Superturingmaschinen

Review des von Felix Karg verfassten Proposals

Johannes Kalmbach
4012473

12. Januar 2018

1 Einleitung

In diesem Review werde ich zunächst den Inhalt des Proposals, so wie ich ihn verstanden habe, zusammenfassen. Anschließend gehe ich das Proposal Schritt für Schritt durch, um inhaltliche und methodische Fragen und Verbesserungsvorschläge zu diskutieren.

2 Zusammenfassung

Diese Zusammenfassung basiert nur auf dem Proposal. Ich habe nur an einer Stelle eine Kleinigkeit zu den Ordinalzahlen zusätzlich recherchiert. Ich hoffe, ich habe die meisten Dinge richtig verstanden. An einigen Stellen musste ich selbst sehr ausführlich nachdenken, im Vortrag, wäre es an diesen Stellen besser, wenn du die Zuhörer explizit in diesen Gedanken führen würdest. Solche Stellen werde ich im zweiten Kapitel beschreiben.

Da die Superturingmaschinen, um die es im Vortrag gehen wird, auf dem System der Ordinalzahlen basieren, müssen diese zunächst eingeführt werden

2.1 Ordinalzahlen

Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet (jede Zahl hat einen eindeutigen Nachfolger), aber die Unendlichkeit kann nicht durch eine natürliche Zahl dargestellt werden. Man definiert nun die neue Ordinalzahl ω als eine Zahl, die größer ist als alle natürlichen Zahlen aber so klein wie möglich und gleichzeitig diese Ordnung erhält. (Formal geht das anhand des Peano-Axiomensystems, wird im Proposal aber nicht erwähnt, siehe z.B. Wikipedia). Dann kann man auch z.B. $\omega + 1$ definieren (der eindeutige Nachfolger von ω) und alle weiteren Zahlen $\omega + n$. Ebenso ist die Definition $\omega + \omega = 2 \cdot \omega$ sinnvoll und die Definition $\omega \cdot \omega = \omega^2$. Es gibt überabzählbar viele Ordinalzahlen.

2.2 Superturingmaschinen und das Halteproblem

Superturingmaschinen funktionieren zunächst prinzipiell wie gewöhnliche Turingmaschinen, nur werden ihre Schritte in Ordinalzahlen gezählt, also gibt es Schritte $\omega, \omega + 1, \ldots$ die gewissermaßen nach dem Ende der endlichen Berechnungszeit einer Turingmaschine liegen. Hiermit kann direkt das klassische Halteproblem gelöst werden, da man nach ω Schritten schaut, ob die Maschine in einer Haltekonfiguration ist. Es ist klar, dass es sehr fragwürdig ist, ob dieses Modell physikalisch realisierbar ist, was aus der Definition der Ordinalzahlen folgt.

2.2.1 Verhalten am Grenzübergang zu ω

Am Übergang zu ω oder zu Vielfachen davon muss das Verhalten der Superturingmaschine besonders definiert werden, da sich bei normaler Verwendung der Übergangsrelation Widersprüche zu den oben definierten Eigenschaften von ω ergeben könnten. Man geht dabei folgendermaßen vor (es wird von Maschinen ausgegangen, deren Alphabet nur aus den Symbolen 0 und 1 besteht, diese sind äquivalend zu Maschinen mit komplexeren Alphabeten):

- Wenn die Maschine bereits in einer Haltekonfiguration ist, bleibt sie in allen weiteren Schritten in dieser (gleich wie bei Turingmaschine)

- Andernfalls wird die Maschine in den Ausgangszustand versetzt, der Lese-Schreib-Kopf wird an die Startposition gesetzt und jede Zelle wird folgendermaßen modifiziert:
  - Wenn in der Zelle bisher nur in höchstens endlich vielen Schritten eine 1 stand, setze Zelle auf 0.
  - Ansonsten (also wenn in unendlich vielen Schritten eine 1 stand), setze die Zelle auf 1

  Das heißt man betrachtet die bisherigen (unendlich vielen) Werte der Zelle als Folge und setzt sie auf ihren Grenzwert.

2.3 Erweiterung von Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit

Superturingmaschinen können alles berechnen und entscheiden, was durch klassische Turingmaschinen berechnet und entschieden werden kann. Sie haben darüber hinaus auch weitere Fähigkeiten, die klassische Turingmaschinen nicht haben. Dazu gehören unter Anderem die Folgenden:

- Sie können Π_1-Aussagen entscheiden, dass sind Formeln der Prädikantenlogik 1. Ordnung, die als Quantoren nur $\forall$ und nur eine freie Variable enthalten.

- Sie können Aussagen der Form „Es gibt eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass …“ entscheiden (Σ^1_1-Aussagen)

- Sie können Aussagen der Form „Für jede Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt …“ entscheiden (Π^1_1-Aussagen).

Es gibt aber nach wie vor Probleme, die auch durch Superturingmaschinen nicht entschieden bzw. berechnet werden können. Z.B. gibt es NICHT zu jeder 0-1 Folge eine Superturingmaschine, die diese auf das Band schreibt. (Ich gehe davon aus, dass hier unendliche Folgen gemeint sind, und die Begründung dafür ist, dass es überabzählbar viele von diesen gibt, aber nur abzählbar viele Superturingmaschinen).

2.4 Halteverhalten von STMs und Stempelbarkeit

Eine Ordinalzahl α heißt *stempelbar*, wenn es eine STM gibt, die bei leerem Eingabeband (immer 0) nach genau α Schritten anhält. Es können nicht alle Ordinalzahlen stempelbar sein, da es überabzahlbar viele von Ihnen gibt. Im Proposal wurde ein Verfahren vorgestellt, welches nicht stempelbare Ordinalzahlen findet, ich muss aber zugeben, dass ich dieses nicht ganz verstanden habe.
Es gibt eine Erweiterung des klassischen Halteproblems auf Superturingmaschinen, dieses wird aber nicht näher definiert.

3 Detaillierte Besprechung des Proposals

Abstract

Ein sehr kompakter und aussagekräftiger Abstract, der gut ausdrückt, worum es gehen soll. Als Formulierung wäre eventuell etwas wie „Es ist fragwürdig, ob STMs physisch realisiert werden können“ eleganter.

3.1 Berechenbarkeit

Genaugenommen definiert man den etwas schwammigen Begriff *berechenbar* genau durch das, was eine Turingmaschine berechnen kann. Außerdem sollte, wenn du die anderen Modelle wie Registermaschinen etc. erwähnst, bemerkt werden, dass diese alle den gleichen Berechenbarkeitsbegriff liefern. Ich bin mir nicht sicher, ob im Vortrag die Einführung mit den schwächeren Modellen (DEA, PDA, . . .) nötig ist, da du dich ja ansonsten nur mit Turingmaschinen und mächtigeren Modellen beschäftigst, und es Zeit sparen würde, das wegzulassen.

3.1.1 Konstrukt Turingmaschine

Hörst du dieses Semester Info3? Ich habe das letztes Jahr bereits gehört und würde annehmen, dass bis zu deinem Vortrag so viel über Turingmaschinen unterrichtet würde, dass da allerhöchstens eine ganz knappe Folie ausreichen wird. Ansonsten finde ich die verbale Umschreibung der Definition ganz gelungen. Die Formulierung „eine einfach, aber konzeptionell robuste, . . . “ ist vermutlich direkt aus dem Englischen übernommen und sagt nicht so wirklich etwas aus für mich im Deutschen.

3.1.2 Eigenschaften von Turingmaschinen

Du beschreibst relativ viele äquivalente Varianten der Turingmaschine. Im weiteren Verlauf benutzt du aber nur die äquivalente Beschränkung des Alphabets auf $\{0, 1\}$. Also würde diese Variante an dieser Stelle ausreichen, die anderen Dinge (eines vs. mehrere Bänder, Band nur nach rechts vs. in beide Richtungen unendlich) könnten evtl. weggelassen werden. Das Halteproblem für Turingmaschinen würde ich nach Kapitel 3 verschieben. Du kannst es dann kurz einführen/ wiederholen und dann direkt mit Hilfe der STM lösen, dann ist das Kapitel etwas kompakter. Außerdem benutzt du in diesem Abschnitt ω, was noch nicht definiert ist.

3.1.3 Aussagetypen

Ich würde alle Aussagetypen, die jemals vorkommen, an einer Stelle vorstellen und definieren. Später in deinem Vortrag kommen z.B. noch Σ_1^1 und Π_1^1- Aussagen vor, sowie z.B. Σ_n-Aussagen, deren Definition dann ganz vergessen wurde. Eventuell müssen auch nicht alle diese Aussagentypen ganz formal definiert werden, sondern es könnte eine griffige Umschreibung und jeweils ein Beispiel reichen. Beispiele finden sich allgemein wenige in deinem Proposal, würden gerade an solchen Stellen aber vieles helfen. Z.B. könntest du bei einem bekannten NP-Problem zeigen, wie man das in Σ_1-Form mit den Existenzquantoren schreibt, das braucht wohl auch nicht so viel Zeit. Den Übergang von rekursiv aufzählbar zu Σ^1 zu NP habe ich nicht vollkommen verstanden, das ist aber auch nicht unbedingt notwendig für das Verständnis des weiteren Vortrags.

3.1.4 Limitierungen von Turingmaschinen

Siehe oben bei 3.1.3: Ich würde zunächst die unterschiedlichen Typen definieren und dann in einem Rutsch sagen, welche davon durch Turingmaschinen entschieden werden können und welche nicht.

3.2 Unendlichkeit

Dieser Abschnitt verwirrt mich eher, als dass er mich auf das Kommende einstimmt. So wie ich das verstehe ist das Wesentliche das Folgende: Wir wollen Superturingmaschinen definieren, die nach dem Ende der Zeit weiterrechnen können. Dazu müssen wir ersteinmal „nach dem Ende der Zeit“ sinnvoll definieren. Hierbei hilft uns das Konzept der Ordinalzahlen (dann kommt das entsprechende Kapitel).

3.2.1 Kardinalzahlen

Ich finde das Kapitel zwar gut, verständlich und interessant. Allerdings ist es für deinen Vortrag nicht notwendig, weil Kardinalzahlen nie wieder vorkommen. Die einzigen Begriffe, die du aus diesem Bereich brauchst sind „abzählbar“ und „überabzählbar“; ich denke, diese kannst du voraussetzen. Ich verstehe zwar, dass du zeigen möchtest dass bei den Kardinalzahlen quasi unendlich plus unendlich = das gleiche unendlich gilt, was beim ordinalen ω anders ist, wahrscheinlich wirst du dafür im Vortrag aber dennoch keine Zeit haben.

3.2.2 Ordinalzahlen

Dieses Kapitel ist ja wahrscheinlich das Wichtigste für deinen Vortrag, deswegen würde ich hier sehr genau überlegen, wie du das auf Folien darstellst. So wie ich das verstanden habe, sind ja die folgenden Eigenschaften von ω wichtig:

- Die Wohlordnung muss erhalten bleiben, sodass jeder Schritt der Maschine einen eindeutig nummerierten Nachfolgeschritt bekommt.
- ω muss größer als jede natürliche Zahl sein (also quasi unendlich)
- ω muss in irgendeinem Sinne minimal mit den obigen Eigenschaften sein.

Ich finde deine Vorstellung mit dem diskreten, unendlichen Zahlenstrahl, bei dem man so tut, als könnte man über den rechten Rand hinausgehen und macht da dann noch einmal eine Markierung namens ω, wirklich sehr geeignet dafür. Denn für eine ganz saubere Definition reichen vermutlich die Zeit und die mathematischen Vorkenntnisse des Publikums nicht aus, eine einigermaßen tragfähige Intuition für ω ist aber sehr wichtig für die STMs.

3.3 Superturingmaschinen

Das finde ich als mini-Abstract für den STM-Abschnitt gut, weil eigentlich alles Wesentliche mitsamt Halteproblem direkt vermittelt wird.

3.3.1 Verhalten bei Grenzen

Bei diesem Abschnitt musste ich sehr lange überlegen was gemeint ist. Schau einmal genau in meiner Zusammenfassung in Kapitel 2 nach, ob ich das einigermaßen getroffen habe. Was mir gefehlt hat ist dass die Maschine normalerweise einfach der Übergangsrelation der Turingmaschine folgt, und nur bei den speziellen Schritten Nr. ω, $2\omega, \ldots$ wird dieser beschriebene „Limes-Reset “ durchgeführt, weil ansonsten quasi ein Widerspruch zur Unendlichkeit von ω konstruiert werden könnte. Passt das so? Falls ja, würde ich hier an deiner Stelle noch einmal genau über die zentralen Punkte und Formulierungen nachdenken, da dieser Abschnitt erstens wichtig und zweitens etwas unintuitiv ist (wegen Unendlichkeit) und die Zuhörer deswegen am Besten gut vorsortierte Gedanken bekommen sollten. Die Tatsache, dass der Wert, den die Zellen dann annehmen, dem Folgengrenzwert der Zellenwerte über die Zeit entspricht, ist zwar korrekt, ich habe aber so lange darüber nachdenken müssen, dass es für einen Vortrag zu lange gewesen wäre und es ist für das Folgende auch nicht unbedingt so wichtig. Ich würde mir also überlegen, ob du das nicht evtl. im Vortrag weglassen könntest.

3.3.2 Fähigkeiten

An dieser Stelle würde ich etwas auswählen: Interessant ist es nämlich nicht nur zu wissen, was die STM im Vergleich zur Turingmaschine zusätzlich kann, und was sie immer noch nicht kann, sondern auch *warum* das so ist. Also könntest du eine der möglichen Σ oder Φ-Klassen etwas detaillierter vorstellen, also auch z.B. *wie* die STM diese entscheidet, und die anderen dann nur noch als Aufzählung hinterher bringen. Falls das Problem bei den (unendlichen?) 0/1-Folgen das ist, was ich in meiner Zusammenfassung geschrieben habe, könntest du das z.B. als Beispiel für eine Unfähigkeit der STM verwenden.

3.3.3 Überlegung

Ich finde dieses Beispiel grundsätzlich sehr interessant. Ich würde es etwas systematischer Aufbauen, also z.B. die Definition der STM etwas übersichtlicher für die Folien formatieren. Außerdem würde ich das etwas weiter nach vorne nehmen, also direkt nach Kapitel 3.1, da es direkt ein Beispiel für diese ω-Grenzübergänge liefert. Im Vortrag würde ich explizit formulieren, dass ω^2 bedeutet, dass man schon ω-mal, also quasi unendlich oft, den Spezialübergang bei den Vielfachen von ω durchgeführt hat. Außerdem wäre für eine Folie ein aussagekräftigerer Titel wichtig.

3.3.4 Halteverhalten von STM

Die Begründungen für die unterschiedlichen Stempelbarkeiten habe ich nicht so wirklich verstanden. Evtl. liegt das auch daran, dass am Übergang zwischen Seite 5 und 6 irgendwie ein halber Satz oder zumindest ein Verb fehlt. Wenn du das im Vortrag behandeln möchtest, denke dir eine ganz strukturierte Erklärung aus, bei denen auch Leute, die erst seit 5 Minuten von STMs und Ordinalzahlen wissen, eine Chance haben, mitzukommen.

3.4 Unendliche Halteprobleme

Die Tatsache, dass bei STMs im Gegensatz zu Turingmaschinen das Ergebnis des Halteproblems von der Anfangseingabe des Bandes abhängt finde ich interessant, du hast dazu aber leider nicht mehr genug Inhaltliches geschrieben, um aus dem Proposal hier nennenswerte Erkenntnisse zu ziehen.

4 Generelle Hinweise und Zusammenfassung

Grundsätzlich fand ich dein Proposal sehr interessant und gut zu lesen. Ich hoffe, ich habe alles richtig verstanden, aber das kannst du ja anhand meiner Zusammenfassung gut nachprüfen. Die folgenden generellen Hinweise möchte ich dir für den Vortrag noch auf den Weg geben:

- Formatierung hilft sowohl in Artikeln als auch auf Folien. Dein Proposal besteht hauptsächlich aus Fließtext, oftmals wären abgesetzte Definitionen oder Aufzählungen (z.B. von Klassen, von Eigenschaften etc.) etwas übersichtlicher.

- Anschauliche Beispiele helfen, besonders wenn, wie z.B. in einem Vortrag, nicht jede formale Definition bis zum Ende behandelt werden kann und man sich mit einem gewissen intuitiven Verständnis begnügen muss.

- Deine Rechtschreibung ist grundsätzlich in Ordnung. Bei der Groß- und Kleinschreibung geht es aber z.T. recht abenteuerlich daher. Wenn du mit so etwas Schwierigkeiten hast, empfiehlt es sich, schriftliche Abgaben vorher noch einmal Korrektur lesen zu lassen.

- Überlege genau, welche Kapitel oder Folien unbedingt nötig sind. Manches was du geschrieben hast, ist für das Verständnis nicht unbedingt nötig, und anderes kann man beim Publikum evtl. schon voraussetzen. Dadurch gewinnst du mehr Zeit für die zentralen, spannenden Punkte deines Vortrags.

- Als Zuhörer eines Vortrags hat man relativ wenig Zeit, über Dinge nachzudenken. Das unterscheidet z.B. einen Vortrag von einem Paper. Deswegen musst du als Vortragender einige Sachen einfacher und ausführlicher erklären, als in einem knappen wissenschaftlichen Paper. Besonders gilt dies für neue und ungewohnte Konzepte wie z.B. den Umgang mit den Ordinalzahlen.

Ich wünsche dir viel Spaß bei der weiteren Vorbereitung deines Vortrags und viel Erfolg!