg\alpha & \rhd & \neg\alpha & \\
(3a) & \alpha \wedge \beta & \rhd & \alpha \wedge \beta & \\
(4a) & \alpha \wedge \beta & \rhd & \alpha & (\wedge E)(3a) \\
(5a) & \neg\alpha, \alpha \wedge \beta & \rhd & \perp & (\rightarrow E)(2a), (4a) \\
(2b) & \neg\beta & \rhd & \neg\beta & \\
(3b) & \alpha \wedge \beta & \rhd & \alpha \wedge \beta & \\
(4b) & \alpha \wedge \beta & \rhd & \beta & (\wedge E)(3b) \\
(5b) & \neg\beta, \alpha \wedge \beta & \rhd & \perp & (\rightarrow E)(2b), (4b) \\
(6) & \neg\alpha \vee \neg\beta, \alpha \wedge \beta & \rhd & \perp & (\vee E)(1), (5a), (5b) \\
(7) & & \rhd & (\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta) & (\rightarrow I)(6)
\end{array}
$$

Beweis von Lemma 3.8(2)

$$
\begin{array}{rrcll}
(1) & \neg\alpha \wedge \neg\beta & \rhd & \neg\alpha \wedge \neg\beta & \\
(2) & \neg\alpha \wedge \neg\beta & \rhd & \neg\alpha & (\wedge E)(1) \\
(3) & \neg\alpha \wedge \neg\beta & \rhd & \neg\beta & (\wedge E)(1) \\
(4) & \alpha \vee \beta & \rhd & \alpha \vee \beta & \\
(5a) & \alpha & \rhd & \alpha & \\
(6a) & \alpha, \neg\alpha \wedge \neg\beta & \rhd & \bot & (\rightarrow E)(5a), (2) \\
(5b) & \beta & \rhd & \beta & \\
(6b) & \beta, \neg\alpha \wedge \neg\beta & \rhd & \bot & (\rightarrow E)(5b), (3) \\
(7) & \alpha \vee \beta, \neg\alpha \wedge \neg\beta & \rhd & \bot & (\vee E)(4), (6a), (6b) \\
(8) & & \rhd & (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta) & (\rightarrow I)(7)
\end{array}
$$

Beweis von Lemma 3.8(3)

Zuerst zeigen wir $\vdash_{\mathsf{i}} \alpha \to (\alpha \vee \beta)$.

(1)	α	$\triangleright$	α	
(2)	α	$\triangleright$	$\alpha \vee \beta$	$(\vee I)(1)$
(3)		$\triangleright$	$\alpha \to (\alpha \vee \beta)$	$(\to I)(2)$

Mit Lemma 3.7(4) folgt $\vdash_{\mathsf{i}} \neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\alpha$.

Entsprechend kann $\vdash_{\mathsf{i}} \neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\beta$ gezeigt werden.

Aus beiden zusammen folgt $\vdash_{\mathsf{i}} \neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$.

Sonderfälle der Doppelnegation

Wir haben bereits gesehen,

dass $\neg\neg\alpha \to \alpha$ nicht für alle α intuitionistisch gültig ist.

Es gibt aber ein paar Sonderfälle.

Lemma 3.9

1. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg\bot \to \bot$.
2. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$ *für alle intuitionistischen Formeln* α.

Beweis von Lemma 3.9

$\vdash_{\mathrm{i}} \neg\neg\bot \to \bot$:

$$
\begin{array}{llcll}
(1) & \bot & \rhd & \bot & \\
(2) & & \rhd & \bot \to \bot & (\to I)(1) \\
(3) & \underbrace{(\bot \to \bot) \to \bot}_{=\neg\neg\bot} & \rhd & (\bot \to \bot) \to \bot & \\
(4) & (\bot \to \bot) \to \bot & \rhd & \bot & (\to E)(2),(3) \\
(5) & & \rhd & \neg\neg\bot \to \bot & (\to I)(4)
\end{array}
$$

$\vdash_{\mathrm{i}} \neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$:

Es gilt $\vdash_{\mathrm{i}} \alpha \to \neg\neg\alpha$ (Lemma 3.7(1)).

Mit $\vdash_{\mathrm{i}} (\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha)$ (Lemma 3.7(4)) folgt $\vdash_{\mathrm{i}} \neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$.

Die folgenden Lemmata benötigt man zum Beweis von Satz 3.15.

Lemma 3.10

1. $(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
2. $\neg(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$

Der Beweis von Satz 3.15 besteht aus einer Fallunterscheidung für jede Regel des Natürlichen Schließens, von der wir nur vier Fälle beweisen werden (die übrigen Fälle gehen ähnlich). Entsprechend beweisen wir von den Lemmata nur die, die in den vier Fällen auch benötigt werden.

Beweis zu Lemma 3.10

Beweis zu 1:

$$
\begin{array}{llcll}
(1) & \alpha \land \neg\beta & \rhd & \alpha & \text{Axiom und } (\land E) \\
(2) & \alpha \to \beta & \rhd & \alpha \to \beta & \\
(3) & \alpha \land \neg\beta, \alpha \to \beta & \rhd & \beta & (\to E)(1),(2) \\
(4) & \alpha \land \neg\beta & \rhd & \neg\beta & \text{Axiom und } (\land E) \\
(5) & \alpha \land \neg\beta, \alpha \to \beta & \rhd & \bot & (\to E)(3),(4) \\
(6) & \alpha \land \neg\beta & \rhd & \neg(\alpha \to \beta) & (\to I)(5) \\
(7) & & \rhd & (\alpha \land \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta) & (\to I)(6)
\end{array}
$$

Beweis zu Lemma 3.10

Beweis zu 2:

Es gilt $\vdash_{\mathsf{i}} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ (Lemma 3.7(3)).
Mit Lemma 3.7(4) folgt $\vdash_{\mathsf{i}} \neg(\neg\alpha \to \beta) \to \neg\alpha$ und damit $\neg(\neg\alpha \to \beta) \vdash_{\mathsf{i}} \neg\alpha$.

Ebenfalls gilt $\vdash_{\mathsf{i}} \beta \to (\neg\alpha \to \beta)$.
Mit Lem. 3.7(4) folgt $\vdash_{\mathsf{i}} \neg(\neg\alpha \to \beta) \to \neg\beta$ und damit schließlich $\neg(\neg\alpha \to \beta) \vdash_{\mathsf{i}} \neg\beta$.

Aus $\neg(\neg\alpha \to \beta) \vdash_{\mathsf{i}} \neg\alpha$ und $\neg(\neg\alpha \to \beta) \vdash_{\mathsf{i}} \neg\beta$ folgt $\neg(\neg\alpha \to \beta) \vdash_{\mathsf{i}} \neg\alpha \wedge \neg\beta$ $(\wedge I)$.

Mit Lemma 3.8(2) folgt $\neg(\neg\alpha \to \beta) \vdash_{\mathsf{i}} \neg(\alpha \vee \beta)$ und damit schließlich $\vdash_{\mathsf{i}} \neg(\neg\alpha \to \beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$

Lemma 3.11 (Implikation und Doppelnegation)

1. $\vdash_{\mathsf{i}} (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\neg(\alpha \to \beta)$
2. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta)$
3. $\vdash_{\mathsf{i}} (\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\neg(\alpha \to \beta)$

Beweis zu Lemma 3.11

Beweis zu 1.):

(1)		$\triangleright$	$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$	Lemma 3.7(2)
(2)		$\triangleright$	$(\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha)$	3.7(4
(3)	$\neg(\alpha \to \beta)$	$\triangleright$	$\neg(\alpha \to \beta)$	
(4)		$\triangleright$	$\beta \to (\alpha \to \beta)$	Lemma
(5)		$\triangleright$	$\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$	aus Lemma 3.7(4) und (5)
(6)		$\triangleright$	$\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha$	$(\to E)(1),(2)$
(7)	$\neg(\alpha \to \beta)$	$\triangleright$	$\neg\neg\alpha$	$(\to E)(1),(2),(7)$
(8)	$\neg(\alpha \to \beta)$	$\triangleright$	$\neg\beta$	$(\to E)(7),(5)$
(9)	$\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$	$\triangleright$	$\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$	
(10)	$\neg(\alpha \to \beta), \neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$	$\triangleright$	$\neg\neg\beta$	$(\to E)(7),(9)$
(11)	$\neg(\alpha \to \beta), \neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$	$\triangleright$	$\perp$	$(\to E)(8),(10)$
(12)	$\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$	$\triangleright$	$\neg\neg(\alpha \to \beta)$	$(\to I)(11)$
(13)		$\triangleright$	$(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\neg(\alpha \to \beta)$	$(\to I)(12)$

Beweis zu Lemma 3.11

Beweis zu 2.):

(1)	$\neg\neg(\alpha \to \beta)$	$\triangleright$	$\neg\neg(\alpha \to \beta)$	
(2)		$\triangleright$	$\neg\neg(\alpha \to \beta) \to \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$	Lem.3.7(4), 3.10(1) und $(\to E)$
(3)	$\neg\neg(\alpha \to \beta)$	$\triangleright$	$\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$	$(\to E)(1),(2)$
(4)	$\alpha, \neg\beta$	$\triangleright$	$\alpha \wedge \neg\beta$	Axiome und $(\wedge I)$
(5)	$\alpha, \neg\beta, \neg\neg(\alpha \to \beta)$	$\triangleright$	$\perp$	$(\to E)(3),(4)$
(6)	$\neg\beta, \neg\neg(\alpha \to \beta)$	$\triangleright$	$\neg\alpha$	$(\to I)(5)$
(7)	$\neg\neg\alpha$	$\triangleright$	$\neg\neg\alpha$	
(8)	$\neg\neg\alpha, \neg\beta, \neg\neg(\alpha \to \beta)$	$\triangleright$	$\perp$	$(\to E)(6),(7)$
(9)	$\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta)$	$\triangleright$	$\neg\neg\beta$	$(\to I)(8)$
(10)	$\neg\neg(\alpha \to \beta)$	$\triangleright$	$\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$	$(\to I)(9)$
(11)		$\triangleright$	$\neg\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta)$	$(\to I)(10)$

Beweis zu Lemma 3.11

Beweis zu 3.):

(1)	$\alpha \to \neg\neg\beta$	$\triangleright$	$\alpha \to \neg\neg\beta$	
(2)		$\triangleright$	$(\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\neg\neg\beta \to \neg\alpha)$	Lemma 3.7(4)
(3)		$\triangleright$	$(\neg\neg\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\neg\beta)$	Lemma 3.7(4)
(4)	$\alpha \to \neg\neg\beta$	$\triangleright$	$\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\neg\beta$	$(\to E)(1),(2),(3)$
(5)		$\triangleright$	$\neg\neg\neg\neg\beta \to \neg\neg\beta$	Lemma 3.9(2)
(6)	$\alpha \to \neg\neg\beta$	$\triangleright$	$\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$	TRANS (4),(5)
(7)	$\alpha \to \neg\neg\beta$	$\triangleright$	$\neg\neg(\alpha \to \beta)$	$(\to E)$3.11(1), (6)
(8)		$\triangleright$	$(\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta)$	$(\to I)(7)$

Lemma 3.12 (Konjunktion und Doppelnegation)

1. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta)$
2. $\vdash_{\mathsf{i}} (\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta) \rightarrow \neg\neg(\alpha \wedge \beta)$

Lemma 3.13 (Konjunktion und Implikation)

1. $\vdash_{\mathsf{i}} (\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
2. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$

Lemma 3.14 (Disjunktion)

1. $\vdash_{\mathsf{i}} (\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$
2. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg(\alpha \to \beta) \to \neg(\neg\alpha \vee \beta)$
3. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg(\neg\alpha \vee \beta) \to (\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
4. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg\alpha \to \neg\neg(\alpha \vee \beta)$
5. $\vdash_{\mathsf{i}} (\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$
6. $\vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\neg(\neg\alpha \to \beta)$

Beweis zu 6:
folgt aus Lemma 3.8(2) und Lemma 3.7(4).

Zusammenhang zwischen klassischer und intuitionistischer Aussagenlogik

Satz 3.15 (Satz von Glivenko)

Sei α eine intuitionistische Formel und Γ eine Menge intuitionistischer Formeln.
$\Gamma \vdash_{\mathsf{Nat}} \alpha$ genau dann, wenn $\Gamma \vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg\alpha$.

Mit dem Vollständigkeitssatz 3.24 folgt, dass
α klassisch gültig ist genau dann, wenn $\neg\neg\alpha$ intuitionistisch gültig ist.

Es folgt ebenso: $\vdash_{\mathsf{Nat}} \neg\neg\alpha$ genau dann, wenn $\vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg\alpha$.

Beweis des Satzes von Glivenko

Aus $\Gamma \vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg\alpha$ folgt $\Gamma \vdash_{\mathsf{Nat}} \alpha$: klar wg. $\vdash_{\mathsf{Nat}} \neg\neg\alpha \to \alpha$.

Bleibt zu zeigen: wenn $\Gamma \vdash_{\mathsf{Nat}} \alpha$, dann $\Gamma \vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg\alpha$.
Der Beweis nutzt Induktion über die Länge des Beweises von α.

IA: $\Gamma \vdash_{\mathsf{Nat}} \alpha$ mit einem Beweis der Länge 1.
Dann ist $\alpha \in \Gamma$. Da $\vdash_{\mathsf{i}} \alpha \to \neg\neg\alpha$, folgt $\Gamma \vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg\alpha$.

IV: Wenn $\Gamma \vdash_{\mathsf{Nat}} \alpha$ mit einem Beweis der Länge $\leq n$,
dann folgt $\Gamma \vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg\alpha$.

IS: zu zeigen:
Wenn $\Gamma \vdash_{\mathsf{Nat}} \alpha$ mit einem Beweis der Länge $n + 1$, dann folgt $\Gamma \vdash_{\mathsf{i}} \neg\neg\alpha$.

Wir unterscheiden alle Fälle, durch
welche Regelanwendung α im letzten Schritt des Beweises entsteht.

Fall 1: $\alpha \in \Gamma$: dann kann wie im IA argumentiert werden.

Fall 2: $\alpha = \beta \to \gamma$ entsteht aus γ mittels ($\to$ *I*)
mit Auflösung der Hypothese β.

Nach IV gilt $\Gamma, \beta \vdash_{\mathrm{i}} \neg\neg\gamma$.
Daraus erhält man $\Gamma \vdash_{\mathrm{i}} \beta \to \neg\neg\gamma$ mit ($\to$ *I*).
Mit Lemma 3.11(3) folgt $\Gamma \vdash_{\mathrm{i}} \neg\neg(\beta \to \gamma)$, also $\Gamma \vdash_{\mathrm{i}} \neg\neg\alpha$.

Die eigentliche Beweisarbeit steckt also im Beweis des benutzten Lemmas.

Fall 3: α entsteht mittels (*RAA*).
Dann gilt $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{\mathrm{Nat}} \bot$, und laut IV folgt $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{\mathrm{i}} \neg\neg\bot$.
Mit $\vdash_{\mathrm{i}} \neg\neg\bot \to \bot$ (Lemma 3.9(1)) folgt $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{\mathrm{i}} \bot$
und damit $\Gamma \vdash_{\mathrm{i}} \neg\neg\alpha$.

Interessant, wie für (RAA) benötigt wird, dass Doppelnegation "ausnahmsweise" für $\bot$ gilt.

Fall 4: α entsteht mittels $(\vee E)$.
Dann gilt $\Gamma \vdash_{\text{Nat}} \beta \vee \gamma$, sowie $\Gamma, \beta \vdash_{\text{Nat}} \alpha$ und $\Gamma, \gamma \vdash_{\text{Nat}} \alpha$.
Nach IV folgt $\Gamma \vdash_{\text{i}} \neg\neg(\beta \vee \gamma)$, sowie $\Gamma, \beta \vdash_{\text{i}} \neg\neg\alpha$ und $\Gamma, \gamma \vdash_{\text{i}} \neg\neg\alpha$.

Behauptung

Es gilt $\Gamma, \neg\neg\beta \vdash_{\text{i}} \neg\neg\alpha$ *und* $\Gamma \vdash_{\text{i}} \neg\neg\gamma \to \neg\neg\alpha$.

Wir zeigen $\Gamma, \neg\neg\beta \vdash_{\text{i}} \neg\neg\alpha$ – die andere Herleitung geht entsprechend.

Aus $\Gamma, \beta \vdash_{\text{i}} \neg\neg\alpha$ folgt $\Gamma \vdash_{\text{i}} \beta \to \neg\neg\alpha$ $(\to I)$.
Mit Lemma 3.11(3) erhalten wir $\Gamma \vdash_{\text{i}} \neg\neg(\beta \to \alpha)$.
Mit Lemma 3.11(2) folgt $\Gamma \vdash_{\text{i}} \neg\neg\beta \to \neg\neg\alpha$ und damit $\Gamma, \neg\neg\beta \vdash_{\text{i}} \neg\neg\alpha$.

Ende des Beweises der Behauptung

Damit ergibt sich folgende Herleitung von $\Gamma \vdash_{\text{i}} \neg\neg\alpha$.

$$
\begin{array}{rrcll}
(1) & \Gamma, \neg\neg\beta & \vdash_{i} & \neg\neg\alpha & \text{(Behauptung)} \\
(2) & \neg\alpha & \vdash_{i} & \neg\alpha & \\
(3) & \Gamma, \neg\neg\beta, \neg\alpha & \vdash_{i} & \bot & (\to E)(1),(2) \\
(4) & \Gamma, \neg\alpha & \vdash_{i} & \neg\neg\neg\beta & (\to I)(3) \\
 & & & & \\
(5) & \Gamma & \vdash_{i} & \neg\neg(\beta \vee \gamma) & \text{IV} \\
(6) & \Gamma & \vdash_{i} & \neg\neg(\neg\beta \to \gamma) & (\to E)\ 3.14(6),(5) \\
(7) & \Gamma & \vdash_{i} & \neg\neg\neg\beta \to \neg\neg\gamma & (\to E)\ 3.11(2),(6) \\
 & & & & \\
(8) & \Gamma, \neg\alpha & \vdash_{i} & \neg\neg\gamma & (\to E)(4),(7) \\
(9) & \Gamma & \vdash_{i} & \neg\neg\gamma \to \neg\neg\alpha & \text{(Behauptung)} \\
(10) & \Gamma, \neg\alpha & \vdash_{i} & \neg\neg\alpha & (\to E)(8),(9) \\
(11) & \Gamma, \neg\alpha & \vdash_{i} & \bot & (\to E)(2),(10) \\
(12) & \Gamma & \vdash_{i} & \neg\neg\alpha & (\to I)(11)
\end{array}
$$

Die übrigen Fälle lassen sich ähnlich direkt wie Fall 2 mit den vorhergehenden Lemmas zeigen. ✓

Zusammenhang zwischen intuitionistischer und modaler Aussagenlogik

Definition 3.16 (Gödels Übersetzung intuitionistischer Formeln)

Die Abbildung g : *intuitionistische Formeln* $\to$ *modale Formeln* ist wie folgt induktiv definiert.

$$g(\alpha) = \begin{cases} \bot, & \text{falls } \alpha = \bot \\ \Box A_i, & \text{falls } \alpha = A_i \text{ ein Atom ist} \\ g(\beta) \wedge g(\gamma), & \text{falls } \alpha = \beta \wedge \gamma \text{ eine Konjunktion ist} \\ g(\beta) \vee g(\gamma), & \text{falls } \alpha = \beta \vee \gamma \text{ eine Disjunktion ist} \\ \Box(g(\beta) \to g(\gamma)), & \text{falls } \alpha = \beta \to \gamma \text{ eine Implikaktion ist} \end{cases}$$

Bsp.: $g((A \wedge B) \to \neg(A \vee B)) = \Box((\Box A \wedge \Box B) \to \Box\neg(\Box A \vee \Box B))$.

Satz 3.17

Für jede intuitionistische Formel α gilt

$$\models_{\mathsf{i}} \alpha \text{ genau dann, wenn } \models_{S4} g(\alpha).$$

Lemma 3.18 (Korrektheit des Natürlichen Schließens)

Sei α eine intuitionistische Formel. *Aus $\vdash_{\mathsf{i}} \alpha$ folgt $\models_{\mathsf{i}} \alpha$.*

Beweis:
Wir zeigen etwas allgemeineres, und dazu brauchen eine Definition für "semantische Folgerung", die wir hier direkt über Sequenten formulieren.

Definition 3.19

Sei $\Gamma \triangleright \alpha$ ein Sequent.
Für ein intuitionistisches Modell $\mathcal{M}$ und eine Welt w von $\mathcal{M}$ gilt
$\mathcal{M}, w \models_{\mathsf{i}} \Gamma \triangleright \alpha$, falls gilt:

$$\text{wenn } \mathcal{M}, w \models_{\mathsf{i}} \gamma \text{ für jedes } \gamma \in \Gamma, \text{ dann } \mathcal{M}, w \models_{\mathsf{i}} \alpha.$$

$\models_{\mathsf{i}} \Gamma \triangleright \alpha$, falls $\mathcal{M}, w \models_{\mathsf{i}} \Gamma \triangleright \alpha$ für alle intuitionistischen Modelle $\mathcal{M}$ und Welten w von $\mathcal{M}$.

Das Korrektheitslemma ist der Spezialfall $\Gamma = \emptyset$ folgender Behauptung. Mit dem Beweis der Behauptung ist also auch das Lemma bewiesen.

Behauptung

Wenn $\Gamma \triangleright \alpha$ herleitbar ist, dann folgt $\models_{\mathsf{i}} \Gamma \triangleright \alpha$.

Beweis der Behauptung
mittels Induktion über die Länge der Herleitung von $\Gamma \triangleright \alpha$:

IA: die Länge der Herleitung von $\Gamma \triangleright \alpha$ ist 1:
dann ist $\Gamma \triangleright \alpha$ ein Axiom, d.h. $\Gamma = \{\alpha\}$, und offensichtlich gilt $\models_{\mathsf{i}} \alpha \triangleright \alpha$.

IV: Wenn $\Gamma \triangleright \alpha$ eine Herleitung der Länge $\leq n$ besitzt,
dann folgt $\models_{\mathsf{i}} \Gamma \triangleright \alpha$.

IS: $\Gamma \triangleright \alpha$ habe eine Herleitung der Länge $n + 1$.
Wir unterscheiden alle Fälle nach der im letzten Herleitungsschritt angewandten Regel.

Fall 1: $\Gamma \triangleright \alpha$ ist ein Axiom. Dann gilt $\models_i \Gamma \triangleright \alpha$ (wie im IA).

Fall 2: in der Herleitung von $\Gamma \triangleright \alpha$ ist der letzte Schritt $(\wedge E)$.
Dann hat $\Gamma \triangleright \alpha \wedge \beta$ eine Herleitung der Länge n.
Nach IV folgt $\models_i \Gamma \triangleright \alpha \wedge \beta$.
Gemäß der Semantik von $\wedge$ gilt dann ebenso $\models_i \Gamma \triangleright \alpha$.

Fall 3: in der Herleitung von $\Gamma \triangleright \alpha$ ist der letzte Schritt $(\rightarrow E)$.
Dann ist $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ und $\Gamma, \beta \triangleright \gamma$ hat eine Herleitung der Länge n.
Sei $\mathcal{M} = (W, \leq, \xi)$ ein intuitionistisches Modell und $w \in W$.
Da $\models_i \Gamma, \beta \triangleright \gamma$ (IV) gilt für alle $u \geq w$ mit $\mathcal{M}, u, \models_i \Gamma$:

wenn $\mathcal{M}, u \models_i \beta$, dann $\mathcal{M}, u \models_i \gamma$.

Gemäß der Semantik von $\rightarrow$ folgt $\mathcal{M}, w \models_i \Gamma \triangleright \beta \rightarrow \gamma$.
Da $\mathcal{M}$ und w beliebig gewählt waren, folgt $\models_i \Gamma \triangleright \beta \rightarrow \gamma$.

Die übrigen Fälle gehen ähnlich (und ohne besonderen Aufwand). ✓

Der Vollständigkeitssatz basiert hier – anders als für die bisher betrachteten Logiken – nicht auf *maximal* konsistenten Mengen.
Das liegt daran, dass – aafdbbL – in einer Welt weder α noch $\neg\alpha$ erfüllt sein können.

Definition 3.20 (i-Theorie für α)

Eine *i-Theorie* für α ist eine Menge $\Delta \subseteq \mathsf{Tf}(\alpha)$ mit folgenden Eigenschaften.

1. Δ ist konsistent.
   D.h. $\Delta \not\vdash_{\mathsf{i}} \bot$.
2. Δ ist abgeschlossen unter $\vdash_{\mathsf{i}}$.
   D.h. für jedes $\beta \in \mathsf{Tf}(\alpha)$ gilt: wenn $\Delta \vdash_{\mathsf{i}} \beta$, dann $\beta \in \Delta$.
3. Δ hat die Disjunktionseigenschaft.
   D.h. für jedes $\beta \vee \gamma \in \Delta$ gilt: $\beta \in \Delta$ oder $\gamma \in \Delta$.

Die folgenden Eigenschaften maximal konsistenter Mengen gelten auch für i-Theorien Δ:

1. Abgeschlossenheit unter $\vdash_{\mathsf{i}}$
2. $\varphi \wedge \psi \in \Delta$ gdw. $\varphi \in \Delta$ und $\psi \in \Delta$
3. $\varphi \vee \psi \in \Delta$ gdw. $\varphi \in \Delta$ oder $\psi \in \Delta$

Die Eigenschaft

$$\text{“}\varphi \to \psi \in \Delta \text{ gdw. } \varphi \notin \Delta \text{ oder } \psi \in \Delta\text{”}$$

gilt nicht für i-Theorien.

Darum kümmert sich das folgende Lemma.

Lemma 3.21

Sei α eine intuitionistische Formel, $\Delta \subseteq Tf(\alpha)$ und $\beta \to \gamma \in Tf(\alpha)$.
Falls $\Delta \not\vdash_i \beta \to \gamma$,
dann gibt es eine i-Theorie $\Gamma \supseteq \Delta$ für α mit $\beta \in \Gamma$ und $\gamma \notin \Gamma$.

Beweis:

Δ ist konsistent, da $\Delta \not\vdash_i \beta \to \gamma$.

Da $\Delta \not\vdash_i \beta \to \gamma$, folgt $\Delta \not\vdash_i \gamma$ und damit $\gamma \notin \Delta$.

Ebenso gilt $\Delta \cup \{\beta\} \not\vdash_i \gamma$, da anderenfalls $\Delta \vdash_i \beta \to \gamma$ folgt.

Sei $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ eine Aufzählung von $\mathrm{Tf}(\alpha)$.

Definiere $\Gamma_0 := \Delta \cup \{\beta\}$ und

$$\Gamma_{i+1} := \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\}, & \text{falls } \Gamma_i, \varphi_i \not\vdash_i \gamma \\ \Gamma_i, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

1.) $\mathrm{Tf}(\alpha) \supseteq \Gamma_m \supseteq \Delta$ und $\Gamma_m \not\vdash_{\mathrm{i}} \gamma$: folgt direkt aus der Konstruktion.

2.) Γ_m ist abgeschlossen unter $\vdash_{\mathrm{i}}$. (wie üblich)

3.) Γ_m ist konsistent: folgt aus 1.) und 2.).

4.) Γ_m hat die Disjunktionseigenschaft:

Seien $\varphi_a, \varphi_b \notin \Gamma_m$.
Dann gilt $\Gamma_m, \varphi_a \vdash_{\mathrm{i}} \gamma$ und $\Gamma_m, \varphi_b \vdash_{\mathrm{i}} \gamma$.
Mit $(\vee E)$ folgt $\Gamma_m, \varphi_a \vee \varphi_b \vdash_{\mathrm{i}} \gamma$.
Da $\Gamma_m \not\vdash_{\mathrm{i}} \gamma$, folgt $\varphi_a \vee \varphi_b \notin \Gamma_m$.

Also ist $\Gamma_m \supseteq \Delta$ eine i-Theorie für α mit $\beta \in \Gamma_m$ und $\gamma \notin \Gamma_m$. ✓

Folgerung 3.22

Sei α eine intuitionistische Formel,
Δ eine i-Theorie für α und $\beta \to \gamma \in Tf(\alpha)$.
$\beta \to \gamma \in \Delta$ genau dann, wenn
für alle i-Theorien $\Gamma \supseteq \Delta$ für α gilt: wenn $\beta \in \Gamma$, dann $\gamma \in \Gamma$.

Beweis:

"$\Leftarrow$": das ist (ein Spezialfall von) Lemma 3.21.

"$\Rightarrow$": Sei $\beta \to \gamma \in \Delta$.
Da Δ $\vdash_{\mathsf{i}}$-abgeschlossen ist,
folgt $\beta \to \gamma \in \Gamma$ für alle i-Theorien $\Gamma \supseteq \Delta$ für α.
Also gilt für alle i-Theorien $\Gamma \supseteq \Delta$ für α:
wenn $\beta \in \Gamma$, dann $\Gamma \vdash_{\mathsf{i}} \gamma$ und damit $\gamma \in \Gamma$. ✓

Lemma 3.23 (Vollständigkeit des Natürlichen Schließens)

Sei α eine intuitionistische Formel. *Aus $\models_{\mathsf{i}} \alpha$ folgt $\vdash_{\mathsf{i}} \alpha$.*

Beweis:

Wir zeigen die Kontraposition: aus $\not\vdash_{\mathsf{i}} \alpha$ folgt $\not\models_{\mathsf{i}} \alpha$.
Dazu konstruieren wir ein Modell, das α nicht erfüllt.

Zuerst konstruieren wir das gesuchte Modell $\mathcal{M}_\alpha = (W_\alpha, \subseteq, \xi_\alpha)$ mit

1. $W_\alpha =$ die Menge aller i-Theorien für $\top \to \alpha$ und
2. $\xi_\alpha(w) = \{A_i \mid A_i \in w\}$ (für jedes $w \in W_\alpha$).

$\subseteq$ ist reflexiv und transitiv, und
aus $u \subseteq v$ folgt $\xi_\alpha(u) \subseteq \xi_\alpha(v)$.
Also ist $\mathcal{M}_\alpha$ ein intuitionistisches Modell.

Behauptung

Für alle $w \in W_\alpha$ und alle $\beta \in Tf(\top \to \alpha)$ gilt:
$\beta \in w$ *genau dann, wenn* $\mathcal{M}_\alpha, w \models_i \beta$.

Die Behauptung wird mittels Induktion über den Formelaufbau bewiesen.

IA: Für $\perp$ gilt die Behauptung, da $\perp \notin w$.
Für alle Atome gilt die Behauptung aufgrund der Definition von ξ_α.

IV: Die Behauptung gilt für Formeln δ und ψ.

IS: Fall 1: $\beta = \delta \vee \psi$.

$\delta \vee \psi \in w$
- gdw. $\delta \in w$ oder $\psi \in w$ (da w die Disjunktionseigenschaft hat)
- gdw. $\mathcal{M}_\alpha, w \models_i \delta$ oder $\mathcal{M}_\alpha, w \models_i \psi$ (IV)
- gdw. $\mathcal{M}_\alpha, w \models_i \delta \vee \psi$ (Semantik von $\vee$)

Fall 2: $\beta = \delta \wedge \psi$.

$\delta \wedge \psi \in w$

gdw. $\delta \in w$ und $\psi \in w$ (da w unter $\vdash_{\mathsf{i}}$ abgeschlossen ist)

gdw. $\mathcal{M}_\alpha, w \models_{\mathsf{i}} \delta$ oder $\mathcal{M}_\alpha, w \models_{\mathsf{i}} \psi$ (IV)

gdw. $\mathcal{M}_\alpha, w \models_{\mathsf{i}} \delta \wedge \psi$ (Semantik von $\wedge$)

Fall 3: $\beta = \delta \rightarrow \psi$.

$\delta \rightarrow \psi \in w$

gdw. für alle $v \in W_\alpha$ mit $w \subseteq v$ gilt: wenn $\delta \in v$, dann $\psi \in v$

(Definition von W_α und Folgerung 3.22)

gdw. für alle $v \in W_\alpha$ mit $w \subseteq v$ gilt:

wenn $\mathcal{M}_\alpha, v \models_{\mathsf{i}} \delta$, dann $\mathcal{M}_\alpha, v \models_{\mathsf{i}} \psi$

(Konstruktion von $\mathcal{M}_\alpha$ und IV)

gdw. $\mathcal{M}_\alpha, w \models_{\mathsf{i}} \delta \rightarrow \psi$ (Semantik von $\rightarrow$)

[Ende des Beweises der Behauptung]

Sei $a_\emptyset = \{\beta \in \mathsf{Tf}(\top \to \alpha) \mid \vdash_{\mathsf{i}} \beta\}$.

$a_\emptyset$ ist konsistent. (Aus $\vdash_{\mathsf{i}} \bot$ folgt $\models_{\mathsf{i}} \bot$ (3.18), was $\not\models_{\mathsf{i}} \bot$ widerspricht.)
Also ist $a_\emptyset$ eine konsistente Teilmenge von $\mathsf{Tf}(\top \to \alpha)$.

Da $\not\vdash_{\mathsf{i}} \alpha$, folgt $\not\vdash_{\mathsf{i}} \top \to \alpha$ und damit $\top \to \alpha \notin a_\emptyset$.

Nach Lemma 3.21 gibt es eine i-Theorie $\Gamma \supseteq a_\emptyset$ für $\top \to \alpha$ mit $\alpha \notin \Gamma$.

Gemäß Beobachtung gilt $\mathcal{M}_\alpha, \Gamma \not\models_{\mathsf{i}} \alpha$.

Damit folgt $\not\models_{\mathsf{i}} \alpha$. ✓

Satz 3.24 (Vollständigkeitssatz für $\underset{\mathsf{i}}{\vdash}$)

Sei α eine intuitionistische Formel. $\models_{\mathsf{i}} \alpha$ genau dann, wenn $\underset{\mathsf{i}}{\vdash} \alpha$.

Folgt aus Lemmas 3.18 und 3.23.