Steilkurs Lineare Algebra 1 – einige wichtige Stationen

Stefan Kühnlein

Für einen Körper K ist ein K-Vektorraum V eine Menge mit einer kommutativen und assoziativen Verknüpfung $+ : V \times V \to V$, für die es ein neutrales Element 0_V gibt und für jedes $v \in V$ ein $w \in V$ mit $v + w = 0_V$. Wir schreiben dann $w = -v$.
Weiter muss es eine „skalare Multiplikation“ geben, d.h. eine Abbildung $\cdot : K \times V \to V$, sodass einige Relationen erfüllt sind:

- $\forall v \in V: \ 1_K \cdot v = v$
- $\forall a, b \in K, v \in V : (ab)v = a(bv)$ und $\ (a + b)v = av + bv$
- $\forall a \in K, v, w \in V : a(v + w) = av + aw$

Eine Teilmenge B von V heißt eine Basis von V, wenn sich jeder Vektor aus V auf eindeutige Weise als Linearkombination der Elemente in B schreiben lässt. Je zwei Basen von V haben gleich viele Elemente. Die Anzahl der Vektoren in einer Basis nennt man die Dimension von V.
Wenn $B = \{b_1, \dots, b_d\}$ eine Basis von V ist, dann ist definitionsgemäß die Abbildung

$$L_B : K^d \to V,\ (a_1, \dots, a_d)^\top \to \sum_{i=1}^{d} a_i b_i$$

bijektiv. Ihre Umkehrabbildung D_B ordnet jedem Vektor v das eindeutig bestimmte Koordinatentupel bezüglich B (in der gegebenen Reihenfolge) zu. Wir nennen $D_B(v)$ den Koordinatenvektor von v oder auch das Tupel, das v bezüglich B darstellt – daher der Buchstabe D und der Index B.
L_B hat die Eigenschaft

$$\begin{aligned}\forall (a_i), (a_i') \in K^d : L_B((a_i) + (a_i')) &= L_B((a_i + a_i')) = \textstyle\sum_i (a_i + a_i')b_i = \sum_i a_i b_i + \sum_i a_i' b_i \\ &= L_B((a_i)) + L_B((a_i')).\end{aligned}$$

Hier läuft i jeweils von 1 bis d, was ich der Übersicht halber nicht mit dazuschreibe.
Ähnlich zeigt man die Eigenschaft

$$\forall c \in K, (a_i) \in K^d : L_B(c \cdot (a_i)) = L_B((ca_i)) = \sum_i (ca_i)b_i = \sum_i c(a_i b_i) = c \sum_i a_i b_i = cL_B((a_i)).$$

Das bedeutet, dass L_B eine Lineare Abbildung von K^d nach V ist. Wegen der oben festgestellten Bijektivität ist demnach L_B ein Isomorphismus von Vektorräumen: Jeder Vektorraum ist zu einem Standardraum isomorph.
Nun seien V und W zwei beliebige endlichdimensionale Vektorräume (über demselben Körper) und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung, d.h.

$$\forall k, l \in K, v_1, v_2 \in V : \Phi(kv_1 + lv_2) = k\Phi(v_1) + l\Phi(v_2).$$

Wenn wir Φ auf einer Basis $B = \{b_1, \dots, b_d\}$ von V kennen, dann kennen wir prinzipiell ganz Φ, denn für $v = \sum_j k_j b_j$ folgt

$$\Phi(v) = \Phi(\sum_j k_j b_j) = \sum_j k_j \Phi(b_j).$$

Es könnte sich also als lohnend erweisen, die Bilder $\Phi(b_j)$ festzuhalten. Wenn wir eine Basis $C = \{c_1, \dots, c_e\}$ von W wählen, können wir die Vektoren $\Phi(b_j)$ schreiben als

$$\Phi(b_j) = \sum_i a_{i,j} c_i, \quad a_{i,j} \in K \text{ geeignet.}$$

Das liefert

$$\Phi(v) = \sum_i \sum_j a_{i,j} k_j c_i,$$

wir können also mithilfe der Zahlen $a_{i,j}$ aus dem Koordinatenvektor von v (bzgl. B) den Koordinatenvektor von $\Phi(v)$ (bzgl. C) berechnen.
Wir nennen $D_{C,B}(\Phi) := (a_{i,j})_{i,j} \in K^{e \times d}$ die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Basen B und C. Es gilt

$$D_C(\Phi(v)) = D_{C,B} \cdot D_B(v).$$

Rechter Hand steht ein Matrix-Vektor-Produkt.
Wenn speziell die letzten u Basisvektoren in B eine Basis des Kerns von Φ sind, $c_i = \Phi(b_i)$ für $1 \le i \le d - u$, dann ist

$$D_{C,B}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Links oben steht hier die $(d-u) \times (d-u)$-Einheitsmatrix, alle anderen Einträge sind 0. Es ergibt sich die Dimensionsformel

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\Phi)),$$

und wir nennen die Dimension des Bildes auch den Rang von Φ. Das ist auch der Rang einer (jeder) Abbildungsmatrix von Φ.
Anwendung: Wenn U und W zwei Untervektorräume eines größeren Vektorraums sind, so bilden wir

$$V := U \times W = \{(u, w) \mid u \in U, w \in W\}.$$

Dies ist ein Vektorraum (mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation). Seine Dimension ist $\dim(U) + \dim(W)$. Auf V definieren wir die Abbildung

$$\Delta : V \to U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}, \ \Delta((u, w)) := u - w.$$

Der Kern von Δ ist $\{(u, w) \mid u = w\}$, und dies ist isomorph zu $U \cap W$. Also folgt

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W).$$

Jedenfalls sieht man an obiger Basiswahl, dass die Menge aller Typen von Homomorphismen von einem in einen anderen Vektorraum sehr übersichtlich ist. Zwei Homomorphismen desselben Ranges lassen sich nach geeigneten Basiswahlen durch dieselben Matrizen beschreiben.

Dies ändert sich, wenn wir zu Endomorphismen übergehen und dann in Definitions- und Bildbereich dieselbe Basis benutzen sollten. Bei Wahl einer anderen Basis ist die neue Abbildungsmatrix dann sogar ähnlich zur ursprünglichen Matrix. Dabei heißen zwei quadratische Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ ähnlich, wenn ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $S^{-1}AS = B$.
Die Lineare Algebra gibt nun insbesondere Aufschluss darüber, wann zwei quadratische Matrizen ähnlich sind, und versucht, Kriterien zu geben, dies ohne die Konstruktion einer Matrix S zu entscheiden.

Ein wichtiger Begriff hierbei ist der des Eigenwertes eines Endomorphismus. Dabei heißt $a \in K$ ein Eigenwert von Φ, falls ein $v \in V$ existiert, das nicht 0 ist und die Gleichung $\Phi(v) = av$ löst. Solch ein v heißt ein Eigenvektor zu a, die Menge aller Eigenvektoren ist dann also

$$\underbrace{\mathrm{Kern}(\Phi - a\mathrm{Id}_V)}_{=:\mathrm{Eig}(\Phi,a)} \setminus \{0\}.$$

Der hier definierte Vektorraum $\mathrm{Eig}(\Phi, a)$ heißt der Eigenraum von Φ zum Eigenwert a.
Φ heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt. Das wiederum bedeutet nichts anderes, als dass bei geeigneter Basiswahl (Basis aus Eigenvektoren) die Abbildungsmatrix eine Diagonalmatrix ist. Eine Matrix heißt diagonalisierbar, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.
Wie kann man das entscheiden?
Die Zahl $a \in K$ ist genau dann ein Eigenwert der Matrix $A \in K^{n\times n}$, wenn der Rang von $A - aI_n$ kleiner ist als n, wenn also $A - aI_n$ nicht invertierbar ist. Anders gesagt: Wenn die Determinante von $A - aI_n$ 0 ist. Das führt zur Definition des charakteristischen Polynoms:

$$\mathrm{CP}_A(X) := \det(XI_n - A) \in K[X].$$

Die Eigenwerte von A sind genau die in K liegenden Nullstellen von $\mathrm{CP}_A(X)$. Da dieses Polynom Grad n hat, gibt es höchstens n Eigenwerte.

Die Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn das charakteristische Polynom folgendermaßen zerfällt:

$$\mathrm{CP}_A(X) = \prod_a (X - a)^{\dim(\mathrm{Eig}(A,a))}.$$

(Es zerfällt also in Linearfaktoren und die algebraische Vielfachheit stimmt jeweils mit der geometrischen überein.)
Der Satz von Cayley-Hamilton sagt, dass $\mathrm{CP}_A(A) = 0$ gilt. Betrachtet man allgemeiner die Menge aller Polynome $f \in K[X]$ mit $f(A) = 0$, so stellt sich heraus, dass diese Polynome genau die Vielfachen eines eindeutig bestimmten normierten Polynoms $\mathrm{MP}_A(X)$ sind. Dieses heißt das Minimalpolynom. Da die Potenzen $I_n, A, A^2, A^3, \ldots$ nicht alle linear unabhängig sein können, gibt es ein kleinstes d, sodass $\{A^i \mid 0 \leq i \leq d\}$ linear abhängig ist. Es muss daher eine lineare Relation

$$A^d = -(\sum_{i=0}^{d-1} c_i A^i)$$

gelten, und wir erhalten $\mathrm{MP}_A(X) = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i X^i$.
Die Nullstellen des Minimalpolynoms sind genau die Eigenwerte von A, und A ist diagonalisierbar genau dann, wenn $\mathrm{MP}_A(X)$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.