Definitionen, Formeln und Sätze zu den Vorlesungen Analysis I–III

Prof. Dr. M. Nieper-Wißkirchen

Wintersemester 2016/17 – Wintersemester 2017/18
an der
Universität Augsburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dieses Vorlesungsskript ist als Arbeitsmittel für die Hörer der Vorlesung gedacht, und zwar nicht nur während des Verlaufes dieses Analysiskurses, sondern auch für spätere Zeiten als Sammlung der Definitionen, Formeln und Sätze der Analysis.

Das Studium des Vorlesungsskriptes ersetzt allerdings nicht den Besuch der Vorlesung. So sind Beweise nur in seltenen Fällen angegeben, z. B. wenn sie in der Vorlesung nicht vollständig vorgeführt werden, in der Literatur schwierig zu finden sind, oder wenn der Beweis als solches wichtige zusätzliche Konzepte vermittelt. In das Skript sind viele Aufgaben aufgenommen, und zwar insbesondere dann, wenn diese wichtige zusätzliche Informationen geben oder Sachverhalte schildern.

Das Skript schneidet viele Themen, die über den Minimalstoff eines Analysis-Kurses hinausgehen, wie etwa Potenzreihen im Komplexen oder grundlegende Dinge über gewöhnliche Differentialgleichungen, an. Dieses trägt der Tatsache Rechnung, daß nach dem Absolvieren der Anfängervorlesungen aus Zeitgründen im allgemeinen nicht jede grundlegende Spezialvorlesung besucht werden kann, so daß die in den Anfängervorlesungen erworbene mathematische Allgemeinbildung umfassend genug sein sollte. Dazu gehören auch wichtige Algorithmen der numerischen Mathematik (z. B. die Simpsonsche Regel oder das Runge–Kutta-Verfahren), welche in der Programmiersprache Scheme angegeben werden; die Übersetzung in eine andere Programmiersprache sollte keine Schwierigkeiten bereiten.

Ein wesentliches Ziel dieses Analysiskurses ist, möglichst schnell an den Geist der Mathematik heranzuführen. Dadurch gestaltet sich dieser Kurs abstrakter als manch anderer. Beispielsweise wird der Stetigkeits- und der Konvergenzbegriff sofort in metrischen Räumen behandelt. Auf diese Weise steht sogleich ein größeres Beispielmaterial zur Verfügung. Es gibt aber auch einen anderen wichtigen Grund: Da (fast) alle überflüssige Struktur beseite gelassen ist, tritt das Wesen der Stetigkeit und Konvergenz schärfer hervor. Natürlich wird der metrische Raum $\mathbf{R}$ trotzdem hinreichend ausführlich behandelt.

An dieser Stelle möchte ich meinen größten Dank meinem eigenen Lehrer der Analysis aussprechen, Herrn Prof. Dr. H. Reckziegel, bei dem ich beginnend ab Wintersemester 1995/96 bis Wintersemester 1996/97 an der Universität zu Köln

den Analysiskurs besuchen konnte. Dadurch ist meine Vorstellung eines guten Analysiskurses nachhaltig geprägt worden, und auch dieses Skript übernimmt große Teile des damaligen Vorlesungsskriptes.

Kapitel 0

Die grundlegenden Elemente der mathematischen Sprache

Dieses Kapitel ist völlig untypisch für die Vorlesung, welches auch durch die ungewöhnliche Numerierung angedeutet wird. Neben Literaturhinweisen werden die Bezeichnungen der für die Analysis wichtigsten Mengen aufgeführt und dann die fundamentalen logischen und mengentheoretischen Sprachelemente der Mathematik beschrieben.

0.1 Die grundlegenden Mengen der Analysis

Definition. Für die grundlegenden Mengen der Analysis verabreden wir folgende Bezeichnungen:

- $\mathbf{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots,$
- $\mathbf{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$
- $\mathbf{N}_m \coloneqq \{n \in \mathbf{Z} \mid n \geq m\}$ für jedes $m \in \mathbf{Z}$,
- $\mathbf{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen,
- $\mathbf{R}$ die Menge der reellen Zahlen,
- $\mathbf{R}_+ \coloneqq \{a \in \mathbf{R} \mid a > 0\}$,
- $\mathbf{R}^* \coloneqq \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Hierbei bedeutet $a \coloneqq \ldots$, daß das Objekt a durch die rechte Seite $\ldots$ der „Gleichung“ definiert wird; entsprechend ist $\ldots \eqqcolon a$ zu verstehen.

0.2 Literatur

Die folgende Liste empfehlenswerter Literatur ist sicherlich nicht vollständig. Es schadet nicht, nicht nur mit einem Buch zu arbeiten.

- Cartan, H.: *Differentialrechnung.* Mannheim 1985, B. I.
- Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis*, 3. Aufl. Braunschweig 1985, Vieweg.
- Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, 15. Aufl. 2003, Vieweg+Teubner.
- Lang, S.: *Real and Functional Analysis*, 3. Aufl. 1993, Springer.
- Lang, S.: *Undergraduate Analysis*, 4. Aufl. 2005, Springer.
- Jänich, K.: *Analysis für Physiker und Ingenieure*, 4. Aufl. Berlin 2001, Springer.

0.3 Symbole der Logik

Tertium non datur[1]**.** Eine *Aussage* ist (entweder) wahr oder falsch.[2]

Beispiel 1. Beispiele für Aussagen sind etwa:

(a) „0 ist eine natürliche Zahl."

(b) „Jede natürliche Zahl ist positiv."

Aussagen können durch *Junktoren* zu neuen Aussagen verknüpft werden:

Definition 1. Seien A und B zwei Aussagen. Dann steht

- $\neg A$ für die *Negation* „nicht A",
- $A \wedge B$ für die *Konjunktion* „A und B",
- $A \vee B$ für die *Disjunktion* „A oder B (oder beide)",
- $A \implies B$ für die *Implikation* „aus A folgt B",

[1] Lat. für „ein Drittes ist nicht gegeben"

[2] Genaugenommen handelt es sich hierbei nicht um ein einzelnes Axiom, sondern um ein ganze Familie von Axiomen: Für jede einzelne Aussage A ist „A ist wahr oder falsch" ein Axiom. Eine solche Familie heißt richtiger *Axiomenschema*.

- $A \iff B$ für die *Äquivalenz* „A genau dann, wenn B".

Aufgrund des „Tertium non datur" kann jede mathematische Aussage nur zwei Wahrheitswerte annehmen. Damit können wir die logischen Junktoren durch endliche Tabellen beschreiben, die sogenannten *Wahrheitstafeln*. Die folgende Tabelle beschreibt zum Beispiel die Operation der Negation:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Hierbei steht w für „wahr" und f für „falsch".

Theorem. Sind A und B zwei Aussagen, so ist

$$\neg(A \implies B) \quad \text{äquivalent zu} \quad A \wedge (\neg B).$$

Beweis. Wir stellen eine Wahrheitstafel für alle möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte von A und B auf und stellen fest, daß in allen vier Fällen die Wahrheitswerte der Aussagen $\neg(A \implies B)$ und $A \wedge (\neg B)$ gleich sind:

A	B	$A \wedge B$	$A \implies B$	$\neg(A \implies B)$	$A \wedge \neg B$
w	w	w	w	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	f
f	f	f	w	f	f

□

In der Spalte „$A \wedge B$" der Wahrheitstafel des Beweises haben wir noch einmal den Wahrheitsgehalt der Konjuktion festgelegt. Insbesondere wollen wir besonders auf den Wahrheitswert der Implikation in der Spalte „$A \implies B$" hinweisen. Es gilt nämlich:

Proposition 1. Ist die Aussage A falsch, so ist die Aussage $A \implies B$ in jedem Falle wahr.

Diese Festsetzung mag zunächst nicht einleuchtend erscheinen, entspricht aber auch der Alltagslogik. Sagt etwa Adam zu Eva: „Wenn es morgen regnet, dann komme ich zu Dir.", behauptet Adam also die Implikation

$$\text{„Morgen regnet es.“} \implies \text{„Adam geht zu Eva.“},$$

und regnet es morgen nicht, so hat Adam in keinem Fall gelogen, ob er nun zu Eva geht oder nicht.

Aufgabe. Sind A und B zwei Aussagen, so ist

$$A \implies B \quad \text{äquivalent zu} \quad \neg B \implies \neg A.$$

(Tip: Man stelle für beide Aussagen die Wahrheitstafeln auf; man vergleiche dazu den Beweis des vorangegangenen Theorems.)

Definition 2. Sei A eine Aussage, und sei M eine Menge. Dann steht

- $\forall a \in M \colon A$ für die Aussage „für alle $a \in M$ gilt die Aussage A“,
- $\exists a \in M \colon A$ für die Aussage „es existiert ein $a \in M$, für das die Aussage A gilt“,
- $\exists! a \in M \colon A$ für die Aussage „es existiert genau ein $a \in M$, für das die Aussage A gilt“.

Beispiel 2. Für die Funktion $f = x^2 - 4x + 5$ gilt

$$\forall a \in \mathbf{R}\, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+\, \exists \delta \in \mathbf{R}_+\, \forall t \in \mathbf{R} \colon \Big(|t-a| < \delta \implies |f(t) - f(a)| < \varepsilon\Big).$$

In Worten: Zu jedem $a \in \mathbf{R}$ und zu jedem $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $t \in \mathbf{R}$ gilt: Es ist $|f(t) - f(a)| < \varepsilon$, wenn $|t-a| < \delta$. Kurz gesagt: Die Funktion f ist in allen Punkten $a \in \mathbf{R}$ stetig.

Proposition 2. Sei A eine Aussage, und sei M eine Menge.

(a) $\neg \forall a \in M \colon A \iff \exists a \in M \colon \neg A$,

(b) $\neg \exists a \in M \colon A \iff \forall a \in M \colon \neg A$.

Warnung. Die Quantoren $\forall$, $\exists$ und $\exists!$ sollten sprachlich richtig benutzt werden. Insbesondere stehen Quantoren vor der Aussage, über die quantifiziert wird. Nur bei Beachtung dieser Vorschrift können die Regeln obiger Proposition systematisch zum Negieren von Aussagen verwendet werden.

Die Reihenfolge der Quantoren ist wesentlich. Verschieben wir etwa im obigen Beispiel den Quantor „$\forall a \in M$“, so daß er hinter den Quantor „$\exists \delta \in M$“ zu stehen kommt, so erhalten wir die falsche Aussage, daß f eine gleichmäßig stetige Funktion ist.

Schließlich sei bemerkt, daß durch $A :\iff B$ ausgedrückt wird, daß die Aussage A durch die Aussage B definiert wird. Z. B. könnten wir für eine Funktion der Form $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definieren:

„f ist in a stetig“

$$:\iff \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+\, \exists \delta \in \mathbf{R}_+\, \forall t \in \mathbf{R} \colon \Big(|t-a| < \delta \implies |f(t) - f(a)| < \varepsilon\Big).$$

0.4 Mengentheoretische Bezeichnungen

Die Mengenlehre benutzen wir weitestgehend naiv, achten aber darauf, keine unerlaubten Mengen zu bilden.

Mengen sind Zusammenfassungen von gewissen mathematischen Objekten zu einem neuen mathematischen Objekt. Ist a ein mathematisches Objekt und M eine Menge, so steht $a \in M$ (oder $M \ni a$) für die Aussage, daß a ein Element von M ist (wir sagen auch, daß a in M *liegt*). Wir definieren

$$a \notin M :\Longleftrightarrow \neg(a \in M).$$

Die Tatsache, daß sich eine Menge durch die durch sie zusammengefaßten Elemente definiert, können wir mathematisch auch durch folgendes Axiom beschreiben:

Bestimmtheitsaxiom (R. Dedekind 1888)**.** Sind M und N zwei Mengen, so gilt

$$M = N \iff \big(\forall a \in M \colon a \in N\big) \wedge \big(\forall a \in N \colon a \in M\big).$$

Neue Mengen erhalten wir aus bekannten Mengen mit Hilfe folgender Axiome:

Elementarmengenaxiom. Sind a_1, a_2, $\ldots$, a_n mathematische Objekte, so existiert eine Menge M, die genau diese Objekte als Elemente enthält. Wir schreiben dann $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. (Es sei beachtet, daß diese Menge aufgrund des vorangehenden Axioms eindeutig bestimmt ist.)

Beispiel 1. Die *leere Menge* $\emptyset := \{\}$ ist eine Menge, die wir durch Angabe ihrer Elemente (nämlich keines) angeben können.

Aussonderungsaxiom. Ist M eine Menge und A eine Aussage, so existiert eine Menge N, deren Elemente genau diejenigen Elemente von M sind, auf die die Aussage A zutrifft. Wir schreiben dann $N = \{a \in M \mid A\}$.

Beispiel 2. Das Aussonderungsaxiom ist uns schon einmal, bei der Definition von $\mathbf{R}_+ = \{a \in \mathbf{R} \mid a > 0\}$ begegnet.

Mit Hilfe des Aussonderungsaxioms können Teilmengen von Mengen konstruiert werden:

Definition 1. Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element von N auch zu M gehört. Wir schreiben dann $N \subseteq M$.

Das Bestimmtheitsaxiom liefert uns folgende Beweisstrategie für die Gleichheit zweier Mengen:

Proposition. Sind M und N zwei Mengen, so gilt

$$M = N \iff M \subseteq N \wedge N \subseteq M.$$

Potenzmengenaxiom. Ist M eine Menge, so existiert eine Menge $\mathfrak{P}(M)$, deren Elemente gerade die Teilmengen von M sind. Wir nennen die Menge $\mathfrak{P}(M)$ die *Potenzmenge* von M.

Es sei beachtet, daß die Potenzmenge immer mindestens ein Element besitzt, nämlich $\emptyset \in \mathfrak{P}(M)$.

Vereinigungsmengenaxiom. Ist N eine Menge von Mengen, so existiert eine Menge $\bigcup N = \bigcup_{A \in N} A$ mit

$$p \in \bigcup N \iff \exists A \in N \colon p \in A.$$

Wir nennen $\bigcup N$ die *Vereinigung* des Mengensystems N.

Im Falle, daß A und B zwei Mengen sind, schreiben wir

$$A \cup B \coloneqq \bigcup \{A, B\}$$

und nennen $A \cup B$ die *Vereinigung* von A und B. Es gilt dann

$$p \in A \cup B \iff p \in A \vee p \in B.$$

Produktmengenaxiom. Sind M und N zwei Mengen, so existiert die Menge $M \times N$ der *geordneten Paare* (p, q) mit $p \in M$ und $q \in N$. Wir nennen $M \times N$ das *kartesische Produkt* von M und N.

Schließlich können wir mit Hilfe der schon angegeben Axiome weitere Mengen formen:

Definition 2. Es seien M und N zwei Mengen.

(a) Es heißt
$$M \cap N \coloneqq \{a \in M \mid a \in N\} = \{a \in N \mid a \in M\}$$
der *Durchschnitt* von M und N.

(b) Schließlich ist
$$M \setminus N \coloneqq \{a \in M \mid a \notin N\}$$
das *Komplement* von N in M.

Aufgabe. Sind M und N Mengen, so gilt

$$M \setminus (M \setminus N) = M \cap N.$$

0.5 Abbildungen und Funktionen

Definition 1.

(a) Eine *Abbildung* einer Menge M in eine Menge N ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $f \subseteq M \times N$ zusammen mit der Angabe des *Bildbereiches* N, so daß

$$\forall p \in M \, \exists! q \in N\colon (p, q) \in f. \tag{1}$$

Wir schreiben dann

$$f\colon M \to N.$$

Anstelle von $(p, q) \in f$ schreiben wir $q = f(p)$ oder $f\colon p \mapsto q$. Den *Definitionsbereich* M von f bezeichnen wir auch mit D_f.

(b) Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung, $A \in \mathfrak{P}(M)$ und B eine beliebige Menge, so definieren wir das *Bild* von A unter f durch

$$f(A) \coloneqq \{f(p) \mid p \in A\} \coloneqq \{q \in N \mid \exists p \in M\colon q = f(p)\}$$

und das *Urbild* von B bezüglich f durch

$$f^{-1}(B) \coloneqq \{p \in M \mid f(p) \in B\}.$$

Kommentar. Wir haben in obiger Definition beschrieben, was auch als *Graph* einer Funktion bekannt ist. Aufgrund von (1) wird durch f eine *Zuordnung* definiert. Die Begriffe „Abbildung“ und „Funktion“ werden häufig synonym verwendet. Wir bevorzugen die Bezeichnung „Funktion“, wenn N ein Rechenbereich wie etwa $\mathbf{R}$ ist.

Aus der folgenden Proposition leitet sich sofort eine Beweisstrategie für Abbildungen ab:

Proposition 1. Sind f und g Abbildungen in N, so gilt

$$f = g \iff \big(D_f = D_g \wedge \forall p \in D_f\colon f(p) = g(p)\big).$$

Beispiele. Seien M, M_1, M_2, N, N_1, N_2 Mengen.

(a) Die *Identität* von M ist die Abbildung $\mathrm{id}_M \coloneqq \{(p, p) \in M \times M \mid p \in M\}$, also $\mathrm{id}_M\colon M \to M, p \mapsto p$.

(b) Ist M eine Teilmenge von N, so bezeichne $M \hookrightarrow N$ die *Inklusion* von M in N; das ist die Abbildung $M \to N, p \mapsto p$.

(c) Ist $M = \emptyset$, so ist $M \times N = \emptyset$, also ist die leere Menge die einzige Teilmenge von $M \times N$. Diese ist trivialerweise eine Abbildung; wir wollen sie die *leere Abbildung* nennen.

(d) Die *Komposition* zweier Abbildungen $f_1 \colon M_1 \to N_1$ und $f_2 \colon M_2 \to N_2$ ist die Abbildung $f_1 \circ f_2 \colon f_2^{-1}(M_1) \to N_1, p \mapsto f_1(f_2(p))$.

(e) Ist $f \colon M \to N$ eine Abbildung und $A \subseteq M$, so heißt

$$f|A := f \circ (A \hookrightarrow M) \colon A \to N, p \mapsto f(p)$$

die *Restriktion* von f auf A.

Aufgabe 1. Es seien $f_1 \colon M_1 \to N_1$ und $f_2 \colon M_2 \to N_2$ zwei Abbildungen. Man beweise:

$$f_1 \circ f_2 \text{ ist die leere Abbildung} \iff f_2(M_2) \cap M_1 = \emptyset.$$

Proposition 2. Für jede Abbildung $f \colon M \to N$ und für jede Wahl von Teilmengen A_1, $A_2 \in \mathfrak{P}(M)$ und B, B_1, $B_2 \in \mathfrak{P}(N)$ gilt:

(a) $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$,

(b) $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$,

(c) $f^{-1}(N \setminus B) = M \setminus f^{-1}(B)$ und allgemeiner $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

Definition 2. Ist $f \colon M \to N$ eine Abbildung, so definieren wir:

(a) Die Abbildung f heißt *injektiv*, wenn

$$\forall p_1, p_2 \in M \colon \big(f(p_1) = f(p_2) \implies p_1 = p_2\big).$$

Im Falle der Injektivitität ist

$$\check{f} := \{(f(p), p) \mid p \in M\}$$

eine Abbildung von $f(M)$ auf M (vgl. (b)), die *Umkehrabbildung* von f.

(b) Die Abbildung f heißt *surjektiv* oder eine Abbildung *auf* N, wenn $f(M) = N$.

(c) Die Abbildung f heißt *bijektiv*, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Proposition 3. Sind $f \colon M \to N$ und $g \colon N \to K$ Abbildungen, so gilt: Sind f und g injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv), so ist auch $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv).

Die folgende Aussage liefert ein wertvolles Kriterium für die Injektivität und Surjektivität von Abbildungen:

Proposition 4. Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$ Abbildungen und gilt für die Komposition $g \circ f = \mathrm{id}_M$, so ist f injektiv, g surjektiv und $\check{f} = g|f(M)$. Gilt außerdem $f \circ g = \mathrm{id}_N$, so sind daher f und g trivialerweise Bijektionen und $\check{f} = g$ und $\check{g} = f$.

Proposition 5. Ist $f\colon M \to N$ injektiv, so ist $\check{f}\colon f(M) \to M$ eine *Bijektion*, d.h. eine bijektive Abbildung, und es gelten

$$\check{f} \circ f = \mathrm{id}_M \qquad \text{und} \qquad f \circ \check{f} = (f(M) \hookrightarrow N).$$

Ist insbesondere f eine Bijektion, so ist auch $\check{f}\colon N \to M$ eine Bijektion.

Aufgabe 2. Es seien $f\colon M \to N$ eine Abbildung, $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$. Beweisen Sie:

(a) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ und Gleichheit gilt in jedem der folgenden Fälle:

  (i) f ist injektiv,

  (ii) $A = f^{-1}(B)$ für ein beliebiges $B \in \mathfrak{P}(N)$.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, und Gleichheit gilt in jedem der folgenden Fälle:

  (i) f ist surjektiv.

  (ii) $B = f(A)$ für ein beliebiges $A \in \mathfrak{P}(M)$.

(Anleitung: Man beweise zunächst die Inklusionen und dann die Teile (i) und (i), und folgere anschließend unter alleiniger Ausnutzung der bewiesenen Inklusionen die Teile (ii) und (ii).)

0.6 Mächtigkeit von Mengen

Definition. Zwei Mengen M und N heißen *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion $M \to N$ gibt. In diesem Falle schreiben wir

$$|M| = |N|\,.$$

Proposition. „Gleichmächtigkeit“ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. sind M, N und K Mengen, so gilt

(a) $|M| = |M|$,

(b) $|M| = |N| \implies |N| = |M|$,

(c) $\big(|M| = |N| \wedge |N| = |K|\big) \implies |M| = |K|$.

Aufgabe (Die Potenzmenge einer Menge ist mächtiger als die Menge)**.** Sei M eine Menge. Man zeige: Für jede Abbildung $f\colon M \to \mathfrak{P}(M)$ ist

$$N_f := \{p \in M \mid p \notin f(p)\} \in \mathfrak{P}(M) \setminus f(M).$$

Insbesondere existiert keine surjektive Abbildung $M \to \mathfrak{P}(M)$.

Diese Tatsache erklärt auch das sogenannte Paradoxon vom Barbier: Der Barbier eines Dorfes behauptet, daß er genau die Männer des Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Das kann wohl nicht wahr sein. Wieso? Wer rasiert dann den Barbier? Um dieses Paradoxon aufzuklären bezeichnen wir mit M die Menge aller Männer des Dorfes und definieren

$$f\colon M \to \mathfrak{P}(M), p \mapsto \{m \in M \mid m \text{ wird von } p \text{ rasiert}\}.$$

Die obige Aufgabe zeigt, daß kein Mann des Dorfes genau die Männer rasiert, die es nicht selbst tun.

0.7 Familien und Folgen

Definition. Sind wir bei einer Abbildung $f\colon I \to A$ weniger an den Eigenschaften der Zuordnungsvorschrift als vielmehr an den Werten $f(i)$ interessiert, so benutzen wir häufig die Indexschreibweise

$$f = (a_i)_{i \in I}, \quad a_i := f(i)$$

und nennen $(a_i)_{i \in I}$ eine *Familie* und I ihre *Indexmenge*. Anstatt $(a_i)_{i \in \mathbf{N}_0}$ schreiben wir auch $(a_i)_{i=0,1,2,\dots}$ oder $(a_i)_{i=0}^{\infty}$. Entsprechend ist $(a_i)_{i=k,k+1,k+2,\dots} = (a_i)_{i=k}^{\infty}$, wobei $k \in \mathbf{Z}$, zu verstehen. Bei den letzen zwei Beispielen reden wir auch von *Folgen*.

Warnung. Die Folge $(a_i)_{i=0,1,2,\dots}$ ist wesentlich verschieden von der Menge ihrer Glieder $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$.

Beispiel. Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, so kann für diese die *Vereinigung*

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{p \mid \exists i \in I\colon p \in M_i\} = \bigcup \{M_i \mid i \in I\}$$

und, wenn $I \neq \emptyset$, der *Durchschnitt*

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{p \mid \forall i \in I\colon p \in M_i\}$$

gebildet werden.

Proposition (de-Morgansche Regeln)**.** Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen und M eine weitere Menge, so gilt

(a) $M \cap (\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I}(M \cap M_i)$ und $M \cup (\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I}(M \cup M_i)$, wenn $I \neq \emptyset$,

(b) $M\setminus(\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I}(M\setminus M_i)$ und $M\setminus(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I}(M\setminus M_i)$, wenn jeweils $I \neq \emptyset$.

Aufgabe. Es seien $f\colon M \to N$ eine Abbildung, $(M_i)_{i\in I}$ eine nicht leere Familie von Mengen $M_i \subseteq M$, $(N_i)_{i\in I}$ eine nicht leere Familie von Mengen $N_i \subseteq N$ und A, $B \subseteq N$. Man zeige:

(a) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} N_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(N_i)$.

(b) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} N_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(N_i)$.

(c) $f(\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} f(M_i)$

(d) $f(\bigcap_{i\in I} M_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(M_i)$.

Man zeige durch Angabe eines Beispiels, daß in (d) Gleichheit im allgemeinen nicht gilt.

0.8 Die charakteristischen Eigenschaften von $\mathbf{N}_0$

Die Idee der Erzeugung der Menge der natürlichen Zahlen durch fortlaufendes Weiterzählen beginnend bei der Null wird durch folgende Eigenschaften beschrieben, wobei $S\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0, n \mapsto n+1$ die *Nachfolgerfunktion* ist:

Peanosche Axiome.

(N1) $0 \in \mathbf{N}_0$,

(N2) S ist injektiv,

(N3) $0 \notin S(\mathbf{N}_0)$,

(N4) $\forall M \in \mathfrak{P}(\mathbf{N}_0)\colon \big(0 \in M \wedge S(M) \subseteq M \implies M = \mathbf{N}_0\big)$.

Aus den Peanoschen Axiomen folgt:

Beweisprinzip der vollständigen Induktion. Sei A_0, A_1, A_2, … eine Folge von Aussagen. Es sei A_0 wahr (*Induktionsbeginn*). Weiterhin gelte für alle $n \in \mathbf{N}_0$: Ist A_n wahr, so auch A_{n+1}. Dann ist A_n für alle $n \in \mathbf{N}_0$ wahr.

Korollar.

(a) Sei $m \in \mathbf{Z}$. Sei A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, … eine Folge von Aussagen. Es sei A_m wahr. Weiterhin gelte für alle ganzen Zahlen $n \geq m$: Ist A_n wahr, so auch A_{n+1}. Dann ist A_n für alle ganzen Zahlen $n \geq m$ wahr.

(b) Sei A_0, A_1, A_2, … eine Folge von Aussagen. Es gelte für alle $n \in \mathbf{N}_0$:

$$\text{Sind alle } A_k \text{ für } k = 0, \ldots, n-1 \text{ wahr, so ist auch } A_n \text{ wahr.} \tag{1}$$

Dann ist A_n für alle $n \in \mathbf{N}_0$ wahr.

Kommentar 1. Man beachte, daß in (1) der Fall $n = 0$ explizit erlaubt ist. In diesem Fall ist die Voraussetzung (nämlich, daß alle A_k für $k = 0, \ldots, n-1$ wahr sind) leer, so daß (1) für $n = 0$ gerade fordert, daß A_0 wahr ist.

Der Dedekindsche Satz über die rekursive Definition. Es seien M eine Menge, $g\colon \mathbf{N}_0 \times M \to M$ eine Abbildung und $p^* \in M$. Dann existiert genau eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ von Elementen $p_n \in M$ mit dem *Startwert* $p_0 = p^*$ und dem *rekursiven Bildungsgesetz* $p_{n+1} = g(n, p_n)$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$.

Beweis. Sei $[n] \coloneqq \{0, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbf{N}_0$ die Menge der ersten $n + 1$ natürlichen Zahlen. Weiter sei $[\infty] \coloneqq \mathbf{N}_0$ die Menge aller natürlicher Zahlen. Für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ sei A_n die Aussage, daß genau ein Familie $(p_k)_{k\in[n]}$ von Elementen $p_k \in M$ mit

$$p_0 = p^* \tag{S_n}$$

und

$$\forall k \in \mathbf{N}_0\colon k + 1 \in [n] \implies p_{k+1} = g(k, p_k) \tag{R_n}$$

existiert. Wir zeigen per Induktion, daß A_n für alle $n \in \mathbf{N}_0$ wahr ist.

Induktionsanfang. Für $n = 0$ ist $[n] = \{0\}$. Damit besteht die Familie $(p_k)_{k\in[0]}$ nur aus dem Element p_0. Dieses ist eindeutig durch die Bedingung (S_0) bestimmt. Die Bedingung (R_0) an die Familie ist offensichtlich leer. Damit ist A_0 wahr.

Induktionsschritt. Sei die Aussage A_n wahr. Seien $(p_k)_{k\in[n+1]}$ und $(\tilde{p}_k)_{k\in[n+1]}$ zwei Folgen, welche beide die Bedingungen (S_{n+1}) und (R_{n+1}) erfüllen. Damit erfüllen $(p_k)_{k\in[n]}$ und $(\tilde{p}_k)_{k\in[n]}$ die Bedingungen (S_n) und (R_n). Da A_n wahr ist, gilt damit $p_k = \tilde{p}_k$ für $k \leq n$. Weiter gilt $p_{n+1} = g(n, p_n) = g(n, \tilde{p}_n) = \tilde{p}_{n+1}$ wegen (R_{n+1}). Damit ist sogar $(p_k)_{k\in[n+1]} = (\tilde{p}_k)_{k\in[n+1]}$ und somit die Eindeutigkeitsaussage von A_{n+1} wahr.

Es bleibt, die Existenzaussage von A_{n+1} zu zeigen: Zunächst folgt aus der Existenzaussage von A_n, daß eine Familie $(p_k)_{k\in[n]}$ existiert, welche (S_n) und (R_n) erfüllt. Setzen wir $p_{n+1} \coloneqq g(n, p_n)$, so erhalten wir eine Familie $(p_k)_{k\in[n+1]}$, welche S_{n+1} und R_{n+1} erfüllt.

Insgesamt haben wir also gezeigt, daß A_{n+1} ebenfalls wahr ist.

Es bleibt, die Existenz und Eindeutigkeit einer Familie $(p_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$, welche (S_∞) und (R_∞) erfüllt, zu zeigen. Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ die abgeschnittene Familie $(p_k)_{k\in[n]}$ nach dem eben bewiesenen eindeutig bestimmt ist und damit insbesondere der Wert p_n eindeutig bestimmt ist. Die Existenz zeigen wir durch Konstruktion: Sei dazu für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ die Familie $(p_k^{(n)})_{k\in[n]}$ diejenige, deren Existenz durch A_n postuliert wird. Dann setze $p_n \coloneqq p_n^{(n)}$. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage von A_n ist $p_n^{(n+1)} = p_n^{(n)}$ und damit erfüllt $(p_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ die Bedingungen (S_∞) und (R_∞). □

Kommentar 2. In obigen Satz können wir $\mathbf{N}_0$ auch durch $\mathbf{N}_m$ mit $m \in \mathbf{Z}$ ersetzen, wenn wir mit $p_m = p^*$ starten.

Beispiele.

(a) Die *Fakultät* $n!$ ist charakterisiert durch $0! = 1$ und $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ (hierbei ist offensichtlich $g\colon \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0, (n,m) \mapsto (n+1)\cdot m$).

(b) Sei $a \in \mathbf{R}$ eine reelle Zahl. Die ganzzahligen, nicht negativen *Potenzen* von a sind durch $a^0 = 1$ und $a^{n+1} = a \cdot a^n$ für alle $n \in \mathbf{N}_0$ charakterisiert. Im Falle von $a \neq 0$ und $n > 0$ setzen wir zusätzlich $a^{-n}\colon \frac{1}{a^n}$. Damit sind Potenzen mit allen ganzzahligen Exponenten definiert.

Eine exakte Formulierung der folgenden Definitionen benutzt ebenfalls den Satz von Dedekind über die rekursive Definition:

Definition. Seien m, $k \in \mathbf{Z}$. Seien weiter a_m, a_{m+1}, $\ldots$, $a_k \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen. Dann ist

$$\sum_{n=m}^{k} a_n \coloneqq \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \cdots + a_k, & \text{wenn } m < k \text{ oder } m = k, \\ 0, & \text{wenn } m > k, \end{cases}$$

und

$$\prod_{n=m}^{k} a_n \coloneqq \begin{cases} a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_k, & \text{wenn } m < k \text{ oder } m = k, \\ 1, & \text{wenn } m > k. \end{cases}$$

0.9 Über die ganzen, rationalen und reellen Zahlen

Die negativen Zahlen -1, -2, -3, $\ldots$ wurden als fiktive Zahlen eingeführt, um die Gleichung

$$n + x = m, \quad n, m \in \mathbf{N}_0 \tag{1}$$

stets lösen zu können. (Ähnlich war der Grund für die Schöpfung der komplexen Zahlen — man beachte auch die Bezeichnung „imaginäre Zahlen“ für i, $2i$, usw.: Hier geht es um die uneingeschränkte Lösbarkeit quadratischer Gleichungen und Gleichungen höheren Grades wie zum Beispiel $x^2 + 1 = 0$.) Dadurch entsteht die Menge $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen, auf die in bekannter Weise die Addition und Multiplikation von $\mathbf{N}_0$ fortgesetzt werden kann. Die Addition in $\mathbf{Z}$ hat die Eigenschaft, daß die Gleichung (1) in $\mathbf{Z}$ immer lösbar ist.

Hingegen ist die Gleichung

$$qx = p, \quad p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0$$

in $\mathbf{Z}$ nicht uneingeschränkt lösbar. Erforderlich wird bekanntlich die Erweiterung zum Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen. Wie schon seit der Antike bekannt, gibt es jedoch z. B. in der Geometrie auftauchende Zahlen, wie etwa die Länge $\sqrt{2}$ der Diagonale eines Einheitsquadrates, welche nicht durch rationale Zahlen ausgedrückt werden können:

Proposition. In $\mathbf{Q}$ ist die Gleichung $x^2 = 2$ nicht lösbar.

In diesem Sinne hat der Körper $\mathbf{Q}$ „Lücken“. Aus diesem Grunde gilt in ihm beispielsweise auch nicht der Zwischenwertsatz. Um eine befriedigende Analysis betreiben zu können, muß $\mathbf{Q}$ durch Hinzunahme weiterer Zahlen zur Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen vervollständigt werden. Ausgehend von $\mathbf{Q}$ können die reellen Zahlen als Dedekindsche Schnitte oder als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen konstruiert werden. Sinn dieser Konstruktion ist, daß so die axiomatische Einführung der reellen Zahlen, wie wir sie in den beiden folgenden Kapiteln vornehmen werden, gerechtfertigt werden kann.

Kapitel 1

Der Körper $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen

Eine *reelle Zahl* ist per definitionem ein Element einer Menge (mit Zusatzstruktur) $\mathbf{R}$, welche den in den folgenden beiden Kapiteln angegebenen Axiomen (R1)–(R13) genügt. Damit ist nicht konkret festgelegt, was eine einzelne reelle Zahl ist. Es wird aber genau festgelegt, welche Beziehungen zwischen den reellen Zahlen bestehen und wie wir mit reellen Zahlen umzugehen haben. Die Menge $\mathbf{R}$ ist durch die Axiome (R1)–(R13) im wesentlichen eindeutig bestimmt. Die Existenz einer solchen Menge postulieren wir als Axiom. (Es gibt Konstruktionsverfahren der Menge der reellen Zahlen die zeigen, daß es ausreicht, die Existenz der Menge der natürlichen Zahlen zu postulieren. Aus dieser läßt sich dann die Menge $\mathbf{R}$ konstruieren.)

Der Sinn der meisten Aussagen dieses Kapitels ist, dem Leser[1] zu versichern, daß die axiomatisch eingeführte Menge $\mathbf{R}$ die ihm vertrauten Eigenschaften hat. Insbesondere werden wir die Mengen $\mathbf{N}_0$ der natürlichen Zahlen, $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen und $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen in $\mathbf{R}$ als Teilmengen entdecken.

1.1 Die Axiome der Addition

Auf den Elementen der Menge $\mathbf{R}$ ist eine *Addition* definiert, d. h. eine Zuordnung, die jedem Paar (a, b) von Elementen a, $b \in \mathbf{R}$ ein Element $a + b \in \mathbf{R}$ zuordnet, welches die *Summe* von a und b heißt.

Weiter gibt es in $\mathbf{R}$ ein ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbf{R}$, welches *Null* heißt.

Zusätzlich ist auf den Elementen der Menge $\mathbf{R}$ eine Zuordnung definiert, die

[1] Es handelt sich hierbei offensichtlich um ein *generisches Maskulinum* und hat mit dem biologischen Geschlecht, dem *Sexus*, der angesprochenen Menge von Menschen nichts zu tun. Mit anderen Worten kann das biologische Geschlecht von „Leser“ männlich oder weiblich sein. Da der Mathematik das biologische Geschlecht reichlich egal ist, werde ich weiterhin die grammatikalisch jeweils einfachste Form verwenden.

jedem Element $a \in \mathbf{R}$ ein Element $-a$ zuordnet, welches das *Negative* von a heißt.

Axiome der Addition. Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt:

(R1) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(R2) $a + 0 = a = 0 + a$.

(R3) $a + (-a) = 0 = (-a) + a$.

(R4) $a + b = b + a$.

Das Axiom (R1) heißt auch das *Assoziativgesetz* der Addition, und Axiom (R4) heißt auch das *Kommutativgesetz* der Addition.

Proposition 1. In $\mathbf{R}$ existiert genau eine Null. Das bedeutet: Ist $n \in \mathbf{R}$ mit $\forall a \in \mathbf{R} : a + n = a$, so folgt schon $n = 0$.

Proposition 2. In $\mathbf{R}$ existiert zu jedem Element $a \in \mathbf{R}$ genau ein Negatives, d. h. ist $b \in \mathbf{R}$ mit $a + b = 0$, so folgt schon $b = -a$.

Definition. Anstatt $a + (-b)$ schreiben wir $a - b$.

Regeln. Für alle a, $b \in \mathbf{R}$ gilt:

(a) $-(-a) = a$.

(b) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

(c) $a = -a \iff a = 0$.

Warnung. Die Implikation $a = -a \implies a = 0$ folgt nicht allein aus den bisher vorgestellten Axiomen. Um sie zu beweisen, benötigen wir auch die Anordnungsaxiome (R10)–(R12).

Theorem. Für jedes Paar (a, b) von Elementen a, $b \in \mathbf{R}$ hat die Gleichung der Form $a + x = b$ genau eine Lösung $x \in \mathbf{R}$, nämlich $x = b - a$.

1.2 Die Axiome der Multiplikation

Auf den Elementen der Menge $\mathbf{R}$ ist eine *Multiplikation* definiert, d. h. eine Zuordnung, die jedem Paar (a, b) von Elementen a, $b \in \mathbf{R}$ ein Element $ab = a \cdot b \in \mathbf{R}$ zuordnet, welches das *Produkt* von a und b heißt.

Weiter gibt es in $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ein ausgezeichnetes Element $1 \in \mathbf{R}^*$, welches *Eins* heißt.

Zusätzlich ist auf den Elementen der Menge $\mathbf{R}^*$ eine Zuordnung definiert, die jedem Element $a \in \mathbf{R}$ ein Element a^{-1} zuordnet, welches das *Inverse* von a heißt.

Axiome der Multiplikation. Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt:

(R5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(R6) $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.

(R7) $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$, wenn $a \in \mathbf{R}^*$

(R8) $a \cdot b = b \cdot a$.

Das Axiom (R5) heißt auch das *Assoziativgesetz* der Multiplikation, und Axiom (R8) heißt auch das *Kommutativgesetz* der Multiplikation.

Proposition 1. In $\mathbf{R}^*$ existiert genau eine Eins. Das bedeutet: Ist $e \in \mathbf{R}^*$ mit $\forall a \in \mathbf{R} : a \cdot e = a$, so folgt schon $e = 1$.

Proposition 2. In $\mathbf{R}^*$ existiert zu jedem Element $a \in \mathbf{R}^*$ genau ein Inverses, d. h. ist $b \in \mathbf{R}^*$ mit $a \cdot b = 1$, so folgt schon $b = a^{-1}$.

Definition. Anstatt $a \cdot (b^{-1})$ schreiben wir ab^{-1}, $\frac{a}{b}$ oder a/b.

Regeln. Für alle a, $b \in \mathbf{R}^*$ gilt:

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$.

(b) $(ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

(c) $a = a^{-1} \iff a \in \{1, -1\}$.

Warnung. Obige Äquivalenz (c) folgt nicht allein aus den bisher vorgestellten Axiomen. Um sie zu beweisen, benötigen wir auch das Distributivgesetz (R9).

Theorem. Für jedes Paar (a, b) von Elementen $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$ hat die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung $x \in \mathbf{R}$, nämlich $x = b/a$.

1.3 Das Distributivgesetz

Das Distributivgesetz stellt die Verbindung zwischen Addition und Multiplikation her.

Distributivgesetz. Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt

(R9) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Regeln. Für alle a, $b \in \mathbf{R}$ gilt:

(a) $a \cdot 0 = 0$.

(b) $(-a) \cdot b = -(ab)$.

(c) $(-a)^2 = a^2$.

(d) $ab = 0 \iff (a = 0 \lor b = 0)$.

Die obige Regel (d) formuliert die sogenannte *Nullteilerfreiheit* von $\mathbf{R}$.

Warnung. Wegen obiger Regel (a) und $0 \neq 1$ ist 0^{-1} ein verbotener Ausdruck. Bei jeder Division müssen wir also sicherstellen, daß wir nicht durch Null teilen. Diese Vorschrift zu beherzigen ist mitunter gar nicht so einfach, z. B. wenn wir durch den Wert einer Funktion teilen wollen, deren Nullstellen wir nicht kennen.

Kommentar. Die bisher eingeführten Axiome (R1)–(R9) besagen gerade, daß $\mathbf{R}$ bezüglich der Addition und Multiplikation ein *Körper* ist.

1.4 Die Anordnungsaxiome

In $\mathbf{R}^*$ gibt es eine Teilmenge $\mathbf{R}_+$, deren Elemente die *positiven* reellen Zahlen heißen.

Anordnungsaxiome. Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt

(R10) $a \in \mathbf{R}^* \implies a \in \mathbf{R}_+ \lor -a \in \mathbf{R}_+$.

(R11) $a \in \mathbf{R}_+ \land b \in \mathbf{R}_+ \implies a + b \in \mathbf{R}_+$.

(R12) $a \in \mathbf{R}_+ \land b \in \mathbf{R}_+ \implies a \cdot b \in \mathbf{R}_+$.

Schreiben wir $\mathbf{R}_- := -\mathbf{R}_+ = \{-a \mid a \in \mathbf{R}_+\}$, so können wir Axiom (R10) auch in der Form $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}_+ \cup \mathbf{R}_-$ schreiben. Die Elemente von $\mathbf{R}_-$ heißen die *negativen* reellen Zahlen.

Proposition 1. Es gilt $\mathbf{R} = \mathbf{R}_- \dot\cup \{0\} \dot\cup \mathbf{R}_+$; in Worten: $\mathbf{R}$ ist die *disjunkte* Vereinigung von $\mathbf{R}_-$, $\{0\}$, $\mathbf{R}_+$, das heißt $\mathbf{R}$ ist die Vereinigung dieser drei Teilmengen und je zwei dieser drei Teilmengen haben einen leeren Durchschnitt.

Definition 1. Für a, $b \in \mathbf{R}$ definieren wir:

$$\begin{aligned}
a < b &:\iff b - a \in \mathbf{R}_+, && (a \text{ ist } \textit{kleiner} \text{ als } b)\\
a \leq b &:\iff a < b \lor a = b, && (a \text{ ist } \textit{kleiner-gleich } b)\\
a > b &:\iff b < a, && (a \text{ ist } \textit{größer} \text{ als } b)\\
a \geq b &:\iff a > b \lor a = b. && (a \text{ ist } \textit{größer-gleich } b)
\end{aligned}$$

Wir sehen, daß gilt: a ist positiv $\iff a > 0$ und a ist negativ $\iff a < 0$.

Theorem.

(a) Für jedes Paar (a, b) reeller Zahlen a, $b \in \mathbf{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a < b, \quad a = b, \quad \text{oder} \quad a > b.$$

Wir sagen auch, daß „<“ eine *vollständige* Ordnung auf $\mathbf{R}$ definiert.

(b) Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt: $a < b \wedge b < c \implies a < c$.

(c) Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt: $a < b \implies a + c < b + c$.

(d) Für alle a, b, $c \in \mathbf{R}$ gilt: $a < b \wedge 0 < c \implies ac < bc$.

Regeln. Für alle a, b, c, $d \in \mathbf{R}$ gilt:

(a) $a < b \wedge c < d \implies a + c < b + d$,

(b) $a < b \iff -b < -a$,

(c) $a < b \wedge c < 0 \implies bc < ac$,

(d) $0 < ab \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$,

(e) $a \neq 0 \iff 0 < a^2$; insbesondere gilt $0 < 1$,

(f) $0 < a < b \implies 0 < 1/b < 1/a$.

Definition 2. Unter der *Vorzeichenfunktion* oder dem *Signum* verstehen wir die Funktion

$$\operatorname{sign}\colon \mathbf{R} \to \{-1, 0, 1\}, t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } t \in \mathbf{R}_+, \\ 0 & \text{für } t = 0, \\ -1 & \text{für } t \in \mathbf{R}_-. \end{cases}$$

Damit ist auch definiert, was es heißt, wenn wir sagen, daß zwei reelle Zahlen das gleiche Vorzeichen haben.

Proposition 2. Für alle a, $b \in \mathbf{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\operatorname{sign}(a)) &= \operatorname{sign}(a), \\ \operatorname{sign}(-a) &= -\operatorname{sign}(a) \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{sign}(a \cdot b) = \operatorname{sign}(a) \cdot \operatorname{sign}(b).$$

Korollar. Für alle a, $b \in \mathbf{R}^*$ gilt:

$$a \cdot b > 0 \iff \operatorname{sign}(a) = \operatorname{sign}(b).$$

1.5 Der Betrag reeller Zahlen

Definition. Für jedes $a \in \mathbf{R}$ heißt

$$|a| \coloneqq \operatorname{sign}(a) \cdot a$$

der *(Absolut-)Betrag* von a.

Offenbar gilt

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Regeln. Sind a, b, $r \in \mathbf{R}$ und $r \geq 0$, so gilt:

(a) $|a| \geq 0 \wedge \big(|a| = 0 \iff a = 0\big)$,

(b) $|-a| = |a|$,

(c) $|ab| = |a| \cdot |b|$,

(d) $|1/a| = 1/|a|$, falls $a \neq 0$,

(e) $-|a| \leq a \leq |a|$,

(f) $\big(|a| < r \iff -r < a < r\big) \wedge \big(|a| \leq r \iff -r \leq a \leq r\big)$,

(g) $\big(|a-b| < r \iff b - r < a < b + r\big) \wedge \big(|a-b| \leq r \iff b - r \leq a \leq b + r\big)$,

(h) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$,

(i) $||a| - |b|| \leq |a \pm b|$.

Obige Regel (h) heißt die *Dreiecksungleichung*.

Aufgabe. Es seien n, $m \in \mathbf{N}_0$ natürliche Zahlen, $a_0, \ldots, a_n$, $b_0, \ldots, b_m \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen mit $a_n = b_m = 1$ und P und Q die „Polynomfunktionen“

$$P\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \quad \text{bzw.} \quad Q\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot t^k.$$

Dann gilt:

(a) Es gibt eine Zahl $R \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $t \in \mathbf{R}$ mit $|t| \geq R$ gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot |t|^n \leq |P(t)| \leq 2 \cdot |t|^n.$$

(Tip: Man braucht nur $|t| \geq 1$ zu betrachten. Ist $M \coloneqq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$, so kann man $R \coloneqq \max\{1, 2M\}$ wählen.)

(b) Zu der „gebrochen-rationalen“ Funktion $f := P/Q$ gibt es eine Zahl $R \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle $t \in \mathbf{R}$ mit $|t| \geq R$ gilt:

$$\frac{1}{4} \cdot |t|^{n-m} \leq |f(t)| \leq 4 \cdot |t|^{n-m}.$$

1.6 Intervalle

Definition. Für reelle Zahlen $a,\, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$ definieren wir

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{t \in \mathbf{R} \mid a \leq t \leq b\}, && \text{(abgeschlossenes, beschränktes Intervall)}\\
[a,b[&:= \{t \in \mathbf{R} \mid a \leq t < b\}, && \\
]a,b] &:= \{t \in \mathbf{R} \mid a < t \leq b\}, && \text{(halboffene, beschränkte Intervalle)}\\
]a,b[&:= \{t \in \mathbf{R} \mid a < t < b\}, && \text{(offenes, beschränktes Intervall)}\\
[a,\infty[&:= \{t \in \mathbf{R} \mid a \leq t\}, && \\
]-\infty,b] &:= \{t \in \mathbf{R} \mid t \leq b\}, && \text{(abgeschlossene, unbeschränkte Intervalle)}\\
]a,\infty[&:= \{t \in \mathbf{R} \mid a < t\}, && \\
]-\infty,b[&:= \{t \in \mathbf{R} \mid t < b\}. && \text{(offene, unbeschränkte Intervalle)}
\end{aligned}$$

Ist $a = b$, so sind $[a,b] := \{a\}$ und $[a,b[\;:=\;]a,b] \;:=\;]a,b[\;:= \emptyset$ sogenannte *entartete Intervalle*; $\{a\}$ wird auch als ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall betrachtet.

1.7 Die Menge $\mathbf{N}_0$ der natürlichen Zahlen

Wir finden im angeordneten Körper $\mathbf{R}$ eine Menge $\mathbf{N}_0$, welche genau die Peano-Axiome aus 0.8 erfüllt.

Theorem 1. Sei $\tilde{S}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, a \mapsto a+1$. Dann existiert genau eine Teilmenge $\mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{R}$ mit $\tilde{S}(\mathbf{N}_0) \subseteq \mathbf{N}_0$, so daß für das Tripel $(\mathbf{N}_0, S, 0)$, in welchem S die Einschränkung

$$S := \tilde{S}|\mathbf{N}_0\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0, a \mapsto a+1$$

bezeichnet, die Aussagen (N1)–(N4) aus 0.8 gelten. Und zwar ist $\mathbf{N}_0$ der Durchschnitt aller Teilmengen $N \subseteq \mathbf{R}$ (und damit die kleinste dieser Teilmengen N), für welche gilt:

$$0 \in N \quad \text{und} \quad \tilde{S}(N) \subseteq N.$$

In Zukunft benutzen wir die Elemente dieser so konstruierten Menge natürlicher Zahlen zum Durchnumerieren von Folgen. Insbesondere verwenden wir in diesem Sinne die vollständige Induktion und rekursive Definition.

Regeln. Sind n, $m \in \mathbf{N}_0$, so gilt:

(a) $0 \leq n < n+1$,

(b) $n+m$, $n \cdot m \in \mathbf{N}_0$,

(c) $n \leq m \iff m-n \in \mathbf{N}_0$,

(d) $\neg(n < m < n+1)$.

1.8 Der Ring Z der ganzen Zahlen

Definition. Die Elemente von $\mathbf{Z} \coloneqq \mathbf{N}_0 \cup (-\mathbf{N}_0)$ heißen die *ganzen* Zahlen.

Kommentar. Die Menge $\mathbf{Z}$ ist die kleinste Untergruppe der additiven Gruppe von $\mathbf{R}$, die die 1 enthält. In $\mathbf{Z}$ ist die Multiplikation uneingeschränkt ausführbar.

Wie die natürlichen Zahlen haben wir also die ganzen Zahlen nicht erfunden, sondern als spezielle reelle Zahlen gefunden.

1.9 Der angeordnete Körper Q der rationalen Zahlen

Definition. Eine Zahl $a \in \mathbf{R}$ heißt *rational*, wenn es p, $q \in \mathbf{Z}$ mit $q > 0$ gibt, so daß $a = p/q$. Mit $\mathbf{Q}$ bezeichnen wir die Menge der rationalen Zahlen.

Kommentar. Die Menge $\mathbf{Q}$ ist der kleinste Unterkörper von $\mathbf{R}$. In ihm gelten also die Axiome (R1)–(R9), wenn wir jeweils $\mathbf{R}$ durch $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}^*$ durch $\mathbf{Q}^*$ ersetzen. Weiterhin gelten in $\mathbf{Q}$ ebenfalls die Anordnungsaxiome (R10)–(R12), wenn wir $\mathbf{R}_+$ durch $\mathbf{Q}_+ \coloneqq \mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+$ ersetzen. Folglich gelten mit den entsprechenden Modifikationen auch alle aus den Axiomen bisher abgeleiteten Aussagen. Außerdem können wir bisher offensichtlich nicht $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ ausschließen. Erst mit dem noch fehlenden Axiom (R13) wird erzwungen, daß $\mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$, daß also $\mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$.

1.10 Erweiterung der Zahlengeraden mit ∞ und $-\infty$

Definition. Sei $\widehat{\mathbf{R}}$ eine Menge, die aus $\mathbf{R}$ durch Hinzunahme zweier verschiedener Elemente ∞, $-\infty \notin \mathbf{R}$ entsteht. Dann erweitern wir die Rechenoperationen von

$\mathbf{R}$ auf $\widehat{\mathbf{R}}$ für $a \in \mathbf{R}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
a + \infty &:= \infty + a := \infty, \\
a - \infty &:= (-\infty) + a := a + (-\infty) := -\infty, \\
\infty + \infty &:= \infty - (-\infty) := \infty, \\
-\infty + (-\infty) &:= (-\infty) - \infty := -\infty, \\
-(\infty) &:= -\infty, \\
|\infty| &:= |-\infty| := \infty, \\
\frac{a}{\infty} &:= \frac{a}{-\infty} := 0.
\end{aligned}$$

Für $a \in \mathbf{R}_+$ sei

$$a \cdot \infty := \infty \cdot a := (-a) \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot (-a) := \infty \cdot \infty := (-\infty) \cdot (-\infty) := \infty,$$
$$(-a) \cdot \infty := \infty \cdot (-a) := a \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot a := \infty \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot \infty := -\infty$$

Weiterhin wird die Anordnung $<$ von $\mathbf{R}$ auf $\widehat{\mathbf{R}}$ durch die Festsetzung

$$-\infty < a < \infty \quad \text{und insbesondere} \quad -\infty < \infty$$

für $a \in \mathbf{R}$ fortgesetzt.

Schließlich definieren wir für jedes $a \in \mathbf{R}$ die unbeschränkten Intervalle

$$\begin{aligned}
[a, \infty] &:= [a, \infty[\cup \{\infty\}, \\
]a, \infty] &:=]a, \infty[\cup \{\infty\}, \\
[-\infty, a] &:= \{-\infty\} \cup]-\infty, a], \\
[-\infty, a[&:= \{-\infty\} \cup]-\infty, a[,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
]-\infty, \infty] &:= \mathbf{R} \cup \{\infty\}, \\
[-\infty, \infty[&:= \{-\infty\} \cup \mathbf{R}, \\
]-\infty, \infty[&:= \mathbf{R}, \\
[-\infty, \infty] &:= \widehat{\mathbf{R}}.
\end{aligned}$$

Kommentar. Undefiniert und damit verboten sind die Ausdrücke

$$\infty + (-\infty), (-\infty) + \infty, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

1.11 Die Einzigartigkeit des Körpers $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen

Die Axiome (R1)–(R12) legen den Körper $\mathbf{Q}$ im wesentlichen fest. Genauer gilt folgender Satz:

Theorem. Es seien $\mathbf{R}$ und $\mathbf{R}'$ zwei Körper, für welche neben den Körperaxiomen (R1)–(R9) auch die Anordnungsaxiome (R10)–(R12) gelten. Nach den Konstruktionsverfahren der Abschnitte 1.7–1.9 werden auch in $\mathbf{R}'$ die Mengen der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen konstruiert; diese Mengen seien mit $\mathbf{N}_0'$, $\mathbf{Z}'$ und $\mathbf{Q}'$ bezeichnet.

Dann gibt es genau einen *Körperisomorphismus* $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}'$; das ist eine Bijektion mit folgenden Eigenschaften für alle a, $b \in \mathbf{Q}$:

(a) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,

(b) $f(1) = 1'$,

(c) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Aus der Aussage (a) folgt, daß

(d) $f(0) = 0'$ und $f(-a) = -f(a)$.

Aus den Aussagen (a), (b) und (d) folgt

(e) $f(\mathbf{N}_0) = \mathbf{N}_0'$.

Aus den Aussagen (b) und (c) folgt

(f) $f(a) \neq 0'$ und $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, wenn jeweils $a \neq 0$.

Aus den Aussagen (a)–(c) folgt schließlich

(g) $a < b \implies f(a) < f(b)$.

Kommentar. Es gibt viele Körper, welche die Axiome (R1)–(R12) erfüllen. Jeder dieser Körper enthält gemäß der Abschnitte 1.7–1.9 einen Unterkörper der rationalen Zahlen. Der soeben angegebene Satz besagt gerade, daß alle diese Unterkörper bis auf eindeutige *Isomorphie* gleich sind.

Beweisskizze zum Theorem.

0. Schritt. Zunächst beweist man, daß aus der Gültigkeit von (a) die Aussage (d) folgt.

1. Schritt. Durch rekursive Definition definiert man $f|\mathbf{N}_0$ durch $f(0) := 0'$ und

$$f(n+1) := f(n) + 1'$$

für alle $n \in \mathbf{N}_0$. Dann beweist man durch vollständige Induktion die Aussagen (a)–(c) für alle $a, b \in \mathbf{N}_0$, daß man $f|\mathbf{N}_0$ so definieren muß, wenn die Aussagen (d), (b) und (a) gelten sollen, und daß Aussage (e) gilt.

2. Schritt. Man erweitere die Definition von f auf $\mathbf{Z}$ durch

$$f(-n) := -f(n)$$

für $n \in \mathbf{N}_1$. Dann beweist man die Aussagen (a) und (c) für alle $a, b \in \mathbf{Z}$ und daß man $f|\mathbf{Z}$ so definieren muß, wenn die Aussage (d) gelten soll.

3. Schritt. Sind $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ und $m_1, m_2 \in \mathbf{N}_1$ und gilt $n_1/m_1 = n_2/m_2$, so zeigt man mit Aussage (c), daß auch $f(n_1)/f(m_1) = f(n_2)/f(m_2)$. Daher kann man eindeutig eine Funktion $\varphi\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}'$ durch

$$\varphi\Big(\frac{n}{m}\Big) = \frac{f(n)}{f(m)}$$

für $n \in \mathbf{Z}$ und $m \in \mathbf{N}_1$ definieren. Für $a \in \mathbf{Z}$ gilt $\varphi(a) = f(a)$. Daher bezeichnen wir diese Funktion φ jetzt mit f. Für sie gelten die Aussagen (a)–(c). Weiterhin folgt aus der Gültigkeit von (c) die Aussage (f), und daher muß man f so definieren, wenn die Aussagen (a)–(c) gelten sollen.

4. Schritt. Man beweist jetzt $f(a) > 0'$ für alle $a \in \mathbf{Q}_+$ und folgert hieraus die Aussage (g), anschließend die Injektivität von f. Die Surjektivität ergibt sich schließlich aus (e) und der Konstruktion von f. $\square$

Kapitel 2

Das Vollständigkeitsaxiom

In der Analysis machen wir die Vorstellung von „unendlich nahe bei“ präzise. Dazu werden wir den Begriff der ε-Umgebung von Punkten $a \in \widehat{\mathbf{R}}$ definieren. Außerdem wird in diesem Kapitel schließlich die Axiomatik der reellen Zahlen durch Angabe des noch fehlenden Vollständigkeitsaxioms (R13) abgeschlossen. Dazu benötigen wir noch den Begriff des Supremums und Infimums einer Teilmenge.

2.1 ε-Umgebungen

Definition. Für alle $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ und $a \in \widehat{\mathbf{R}}$ definieren wir die *ε-Umgebung*

$$U_\varepsilon(a) := \begin{cases}]a-\varepsilon, a+\varepsilon[& \text{für } a \in \mathbf{R}, \\ ]1/\varepsilon, \infty] & \text{für } a = \infty, \\ [-\infty, -1/\varepsilon[& \text{für } a = -\infty. \end{cases}$$

Proposition. Seien a, $b \in \widehat{\mathbf{R}}$ und ε, $\delta \in \mathbf{R}_+$. Dann gilt:

(a) $a \in U_\varepsilon(a)$,

(b) $\delta < \varepsilon \implies U_\delta(a) \subseteq U_\varepsilon(a)$,

(c) $a \neq b \implies \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$.
Diese letzte Eigenschaft ist die sogenannte „Hausdorffsche Trennungseigenschaft“.

2.2 Maximum, Minimum, Supremum und Infimum

Definition 1. Es sei $M \in \mathfrak{P}(\widehat{\mathbf{R}})$.

(a) Eine Zahl $s \in \widehat{\mathbf{R}}$ heißt *obere* (bzw. *untere*) *Schranke* von M, wenn

$$\forall a \in M : a \leq s \quad \text{bzw. } a \geq s.$$

Insbesondere ist ∞ für jede Menge eine obere und $-\infty$ eine untere Schranke.

(b) Besitzt M eine obere (bzw. untere) Schranke $s \in \mathbf{R}$, so heißt M nach *oben* (bzw. *unten*) *beschränkt*. Wir nennen M *beschränkt*, wenn M nach oben und unten beschränkt ist.

(c) Eine obere (bzw. untere) Schranke s von M mit $s \in M$ heißt ein *Maximum* (bzw. *Minimum*) von M.

(d) Ist $M \neq \emptyset$, so heißt eine obere (bzw. untere) Schranke s von M ein *Supremum* (bzw. *Infimum*) von M, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon M \cap U_\varepsilon(s) \neq \emptyset.$$

Das Supremum und Infimum der leeren Menge wird im folgenden Zusatz definiert.

Ist s ein Maximum (bzw. Minimum) von M, so ist s offenbar auch ein Supremum (bzw. Infimum) von M.

Beispiel. Es ist 1

- ein Maximum von $[0, 1]$,
- kein Maximum von $[0, 1[$, aber
- ein Supremum von $[0, 1[$.

Proposition. Jede nicht leere Menge M besitzt höchstens ein Supremum (also erst recht höchstens ein Maximum) und höchstens ein Infimum (also erst recht höchstens ein Minimum). Daher können wir in Zukunft von *dem* Maximum, Minimum, Supremum und Infimum einer Menge (im Falle der Existenz, vgl. dazu auch das folgende Axiom (R13)) sprechen. Bezeichnungen: $\max(M)$, $\min(M)$, $\sup(M)$, $\inf(M)$.

Aufgabe. Für $-M \coloneqq \{-a \mid a \in M\}$ gilt: $-M$ hat genau dann ein Maximum (bzw. Supremum), wenn M ein Minimum (bzw. Infimum) hat. Im Falle der Existenz ist

$$\max(-M) = -\min(M) \quad \text{bzw. } \sup(-M) = -\inf(M).$$

Zusatz. Wir definieren $\sup(\emptyset) \coloneqq -\infty$ und $\inf(\emptyset) \coloneqq \infty$.

Definition 2. Ist M eine Menge und $n \in \mathbf{N}_0$, so definieren wir:

(a) $\{0, \dots, n-1\} := [0, n-1] \cap \mathbf{N}_0$.

(b) $|M| = n :\Longleftrightarrow |M| = |\{0, \dots, n-1\}|$.

(c) $|M| < \infty :\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbf{N}_0 \colon |M| = n$. In diesem Falle sagen wir, M sei eine *endliche* Menge.

(d) $|M| = \infty :\Longleftrightarrow \neg(|M| < \infty)$. In diesem Falle sagen wir, M sei eine *unendliche* Menge.

Kommentar. In der Mengenlehre wird gezeigt: Ist M eine Menge und gilt sowohl $|M| = m$ als auch $|M| = n$ für m, $n \in \mathbf{N}_0$, so ist $m = n$ (*Dirichletscher Schubfächersatz*); in diesem Falle heißt n die *Anzahl* der Elemente von M.

Theorem (Existenz von Maxima und Minima)**.**

(a) Jede endliche, nicht leere Teilmenge von $\mathbf{R}$ hat ein Maximum und ein Minimum.

(b) Jede nicht leere Teilmenge von $\mathbf{N}_0$ hat ein Minimum.

2.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Wir kommen schließlich zum letzten Axiom, welches die Menge der reellen Zahlen erfüllen soll.

Vollständigkeitsaxiom.

(R13) Jede Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ von $\mathbf{R}$ besitzt ein Supremum (u. U. $\pm\infty$).

Ein angeordneter Körper, der wie $\mathbf{R}$ das Vollständigkeitsaxiom erfüllt, heißt ein *vollständiger angeordneter Körper*. Wir kommen später in Abschnitt 2.6 auf die Einzigartigkeit von $\mathbf{R}$ zu sprechen.

Korollar 1. Jede Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ von $\mathbf{R}$ besitzt ein Infimum.

Korollar 2. Zu jeder Zahl $a \in [0, \infty[$ existiert genau eine Zahl $b \in [0, \infty[$, so daß $b^2 = a$ gilt; diese Zahl b heißt die *Quadratwurzel* von a; sie wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.

Beweisidee. Für $a \in \mathbf{R}_+$ ist $\sqrt{a} \in \mathbf{R}_+$ das Supremum der nicht leeren Menge $\{t \in [0, \infty[\mid t^2 \leq a\}$. $\square$

Kommentar. Es ist nicht möglich, die Existenz der Quadratwurzeln ohne das Axiom (R13) zu beweisen. Wenn dies doch ginge, könnten wir beweisen, daß der Körper $\mathbf{Q}$, in welchem ja die anderen Axiome (R1)–(R12) erfüllt sind, die Quadratwurzel $\sqrt{2}$ enthielte, was ja nach der Proposition aus 0.9 nicht der Fall ist.

Solche Unabhängigkeitsbeweise für ein Axiomensystem sind manchmal sehr schwer. So wurde 2000 Jahre lang versucht, das „Parallelaxiom“ aus den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie herzuleiten, bis Anfang des 19. Jahrhunderts mit der Entdeckung der hyperbolischen Geometrie eingesehen wurde, daß das Parallelenaxiom von den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie unabhängig ist.

Aufgabe (Alternative Beschreibung des Supremums)**.**

(a) Sei Σ die Menge aller oberen Schranken einer beliebigen Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ von $\mathbf{R}$ ($M = \emptyset$ ist ausdrücklich zugelassen). Dann besitzt Σ ein Minimum, und zwar ist $\min(\Sigma) = \sup(M)$. Eine entsprechende Aussage gilt für das Infimum. Also:

- $\sup(M)$ ist die kleinste obere Schranke und
- $\inf(M)$ ist die größte untere Schranke von M.

(b) Eine nicht leere Menge $M \subseteq \mathbf{R}$ ist genau dann nach oben beschränkt, wenn $\sup(M) < \infty$ ist.

2.4 Der Satz des Archimedes

Definition. Wir sagen, eine Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ liegt *dicht* in $\mathbf{R}$, wenn

$$\forall a \in \mathbf{R}\, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon U_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset.$$

Theorem. Die Menge $\mathbf{N}_0$ der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt[1], d. h.

$$\forall a \in \mathbf{R}\, \exists n \in \mathbf{N}_0 \colon a < n.$$

Daher gilt auch

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+\, \exists n \in \mathbf{N}_1 \colon \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Kommentar. Es existieren angeordnete Körper (die also die Axiome (R1)–(R12) erfüllen), z. B. die Körper der hyperreellen Zahlen der Nichtstandardanalysis, in welchen beide Teile des Satzes von Archimedes falsch sind.

Korollar. In $\mathbf{R}$ liegen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, die Menge der *irrationalen* Zahlen, dicht.

[1] Dieses Theorem war schon Eudoxos von Knidos, etwa 408–355 v. Chr., bekannt. Da Archimedes von 287–212 v. Chr. gelebt hat, ist die Bezeichnung des Satzes nach Archimedes eigentlich nicht korrekt.

2.5 Die Mächtigkeit spezieller Mengen

Definition. Für jede Menge M definieren wir:

(a) M ist *abzählbar*, wenn $|M| = |\mathbf{N}_0|$.

(b) M ist *höchstens abzählbar*, wenn $|M| < \infty$ oder $|M| = |\mathbf{N}_0|$.

(c) M ist *überabzählbar*, wenn M nicht höchstens abzählbar ist.

Theorem 1. Die Mengen $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ und $\mathbf{Q}$ sind abzählbar.

Theorem 2. Die Menge $\mathbf{R}$ ist überabzählbar.

Der folgende Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbf{R}$, der erste Beweis dafür überhaupt, wurde 1873 von Georg Cantor gegeben.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, daß es zu je endlich vielen reellen Zahlen eine weitere von diesen verschiedene gibt. Damit kann jedenfalls $|\mathbf{R}| < \infty$ nicht gelten. Nehmen wir als nächstes an, daß $\mathbf{R}$ abzählbar ist. Dies wollen wir zum Widerspruch führen. Sei also x_0, x_1, x_2, $\ldots$ eine Abzählung von $\mathbf{R}$ (das heißt, die Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$ reeller $x_k \in \mathbf{R}$ vermittelt eine Bijektion $\mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$). Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß $x_0 < x_1$ (ansonsten vertauschen wir die ersten beiden Folgenglieder).

Wir konstruieren daraus zwei Folgen $(i_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ und $(j_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ natürlicher Zahlen i_n, $j_n \in \mathbf{N}_0$ vermöge rekursiver Definition wie folgt: Wir setzen $i_0 \coloneqq 0$ und $j_0 \coloneqq 1$, so daß insbesondere $x_{i_0} < x_{j_0}$ nach Annahme an die Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$.

Seien i_n und j_n schon konstruiert. Da zwischen zwei reellen Zahlen unendlich viele weitere reelle Zahlen liegen und die Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$ nach Voraussetzung alle reellen Zahlen durchläuft, existieren $i_{n+1} \in \mathbf{N}_0$ minimal mit $x_{i_n} < x_{i_{n+1}} < x_{j_n}$ und dann $j_{n+1} \in \mathbf{N}_0$ minimal mit $x_{i_{n+1}} < x_{j_{n+1}} < x_{j_n}$. Nach Konstruktion sind $(i_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ und $(j_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ jeweils streng monoton wachsende Folgen natürlicher Zahlen für die

$$\forall k \in \mathbf{N}_0\colon k < i_n \implies x_k < x_{i_n} \vee x_k > x_{j_n} \tag{1}$$

für alle $n \in \mathbf{N}_0$ gilt.

Sei $a \coloneqq \sup(\{x_{i_n} \mid n \in \mathbf{N}_0\})$. Nach Konstruktion ist

$$\forall n, m \in \mathbf{N}_0\colon x_{i_n} < a < x_{j_m}$$

und insbesondere $a \in \mathbf{R}$. Da das Bild der Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$ die Menge aller reeller Zahlen ist, existiert somit ein $\ell \in \mathbf{N}_0$ mit $x_\ell = a$. Sei dann $n \in \mathbf{N}_0$ mit $\ell < i_n$. Wegen (1) gilt $a < x_{i_n}$ oder $a > x_{j_n}$. Dies ist in jedem Falle ein Widerspruch. Also kann unsere Annahme nicht stimmen und die Menge der reellen Zahlen ist folglich überabzählbar. □

Korollar. Die Menge $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ist überabzählbar.

Kommentar. Die sogenannte *Kontinuumshypothese* besagt, daß für jede überabzählbare Teilmenge M von $\mathbf{R}$ schon $|M| = |\mathbf{R}|$ gilt, daß es also keine Mächtigkeiten zwischen der Mächtigkeit von $\mathbf{N}_0$ und der Mächtigkeit des Kontinuums (das ist die Mächtigkeit von $\mathbf{R}$) gibt. Durch Arbeiten von Kurt Gödel und Paul Cohen ist inzwischen bekannt, daß die Gültigkeit dieser Hypothese nicht im Rahmen der Zermelo–Fraenkelschen Mengenlehre (und damit insbesondere auch nicht im Rahmen der bisher vorgestellten mengentheoretischen Axiome) entschieden werden kann.

2.6 Einzigartigkeit von R

Wir setzen jetzt die Untersuchung von Abschnitt 1.11 fort. Die Bezeichnungen seien wie dort. Insbesondere sei f der dort definierte Körperisomorphismus $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}'$. Zusätzlich setzen wir aber voraus, daß die Körper $\mathbf{R}$ und $\mathbf{R}'$ auch noch das Axiom (R13) erfüllen. Dann gilt:

Theorem 1. Es gibt genau einen *Isomorphismus angeordneter Körper* $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$; also eine Bijektion mit folgenden Eigenschaften für alle a, $b \in \mathbf{R}$:

(a) $g(a + b) = g(a) + g(b)$,

(b) $g(1) = 1'$,

(c) $g(a \cdot b) = g(a) \cdot g(b)$,

welche *streng monoton wachsend* ist, also

(d) $a < b \implies g(a) < g(b)$.

Beweisskizze. Natürlich werden im folgenden die Eigenschaften der Abbildung f aus dem Theorem aus Abschnitt 1.11 vollumfänglich ausgenutzt. Zur Konstruktion von g definieren wir für jedes $a \in \mathbf{R}$ die Mengen

$$M(a) := \{q \in \mathbf{Q} \mid q \le a\} \qquad \text{und} \qquad N(a) := \{q \in \mathbf{Q} \mid q \ge a\}.$$

Nun zeigt man, daß

$$g(a) := \sup f(M(a)) \qquad \text{und} \qquad h(a) := \inf f(N(a))$$

dieselbe Zahl aus $\mathbf{R}'$ sind. Warum dann die unterschiedlichen Definitionen für diese Zahl? Weil man damit leicht zeigen kann:

- $g(a) = h(a) = f(a)$ für alle $a \in \mathbf{Q}$,
- $g(a) + g(b) \le g(a + b)$ und $h(a + b) \le h(a) + h(b)$ für alle a, $b \in \mathbf{R}$,

- $g(a) \cdot g(b) \leq g(a \cdot b)$ und $h(a \cdot b) \leq h(a) \cdot h(b)$ für alle $a, b \in \mathbf{R}_+$,
- $h(a) < g(b)$ für alle $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$.

Aus diesen Eigenschaften folgen unmittelbar die Eigenschaften (a)–(d) des Theorems. Da nach dem Theorem aus 1.11 die Abbildung $g|\mathbf{Q} = f$ durch die Bedingungen (a)–(c) eindeutig festgelegt ist, sieht man leicht, daß nur die von uns definierte Funktion g auch noch die Bedingung (d) erfüllt.

Es bleibt also nur noch die Bijektivität von g zu beweisen. Die Injektivität von g folgt natürlich sofort aus (d). Mehr Arbeit hat man mit der Surjektivität. Oder doch nicht? Hier ein einfaches, wenn auch abstraktes Argument. Entsprechend zur Konstruktion von g konstruieren wir *die* Abbildung $g' \colon \mathbf{R}' \to \mathbf{R}$, welche mutatis mutandis die Bedingungen (a)–(d) erfüllt. Dann besitzt neben $\mathrm{id}_{\mathbf{R}'}$ auch die Komposition $g \circ g' \colon \mathbf{R}' \to \mathbf{R}'$ die Eigenschaften (a)–(d). Da es aber nur eine Abbildung $\mathbf{R}' \to \mathbf{R}'$ gibt, welche die Bedingungen (a)–(d) erfüllt, ist $g \circ g' = \mathrm{id}_{\mathbf{R}'}$. Hieraus folgt die Surjektivität von g nach der Proposition 4 aus 0.5. $\square$

Proposition. Die Bedingung (d) im Theorem folgt bereits aus (a) und (c).

Beweis. Wir benutzen das Korollar 2 aus 2.3. Sind $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$, so existiert ein $c \in \mathbf{R}_+$ mit $c^2 = b - a$. Daher folgt mit (c): $g(b-a) = g(c^2) = g(c)^2 > 0$, wobei der Fall $g(c)^2 = 0$ nicht eintreten kann, weil $g(0) = 0'$ und g injektiv ist, also $g(c) \neq 0'$. Wegen (a) ist daher $g(b) - g(a) > 0$, also $g(a) < g(b)$. $\square$

Nachdem wir die Einzigartigkeit eines vollständigen angeordneten Körpers $\mathbf{R}$ festgestellt haben, stellen wir seine Existenz schließlich durch ein weiteres mengentheoretisches Axiom sicher:

Unendlichkeitsaxiom. Es existiert ein vollständiger angeordneter Körper.

Der Grund für den Namen dieses Axioms ist der, daß aus den bis dahin vorgestellten mengentheoretischen Axiomen nicht die Existenz einer unendlichen Menge gefolgert werden kann. Dagegen ist $\mathbf{R}$ eine unendliche Menge.

Kapitel 3

Metrische Räume und stetige Abbildungen

3.1 Metrische Räume

Definition 1. Seien E eine Menge und $d\colon E \times E \to \mathbf{R}$ eine Funktion. Dann heißt d eine *Metrik* oder *Distanzfunktion* auf E und das Paar (E, d) ein *metrischer Raum*, wenn für d die folgenden Axiome gelten:

(M0) $d \geq 0$, d. h. $\forall p, q \in E\colon d(p, q) \geq 0$.

(M1) $\forall p, q \in E\colon \Big(d(p, q) = 0 \iff p = q\Big)$,

(M2) $\forall p, q \in E\colon d(p, q) = d(q, p)$,

(M3) $\forall p, q, z \in E\colon d(p, z) \leq d(p, q) + d(q, z)$.

Die Ungleichung in (M3) heißt auch die *Dreiecksungleichung* für metrische Räume.

Anstatt zu sagen, daß (E, d) ein metrischer Raum ist, werden wir auch sagen, daß E ein metrischer Raum mit Metrik d sei oder noch kürzer, daß E ein metrischer Raum ist, dessen Metrik wir dann in der Regel mit d bezeichnen.

Beispiele.

(a) $E \coloneqq \mathbf{R}$ mit $d(a, b) \coloneqq |b - a|$.

(b) $E \coloneqq \mathbf{R}^2$ mit $d(p, q) \coloneqq \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$. Dieses ist nicht die einzige sinnvolle Metrik auf $\mathbf{R}^2$ und wir werden in Abschnitt 3.3 eine andere als diese *euklidische* Metrik auf $\mathbf{R}^2$ einführen, aber auch zeigen, daß der Stetigkeitsbegriff für beide Metriken übereinstimmt.

Definition 2. Ist E ein metrischer Raum, so definieren wir für jedes $p \in E$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ die *ε-Umgebung*

$$U_\varepsilon(p) \coloneqq \{q \in E \mid d(p,q) < \varepsilon\}.$$

Offensichtlich stimmt diese Definition für $E = \mathbf{R}$ mit der Definition in Abschnitt 2.1 überein. Wie dort, gilt auch allgemeiner hier:

Hausdorffsche Trennungseigenschaft. Sei E ein metrischer Raum. Dann gilt:

$$\forall p, q \in E\colon \Big(p \neq q \implies \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon U_\varepsilon(p) \cap U_\varepsilon(q) = \emptyset\Big).$$

3.2 Stetige Abbildungen

Im folgenden betrachten wir zwei metrische Räume E und $\tilde{E}$, deren ε-Umgebungen wir zur Verdeutlichung mit $U_\varepsilon(p)$ und $\tilde{U}_\varepsilon(q)$ ausnahmsweise unterschiedlich bezeichnen.

Definition. Sei $f\colon E \to \tilde{E}$ eine Abbildung, und sei $p_0 \in E$ ein Punkt in E.

(a) Es heißt f in p_0 *stetig*, falls $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \colon \, f(U_\delta(p_0)) \subseteq \tilde{U}_\varepsilon(f(p_0))$.

(b) Es heißt f *stetig*, falls f in allen Punkten $p \in E$ stetig ist.

Anschaulich gesprochen wird in (a) folgendes formuliert: Mit $\tilde{U}_\varepsilon(f(p_0))$ wird ein „Toleranzbereich“ um den Wert $f(p_0)$ vorgegeben. Stetigkeit von f an p_0 garantiert mir, daß es hierzu einen „Toleranzbereich“ $U_\delta(p_0)$ um die Stelle p_0 gibt, so daß $f(p)$ für $p \in U_\delta(p_0)$ sicher im Toleranzbereich $U_\varepsilon(f(p_0))$ um $f(p_0)$ liegt.

Umformulierung der Stetigkeit in einem Punkt im Falle einer Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Es ist f genau dann in $t_0 \in \mathbf{R}$ stetig, falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall t \in \mathbf{R}\colon \Big(|t - t_0| < \delta \implies |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon\Big).$$

Beispiele.

(a) Jede konstante Abbildung $E \to \tilde{E}$ ist stetig.

(b) Die Identität $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ ist stetig.

Insbesondere ist die Abbildung

$$x\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto t$$

stetig.

Festsetzung. Ab sofort bezeichnen wir mit x immer die Identität von $\mathbf{R}$.

(c) Die Funktion

$$|x| : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto |t|$$

ist stetig.

Theorem (Komposition stetiger Abbildungen)**.** Es seien E, E' und E'' metrische Räume, $p_0 \in E$, $g\colon E \to E'$ eine in p_0 stetige Abbildung und $f\colon E' \to E''$ eine in $g(p_0)$ stetige Abbildung. Dann ist $f \circ g\colon E \to E''$ in p_0 stetig.

Korollar. Ist $f\colon E \to \mathbf{R}$ eine in p_0 stetige Funktion, so ist $|f| : E \to \mathbf{R}, p \mapsto |f(p)|$ auch in p_0 stetig.

3.3 Produkträume

Definition. Sei $n \in \mathbf{N}_2$. Weiter seien (E_i, d_i) für $i = 1, 2, \ldots, n$ metrische Räume. Dann wird auf dem *Produktraum*

$$E \coloneqq \prod_{i=1}^{n} E_i \coloneqq \{p = (p_i) = (p_i)_{i=1,2,\ldots,n} \mid p_i \in E_i \text{ für alle } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

durch

$$d(p, q) \coloneqq \max\{d_i(p_i, q_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

eine Metrik definiert.

Die ε-Umgebung von $p \in E$ ist

$$U_\varepsilon(p) = \prod_{i=1}^{n} U_\varepsilon^i(p).$$

Im Falle $n = 2$ haben wir $\prod_{i=1}^{2} E_i = E_1 \times E_2$.

Insbesondere erhalten wir auf dem $\mathbf{R}^n$ eine Metrik durch

$$d(p, q) \coloneqq \max\{|q_i - p_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Umformulierung der Stetigkeit in einem Punkt im Falle einer Funktion $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Es ist f genau dann in $a \in \mathbf{R}^n$ stetig, falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall b \in \mathbf{R}^n\colon \\ \Big(\big(\forall i = 1, 2, \ldots, n\colon \; |b_i - a_i| < \delta\big) \implies |f(b) - f(a)| < \varepsilon\Big).$$

Proposition 1. In der in der Definition beschriebenen Situation ist für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die *kanonische Projektion*

$$\mathrm{pr}_k\colon E \to E_k, (p_i) \mapsto p_k$$

stetig.

Festsetzung. Im Spezialfall $E = \mathbf{R}^n$ bezeichnen wir die kanonische Projektion $\mathrm{pr}_k\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit x_k; wir nennen sie auch die k-te *Koordinatenfunktion.* Sie ist also stetig. Im Falle $n = 2$ schreiben wir auch $x := x_1$ und $y := x_2$; im Falle $n = 3$ auch $x := x_1$, $y := x_2$ und $z := x_3$.

Proposition 2. In der in der Definition beschriebenen Situation sei D ein weiterer metrischer Raum, und für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ sei $f_i\colon D \to E_i$ eine Abbildung. Dann können wir

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)\colon D \to E, p \mapsto (f_i(p))_{i=1,2,\ldots,n}$$

definieren. Damit gilt für jedes $p_0 \in D$: Es ist f genau dann in p_0 stetig, wenn für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ die Abbildung f_i in p_0 stetig ist.

Dieses Kriterium findet besonders für Abbildungen $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon D \to \mathbf{R}^n$ Verwendung.

Aufgabe 1. Es seien E' und E'' metrische Räume, $E := E' \times E''$ ihr metrischer Produktraum und $q \in E''$ ein fester Punkt. Man zeige, daß dann die Abbildung

$$i^q\colon E' \to E, p \mapsto (p, q)$$

stetig ist.

Aufgabe 2. Man zeige, daß für jeden metrischen Raum (E, d) gilt:

(a) Für jedes Quadrupel (p, q, p_0, q_0) von Punkten aus E gilt

$$|d(p, q) - d(p_0, q_0)| \leq d(p, p_0) + d(q, q_0).$$

Daher (?) ist $d\colon E \times E \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion.

(b) Es sei $A \in \mathfrak{P}(E)$ eine nicht leere Teilmenge. Für jedes $p \in E$ sei

$$\mathrm{dist}(p, A) := \inf\{d(p, q) \mid q \in A\}$$

die sogenannte *Distanz* von p zu A. Zeige, daß die Funktion

$$f\colon E \to \mathbf{R}, p \mapsto \mathrm{dist}(p, A)$$

stetig ist.

(Tip: Man überlege sich, daß $\forall a \in A\colon \mathrm{dist}(q, A) \leq d(q, p) + d(p, a)$ und $\mathrm{dist}(q, A) - \mathrm{dist}(p, A) \leq d(p, q)$.)

3.4 Verschiedene Metriken im $\mathbf{R}^n$

Aufgabe. Für $v = (v_i) \in \mathbf{R}^n$ definieren wir

$$\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\} \quad \text{und} \quad \|v\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}.$$

Offenbar ist dann

$$d(u, v) := \|v - u\|_\infty$$

die in 3.3 eingeführte Metrik des $\mathbf{R}^n$. Durch

$$\tilde{d}(u, v) := \|v - u\|_2$$

wird eine weitere Metrik des $\mathbf{R}^n$, die sogenannte *euklidische* Metrik definiert. Die ε-Umgebungen bezüglich d und $\tilde{d}$ werden im folgenden mit $U_\varepsilon(p)$ bzw. $\tilde{U}_\varepsilon(p)$ bezeichnet. Man zeige:

(a) $\forall v \in \mathbf{R}^n\colon c\,\|v\|_2 \leq \|v\|_\infty \leq C\,\|v\|_2$ mit $c := 1/\sqrt{n}$ und $C := 1$.

Sind die beiden Abschätzungen scharf, d. h. wird die Aussage falsch, wenn wir c durch eine größere bzw. C durch eine kleinere Konstante ersetzen?

(b) $\forall v \in \mathbf{R}^n\, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+\colon \tilde{U}_\varepsilon(v) \subseteq U_\varepsilon(v) \subseteq \tilde{U}_{\varepsilon\sqrt{n}}(v)$.

(c) Sei E ein weiterer metrischer Raum. Dann gilt:

(i) Eine Abbildung $f\colon E \to \mathbf{R}^n$ ist genau dann in $p_0 \in E$ bezüglich d stetig, wenn f in p_0 bezüglich $\tilde{d}$ stetig ist.

(ii) Eine Abbildung $g\colon \mathbf{R}^n \to E$ ist genau dann in $v_0 \in \mathbf{R}^n$ bezüglich d stetig, wenn g in v_0 bezüglich $\tilde{d}$ stetig ist.

3.5 Stetigkeit der Addition und Multiplikation

Theorem. Die Addition und Multiplikation sind stetige Funktionen $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

Definition. Sei M eine Menge, und seien f, $g\colon M \to \mathbf{R}$ Funktionen und $c \in \mathbf{R}$. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned}
f + g\colon M &\to \mathbf{R}, p \mapsto f(p) + g(p),\\
f - g\colon M &\to \mathbf{R}, p \mapsto f(p) - g(p),\\
f \cdot g\colon M &\to \mathbf{R}, p \mapsto f(p) \cdot g(p),\\
f/g\colon M &\to \mathbf{R}, p \mapsto f(p)/g(p), \quad \text{falls } g(p) \neq 0 \text{ für alle } p \in M\\
c \cdot f\colon M &\to \mathbf{R}, p \mapsto c \cdot f(p),
\end{aligned}$$

und

$$-f\colon M \to \mathbf{R}, p \mapsto -f(p).$$

Natürlich ist $c \cdot f = g \cdot f$ mit der Funktion $g \equiv c$, $-f = (-1) \cdot f$, $f - g = f + (-g)$ und $f/g = f \cdot (1/g)$.

Korollar. Ist E ein metrischer Raum, und sind f, $g\colon E \to \mathbf{R}$ Funktionen, die in $p_0 \in E$ stetig sind, und ist $\alpha \in \mathbf{R}$, so sind auch die Funktionen

$$f + g, f \cdot g, \alpha \cdot f, \quad \text{und} \quad -f$$

in p_0 stetig. Folglich ist die Menge $C(E) := C(E, \mathbf{R})$ der stetigen Funktionen $E \to \mathbf{R}$ ein reeller Vektorraum, ja sogar eine $\mathbf{R}$-Algebra.

3.6 Polynomfunktionen

Theorem. Jede *Polynomfunktion* (wir sprechen oft auch — nicht ganz korrekt — von *Polynom*)

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

mit $n \in \mathbf{N}_0$ und $a_k \in \mathbf{R}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ ist stetig.

Polynomfunktionen heißen auch *ganzrationale* Funktionen.

Proposition 1. Sind P und Q Polynomfunktionen und ist $\alpha \in \mathbf{R}$, so sind auch

$$P + Q, P \cdot Q, \alpha \cdot P \quad \text{und} \quad P \circ Q$$

Polynomfunktionen.

Satz vom Koeffizientenvergleich. Die Funktionen $f = 1$, x, x^2, … sind als Elemente des $\mathbf{R}$-Vektorraumes $C(\mathbf{R})$ linear unabhängig. Anders ausgedrückt:

Sind n, $m \in \mathbf{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n$, $b_0, \ldots, b_m \in \mathbf{R}$, ist $n \leq m$ und gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot x^k,$$

so ist $a_k = b_k$ für $k = 0, \ldots, n$ und $b_{n+1} = \cdots = b_m = 0$.

Kommentar 1. Der Satz vom Koeffizientenvergleich ist für Polynome über beliebigen Körpern im allgemeinen falsch. Genauer: Er ist falsch über endlichen Körpern. In diesem Falle müssen wir zwischen Polynomen und den durch sie definierten Polynomfunktionen unterscheiden: Unterschiedliche Polynome können die gleichen Polynomfunktionen definieren.

Der Grad einer Polynomfunktion. Ist $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, so heißt

$$\deg P \coloneqq \sup\{k \in \{0, \ldots, n\} \mid a_k \neq 0\}$$

der *Grad* von P. Wir stellen fest, daß

$$P \equiv 0 \iff \deg P = -\infty.$$

Proposition 2. Sind P und Q Polynomfunktionen und $\alpha \in \mathbf{R}^*$, so gilt:

$$\begin{aligned} \deg(\alpha \cdot P) &= \deg P, \\ \deg(P + Q) &\leq \max\{\deg P, \deg Q\}, \\ \deg(P \cdot Q) &= \deg P + \deg Q. \end{aligned}$$

Der euklidische Divisionsalgorithmus. Sind P und Q Polynomfunktionen und ist $Q \not\equiv 0$, so existiert genau ein Paar (S, R) von Polynomfunktionen mit

$$P = S \cdot Q + R \quad \text{und} \quad \deg R < \deg Q.$$

Korollar 1. Ist $\alpha \in \mathbf{R}$ eine *Nullstelle* einer Polynomfunktion P (d. h. $P(\alpha) = 0$), so existiert genau eine Polynomfunktion Q, so daß gilt

$$P = (x - \alpha) \cdot Q.$$

Korollar 2. Jede Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbf{N}_0$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Kommentar 2. Die Funktion x^2+1 vom Grad 2 hat keine „reellen“ Nullstellen. Im Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen hat jedoch jede nicht konstante Polynomfunktion mindestens eine Nullstelle. Das ist die Aussage des sogenannten *Fundamentalsatzes der Algebra.*

3.7 Metrische Teilräume

Definition. Sei (E, d) ein metrischer Raum und $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge von E. Dann ist

$$d_M \coloneqq d|(M \times M)$$

eine Metrik auf M. Der metrische Raum (M, d_M) heißt ein (metrischer) *Teilraum* von (E, d). Seine ε-Umgebungen sind offensichtlich durch

$$U_\varepsilon^M(p) = U_\varepsilon^E(p) \cap M$$

gegeben, wobei der oben stehende Index angibt, aus welchem Raum die jeweilige ε-Umgebung genommen wird. Daher ist die Inklusion $M \hookrightarrow E$ trivialerweise eine stetige Abbildung.

Proposition. Ist E' ein weiterer metrischer Raum, so gilt:

(a) Für jede in $p_0 \in M$ stetige Abbildung $f\colon E \to E'$ ist die Restriktion auf M, $f|M\colon M \to E'$, ebenfalls in p_0 stetig.

(b) Eine Abbildung $f\colon M \to E'$ ist genau dann in $p_0 \in M$ stetig, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \colon f(U^E_\delta(p_0) \cap M) \subseteq U_\varepsilon(f(p_0)).$$

(c) Ist $f\colon E' \to E$ eine in $p_0 \in E'$ stetige Abbildung mit $f(E') \subseteq M$, so ist f auch als Abbildung $E' \to M$ in p_0 stetig.

Aufgabe 1. Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft, d. h.: Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen E und E', $f\colon E \to E'$, ist in $p_0 \in E$ stetig, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ gibt, so daß $f|U_\varepsilon(p_0)$ in p_0 stetig ist.

Insbesondere wissen wir jetzt auch, was unter der Stetigkeit einer Funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$, die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbf{R}$ definiert ist, zu verstehen ist.

Aufgabe 2 (Aneinanderheften stetiger Funktionen)**.** Es seien a, b, $c \in \mathbf{R}$ Zahlen mit $a < b < c$, E ein metrischer Raum, sowie $f\colon [a,b] \to E$ und $g\colon [b,c] \to E$ stetige Abbildungen mit $f(b) = g(b)$. Man zeige, daß dann genau eine stetige Abbildung $h\colon [a,c] \to E$ mit

$$h|[a,b] = f \quad \text{und} \quad h|[b,c] = g$$

existiert.

3.8 Stetigkeit rationaler Funktionen

Theorem. Die Funktion $1/x\colon \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ ist stetig.

Korollar 1. Ist E ein metrischer Raum, sind f, $g\colon E \to \mathbf{R}$ in $p_0 \in E$ stetige Funktionen und gilt $g(p_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$f/g\colon E \setminus V(g) \to \mathbf{R}, p \mapsto f(p)/g(p)$$

in p_0 stetig. Hierbei bezeichnet $V(g)$ die *Nullstellen-* oder *Verschwindungsmenge* von g, also

$$V(g) \coloneqq g^{-1}(\{0\}) = \{p \in E \mid g(p) = 0\}.$$

Korollar 2. Jede *rationale Funktion*, d. h. jede Funktion, welche sich als Quotient P/Q zweier Polynomfunktionen P und Q mit $Q \not\equiv 0$ schreiben läßt, ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich $\mathbf{R} \setminus V(Q)$ stetig.

Es sei beachtet, daß bei der Definition rationaler Funktionen auch $Q \equiv 1$ zugelassen ist; Polynomfunktionen sind also spezielle rationale Funktionen.

3.9 Der Zwischenwertsatz

Theorem. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall, und sei c ein Wert echt zwischen $f(a)$ und $f(b)$, d. h. es gilt $f(a) < c < f(b)$ oder $f(b) < c < f(a)$. Dann existiert ein $t_0 \in \,]a,b[$ mit $f(t_0) = c$.

Der erste Beweis des Zwischenwertsatzes wurde 1817 von Bernard Bolzano gegeben.

Korollar 1. Ist I ein Intervall von $\mathbf{R}$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion ohne Nullstellen und nimmt f an *einer* Stelle einen positiven Wert an, so ist f *überall* positiv.

Korollar 2. Jede Polynomfunktion ungeraden Grades besitzt mindestens eine Nullstelle.

Aufgabe 1 (Charakterisierung von Intervallen)**.** Für jede nicht leere Teilmenge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}) \setminus \{\emptyset\}$ von $\mathbf{R}$ sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

(a) Für je zwei Zahlen a, $b \in M$ mit $a < b$ gilt $[a,b] \subseteq M$.

(b) Es gilt $]\inf(M), \sup(M)[\subseteq M$.

(c) M ist ein Intervall.

(Tip: (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) $\implies$ (a); man beachte, daß auf jeden Fall $M \subseteq [\inf(M), \sup(M)]$ gilt.)

Aufgabe 2 (Intervalltreue stetiger Funktionen)**.** Ist I ein Intervall von $\mathbf{R}$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion, so ist auch das Bild $f(I)$ von I ein Intervall.

Aufgabe 3 (Der eindimensionale Spezialfall des Brouwerschen Fixpunktsatzes)**.** Sei $n \in \mathbf{N}_1$, und sei $\mathbf{B}^n$ die *Einheitsvollkugel* des $\mathbf{R}^n$ mit Mittelpunkt 0, präzise $\mathbf{B}^n = \{p \in \mathbf{R}^n \mid \|p\|_2 \leq 1\}$. Der *Brouwersche Fixpunktsatz* besagt, daß jede stetige Abbildung $f\colon \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ mindestens einen *Fixpunkt* $p_0 \in \mathbf{B}^n$ besitzt, d. h. also, daß ein $p_0 \in \mathbf{B}^n$ mit $f(p_0) = p_0$ existiert. Für $n \geq 2$ ist der Beweis schwer; man benutzt Methoden der algebraischen Topologie. Man beweise den Fall $n = 1$.

(Tip: $g = x - f$.)

3.10 Monotone Funktionen

Definition. Sei $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ eine Teilmenge von $\mathbf{R}$. Dann heißt eine Funktion $f\colon M \to \mathbf{R}$ *streng monoton wachsend* (bzw. *fallend*), wenn gilt:

$$\forall t, s \in M\colon \Big(t < s \implies f(t) < f(s) \quad (\text{bzw. } f(t) > f(s))\Big).$$

Steht in dieser Defintion $f(t) \leq f(s)$ (bzw. $f(t) \geq f(s)$) anstatt der strikten Ungleichung, so sprechen wir von einer *monoton wachsenden* (bzw. *fallenden*) Funktion.

Proposition. Ist $f\colon M \to \mathbf{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend), so ist f injektiv, und die Umkehrfunktion $\check{f}\colon f(M) \to \mathbf{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Theorem 1. Ist I ein Intervall von $\mathbf{R}$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine Funktion, so gilt:

(a) Ist f stetig und injektiv, so ist f streng monoton wachsend oder fallend.

(b) Ist f streng monoton wachsend oder fallend, so ist die zugehörige Umkehrfunktion $\check{f}\colon f(I) \to \mathbf{R}$ stetig.

Korollar. Ist $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine stetige injektive Funktion auf einem Intervall I von $\mathbf{R}$, so ist die Umkehrfunktion $\check{f}\colon f(I) \to \mathbf{R}$ ebenfalls stetig.

Theorem 2. Es sei $n \in \mathbf{N}_1$ eine positive natürliche Zahl.

(a) Ist n gerade, so ist $x^n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine *gerade* Funktion, d. h.

$$\forall t \in \mathbf{R}\colon x^n(-t) = x^n(t),$$

und $x^n|\,[0,\infty[$ ist streng monoton wachsend mit $x^n([0,\infty[) = [0,\infty[$. Daher besitzt $x^n|\,[0,\infty[$ eine stetige Umkehrfunktion

$$\sqrt[n]{}\colon\ [0,\infty[\to \mathbf{R}.$$

Es gilt

$$x^n \circ \sqrt[n]{} = x|\,[0,\infty[\quad \text{und} \quad \sqrt[n]{} \circ x^n = |x|\,.$$

(b) Ist n ungerade, so ist $x^n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine *ungerade* Funktion, d. h.

$$\forall t \in \mathbf{R}\colon x^n(-t) = -x^n(t),$$

und ist streng monoton wachsend mit $x^n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Daher besitzt sie eine stetige Umkehrfunktion

$$\sqrt[n]{}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

Es gilt

$$\sqrt[n]{} \circ x^n = x^n \circ \sqrt[n]{} = x.$$

Kapitel 4

Konvergenz von Folgen

Wir erinnern an die Definition von

$$\mathbf{N}_m := \{n \in \mathbf{Z} \mid n \geq m\}$$

für alle ganzen Zahlen $m \in \mathbf{Z}$. Anstatt von $n \in \mathbf{N}_m$ werden wir auch $n \geq m$ schreiben, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, daß n eine ganze Zahl ist.

4.1 Konvergenz in metrischen Räumen

Sei im folgenden E ein metrischer Raum, $m \in \mathbf{Z}$ und $(p_n)_{n \geq m}$ eine Folge von Punkten $p_n \in E$.

Definition. Die Folge $(p_n)_{n \geq m}$ *konvergiert* gegen ein $q \in E$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists n_0 \geq m \, \forall n \geq n_0 \colon p_n \in U_\varepsilon(q). \tag{1}$$

In diesem Falle schreiben wir auch $\lim_{n \to \infty} p_n = q$. Konvergiert die Folge gegen *kein* q, so sagen wir auch, daß sie *divergiert*.

Beispiel 1. Jede konstante Folge $(p_n)_{n \geq m}$ von E konvergiert, und zwar gegen q, wenn $\forall n \geq m : p_n = q$ ist.

Proposition 1. Die Folge $(p_n)_{n \geq m}$ kann gegen höchstens einen Punkt $q \in E$ konvergieren.

Im Falle, daß $(p_n)_{n \geq m}$ gegen q konvergiert, heißt q auch der *Limes* oder, falls E ein Rechenbereich wie $\mathbf{R}$ oder ein Vektorraum ist, der *Grenzwert* der Folge $(p_n)_{n \geq m}$.

Proposition 2. Für Konvergenz sind nur die „Endstücke" der Folgen entscheidend; genauer: Sind $(p_n)_{n \geq m_1}$ und $(q_n)_{n \geq m_2}$ zwei Folgen in E und existiert ein

$m_3 \geq \max\{m_1, m_2\}$, so daß $\forall n \geq m_3 : p_n = q_n$ gilt, so konvergiert die Folge $(p_n)_{n\geq m_1}$ genau dann gegen $q \in E$, wenn die Folge $(q_n)_{n\geq m_2}$ gegen q konvergiert.

(Dadurch wird im Nachhinein die Bezeichnung $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ gerechtfertigt, in welche nicht eingeht, für welche n genau die p_n zu betrachten sind.)

Konvergenz in R. Da $\mathbf{R}$ ein metrischer Raum ist, wissen wir nach Obigem, was unter Konvergenz einer Folge in $\mathbf{R}$ zu verstehen ist. Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\geq m}$ reeller Zahlen a_n gegen 0, so nennen wir $(a_n)_{n\geq m}$ eine *Nullfolge*.

Beispiel 2. $(1/n)_{n\geq 1}$ ist eine Nullfolge.

Konvergenz in $\widehat{\mathbf{R}}$. Obwohl $\widehat{\mathbf{R}}$ kein metrischer Raum ist, können wir die Konvergenzdefinition (1) ohne Änderung für diesen Raum übernehmen, da wir auch $U_\varepsilon(\infty)$ und $U_\varepsilon(-\infty)$ definiert haben. Wir können also von der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq m}$ gegen ∞ bzw. gegen $-\infty$ sprechen. (Andere Autoren sprechen an dieser Stelle von Divergenz; wir nicht!)

Da auch $\widehat{\mathbf{R}}$ die Hausdorffsche Trennungseigenschaft hat, gilt auch in $\widehat{\mathbf{R}}$ die Aussage über die Eindeutigkeit des Limes. Offenbar gilt:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \forall c \in \mathbf{R}_+ \, \exists n_0 \geq m \, \forall n \geq n_0 \colon a_n > c$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall c \in \mathbf{R}_+ \, \exists n_0 \geq m \, \forall n \geq n_0 \colon a_n < -c$.

Proposition 3. Ist eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq m}$ monoton wachsend (bzw. fallend), d. h. die Funktion $f \colon \mathbf{N}_m \to \mathbf{R}, n \mapsto a_n$ ist monoton wachsend (bzw. fallend) (vgl. 3.10), so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \geq m\} \quad (\text{bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \geq m\}).$$

Insbesondere konvergiert jede beschränkte monotone Zahlenfolge in $\mathbf{R}$.

Beispiel 3. Ist a eine reelle Zahl, so erhalten wir eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ rationaler Zahlen, wenn wir mit $a_n \leq a$ die rationale Zahl bezeichnen, die entsteht, wenn die Dezimalbruchentwicklung von a an der n-ten Stelle abgebrochen wird. In diesem Falle ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zum Beispiel gilt für die Kreiszahl π:

$$\pi_0 = 3, \quad \pi_1 = 3{,}1, \quad \pi_2 = 3{,}14, \quad \pi_3 = 3{,}141, \quad \pi_4 = 3{,}1415, \quad \pi_5 = 3{,}14159,$$
$$\pi_{50} = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510$$

Mit Hilfe des folgenden Scheme-Programmes können wir prinzipiell beliebig viele Stellen von π bestimmen:

```scheme
(define (head stream)
  (car stream))

(define (tail stream)
  (force (cdr stream)))

(define (stream->list stream n)
  (let loop ((stream stream) (n n))
    (if (zero? n)
        '()
        (cons (head stream)
              (loop (tail stream) (- n 1))))))

(define (stream/pi)
  (let loop ((q 1) (r 0) (t 1) (k 1) (n 3) (l 3))
    (if (< (+ (* 4 q) r (- t)) (* n t))
        (cons n
              (delay
                (loop (* 10 q) (* 10 (- r (* n t))) t k
                      (- (quotient (* 10 (+ (* 3 q) r))
                                   t)
                         (* 10 n))
                      l)))
                (loop (* q k)
                      (* (+ (* 2 q) r) l)
                      (* t l)
                      (+ k 1)
                      (quotient (+ (* q (+ (* 7 k) 2))
                                   (* r l))
                                (* t l))
                      (+ l 2)))))

(define (digits/pi n)
  (stream->list (stream/pi) (+ n 1)))
```

Rufen wir die Prozedur `(digits/pi n)` mit einer nicht-negativen Zahl n auf, so liefert sie eine Liste der Ziffern bis einschließlich der n-ten Nachkommastelle von π zurück. Der im Programm verwendete Algorithmus ist in Jeremy Gibbons: *Unbounded Spigot Algorithms for the Digits of Pi*, American Mathematical Monthly, Vol. 113 (4), 2006, S. 318–328 zu finden.

4.2 Konvergenz von Teilfolgen

Definition. Ist $(p_n)_{n\geq m}$ eine Folge irgendwelcher Elemente und $i\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_m$ eine streng monoton wachsende Funktion, so heißt $(p_{i(n)})_{n\in\mathbf{N}_0}$ eine *Teilfolge* von $(p_n)_{n\geq m}$. Häufig schreiben wir auch p_{i_k} anstatt $p_{i(k)}$.

Da die Funktion i streng monoton wachsend ist, gilt: $\forall n \in \mathbf{N}_0\colon i(n) \geq m + n$.

Proposition. Konvergiert eine Folge $(p_n)_{n\geq m}$ von Punkten $p_n \in E$ eines metrischen Raumes E gegen einen Punkt $q \in E$, so konvergiert auch jede Teilfolge von $(p_n)_{n\geq m}$ gegen q. Die Aussage bleibt richtig, wenn E durch $\widehat{\mathbf{R}}$ ersetzt wird.

Korollar. Ist $q \in \mathbf{R}$, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{für } q > 1, \\ 1 & \text{für } q = 1, \\ 0 & \text{für } |q| < 1. \end{cases}$$

Im Falle $q \leq -1$ existiert der Grenzwert nicht.

4.3 Das Heine–Kriterium für Stetigkeit

Theorem. Es seien E und E' metrische Räume, $f\colon E \to E'$ eine Abbildung und $q \in E$ ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) f ist in q stetig.

(b) Für jede gegen q konvergente Folge $(p_n)_{n\geq m}$ von Punkten $p_n \in E$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(q). \tag{1}$$

Anstelle von (1) können wir auch

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(\lim_{n\to\infty} p_n)$$

schreiben; anders ausgedrückt: Limesbildung und Operieren stetiger Abbildungen sind miteinander vertauschbar.

Kommentar.

(a) Die Implikation $\neg$(b) $\implies$ $\neg$(a), welche ja zur Implikation (a) $\implies$ (b) äquivalent ist, beschreibt eine Strategie, um die Nicht-Stetigkeit von Abbildungen nachzuweisen.

(b) Zum Beweis von (b) $\Longrightarrow$ (a) wird das sogenannte *Auswahlaxiom* der Mengenlehre benötigt.

Auswahlaxiom (E. ZERMELO 1904)**.** Sei I eine Menge und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie nicht leerer Mengen. Dann existiert eine Familie $(p_i)_{i\in I}$ von Elementen p_i mit der Eigenschaft:

$$\forall i \in I : p_i \in M_i.$$

Diese Aussage wurde bis zum Ende des 19. Jahrhunderts mit der größten Selbstverständlichkeit benutzt, und zwar solange bis auffiel, daß sich ohne diese Aussage einige überhaupt nicht selbstverständliche Sätze (wie der *Wohlordnungssatz* oder das *Zornsche Lemma*) nicht beweisen lassen. Im Jahre 1963 gelang P. H. COHEN der Beweis, daß das Auswahlaxiom nicht aus den anderen Axiomen der Mengenlehre abgeleitet werden kann; vorher war schon durch Arbeiten von K. GÖDEL bekannt, daß das Auswahlaxiom verträglich mit den anderen Axiomen der Mengenlehre ist.

Das folgende Korollar ist eine Folgerung aus dem Heine–Kriterium für Stetigkeit:

Korollar. $\forall a \in \mathbf{R}_+ : \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4.4 Konvergenz in Teilräumen

Aufgabe. Sei M ein Teilraum eines metrischen Raumes E, $(p_n)_{n\geq m}$ eine Punktfolge in M und $q \in M$. Dann gilt:

Die Folge $(p_n)_{n\geq m}$ konvergiert genau dann in dem Teilraum M gegen q, wenn sie in E gegen q konvergiert.

4.5 Konvergenz in Produkträumen

Proposition. Seien $E_1, \ldots, E_N$ metrische Räume und E der Produktraum $\prod\limits_{i=1}^{N} E_i$ (vgl. 3.3). Weiterhin sei jeweils $(p_{i,n})_{n\geq m}$ für $i = 1, \ldots, N$ eine Folge in E_i, und für alle $n \geq m$ setzen wir $p_n := (p_{i,n})_{i=1,\ldots,N}$. Dann konvergiert die Folge $(p_n)_{n\geq m}$ in E genau dann gegen einen Punkt p^*, wenn für jedes $i = 1, \ldots, N$ die „Komponentenfolge“ $(p_{i,n})_{n\geq m}$ in E_i gegen den Punkt $\mathrm{pr}_i(p^*)$ konvergiert (vgl. 3.3).

Korollar. Es seien $(a_n)_{n\geq m}$ und $(b_n)_{n\geq m}$ reelle Zahlenfolgen, α, a, $b \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen, und es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot a, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

und im Falle $a \neq 0$ auch

$$\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 1/a.$$

Aufgabe (Weitere Rechenregeln für Zahlenfolgen)**.** Seien $(a_n)_{n\geq m}$, $(b_n)_{n\geq m}$ und $(c_n)_{n\geq m}$ reelle Zahlenfolgen, a, $b \in \widehat{\mathbf{R}}$, und es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Man zeige:

(a) Ist $a = \infty$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = 0$.

(b) Ist $a = 0$ und $(c_n)_{n\geq m}$ eine beschränkte Zahlenfolge, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot c_n) = 0$.

(c) Ist $a = \infty$ und existiert ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, so daß $\forall n \geq m\colon c_n \geq \varepsilon$ gilt, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot c_n) = \infty$.

(d) Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$, so gilt auch $a \leq b$.

(e) Und schließlich:

Das Sandwich-Theorem.

(i) Gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$ und ist $a = b$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

(ii) Gilt $a_n \leq c_n$ für alle $n \geq m$ und ist $a = \infty$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.

(iii) Gilt $c_n \leq b_n$ für alle $n \geq m$ und ist $b = -\infty$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

4.6 Häufungspunkte von Punktfolgen

Definition. Seien E ein metrischer Raum, $(p_n)_{n\geq m}$ eine Punktfolge in E und $p \in E$ ein Punkt. Dann heißt der Punkt p *Häufungspunkt* der Folge $(p_n)_{n\geq m}$, wenn p der Limes einer Teilfolge von $(p_n)_{n\geq m}$ ist.

Proposition. Jede konvergente Punktfolge besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Limes.

Kommentar. Im Raum $E = \widehat{\mathbf{R}}$ können wir Häufungspunkte genauso definieren; hier gilt die letzte Aussage ebenfalls unverändert. Wir wissen also, was es bedeutet, daß ∞ oder $-\infty$ Häufungspunkt einer reellen Zahlenfolge ist.

4.7 Limes superior und Limes inferior einer Zahlenfolge

Es sei $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge reeller Zahlen.

Definition. Für jedes $n \in \mathbf{N}_m$ setzen wir

$$\underline{a}_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\} \quad \text{und} \quad \overline{a}_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbf{N}_m$:

$$\underline{a}_n \leq \underline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_n, \quad \underline{a}_n \in [-\infty, \infty[\quad \text{und} \quad \overline{a}_n \in]-\infty, \infty]\,.$$

Damit ist $(\underline{a}_n)_{n\geq m}$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen, und wir können

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n \in [-\infty, \infty]$$

setzen. Weiter ist $(\overline{a}_n)_{n\geq m}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen, und wir können

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n \in [-\infty, \infty]$$

setzen. Die „Zahlen“ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ heißen der *Limes inferior* bzw. *Limes superior* der Folge $(a_n)_{n\geq m}$.

Ist $(a_n)_{n\geq m}$ nach unten beschränkt, so ist $(\underline{a}_n)_{n\geq m}$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen und daher $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n > -\infty$. Andernfalls ist $\underline{a}_n = -\infty$ für alle $n \geq m$ und daher $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Ist $(a_n)_{n\geq m}$ nach oben beschränkt, so ist $(\overline{a}_n)_{n\geq m}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen und daher $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n < \infty$. Andernfalls ist $\overline{a}_n = \infty$ für alle $n \geq m$ und daher $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Proposition. In jedem Falle ist

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Satz von Bolzano–Weierstraß. Jede reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq m}$ besitzt in $\widehat{\mathbf{R}}$ mindestens einen Häufungspunkt; genauer: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ sind Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\geq m}$, und für jeden weiteren Häufungspunkt a der Folge gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Mit anderen Worten sind der Limes inferior und der Limes superior der kleinste bzw. größte Häufungspunkt einer Folge.

Theorem. Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq m}$ konvergiert genau dann, wenn

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

ist. Im Falle der Konvergenz stimmen diese beiden Häufungspunkte mit $\lim_{n\to\infty} a_n$ überein.

4.8 Abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raumes

Es seien E ein metrischer Raum und $A \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge von E.

Definition.

(a) Unter der *abgeschlossenen Hülle* von A verstehen wir die Menge $\overline{A}$ aller Punkte $p \in E$, welche Limes einer (in E) konvergenten Folge $(p_n)_{n\geq m}$ von Punkten $p_n \in A$ sind.

Sicherlich ist $A \subseteq \overline{A}$.

(b) Die Teilmenge A heißt *abgeschlossen* (in E), wenn $\overline{A} = A$.

Beispiele.

(a) Die leere Menge und der ganze Raum E sind abgeschlossene Teilmengen von E.

(b) Jede einpunktige Menge $\{p\} \subseteq E$ ist in E abgeschlossen.

(c) Sind a, $b \in \mathbf{R}$ Zahlen mit $a < b$, so ist das Intervall $[a, b]$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbf{R}$ im Sinne dieses Abschnittes.

(d) Sind f_1, f_2, …, $f_n \colon E \to \mathbf{R}$ stetige Funktionen, so sind die Mengen

$$\{p \in E \mid f_1(p) = f_2(p) = \cdots = f_n(p) = 0\}$$

und

$$\{p \in E \mid f_1(p) \geq 0, \cdots, f_n(p) \geq 0\}$$

abgeschlossene Teilmengen von E. Wir sprechen bei diesen Beispielen von Mengen, die von stetigen Gleichungen bzw. Ungleichungen definiert werden. Insbesondere ist für jeden Punkt $p^* \in E$ und jeden Radius $r \in [0, \infty[$ der *Ball*

$$B_r(p^*) := \{p \in E \mid d(p^*, p) \leq r\}$$

abgeschlossen.

Proposition. Für jeden Punkt $p \in E$ gilt: $p \in \overline{A} \iff \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon A \cap U_\varepsilon(p) \neq \emptyset$.

Hieraus entnehmen wir, daß aufgrund der Definition 1(d) aus 2.2 für jede beschränkte Menge $M \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ gilt $\inf(M) \in \overline{M}$ und $\sup(M) \in \overline{M}$.

Korollar 1. Es ist $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, d. h. die abgeschlossene Hülle ist — wie der Name vermuten läßt — tatsächlich abgeschlossen.

Korollar 2. In $\mathbf{R}$ gilt $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ und $\overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

Beweis. Man kombiniere die Dichtheitsaussage aus dem Korollar von 2.4 mit obiger Proposition. □

Eingedenk dieses Beweises können wir in Übereinstimmung mit der Dichtheitsdefinition aus 2.4 für beliebige metrische Räume definieren:

Definition. In einem metrischen Raum E heißt $A \in \mathfrak{P}(E)$ eine *dichte* Teilmenge (von E), wenn $\overline{A} = E$.

Es gilt: A dicht in $E \iff \forall p \in E \, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon A \cap U_\varepsilon(p) \neq \emptyset$.

Aufgabe.

(a) Sind A, $B \in \mathfrak{P}(E)$ Teilmengen von E und gilt $A \subseteq B$, so gilt auch $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(b) Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(E)$, so gilt $\overline{\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu} = \bigcup_{\nu=1}^{n} \overline{A_\nu}$; insbesondere ist daher jede endliche Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen von E wieder eine abgeschlossene Teilmenge.

(c) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen $A_i \in \mathfrak{P}(E)$ mit $I \neq \emptyset$, so gilt für den Durchschnitt $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$. Man zeige an einem Beispiel, daß im allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Trotzdem ist der Durchschnitt von (beliebig vielen) abgeschlossenen Teilmengen von E wieder eine abgeschlossene Teilmenge von E.

(d) Es seien E' ein weiterer metrischer Raum und $f \colon E \to E'$ eine stetige Abbildung. Dann ist das Urbild $f^{-1}(B)$ einer jeden abgeschlossenen Teilmenge B von E' eine abgeschlossene Teilmenge von E. Man beachte dagegen: Das Bild $f(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge A von E ist im allgemeinen nicht in E' abgeschlossen.

(e) Man bestimme für alle Intervalle von $\mathbf{R}$ die abgeschlossene Hülle und entscheide damit, welche Intervalle im Sinne dieses Abschnittes abgeschlossene Teilmengen von $\mathbf{R}$ sind.

4.9 Folgenkompakte Mengen

Definition. Sei E ein metrischer Raum.

(a) Der Raum E heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge $(p_n)_{n \geq m}$ von Punkten aus E einen Häufungspunkt (in E) besitzt, d. h. also, wenn jede Folge $(p_n)_{n \geq m}$ von Punkten aus E eine konvergente Teilfolge besitzt.

(b) Eine Teilmenge $K \in \mathfrak{P}(E)$ von E heißt eine *folgenkompakte Teilmenge* von E, wenn der metrische Teilraum K folgenkompakt ist, wenn also jede Folge $(p_n)_{n \geq m}$ von Punkten aus K einen Häufungspunkt in K besitzt.

Kommentar. Die Folgenkompaktheit einer Teilmenge K ist per definitionem eine Eigenschaft des metrischen Teilraumes K; hingegen ist der Begriff der Abgeschlossenheit nur relativ zu einem fixierten Gesamtraum sinnvoll.

Beispiele.

(a) Die leere Menge ist folgenkompakt.

(b) Jede einpunktige Teilmenge $\{p\}$ eines metrischen Raumes ist folgenkompakt.

(c) Jedes Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ ist folgenkompakt.

(d) Der metrische Raum $\mathbf{R}$ ist *nicht* folgenkompakt.

Proposition. Für jede folgenkompakte Teilmenge K eines metrischen Raumes E gilt:

(a) K ist abgeschlossen in E.

(b) Jede abgeschlossene Teilmenge A von E, die in K liegt, ist auch folgenkompakt.

Aufgabe. Man zeige:

(a) Jede Vereinigung endlich vieler folgenkompakter Mengen ist folgenkompakt.

(b) Jeder Durchschnitt von (beliebig vielen) folgenkompakten Mengen ist folgenkompakt.

(c) Es seien E' ein weiterer metrischer Raum und $f\colon E \to E'$ eine stetige Abbildung. Dann ist das Bild $f(K)$ einer jeden folgenkompakten Teilmenge $K \in \mathfrak{P}(E)$ wieder folgenkompakt. Man gebe weiter ein Beispiel dafür an, daß das Urbild $f^{-1}(B)$ einer folgenkompakten Teilmenge B von E' im allgemeinen *nicht* folgenkompakt ist.

(d) Schließlich bestimme man alle folgenkompakten Intervalle von $\mathbf{R}$.

4.10 Über die Existenz von Extremwerten

Theorem. Sei E ein nicht leerer folgenkompakter metrischer Raum. Dann nimmt jede stetige Funktion $f\colon E \to \mathbf{R}$ ihr Maximum und ihr Minimum an, d. h.: Es existieren Punkte p_1, $p_2 \in E$, so daß gilt:

$$\forall p \in E\colon f(p_1) \le f(p) \le f(p_2).$$

Korollar. Jede folgenkompakte Teilmenge K eines nicht leeren metrischen Raumes E ist *beschränkt*, d. h.: Es existiert ein $r \in \mathbf{R}_+$ und ein $p_0 \in E$, so daß $K \subseteq U_r(p_0)$.

4.11 Der Satz von Heine–Borel

Theorem (Produkte folgenkompakter Mengen)**.** Seien $E_1, \dots, E_N$ metrische Räume und E der Produktraum $\prod_{i=1}^{N} E_i$ (vergleiche 3.3). Weiterhin sei für jedes $i = 1$, $\dots$, N eine folgenkompakte Teilmenge $K_i \in \mathfrak{P}(E_i)$ gegeben. Dann ist deren Produkt $\prod_{i=1}^{N} K_i$ eine folgenkompakte Teilmenge von E.

Korollar. Im $\mathbf{R}^n$ ist jeder *Quader* $Q = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ mit $-\infty < a_i < b_i < \infty$ für $i = 1, \dots, n$ eine folgenkompakte Teilmenge.

Satz von Heine–Borel (Charakterisierung der folgenkompakten Teilmengen des $\mathbf{R}^n$)**.** Eine Teilmenge $K \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}^n)$ des $\mathbf{R}^n$ ist genau dann folgenkompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

4.12 Gleichmäßige Stetigkeit

Es seien (E, d) und (E', d') metrische Räume und $f\colon E \to E'$ eine Abbildung.

Definition. Die Abbildung f heißt *gleichmäßig stetig*, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall p_0 \in E\colon f(U_\delta(p_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(p_0)),$$

wenn also auf ganz E das δ zum ε unabhängig vom speziellen Punkt p_0 gewählt werden kann. Mit Hilfe der Metriken d und d' drückt sich dieser Tatbestand folgendermaßen aus:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall p, q \in E\colon \Big(d(p,q) < \delta \implies d'(f(p), f(q)) < \varepsilon\Big).$$

Proposition. Ist $f\colon E \to E'$ gleichmäßig stetig, so ist f (in allen Punkten von E) stetig.

Beispiel. Es seien $E_1, \ldots, E_N$ metrische Räume und E der Produktraum $\prod_{i=1}^{N} E_i$. Dann sind die kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_i\colon E \to E_i$ (vergleiche 3.3) gleichmäßig stetig.

Aufgabe. Die Funktion $\sqrt[2]{\ }\colon [0, \infty[\to \mathbf{R}$ ist gleichmäßig stetig; hingegen ist die Funktion $x^2\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nicht gleichmäßig stetig.

Theorem. Ist E folgenkompakt und $f\colon E \to E'$ stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.

4.13 Cauchyfolgen

Es sei (E, d) ein metrischer Raum.

Definition. Eine Punktfolge $(p_n)_{n \geq m}$ von E heißt eine *Cauchyfolge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists n_0 \geq m \, \forall k, n \geq n_0 \colon d(p_k, p_n) < \varepsilon.$$

Proposition 1. Jede konvergente Punktfolge von E ist eine Cauchyfolge.

Wie es mit der Umkehrung dieser Aussage steht, sehen wir im nächsten Abschnitt.

Proposition 2. Besitzt eine Cauchyfolge einen Häufungspunkt, so ist sie konvergent.

Proposition 3. Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

Im Falle von Cauchyfolgen gibt es ein Analogon zum ersten Teil des Heine-Kriteriums:

Proposition 4. Sind E und E' metrische Räume, $f\colon E \to E'$ eine gleichmäßig stetige Abbildung und $(p_n)_{n \geq m}$ eine Cauchyfolge, so ist auch $(f(p_n))_{n \geq m}$ eine Cauchyfolge.

4.14 Vollständige metrische Räume

Definition. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.

Kommentar 1. In vollständigen metrischen Räumen läßt sich also die Konvergenz von Punktfolgen ohne Kenntnis des Limes feststellen.

Beispiel. Es ist $\mathbf{R}$ ein vollständiger metrischer Raum. Hingegen ist der Teilraum $\mathbf{Q}$ nicht vollständig.

Die Aussage über die Vollständigkeit von $\mathbf{R}$ ist (unter Annahme der übrigen Axiome) zum Vollständigkeitsaxiom (R13) äquivalent. Cauchyfolgen wurden von A.-L. Cauchy 1821 in seinem Werk *„Course d'Analyse"* wesentlich benutzt. Allerdings setzte er die Vollständigkeit von $\mathbf{R}$ stillschweigend voraus. Erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde den Mathematikern die Vollständigkeitsproblematik bewußt. G. Cantor benutzte 1883 Cauchyfolgen, die er Fundamentalfolgen nannte, zur Konstruktion der reellen Zahlen.

Proposition. Seien $E_1, \ldots, E_n$ vollständige metrische Räume, so ist auch deren Produktraum $\prod_{i=1}^{n} E_i$ vollständig.

Korollar. Der $\mathbf{R}^n$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Kommentar 2. Jeder metrische Raum E kann durch Hinzunahme geeigneter weiterer Punkte in natürlicher Weise *vervollständigt* werden. In diesem Sinne ist $\mathbf{R}$ die Vervollständigung von $\mathbf{Q}$.

Theorem (Vollständigkeit von Teilräumen)**.** Es seien E ein metrischer Raum und $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge von E. Dann gilt:

(a) Ist der metrische Teilraum M vollständig, so ist M eine abgeschlossene Teilmenge von E.

(b) Ist E vollständig und M eine abgeschlossene Teilmenge von E, so ist der metrische Teilraum M ebenfalls vollständig.

Aufgabe (Der Cantorsche Durchschnittssatz)**.** Es seien (E, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n \geq m}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von E, für welche gelte:

(a) $\forall n \geq m \colon A_{n+1} \subseteq A_n$ und

(b) die Folge $(\operatorname{diam}(A_n))_{n \geq m}$ der *Durchmesser* $\operatorname{diam}(A_n) := \sup\{d(p,q) \mid p, q \in A_n\}$ ist eine Nullfolge.

Dann enthält der Durchschnitt $\bigcap_{n \geq m} A_n$ genau einen Punkt, und zwar gilt: Jede Folge $(p_n)_{n \geq m}$ von Punkten $p_n \in A_n$ konvergiert gegen diesen einzigen Punkt $p^* \in \bigcap_{n \geq m} A_n$.

In dieser Version hat der Satz viele Anwendungen.

Kommentar 3. Ein berühmter Spezialfall des Cantorschen Durchschnittssatzes ist der *Satz über die Intervallschachtelung*. In ihm ist E der metrische Raum $\mathbf{R}$ und die A_n sind abgeschlossene Intervalle $[a_n, b_n] \subseteq \mathbf{R}$, welche — wie in (a) beschrieben — ineinander geschachtelt sind und deren Längen $b_n - a_n$ eine Nullfolge bilden. Zum Beweis der Existenz eines Elementes in $\bigcap_n [a_n, b_n]$ wird die Vollständigkeit von $\mathbf{R}$ gebraucht. Tatsächlich ist diese zur Gültigkeit über die Intervallschachtelung äquivalent. K. WEIERSTRASS benutzte Intervallschachtelungen 1880/81 in Vorlesungen zur Einführung der reellen Zahlen und zum Beispiel auch zum Beweis des Satzes von Bolzano–Weierstraß. Tatsächlich wurde aber mit Intervallschachtelungen schon vor über 2000 Jahren gearbeitet. So stellt Archimedes' Approximation von 2π durch die Länge von dem Einheitskreis eingeschriebenen Sehnenzügen bzw. umbeschriebenen Tangentenzügen eine Intervallschachtelung dar.

4.15 Der Banachsche Fixpunktsatz

Es sei E eine beliebige nicht-leere Menge und $f\colon E \to E$ eine „Selbstabbildung" von E. Ist dann $p_0 \in E$ irgendein Punkt, so können wir durch die rekursive Definition

$$\forall n \in \mathbf{N}_0 \colon p_{n+1} := f(p_n)$$

eine Folge $(p_n)_{n \geq 0}$ in E definieren. Im folgenden nennen wir diese Punktfolge die Banachfolge bezüglich f (oder kurz f-Banachfolge) mit Startpunkt p_0.

Aufgabe.

(a) Seien E ein metrischer Raum und $f\colon E \to E$ eine stetige Abbildung. Man zeige: Wenn eine f-Banachfolge gegen einen Punkt $p \in E$ konvergiert, so ist p ein *Fixpunkt* von f, d. h. $f(p) = p$.

(b) Im HERON*schen Verfahren* zur Bestimmung von $\sqrt{a}$ für $a \in \mathbf{R}_+$ werden Banachfolgen bezüglich der Funktion $f = (x + a/x)/2|\mathbf{R}_+$ benutzt. Man zeige, daß jede f-Banachfolge konvergiert, und zwar gegen $\sqrt{a}$.

(c) Man versuche mittels eines Rechners unter Benutzung des ersten Aufgabenteils Fixpunkte für die Funktionen

$$\cos, \quad \exp(-x), \quad \text{und} \quad \sqrt{}$$

zu ermitteln und jeweils das *Einzugsgebiet* der Fixpunkte zu bestimmen, d. h. die Menge derjenigen Zahlen a_0, für welche die Banachfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ bezüglich der jeweiligen Funktion gerade gegen den Fixpunkt konvergiert. (Die Kosinus-Funktion betrachte man dabei als Funktion des Bogenmaßes.) Man prüfe seine experimentellen Ergebnisse an den Graphen der verschiedenen Funktionen.

Der Banachsche Fixpunktsatz. Seien (E, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f\colon E \to E$ eine *kontrahierende* Abbildung, d. h. es existiert eine Konstante $L \in [0, 1[$ (also $0 \leq L < 1$), so daß gilt:

$$\forall p, q \in E\colon d(f(p), f(q)) \leq L \cdot d(p, q).$$

(Insbesondere ist f also gleichmäßig stetig.) Dann besitzt f genau einen Fixpunkt p^*; und zwar ist p^* Limes einer jeden f-Banachfolge $(p_n)_{n\geq 0}$, denn es gilt:

$$\forall n \geq 1\colon d(p_n, p^*) \leq \frac{d(p_1, p_0)}{1 - L} \cdot L^n.$$

Kommentar. Banachfolgen wurden schon im 19. Jahrhundert benutzt. Im Jahre 1903 bewies É. Goursat den Banachschen Fixpunktsatz für den $\mathbf{R}^n$. Im Jahre 1920 wurde er von dem Amerikaner K. Lamson allgemeiner bewiesen; seine Untersuchung war aber in Europa nicht bekannt. Im Jahre 1922 erschien er in der Dissertation des polnischen Mathematikers S. Banach, formuliert für die später nach ihm benannten Banachräume. Der richtige Rahmen für den Banachschen Fixpunktsatz ist jedoch — wie bald erkannt worden ist — die Theorie der vollständigen metrischen Räume.

Kapitel 5

Normierte Vektorräume und unendliche Reihen

5.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Definition. Versehen wir den reellen Vektorraum $\mathbf{R}^2$, in dem wir Vektoren bekanntlich addieren können, mit der durch

$$(a, b) \cdot (a', b') \coloneqq (a \cdot a' - b \cdot b', a \cdot b' + a' \cdot b)$$

für alle $(a, b), (a', b') \in \mathbf{R}^2$ definierten Multiplikation, so wird er zu einem Körper, dem Körper $\mathbf{C}$ der *komplexen Zahlen.* Mit anderen Worten gelten in $\mathbf{C}$ die Axiome (R1)–(R9) aus Kapitel 1, wenn wir in ihnen stets $\mathbf{R}$ durch $\mathbf{C}$ und $\mathbf{R}^*$ durch $\mathbf{C}^* \coloneqq \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ersetzen. Desgleichen gelten mutatis mutandis die Sätze aus den Abschnitten 1.1–1.3.

Die komplexe Zahl $(0, 1)$ wird mit i bezeichnet und *imaginäre Einheit* genannt. Es gilt $i^2 = (-1, 0)$. Mit Hilfe der imaginären Einheit läßt sich jede komplexe Zahl z in der Form

$$(a, b) = (a, 0) + i \cdot (b, 0)$$

schreiben. Es heißt a der *Realteil* von z und b der *Imaginärteil.* (Eine komplexe Zahl, deren Realteil verschwindet, heißt *rein imaginär.*) Damit bezeichnen wir die beiden Koordinatenfunktionen x, $y\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ auch mit $\Re$ und $\Im$.

Die Abbildung $\mathbf{R} \to \mathbf{C}, a \mapsto (a, 0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus. Daher identifizieren wir die reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $(a, 0)$; damit betrachten wir $\mathbf{R}$ als eine Teilmenge, genauer als einen Unterkörper von $\mathbf{C}$. Insbesondere schreiben wir

$$(a, b) = a + i \cdot b.$$

Die Abbildung $\mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto \overline{z} \coloneqq \Re(z) - i \cdot \Im(z)$ heißt die *Konjugation* in $\mathbf{C}$.

Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + i \cdot b$ wird durch

$$|z| := \|z\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

definiert. Für reelle Zahlen stimmt dieser Betrag mit dem unter 1.5 eingeführten überein.

Proposition.

(a) Die Konjugation $\mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto \overline{z}$ ist ein Körperhomomorphismus, d. h. es gelten die folgenden Regeln:

$$\overline{0} = 0, \qquad \overline{1} = 1, \qquad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \text{und} \qquad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

für alle z, $w \in \mathbf{C}$, woraus insbesondere $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$ für alle $z \neq 0$ folgt. Außerdem gilt $\overline{\overline{z}} = z$; damit ist die Konjugation sogar ein Isomorphismus von Körpern, denn sie ist ihre eigene Umkehrung.

(b) Für Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z gelten die Formeln

$$\Re(z) = (z + \overline{z})/2 \qquad \text{und} \qquad \Im(z) = (z - \overline{z})/2i.$$

(c) Für den Betrag einer komplexen Zahl z gilt

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Regeln. Sind z, $w \in \mathbf{C}$, so gilt:

(a) $|z| \geq 0$,

(b) $z \neq 0 \implies |z| > 0$,

(c) $|\overline{z}| = |z|$,

(d) $|\Re(z)| \leq |z|$ und $|\Im(z)| \leq |z|$,

(e) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,

(f) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Obige Regel (f) heißt auch die (komplexe) *Dreiecksungleichung*.

Festsetzung. In Zukunft bezeichne $\mathbf{K}$ stets einen der beiden Körper $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Ein Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K}$ wird kurz ein $\mathbf{K}$-Vektorraum genannt. Jeder $\mathbf{C}$-Vektorraum kann auch als $\mathbf{R}$-Vektorraum betrachtet werden, indem die Multiplikation mit Skalaren auf die reellen Zahlen beschränkt wird.

5.2 Normierte Vektorräume

Definition 1. Sei E ein $\mathbf{K}$-Vektorraum. Dann heißt eine Funktion $\|\cdot\| : E \to \mathbf{R}$ eine *Norm* auf E, wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:

(N0) $\forall v \in E \colon \ \|v\| \geq 0$,

(N1) $\forall v \in E \colon (v = 0 \iff \|v\| = 0)$,

(N2) $\forall v \in E \, \forall a \in \mathbf{K} \colon \ \|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$,

(N3) $\forall v, w \in E \colon \ \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Das Axiom (N3) heißt auch *Dreiecksungleichung*.

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf E, so nennen wir $(E, \|\cdot\|)$ einen *normierten* $\mathbf{K}$-Vektorraum. Wie im Falle von metrischen Räumen werden wir auch sagen, daß E ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$ sei oder noch kürzer, daß E ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum ist, dessen Norm wir dann in der Regel mit $\|\cdot\|$ bezeichnen.

Regel. In normierten $\mathbf{K}$-Vektorräumen gilt: $\forall v, w \in E \colon \ |\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$.

Beispiel 1. Der Betrag auf dem Körper $\mathbf{K}$ ist aufgrund der angegebenen Regeln eine Norm. Somit können wir $\mathbf{K}$ als einen normierten Vektorraum über sich selbst auffassen.

Beispiel 2. Sind $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume, so erhalten wir auf dem *Produktvektorraum* $E := \prod\limits_{k=1}^{n} E_k$ eine Norm durch

$$\|v\| := \max\{\|\mathrm{pr}_k(v)\|_k \mid k = 1, \ldots, n\}.$$

Wenn nichts anderes gesagt wird, betrachten wir den Produktvektorraum E stets in dieser Weise als normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum.

Es sei beachtet, daß auf $E = \prod\limits_{k=1}^{n} E_k$ die Addition und die Multiplikation mit Skalaren „komponentenweise“ definiert sind. Das bedeutet gerade, daß die kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_k \colon E \to E_k$ lineare Abbildungen sind, die bekanntlich folgendermaßen definiert sind:

Definition 2. Eine Abbildung $A \colon E \to E'$ zwischen zwei $\mathbf{K}$-Vektorräumen heißt *linear*, wenn gilt

$$\forall u, v \in E \, \forall a \in \mathbf{K} \colon (A(u + v) = Au + Av \wedge A(a \cdot v) = a \cdot Av).$$

Ist A linear, so folgt aus der Definition insbesondere, daß dann auch $A(0) = 0$ und $A(-u) = -Au$.

Beispiel 3. Indem wir in Beispiel 2 die Setzung $E_1 = \cdots = E_n = \mathbf{K}$ vornehmen, erhalten wir insbesondere den $\mathbf{K}^n$ als normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum. In diesem Falle bezeichnen wir die Norm von Beispiel 2 meist mit $\|\cdot\|_\infty$.

Beispiel 4. Sei M eine beliebige nicht leere Menge, und sei E ein $\mathbf{K}$-Vektorraum. Dann heißt eine Funktion $f\colon M \to E$ beschränkt, wenn die reellwertige Funktion $\|f\| : p \mapsto \|f(p)\|$ beschränkt ist. Die Menge $B(M,E)$ der beschränkten Funktionen ist eine $\mathbf{K}$-Vektorraum, wenn die Addition und die Multiplikation mit Zahlen aus $\mathbf{K}$ punktweise definiert werden, d. h.

$$\forall p \in M \, \forall a \in \mathbf{K}\colon \Big((f+g)(p) = f(p) + g(p) \wedge (a \cdot f)(p) = a \cdot f(p)\Big).$$

Dieser wird durch die Definition

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup\{\|f(p)\| \mid p \in M\}$$

zu einem normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum. Für jedes $p \in M$ ist die Abbildung

$$\hat{p}\colon B(M,E) \to E, f \mapsto f(p)$$

linear.

5.3 Normierte Vektorräume als metrische Räume

Proposition 1. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum. Dann wird auf E eine Metrik durch

$$d(v,w) \coloneqq \|w - v\|$$

für alle v, $w \in E$ definiert. Für die diesbezüglichen ε-Umgebungen gilt:

$$U_\varepsilon(v) = v + U_\varepsilon(0) \coloneqq \{v + u \mid u \in U_\varepsilon(0)\}$$

und

$$U_\varepsilon(0) = \varepsilon \cdot U_1(0) \coloneqq \{\varepsilon \cdot v \mid v \in U_1(0)\}.$$

Normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume werden stets in dieser Weise als metrische Räume betrachtet. Damit stehen uns in Zukunft alle Begriffe, die wir für metrische Räume eingeführt haben, auch für normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume zur Verfügung.

Definition 1. Ein $\mathbf{K}$-*Banachraum* ist ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum, der (bezüglich seiner kanonischen Metrik) ein vollständiger metrischer Raum ist.

Für die folgende Aufgabe benötigen wir noch eine Definition:

Definition 2. Eine Teilmenge M eines $\mathbf{K}$-Vektorraumes E heißt *konvex*, wenn für je zwei Vektoren v, $w \in M$ auch deren *Verbindungsstrecke*

$$[v, w] := \{v + t \cdot (w - v) = (1 - t) \cdot v + t \cdot w \mid t \in [0, 1]\}$$

ganz in M liegt.

Aufgabe 1. In jedem normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum sind die ε-Umgebungen konvex.

Beispiel 1. Die Metrik des normierten Raumes $\mathbf{R}$ aus Beispiel 1 in Abschnitt 5.2 ist genau die in Kapitel 3 eingeführte; daher ist $\mathbf{R}$ das einfachste Beispiel eines Banachraumes. Die Metrik des normierten Raumes $\mathbf{C}$ ist die euklidische Metrik; sie stimmt nicht mit der in Abschnitt 3.3 eingeführten Metrik des $\mathbf{R}^2$ überein; man vergleiche dazu Abschnitt 3.4. Dieser besagt aber, daß die Begriffe „Stetigkeit", „gleichmäßige Stetigkeit", „Konvergenz", „Abgeschlossenheit bezüglich Limesbildung", „Folgenkompaktheit", „Cauchyfolge", „Vollständigkeit" für die beiden eingeführten Metriken von $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ übereinstimmen. Insbesondere ist $\mathbf{C}$ ein Banachraum. Weiterhin gilt: Eine Folge $(z_n)_{n \geq m}$ von $\mathbf{C}$ konvergiert genau dann, wenn die beiden Folgen $(\Re(z_n))_{n \geq m}$ und $(\Im(z_n))_{n \geq m}$ konvergieren.

Beispiel 2. Die Metrik des normierten Produktvektorraumes $E = \prod\limits_{k=1}^{n} E_k$ aus Beispiel 2 in Abschnitt 5.2 stimmt mit der Metrik überein, die wir nach Abschnitt 3.3 bei der Bildung des metrischen Produktraumes erhalten, wenn wir von den *metrischen* Räumen $E_1, \ldots, E_n$ ausgehen. Insbesondere konvergiert daher eine Folge $(v_i)_{i \geq m}$ des normierten Produktvektorraumes E genau dann, wenn die n Komponentenfolgen $(\mathrm{pr}_k(v_i))_{i \geq m}$ jeweils in E_k konvergieren.

Beispiel 3. Auf Beispiel 3 aus Abschnitt 5.2 können wir natürlich die Ergebnisse aus den vorangegangenen Beispielen anwenden, weswegen insbesondere $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{C}^n$ für alle $n \in \mathbf{N}_1$ Banachräume sind.

Beispiel 4. In Beispiel 4 aus Abschnitt 5.2 ist für alle $p \in M$ die Abbildung $\hat{p}\colon B(M, E) \to E, f \mapsto f(p)$ gleichmäßig stetig.

Für die erste Aussage der folgenden Proposition benötigen wir noch eine Definition:

Definition 3. Sind (E, d) und (E', d') zwei metrische Räume, so heißt eine Bijektion $f\colon E \to E'$ eine *Isometrie*, wenn gilt:

$$\forall p, q \in E\colon d'(f(p), f(q)) = d(p, q).$$

Proposition 2. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum.

(a) Die Konjugation $\mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto \overline{z}$ ist eine lineare Isometrie und somit eine gleichmäßig stetige Abbildung.

(b) Die Abbildungen $\|\cdot\| : E \to \mathbf{R}$ und $E \times E \to E, (v, w) \mapsto v + w$ sind gleichmäßig stetig. (Dies gilt natürlich insbesondere für $E = \mathbf{K}$.)

(c) Die Abbildung $\mathbf{K}^* \to \mathbf{K}, a \mapsto 1/a$ ist stetig.

Aufgabe 2. Seien E und F zwei normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume und $A \colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden drei Aussagen zueinander äquivalent:

(a) A ist in $0 \in E$ stetig.

(b) A ist gleichmäßig stetig.

(c) Es existiert eine Konstante $M \in [0, \infty[$, so daß

$$\forall v \in E \colon \ \|A(v)\| \leq M \cdot \|v\| . \tag{1}$$

Gilt (c), so ist $M := \sup\{\|A(v)\| \mid \|v\| = 1\}$ die kleinste Konstante, für welche die Abschätzung (1) gültig ist. Wir werden die Konstante M als *Operatornorm* von A kennenlernen.

Aufgabe 3. Ist E ein normierter Vektorraum und U ein Untervektorraum von E, so ist die abgeschlossene Hülle $\overline{U}$ ebenfalls ein Untervektorraum von E.

5.4 Produkte in normierten Vektorräumen

Festsetzung. Sind M, N und L irgendwelche Mengen und ist $f \colon M \times N \to L$ eine Abbildung, so definieren wir für jeden Punkt $p \in M$ die Abbildung

$$f_p := f(p, \cdot) \colon N \to L, q \mapsto f(p, q)$$

und für jeden Punkt $q \in N$ die Abbildung

$$f^q := f(\cdot, q) \colon M \to L, p \mapsto f(p, q).$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir leicht formulieren, was wir unter einer *bilinearen* Abbildung verstehen wollen:

Definition. Sind E, E' und F drei $\mathbf{K}$-Vektorräume, so heißt eine Abbildung

$$B\colon E \times E' \to F$$

bilinear, wenn für jedes $u \in E$ und jedes $v \in E'$ die Abbildungen $B_u\colon E' \to F$ und $B^v\colon E \to F$ linear sind.

Theorem. Seien E, E' und F normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume und $B\colon E \times E' \to F$ eine bilineare Abbildung. Dann sind die folgenden drei Aussagen zueinander äquivalent:

(a) B ist in $(0, 0) \in E \times E'$ stetig.

(b) B ist auf ganz $E \times E'$ stetig.

(c) Es existiert eine Konstante $M \in [0, \infty[$, so daß

$$\forall (u, v) \in E \times E'\colon\ \|B(u, v)\| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\|\,. \tag{1}$$

Beispiele. Sei E ein $\mathbf{K}$-Vektorraum. Die folgenden Abbildungen sind bilineare Abbildungen, welche die Bedingung (1) mit der Konstanten $M = 1$ erfüllen:

(a) das *normale Produkt* $\mathbf{K} \times \mathbf{K} \to \mathbf{K}, (a, b) \mapsto a \cdot b$,

(b) die *skalare Multiplikation* $\mathbf{K} \times E \to E, (a, v) \mapsto a \cdot v$,

(c) das *Skalarprodukt* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, (u, v) \mapsto \langle u, v\rangle := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k$ und

(d) das *Kreuzprodukt* $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (u, v) \mapsto u \times v := (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.

Dabei sind in den Beispielen (c) und (d) die Vektorräume $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{R}^3$ mit der euklidischen Norm zu versehen, damit die Konstante M tatsächlich als 1 gewählt werden kann. Daß dies im Falle (c) so ist, ist gerade die Aussage der *Cauchy–Schwarzschen Ungleichung.*

Später werden wir weitere wichtige bilineare Abbildungen kennenlernen.

Proposition 1. Seien E, E' und F normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume, sei $B\colon E \times E' \to F$ eine stetige bilineare Abbildung, seien M ein metrischer Raum, $p_0 \in M$, $a \in \mathbf{K}$, f, $g\colon M \to E$ und $h\colon M \to E'$ in p_0 stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g, \qquad a \cdot f, \qquad \|f\| \qquad \text{und} \qquad B(f, h) := B \circ (f, h)$$

in p_0 stetig. Insbesondere ist daher die Menge $C(M, E)$ der stetigen Funktionen $M \to E$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum. Dies gilt natürlich auch für $E = \mathbf{K}$. Im Falle von $E = \mathbf{C}$ ist auch $\overline{f}$ in p_0 stetig, und im Falle $E = \mathbf{K}$ und $f(p_0) \neq 0$ ist auch $1/f$ in p_0 stetig.

Korollar. Jede (komplexe) Polynomfunktion

$$P\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k,$$

wobei $n \in \mathbf{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ ist stetig, und daher sind auch alle (komplexen) rationalen Fuktionen, d. h. alle Funktionen, die sich als Quotient P/Q zweier komplexer Polynomfunktionen P und Q scheiben lassen, überall dort stetig, wo sie definiert sind. Infolge dessen gilt mutatis mutandis für komplexe Polynomfunktionen der Satz vom Koeffizientenvergleich aus Abschnitt 3.6; es ist deren Grad eindeutig definiert; es gilt der Satz über den euklidischen Divisionsalgorithmus, weswegen wir in Korollar 1 aus Abschnitt 3.6 bei Vorliegen einer Nullstelle $\alpha \in \mathbf{C}$ einer Polynomfunktion P den Linearfaktor $z - \alpha$ von P abspalten können; daher gilt auch Korollar 2 aus Abschnitt 3.6. Hier ist jedoch folgender wichtiger Satz hinzuzufügen:

Fundamentalsatz der Algebra. Jede komplexe Polynomfunktion P vom Grad $n \geq 1$ besitzt mindestens eine Nullstelle. Daher besitzt sie eine eindeutige Produktdarstellung der Form

$$P(z) = c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)$$

mit $c \in \mathbf{C}^*$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C}$.

Proposition 2. Seien E, E' und F normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume, sei $B\colon E \times E' \to F$ eine stetige bilineare Abbildung, seien $a \in \mathbf{K}$, $(u_n)_{n\geq m}$ und $(v_n)_{n\geq m}$ konvergente Folgen in E und $(w_n)_{n\geq m}$ eine konvergente Folge in E'. Es gelte:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u, \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = v \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} w_n = w.$$

Dann gilt auch

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) &= u + v, \\
\lim_{n\to\infty} (a \cdot v_n) &= a \cdot v, \\
\lim_{n\to\infty} B(v_n, w_n) &= B(v, w), \\
\lim_{n\to\infty} \|v_n\| &= \|v\|, \\
\lim_{n\to\infty} \overline{v_n} &= \overline{v} && \text{falls } E = \mathbf{C},
\end{aligned}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} (1/v_n) = 1/v \qquad \text{falls } E = \mathbf{K} \text{ und } v \neq 0.$$

Weiterhin gilt: Ist $(v_n)_{n\geq m}$ eine *Nullfolge* in E, d. h. $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ und $(w_n)_{n\geq m}$ eine beschränkte Folge in E', so ist auch $(B(v_n, w_n))_{n\geq m}$ eine Nullfolge in F.

5.5 Konvergenz von Folgen von Abbildungen

In diesem Abschnitt seien (E, d) ein metrischer Raum, M eine beliebige Menge, $(f_n)_{n\geq m}$ eine Folge von Abbildungen $f_n\colon M \to E$ und $f\colon M \to E$ eine weitere Abbildung.

Definition.

(a) Die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ konvergiert *punktweise* gegen f, wenn für jeden Punkt $p \in M$ die Punktfolge $(f_n(p))_{n\geq m}$ von E gegen $f(p)$ konvergiert, wenn also gilt:
$$\forall p \in M \,\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \,\exists n_0 \geq m \,\forall n \geq n_0\colon d(f_n(p), f(p)) < \varepsilon.$$

(b) Die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f, wenn gilt:
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \,\exists n_0 \geq m \,\forall n \geq n_0 \,\forall p \in M\colon d(f_n(p), f(p)) < \varepsilon.$$

Offensichtlich (?) impliziert gleichmäßige Konvergenz punktweise Konvergenz.

1. Vererbungssatz. Ist M ein metrischer Raum, ist $p_0 \in M$, sind alle Abbildungen f_n in p_0 stetig und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ gleichmäßig gegen f, so ist auch f in p_0 stetig.

Aufgabe. Seien M eine Menge, E und E' metrische Räume, $(f_n)_{n\geq m}$ eine Folge von Abbildungen $f_n\colon M \to E$, $f\colon M \to E$ eine weitere Abbildung und $g\colon E \to E'$ eine stetige Abbildung. Dann gilt:

(a) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ punktweise gegen f, so konvergiert auch die Folge $(g \circ f_n)_{n\geq m}$ punktweise gegen $g \circ f$.

(b) Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ gleichmäßig gegen f und ist g sogar gleichmäßig stetig, so konvergiert auch die Folge $(g \circ f_n)_{n\geq m}$ gleichmäßig gegen $g \circ f$.

(c) Ist E das Produkt metrischer Räume $E_1, \ldots, E_N$, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq m}$ genau dann punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen f, wenn für jedes $k = 1, \ldots, N$ die Folge $(\mathrm{pr}_k \circ f_n)_{n\geq m}$ punktweise (bzw. gleichmäßig) gegen $\mathrm{pr}_k \circ f$ konvergiert.

5.6 Der normierte Raum $B(M, E)$

In diesem Abschnitt seien M eine nicht leere Menge und E ein normierter **K**-Vektorraum. Wir bezeichnen wie in Beispiel 4 aus Abschnitt 5.2 mit $B(M, E)$ den normierten **K**-Vektorraum der beschränkten Funktionen $f\colon M \to E$.

Theorem 1. Eine Folge $(f_n)_{n\geq m}$ von $B(M,E)$ konvergiert genau dann bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ gegen ein $f \in B(M,E)$, wenn die Folge gleichmäßig gegen f konvergiert.

Theorem 2. Ist E ein Banachraum, so ist auch $B(M,E)$ ein Banachraum.

Korollar. Für jede nicht leere Menge M und jedes $n \in \mathbf{N}_1$ sind $B(M,\mathbf{R}^n)$ und $B(M,\mathbf{C}^n)$ Banachräume über $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$. Hat M unendlich viele Punkte, so sind diese Banachräume unendlich-dimensional.

5.7 Der Vektorraum $C(K,E)$

Theorem. Sei K ein folgenkompakter metrischer Raum, und sei E ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum. Dann ist die Menge $C(K,E)$ der stetigen Funktionen $f\colon K \to E$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $B(K,E)$. Ist E ein Banachraum, so ist daher auch $C(K,E)$ ein $\mathbf{K}$-Banachraum. Insbesondere sind $C(K,\mathbf{R}^n)$ und $C(K,\mathbf{C}^n)$ für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ Banachräume über $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$.

Kommentar. Mit einer genaueren Untersuchung von Funktionenräumen — wie den Räumen $B(M,E)$ und $C(K,E)$ — beschäftigt sich die *Funktionalanalysis*. Die dort gewonnenen Erkenntnisse sind z. B. für die Behandlung partieller Differentialgleichungen und für den Aufbau der Quantenphysik von grundlegender Bedeutung.

5.8 Der Begriff der unendlichen Reihe

In diesem Abschnitt sei $(v_n)_{n\geq m}$ eine Folge in einem normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum E.

Definition.

(a) Für jedes $n \geq m$ definieren wir $s_n := \sum\limits_{k=m}^{n} v_k$. Die Folge $(s_n)_{n\geq m}$ heißt die *unendliche Reihe* zur Folge $(v_n)_{n\geq m}$; sie wird mit $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ bezeichnet. Der Vektor s_n heißt die n-te *Partialsumme* dieser unendlichen Reihe.

(b) Anstatt zu sagen, daß die Folge $(s_n)_{n\geq m}$ der Partialsummen gegen einen Vektor $v \in E$ konvergiert, sagen wir, daß die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ gegen v konvergiert; anstatt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = v$ schreiben wir dann $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k = v$. Ist $E = \mathbf{R}$, so sind wie bei der Konvergenz reeller Zahlenfolgen auch für Reihen die Grenzwerte ∞ und $-\infty$ zugelassen. Divergiert die Folge $(s_n)_{n\geq m}$, so sprechen wir natürlich auch von der Divergenz der Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$.

Proposition (Ein notwendiges Konvergenzkriterium)**.** Falls die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ im normierten $\mathbf{K}$-Vektorraum E konvergiert, so ist $(v_n)_{n\geq m}$ eine Nullfolge.

Diese Aussage kann nicht umgekehrt werden, wie z. B. die harmonische Reihe weiter unten zeigt.

Beispiel 1. Ist $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ auf jeden Fall in $\widehat{\mathbf{R}}$, wobei natürlich der Grenzwert ∞ sein kann.

Beispiel 2 (Die geometrische Reihe)**.** Ist $z \in \mathbf{C}$, so konvergiert die *geometrische* Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

für $|z| < 1$, und zwar gegen $1/(1-z)$, und divergiert in $\mathbf{C}$ für $|z| \geq 1$; hingegen konvergiert die Reihe für reelle $z \geq 1$ in $\widehat{\mathbf{R}}$, nämlich gegen ∞.

Beispiel 3 (Die Dirichletsche Reihe zur Riemannschen Zeta-Funktion)**.** Für jedes $s \in \mathbf{N}_1$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ in $\widehat{\mathbf{R}}$ gegen ein $\zeta(s) \in \widehat{\mathbf{R}}$. Es ist

$$\zeta(1) = \infty \qquad \text{und} \qquad \forall s \in \mathbf{N}_2 \colon \Big(\zeta(s) \in \left]1,2\right] \wedge \zeta(s+1) \leq \zeta(s) - (1/2)^{s+1}\Big).$$

Für gerade s sind die Werte $\zeta(s)$ bekannte rationale Vielfache von π^s, so ist zum Beispiel

$$\zeta(2) = \pi^2/6, \quad \zeta(4) = \pi^4/90, \quad \zeta(6) = \pi^6/945 \quad \text{und} \quad \zeta(12) = 691\pi^{12}/638\,512\,875.$$

Über die Werte zu ungeradem s ist viel weniger bekannt. So hat R. Apéry in den Jahren 1978/79 bewiesen, daß $\zeta(3)$ irrational ist. Außerdem ist seitdem bewiesen worden, daß unendlich viele Werte der Form $\zeta(s)$ mit s ungerade irrational sein müssen.

Für $s = 1$ heißt die fragliche Reihe die *harmonische* Reihe.

Aufgabe (Cauchysches Verdichtungslemma)**.** Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Folge nicht negativer reeller Zahlen, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann in $\mathbf{R}$, wenn die „verdichtete" Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ in $\mathbf{R}$ konvergiert.

5.9 Alternierende Reihen

Das Leibnizsche Konvergenzkriterium. Ist $(a_n)_{n\geq m}$ eine monoton fallende Nullfolge nicht negativer reeller Zahlen, so konvergiert die *alternierende* Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$$

gegen eine reelle Zahl.

Beispiel (Die alternierende harmonische Reihe)**.** Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ konvergiert in $\mathbf{R}$, und zwar gegen $-\ln(2)$.

5.10 Rechnen mit Reihen

Proposition. Seien E und F normierte $\mathbf{K}$-Vektorräume, und seien $A\colon E \to F$ eine stetige lineare Abbildung, $a \in \mathbf{K}$ und $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ und $\sum\limits_{k=m}^{\infty} w_k$ zwei konvergente Reihen in E, und zwar gelte

$$\sum_{k=m}^{\infty} v_k = v \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=m}^{\infty} w_k = w.$$

Dann gilt auch

$$\sum_{k=m}^{\infty}(v_k + w_k) = v + w, \qquad \sum_{k=m}^{\infty} a \cdot v_k = a \cdot v, \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=m}^{\infty} A(v_k) = A(v).$$

Ist $E = \mathbf{R}$ und gilt $v_k \leq w_k$ für alle $k \geq m$, so gilt auch $v \leq w$. Die letzte Aussage bleibt auch richtig, wenn $v \in \{-\infty, \infty\}$ oder $w \in \{-\infty, \infty\}$.

5.11 Absolute Konvergenz

Es seien E ein normierter $\mathbf{K}$-Vektorraum und $(v_n)_{n\geq m}$ eine Folge in E.

Das Konvergenzkriterium von Cauchy für Reihen. Ist E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists n_0 \geq m \, \forall n \geq n_0 \, \forall i \in \mathbf{N}_0\colon \left\| \sum_{k=n}^{n+i} v_k \right\| < \varepsilon,$$

Definition. Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ heißt *absolut* konvergent, wenn die reelle Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \|v_k\|$ in $\mathbf{R}$ konvergiert.

Theorem 1. Ein normierter Vektorraum ist genau dann ein Banachraum, wenn in ihm jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

In Banachräumen können wir aufgrund dieses Satzes auf die Konvergenz unendlicher Reihen aus der Konvergenz geeigneter reeller Reihen mit nicht negativen Gliedern schließen. Daher hat das folgende Theorem ein weites Anwendungsfeld:

Theorem 2. Ist $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, so konvergiert die Folge $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ in $\mathbf{R}$, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

Majorantenkriterium. Es existiert eine Folge $(b_n)_{n\geq m}$ nicht negativer reeller Zahlen b_n und ein $n_0 \geq m$, so daß gilt:

$$\Big(\forall k \geq n_0\colon a_k \leq b_k\Big) \wedge \sum_{k=m}^{\infty} b_k < \infty.$$

Quotientenkriterium. Es existiert ein $n_0 \geq m$ und ein $q \in \,]0,1[$, so daß gilt:

$$\forall n \geq n_0\colon \left(a_n \neq 0 \wedge \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\right).$$

Wurzelkriterium. Es existiert $n_0 \geq \max\{2, m\}$ und ein $q \in \,]0,1[$, so daß gilt:

$$\forall n \geq n_0\colon \sqrt[n]{a_n} \leq q.$$

Kommentar. Zum Nachweis der Bedingung des Quotienten- oder Wurzelkriteriums ist unter Umständen die folgende Aussage nützlich: Ist $(c_n)_{n\geq m}$ eine reelle Zahlenfolge mit $c := \limsup\limits_{n\to\infty} c_n < 1$, so existiert zu jeder Zahl $q \in \,]c,1[$ ein $n_0 \geq m$, so daß gilt:

$$\forall n \geq n_0\colon c_n \leq q.$$

Beispiele.

(a) Ist $(v_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge in einem Banachraum und $s \in \mathbf{N}_2$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-s} \cdot v_k$.

(b) Für jedes $z \in \mathbf{C}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n$; ihr Grenzwert wird mit e^z oder $\exp(z)$ bezeichnet. Die Funktion

$$\exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto e^z$$

heißt die *Exponentialfunktion* zur Basis $e := \exp(1)$, der sogenannten *Eulerschen Zahl.*

Aufgabe. Man zeige: Die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ eines normierten Vektorraumes E konvergiert sicherlich nicht, wenn für die Folge der reellen Zahlen $a_n := \|v_n\|$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) Es existiert ein $n_0 \geq m$, so daß $\forall n \geq n_0\colon (a_n \neq 0 \wedge a_{n+1}/a_n \geq 1)$.

(b) Für unendlich viele $n \geq \max\{2, m\}$ gilt $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$.

5.12 Der Umordnungssatz

Theorem. Sei $\sigma\colon \mathbf{N}_m \to \mathbf{N}_m$ eine Bijektion.

(a) Ist $(a_n)_{n \geq m}$ eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, so konvergieren die beiden Reihen $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ in $\widehat{\mathbf{R}}$ gegen denselben Grenzwert.

(b) Ist E ein $\mathbf{K}$-Banachraum und ist $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_k$ eine absolut konvergente Reihe, so konvergiert auch die *umgeordnete* Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} v_{\sigma(k)}$ absolut, und es gilt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} v_{\sigma(k)} = \sum_{k=m}^{\infty} v_k.$$

Kommentar. Ist $(a_n)_{n \geq m}$ eine reelle Zahlenfolge, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ in $\mathbf{R}$, ist diese Reihe aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jedem $a \in \widehat{\mathbf{R}}$ eine Bijektion $\sigma\colon \mathbf{N}_m \to \mathbf{N}_m$, so daß die umgeordnete Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ gegen a konvergiert. Das ist die Aussage des *Riemannschen Umordnungssatzes* (zu finden etwa in Harro Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*). Durch derartige Umordnungen lassen sich auch divergente Reihen erzeugen. Ein Beispiel für eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe ist offenbar die alternierende harmonische Reihe.

Das Problem der Umordnung von Reihen bzw. der „Anordnung“ von Reihen entsteht ganz natürlich bei der Multiplikation von Reihen, die in dem nächsten Abschnitt behandelt wird.

5.13 Produkte von Reihen

Seien E, E' und F drei $\mathbf{K}$-Banachräume, und sei $B\colon E \times E' \to F$ eine stetige bilineare Abbildung (vgl. Abschnitt 5.4). Seien $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ zwei unendliche Reihen in E bzw. E'.

Definition. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ mit

$$w_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} B(u_k, v_{n-k})$$

heißt das *Cauchy-Produkt* der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ bezüglich des „Produktes“ B.

Es seien jetzt $u \in E$ und $v \in E'$ und gelte $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = u$ und $\sum_{k=0}^{\infty} v_k = v$.

Theorem 1. Sind die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ absolut konvergent, so konvergiert für jede „Abzählung“, d. h. Bijektion, $\mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0, n \mapsto (i_n, k_n)$ die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} B(u_{i_n}, v_{k_n})$ gegen $B(u, v)$.

Theorem 2. Ist mindestens eine der beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ absolut konvergent, so konvergiert das Cauchy-Produkt dieser beiden Reihen gegen $B(u, v)$.

Kommentar. Die Theoreme bleiben richtig, wenn im Falle $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ für B ein Hermitesches Produkt eingesetzt wird.

5.14 Die Dezimaldarstellung reeller Zahlen

Aufgabe. Man zeige:

(a) Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zahlen $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so konvergiert die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

gegen eine reelle Zahl $a \in [0, 1]$. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ nennen wir eine *Dezimaldarstellung* von a.

(b) Jede reelle Zahl $a \in [0,1]$ besitzt eine Dezimaldarstellung $(a_n)_{n\geq 1}$. Für $a \neq 1$ kann sie mittels der *Gauß-Klammer* $\lfloor t \rfloor := \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq t\}$ für $t \in \mathbf{R}$ rekursiv definiert werden:

$$a_1 := \lfloor 10 \cdot a \rfloor \qquad \text{und} \qquad \forall n \in \mathbf{N}_1 \colon a_{n+1} := \left\lfloor 10^{n+1} \cdot \Big(a - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 10^{-k}\Big) \right\rfloor.$$

(c) Jedes $a \in [0,1[$ besitzt höchstens zwei Dezimaldarstellungen: Ist $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Dezimaldarstellung von a, die von der in (b) angegebenen abweicht, so existiert genau ein $m \in \mathbf{N}_1$, so daß

(i) $\forall n < m \colon a_n = b_n$,

(ii) $a_m = b_m + 1$,

(iii) $\forall n > m \colon \big(a_n = 0 \wedge b_n = 9\big)$.

Insbesondere ist die Dezimaldarstellung irrationaler Zahlen $a \in]0,1[$ eindeutig.

(d) Besitzt $a \in [0,1]$ eine *periodische* Dezimaldarstellung $(a_n)_{n\geq 1}$, d. h. gilt

$$\exists p \in \mathbf{N}_1 \, \forall n \in \mathbf{N}_1 \colon a_{n+p} = a_n,$$

so ist $a \in \mathbf{Q}$.

Kapitel 6

Erster Teil der Differentialrechnung in einer Veränderlichen

6.1 Offene Teilmengen eines metrischen Raumes

Es sei E ein metrischer Raum.

Definition. Eine Teilmenge $G \in \mathfrak{P}(E)$ heißt *offen* (in E), wenn zu jedem Punkt $p \in G$ ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq G$ existiert.

Beispiel. In jedem metrischen Raum sind die ε-Umgebungen offen. Die „offenen" Intervalle $]a, b[$ mit $\infty \leq a \leq b \leq \infty$ sind in dem Sinne dieser Definition offene Teilmengen des metrischen Raumes $\mathbf{R}$.

Aufgabe. Man zeige:

(a) E und $\emptyset$ sind offene Teilmengen von E.

(b) Für jede Familie $(G_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen G_i von E ist auch die Vereinigung $\bigcup_i G_i$ eine offene Teilmenge von E.

(c) Für je endlich viele offene Teilmengen $G_1, \ldots, G_n$ von E ist auch der Durchschnitt $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ eine offene Teilmenge von E.

(d) Für jede Teilmenge G von E gilt:

$$G \text{ ist offen in } E \iff E \setminus G \text{ ist abgeschlossen in } E.$$

6.2 Häufungspunkte von Teilmengen

Definition. Es seien E ein metrischer Raum, $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge und $p_0 \in E$.

(a) Sei $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$. Die *gelochte* ε-Umgebung von p_0 ist

$$\dot{U}_\varepsilon(p_0) \coloneqq U_\varepsilon(p_0) \setminus \{p_0\}.$$

(b) Der Punkt p_0 heißt ein *Häufungspunkt* der Teilmenge M, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon \dot{U}_\varepsilon(p_0) \cap M \neq \emptyset.$$

(c) Der Punkt p_0 heißt ein *isolierter* Punkt der Teilmenge M, wenn $p_0 \in M$ und

$$\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon \dot{U}_\varepsilon(p_0) \cap M = \emptyset.$$

Beispiele. (a) Ist G eine nicht leere offene Teilmenge eines normierten Vektorraumes $E \neq \{0\}$ (z. B. $E = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$), so ist jeder Punkt von $\overline{G}$ ein Häufungspunkt von G.

(b) Ist $M = \bigcup_k I_k$ die Vereinigung einer Familie *nicht entarteter* Intervalle I_k von $\mathbf{R}$ (d. h. $\inf I_k < \sup I_k$), so ist jeder Punkt von M ein Häufungspunkt von M.

Kommentar. Die Mengen $M \subseteq \mathbf{R}$ des letzten Beispieles und die offenen Mengen $G \subseteq \mathbf{C}$ sind die natürlichen Definitionsbereiche der Funktionen, die wir auf Differenzierbarkeit untersuchen.

Aufgabe. Es seien E ein metrischer Raum, $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine Teilmenge und $p_0 \in E$. Man zeige:

(a) Ist p_0 ein Häufungspunkt von M, so ist p_0 auch ein Häufungspunkt einer jeden Teilmenge $N \in \mathfrak{P}(E)$ mit $N \supseteq M$.

(b) Es gibt metrische Räume E jeder Mächtigkeit, so daß jeder Punkt von E ein isolierter Punkt von E ist.

6.3 Grenzwerte von Abbildungen

Seien E und E' metrische Räume, $M \in \mathfrak{P}(E)$ eine nicht leere Teilmenge, $p_0 \in E$, $q \in E'$ und $f \colon M \to E'$ eine Abbildung.

Definition. Wir sagen, die Abbildung f *konvergiert* in p_0 gegen q (oder q ist der *Grenzwert* von f in p_0), wenn p_0 ein Häufungspunkt von M ist und

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \colon f(\dot{U}_\delta(p_0) \cap M) \subseteq U_\varepsilon(q).$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{p_0} f = \lim_{p \to p_0} f(p) = q.$$

Proposition. Gilt $\lim_{p_0} f = q_1$ und $\lim_{p_o} f = q_2$, so folgt $q_1 = q_2$.

Theorem. Ist p_0 ein Häufungspunkt von M, so gilt: Die Abbildung f konvergiert in p_0 genau dann gegen q, wenn die Abbildung

$$h \colon M \cup \{p_0\} \to E', p \mapsto \begin{cases} f(p) & \text{für } p \neq p_0, \\ q & \text{für } p = p_0 \end{cases}$$

in p_0 stetig ist. Ist $p_0 \in M$, so ist f daher genau dann stetig in p_0, wenn gilt $\lim_{p_0} f = f(p_0)$.

Aufgabe. Ist p_0 ein Häufungspunkt einer Teilmenge $A \in \mathfrak{P}(M)$ (vgl. Aufgabenteil (a) aus 6.2), und ist $\lim_{p_0} f = q$, so gilt auch $\lim_{p_0}(f|A) = q$.

Festsetzung. Wenn jeweils nichts anderes gesagt ist, gelte für den Rest des Kapitels: Sei $\mathbf{K}$ einer der Körper $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, sei E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, sei $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{K})$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathbf{K}$, sei $f \colon D \to E$ eine Funktion und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D.

6.4 Differenzierbarkeit

Definition. Eine Funktion $f \colon D \to E$ heißt in a *differenzierbar*, wenn a ein Häufungspunkt von D ist und die Funktion

$$D \setminus \{a\} \to E, t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

in a gegen einen Vektor aus E konvergiert. Im Falle der Differenzierbarkeit wird dieser Vektor die *Ableitung* von f in a genannt und mit $f'(a)$ bezeichnet. Deuten wir f als „Kurve“, so wird $f'(a)$ auch der *Geschwindigkeitsvektor* oder der *Tangentenvektor* an die Kurve zum Zeitpunkt a genannt.

Ist D' die Menge aller Punkte von D, in denen f differenzierbar ist, so heißt die Funktion $f' \colon D' \to E, t \mapsto f'(t)$ die *Ableitung* von f. Ist $D' = D$, so sagen wir, daß f eine (auf ganz D) differenzierbare Funktion ist. Ist die Ableitung $f' \colon D \to E$ auch noch stetig, so heißt f *stetig differenzierbar*. Im Falle $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ heißen die auf offenen Mengen definierten, differenzierbaren Funktionen *holomorphe* Funktionen.

Den Begriff „holomorph“ sollte der Leser durch „von einheitlicher Gestalt“ oder „aus einem Guß“ übersetzen. Holomorphe Funktionen besitzen sehr schöne Eigenschaften. Ihrem ausführlichen Studium widmet sich die Funktionentheorie.

Beispiele.

(a) Ist f eine konstante Funktion, so ist sie überall differenzierbar mit Ableitung $f' = 0$.

(b) Für jedes $n \in \mathbf{N}_1$ ist die Funktion $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto z^n$ holomorph, und ihre Ableitung ist

$$f'\colon z \mapsto n \cdot z^{n-1}.$$

(c) Die Funktion $f\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}, z \mapsto 1/z$ ist holomorph, und ihre Ableitung ist

$$f'\colon z \mapsto -\frac{1}{z^2}.$$

(d) Die Funktionen $|x|$ und $\sqrt{}$ sind in 0 nicht differenzierbar.

Proposition. Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbf{C}$ mit $D \coloneqq G \cap \mathbf{R} \neq \emptyset$, und sei $f\colon G \to E$ eine holomorphe Funktion mit Werten in einem $\mathbf{C}$-Banachraum E. Betrachten wir E dann als Banachraum über $\mathbf{R}$, indem wir den Skalarbereich einschränken, so ist die Einschränkung $f|D\colon D \to E$ eine differenzierbare Funktion und $(f|D)' = f'|D$.

Korollar. Die Funktionen $x^n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ für $n \in \mathbf{N}_1$ und $1/x\colon \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ sind differenzierbar.

6.5 Was bedeutet Differenzierbarkeit?

Theorem. Ist $a \in D$ ein Häufungspunkt von D, so ist die Funktion $f\colon D \to E$ genau dann in a differenzierbar, wenn es eine in a stetige Funktion $h\colon D \to E$ gibt, so daß gilt:

$$\forall t \in D\colon f(t) = f(a) + h(t) \cdot (t - a).$$

Im Falle der Differenzierbarkeit gilt notwendigerweise

$$\forall t \in D\colon h(t) = \begin{cases} (f(t) - f(a))/(t - a) & \text{für } t \neq a, \\ f'(a) & \text{für } t = a; \end{cases}$$

setzen wir $m \coloneqq f'(a) \in E$ und $R \coloneqq h - m\colon D \to E$, so erhalten wir

$$\forall t \in D\colon f(t) = f(a) + m \cdot (t - a) + R(t) \cdot (t - a).$$

Wir nennen $f(a)+m\cdot(t-a)$ die *affine Approximation* an f in a und $R(t)\cdot(t-a)$ das zugehörige *Restglied*. Da R eine in a stetige Funktion mit $R'(a)=0$ ist, sagen wir auch, das Restglied konvergiere (mindestens) von zweiter Ordnung gegen 0 in a.

Korollar. Ist f in a differenzierbar, so ist f in a auch stetig.

Diesen Abschnitt schließen wir mit der Bemerkung, daß Differenzierbarkeit eine *lokale* Eigenschaft ist:

Proposition. Es seien $f\colon D\to E$ und $r\in\mathbf{R}_+$ gegeben. Die Funktion f ist genau dann in a differenzierbar, wenn $f|(D\cap U_r(a))$ in a differenzierbar ist.

6.6 Kettenregel

Theorem. Seien D und $\tilde{D}$ Teilmengen von $\mathbf{K}$, und seien Funktionen $f\colon D\to E$ und $g\colon\tilde{D}\to\mathbf{K}$ gegeben. Es sei $a\in g^{-1}(D)$ ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches $g^{-1}(D)$ der Komposition $f\circ g$. Dann gilt: Ist g in a und ist f in $g(a)$ differenzierbar, so ist auch $f\circ g$ in a differenzierbar und

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Korollar. Ist $f\colon D\to\mathbf{K}$ in a differenzierbar und ist $f(a)\neq 0$, so ist auch $1/f$ in a differenzierbar und

$$(1/f)'(a)=-f'(a)/f^2(a).$$

6.7 Elementare Operationen mit differenzierbaren Funktionen

Linearität. Seien $f\colon D\to E$ und $g\colon D\to E$ in a differenzierbare Funktionen, und sei $c\in\mathbf{K}$. Dann sind auch die Funktionen $f+g$ und $c\cdot f$ in a differenzierbar, und es ist

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)\qquad\text{und}\qquad(c\cdot f)'(a)=c\cdot f'(a).$$

Vertauschbarkeit von Differentiation und linearen Operatoren. Seien E, F Banachräume und $A\colon E\to F$ eine stetige lineare Abbildung. Ist $f\colon D\to E$ in $a\in D$ differenzierbar, so ist ebenfalls $A\circ f$ in a differenzierbar und es gilt $(A\circ f)'(a)=A(f'(a))$.

Differenzierbarkeit von Abbildungen in einen Produkvektorraum. Sind $E_1, \ldots, E_n$ Banachräume und ist $E \coloneqq \prod_{k=1}^{n} E_k$ der Produktbanachraum, so ist eine Funktion $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon D \to E$ genau dann in einem Punkt a differenzierbar, wenn jede der Komponentenfunktionen $f_k\colon D \to E_k$ in a differenzierbar ist. Im Falle der Differenzierbarkeit ist

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_n'(a)).$$

Insbesondere wissen wir also, wie wir Funktionen $f\colon D \to \mathbf{K}^n$ zu differenzieren haben.

Produktregel. Es seien E, E' und F Banachräume und $B\colon E \times E' \to F$ eine stetige, bilineare Abbildung (vgl. Abschnitt 5.4). Sind dann $f\colon D \to E$ und $g\colon D \to E'$ in $a \in D$ differenzierbare Funktionen, so ist auch deren „Produkt“

$$B(f, g)\colon D \to F, t \mapsto B(f(t), g(t))$$

eine in a differenzierbare Funktion, und es ist

$$B(f, g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

Quotientenregel. Sind $f\colon D \to E$ und $g\colon D \to \mathbf{K}$ in a differenzierbare Funktionen und ist $g(a) \neq 0$, so ist auch der Quotient

$$\frac{f}{g} \coloneqq \frac{1}{g} \cdot f$$

eine in a differenzierbare Funktion, und es ist

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - g'(a) \cdot f(a)}{g^2(a)}.$$

Korollar. Die (komplexen) rationalen Funktionen (vgl. Abschnitt 5.4) sind auf ihrem Definitionsbereich holomorphe Funktionen, und ihre Ableitungen sind wieder rationale Funktionen. Insbesondere gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k\right)' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot a_{k+1} \cdot z^k.$$

6.8 Lokale Extrema

Definition. Sind E ein metrischer Raum, $f\colon E \to \mathbf{R}$ eine Funktion und $p_0 \in E$, so definieren wir:

(a) f besitzt in p_0 ein *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn

$$\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon f(p_0) = \max(f(U_\varepsilon(p_0))) \quad (\text{bzw. } \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon f(p_0) = \min(f(U_\varepsilon(p_0)))).$$

Gilt zusätzlich $\forall p \in \dot{U}_\varepsilon(p_0) \colon f(p) \neq f(p_0)$ für ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, so sprechen wir von einem *strengen* lokalen Maximum (bzw. Minimum).

(b) Ein (strenges) lokales *Extremum* ist ein (strenges) lokales Maximum oder Minimum. Ein (lokales) Extremum einer reellen Funktion f ist ein Funktionswert von f, nicht die Stelle, in welcher dieser Funktionswert angenommen wird.

Ein notwendiges Kriterium. Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ eine Teilmenge, $f \colon D \to \mathbf{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein *innerer Punkt* von D, d. h. $\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+ \colon U_\varepsilon(a) \subseteq D$. Besitzt dann f in a ein lokales Extremum und ist f in a differenzierbar, so ist $f'(a) = 0$.

Kommentar. (a) Aus $f'(a) = 0$ folgt noch nicht notwendigerweise die Existenz eines lokalen Extremums in a. Zum Beispiel gilt $f'(0) = 0$ für $f = x^3$, obwohl diese Funktion in 0 kein lokales Extremum besitzt.

(b) Das Kriterium kann tatsächlich nur in inneren Punkten von D angewendet werden; in „Randpunkten“ von D kann ein lokales Extremum vorliegen, ohne daß dort die Ableitung der Funktion verschwindet.

6.9 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Theorem (Mittelwertsatz)**.** Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$, a, $b \in D$, $a < b$ und $[a, b] \subseteq D$. Dann existiert für jede auf $[a, b]$ stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion $f \colon D \to \mathbf{R}$ ein $t_0 \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(t_0).$$

Der Satz besagt offensichtlich, daß unter den formulierten Voraussetzungen die Steigung der „Sekanten“ (d. h. der Geraden) durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ (die linke Seite der Gleichung) mit der Steigung der Tangenten an den Graphen von f in einem geeigneten Punkt $(t_0, f(t_0))$ mit $a < t_0 < b$ (die rechte Seite der Gleichung) übereinstimmt.

Als Spezialfall des Mittelwertsatzes erhalten wir offenbar:

Satz von Rolle. Gilt unter den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes zusätzlich $f(a) = f(b)$, so ist $f'(t_0) = 0$ für ein geeignetes $t_0 \in]a, b[$.

Warnung. Im Mittelwertsatz dürfen wir den Wertebereich $\mathbf{R}$ nicht durch einen $\mathbf{R}$-Banachraum E mit $\dim E > 1$ ersetzen. In diesem Falle existieren nämlich differenzierbare Funktionen $f\colon [a,b] \to E$ mit $f(a) = f(b)$ (d. h. f parametrisiert eine geschlossene Kurve in E) mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Das einfachste Beispiel hierfür ist die Kreisparametrisierung

$$f\colon [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t)).$$

6.10 Über das globale Verhalten differenzierbarer Funktionen

Theorem 1. Sei $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall von $\mathbf{R}$, und sei I° das offene Intervall $]\inf(I), \sup(I)[$. Für eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbf{R}$, die auf I° differenzierbar ist, gelten dann die folgenden Äquivalenzen und Implikationen:

(a) $(\forall t \in I^\circ\colon f'(t) = 0) \iff f$ ist konstant.

(b) $(\forall t \in I^\circ\colon f'(t) \geq 0) \iff f$ ist monoton wachsend.

(c) $(\forall t \in I^\circ\colon f'(t) \leq 0) \iff f$ ist monoton fallend.

(d) $(\forall t \in I^\circ\colon f'(t) > 0) \implies f$ ist streng monoton wachsend.

(e) $(\forall t \in I^\circ\colon f'(t) < 0) \implies f$ ist streng monoton fallend.

(f) $(\forall t \in I^\circ\colon f'(t) \neq 0) \implies f$ ist streng monoton (wachsend oder fallend).

Der Zwischenwertsatz von Darboux für Ableitungen. Sind a, $b \in \mathbf{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$ und ist $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion, so existiert zu jedem zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ liegenden Wert m (d. h. $f'(a) < m < f'(b)$) ein $t_0 \in]a,b[$ mit $f'(t_0) = m$.

Kommentar. Aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist der Zwischenwertsatz von Darboux eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen Zwischenwertsatzes.

6.11 Das Kriterium für strenge absolute Extrema

Theorem. Sei $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall, und sei $I^\circ :=]\inf(I), \sup(I)[$. Weiterhin sei $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine auf I stetige und auf I° differenzierbare Funktion, für deren Ableitung gelte:

(a) f' hat in I° genau eine Nullstelle; diese bezeichnen wir mit a.

(b) Es existieren Stellen t_1, $t_2 \in I^\circ$ mit $f'(t_1) < 0 < f'(t_2)$.

Dann trifft genau einer der beiden folgenden Fälle zu:

(a) Es ist $t_1 < a < t_2$. In diesem Falle hat f in a ein *strenges absolutes Minimum*, d. h.:
$$\forall t \in I \setminus \{a\} \colon f(t) > f(a).$$

(b) Es ist $t_2 < a < t_1$. In diesem Falle hat f in a ein *strenges absolutes Maximum*, d. h.:
$$\forall t \in I \setminus \{a\} \colon f(t) < f(a).$$

6.12 Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

Theorem. Es seien $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine streng monotone Funktion mit Umkehrfunktion $\check{f}\colon f(I) \to \mathbf{R}$. Weiterhin sei $a \in I$ und $b \coloneqq f(a)$. Ist dann f in a differenzierbar und ist $f'(a) \neq 0$, so ist $\check{f}$ in b differenzierbar, und es gilt:
$$\check{f}'(b) = 1/f'(a).$$

Kommentar. Über die Umkehrbarkeit holomorpher Funktionen $f\colon G \to \mathbf{C}$ läßt sich folgendes sagen: In der Funktionentheorie wird gezeigt, daß holomorphe Funktionen beliebig oft differenzierbar sind. Insbesondere ist daher f stetig differenzierbar. Nach dem „lokalen Umkehrsatz“ der mehrdimensionalen Analysis folgt dann: Ist $f'(a) \neq 0$ für ein $a \in G$, so existiert eine Umgebung $U_\varepsilon(a) \subseteq G$, so daß $U \coloneqq f(U_\varepsilon(a))$ eine offene Teilmenge von $\mathbf{C}$ ist, und daß die Abbildung $f|U_\varepsilon(a)\colon U_\varepsilon(a) \to U$ eine stetige Umkehrung $\check{f}$ besitzt. Mit denselben Überlegungen wie im reellen Fall können wir dann auch hier die Differenzierbarkeit von $\check{f}$ in $b \coloneqq f(a)$ und die Formel $\check{f}'(b) = 1/f'(a)$ folgern.

Beispiel. Für jedes $n \in \mathbf{N}_2$ ist $\sqrt[n]{}$ außerhalb von 0 differenzierbar, und es gilt
$$\sqrt[n]{}' = \frac{1}{n} \cdot (x^{1-n} \circ \sqrt[n]{}).$$

6.13 Anziehende und abstoßende Fixpunkte

Seien (E, d) ein metrischer Raum, D eine nicht leere Teilmenge von E, $f\colon D \to E$ eine Abbildung und p^* ein Fixpunkt von f.

Definition.

(a) Der Punkt p^* heißt ein *anziehender* Fixpunkt oder ein *Attraktor* von f, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ gibt, so daß für alle $p \in \dot{U}_\varepsilon(p^*)$ gilt:

 (i) $d(f(p), p*) < d(p, p*)$, und

 (ii) die Banachfolge bezüglich f mit Startpunkt p (die ja wegen (i) existiert) konvergiert gegen p^*.

(b) Der Punkt p^* heißt ein *abstoßender* Fixpunkt oder ein *Repeller* von f, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ gibt, so daß für alle $p \in \dot{U}_\varepsilon(p^*)$ gilt:

$$d(f(p), p*) > d(p, p*).$$

Kommentar. In der Theorie dynamischer Systeme auf topologischen Räumen muß ein allgemeinerer Begriff von anziehenden und abstoßenden Fixpunkten eingeführt werden, weil dort keine Metriken zur Verfügung stehen. Für die meisten Zwecke reicht aber unsere „einfache“ Definition aus.

Aufgabe. Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{K})$ ein nicht leere offene Teilmenge von $\mathbf{K}$ und $f\colon D \to \mathbf{K}$ eine in $a \in D$ differenzierbare Funktion. Wir setzen voraus, daß a ein Fixpunkt von f ist, und definieren $q \coloneqq (1 + |f'(a)|)/2$. Zeige:

(a) Ist $f'(a) \neq 1$, so ist a ein *isolierter Fixpunkt*, d. h. a ist ein isolierter Punkt der Menge $\mathrm{Fix}(f)$ aller Fixpunkte von f. (Vergleiche die Definition (c) aus Abschnitt 6.2.)

(b) Ist $|f'(a)| < 1$, also $0 < q < 1$, so existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $U_\delta(a) \subseteq D$ und

$$\forall t \in \dot{U}_\delta(a)\colon\ |f(t) - a| < q \cdot |t - a|$$

(d. h. $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\delta(a)$). Für jedes $t_0 \in U_\delta(a)$ konvergiert daher (?) die Banachfolge bezüglich f mit Startpunkt t_0 gegen a; also ist a ein Attraktor von f.

(c) Ist $|f'(a)| > 1$, also $1 < q$, so existiert ein $\delta \in \mathbf{R}_+$, so daß $U_\delta(a) \subseteq D$ und

$$\forall t \in \dot{U}_\delta(a)\colon\ |f(t) - a| > q \cdot |t - a|\,;$$

also ist a ein abstoßender Fixpunkt von f.

Existiert zu $t_0 \in \dot{U}_\delta(a)$ die Banachfolge $(t_n)_{n \geq 0}$ bezüglich f mit Startpunkt t_0, so verläßt diese daher (?) irgendwann $U_\delta(a)$.

6.14 Das Newtonsche Nullstellenverfahren

Aufgabe. Seien I ein nicht leeres, offenes Intervall in $\mathbf{R}$, $a \in I$ und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung keine Nullstelle besitzt. Also ist f streng monoton (vgl. 6.10) und besitzt somit höchstens eine Nullstelle. Es sei $g \coloneqq x - f/f'$. Man zeige:

(a) Für jedes $a \in I$ ist $g(a)$ die Nullstelle der affinen Approximation

$$t \mapsto f(a) + f'(a) \cdot (t-a)$$

von f im Punkt a, deren Graph bekanntlich die Tangente an den Graphen von f im Punkte $(a, f(a))$ ist.

(b) Es ist a genau dann Nullstelle von f, wenn a ein Fixpunkt von g ist.

(c) Ist a eine Nullstelle von f und ist f' in a stetig, so ist g in a differenzierbar mit Ableitung $g'(a) = 0$, und somit (?) ist a ein anziehender Fixpunkt von g (vgl. Abschnitt 6.13); insbesondere existiert also ein $r \in \mathbf{R}_+$, so daß für jedes $t_0 \in U_r(a)$ die „Newton-Folge" $(t_n)_{n \geq 0}$ mit

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$$

gegen a konvergiert.

(d) Das Heronsche Verfahren zur Ermittlung von Quadratwurzeln kann als Newtonsches Nullstellenverfahren für eine geeignete Funktion betrachtet werden. Für welche?

(e) Ein Nachteil des Newtonschen Nullstellenverfahrens besteht darin, daß die Ableitung der zu untersuchenden Funktion bekannt sein muß. Dieser Mangel läßt sich dadurch beheben, daß die Ableitung $f'(t_n)$ durch den Differenzenquotienten $(f(t_n) - f(t_{n-1}))/(t_n - t_{n-1})$ ersetzt wird. In diesem Falle müssen natürlich zwei Startwerte t_0 und t_1 vorgegeben werden. Dadurch (?) gelangen wir zur rekursiven Definition

$$t_{n+1} = \frac{t_{n-1} \cdot f(t_n) - t_n \cdot f(t_{n-1})}{f(t_n) - f(t_{n-1})}$$

für $n \geq 1$. Das hierdurch beschriebene Nullstellenverfahren heißt das *Sekantenverfahren*, oder auch die Nullstellenbestimmung nach der *regula falsi*. Man zeige, daß in Analogie zu (a) gilt: Das Folgeglied t_{n+1} wird durch den Schnittpunkt der x-Achse mit der Sekante durch die Punkte $(t_{n-1}, f(t_{n-1}))$ und $(t_n, f(t_n))$ festgelegt.

Man mache sich die Wirkungsweise des Newtonschen Nullstellenverfahrens und des Sekantenverfahrens an Skizzen klar.

Wegen seiner Wichtigkeit sei für das Sekantenverfahren eine Scheme-Prozedur angegeben:

```
(define (secant f t0 t1 eps)
  (let loop ((i 0) (x0 t0) (x1 t1) (y0 (f t0)))
    (let* ((y1 (f x1))
           (d (- y1 y0)))
      (cond
       ((< (abs y1) eps)
            x1)
       ((= i 50)
        (error "secant: aborted after 50 iterations"))
       ((< (abs d) 1e-10)
        (error "secant: aborted due to divergence" d))
       (else
        (loop (+ i 1)
              x1
              (/ (- (* x0 y1) (* x1 y0)) d)
              y1))))))
```

Rufen wir die Prozedur `(secant f t0 t1 eps)` mit einer Prozedur f auf, welche reelle Zahlen auf reelle Zahlen abbildet, so liefert sie eine approximative Nullstelle von f, an der der Wert von 0 um weniger als eps abweicht, nach dem Sekantenverfahren mit den Startpunkten t_0 und t_1. Die Prozedur bricht mit einem Fehler ab, wenn entweder mehr als 50 Schritte benötigt werden oder die Sekante fast waagerecht ist, so daß unsinnige Ergebnisse auftreten können.

6.15 Das Theorem von der kontrollierten Schwankung

Theorem 1 (Theorem von der kontrollierten Schwankung)**.** Seien $D \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$, sowie a, $b \in D$ mit $a < b$ und $[a, b] \subseteq D$, und sei E ein Banachraum. Sind dann $f\colon D \to E$ und $g\colon D \to \mathbf{R}$ auf $[a, b]$ stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit

$$\forall t \in \,]a, b[\, : \ \|f'(t)\| \leq g'(t),$$

so folgt

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Beweis. Für jedes $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ beweisen wir im folgenden die Aussage

$$\forall t \in [a, b]\colon \ \|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + (1 + t - a) \cdot \varepsilon. \tag{1}$$

Damit sind wir fertig, denn danach gilt insbesondere

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \lambda(\varepsilon)$$

mit der stetigen Funktion $\lambda := (1 + b - a) \cdot x$. Aus der Stetigkeit in 0 folgt sogar

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \lambda(0) = g(b) - g(a),$$

also die Behauptung des Theorems.

Um (1) zu beweisen, definieren wir die stetige Funktion

$$\varphi\colon [a, b] \to \mathbf{R}, t \mapsto g(t) - g(a) + (1 + t - a) \cdot \varepsilon - \|f(t) - f(a)\|.$$

Dann ist (1) äquivalent zu $\varphi \geq 0$. In jedem Falle ist $\varphi(a) = \varepsilon > 0$.

Wir nehmen jetzt an, daß $\varphi \geq 0$ nicht gilt und führen dies zu einem Widerspruch. Unter der Annahme ist jedenfalls

$$B := \{t \in [a, b] \mid \varphi(t) < 0\} \neq \emptyset,$$

und damit $s := \inf(B) \in [a, b]$. Wegen $\varphi(a) > 0$ und der Stetigkeit von φ in a ist $s > a$. Nach Definition von B damit sogar $\varphi| \, [a, s[\, \geq 0$. Da φ in s stetig ist, folgt daraus $\varphi(s) \geq 0$, also $s \notin B$. Da nach Annahme $B \neq \emptyset$, muß folglich $s < b$ gelten. Insgesamt haben wir also $a < s < b$ bewiesen.

Insbesondere sind f und g in s differenzierbar. Aufgrund der Definition der Ableitung existiert damit ein $\delta \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\delta(s) \subseteq [a, b]$ und

$$\forall t \in \dot{U}_\delta(a)\colon \left(\|f'(s)\| \geq \left\|\frac{f(t) - f(s)}{t - s}\right\| - \frac{\varepsilon}{2} \wedge g'(s) \leq \frac{g(t) - g(s)}{t - s} + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Da nach Voraussetzung $\|f'(s)\| \leq g'(s)$ ist, folgt daraus für alle $t \in \,]s, s + \delta[$, daß

$$\frac{\|f(t) - f(s)\|}{t - s} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{g(t) - g(s)}{t - s} + \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$g(t) - g(s) + (t - s) \cdot \varepsilon \geq \|f(t) - f(s)\|.$$

Andererseits gilt wegen $\varphi(s) \geq 0$, daß

$$g(s) - g(a) + (1 + s - a) \cdot \varepsilon \geq \|f(s) - f(a)\|.$$

Durch Addition der letzten beiden Ungleichungen erhalten wir

$$g(t) - g(a) + (1 + t - a) \cdot \varepsilon \geq \|f(t) - f(s)\| + \|f(s) - f(a)\| \geq \|f(t) - f(a)\|,$$

also $\varphi(t) \geq 0$. Damit ist $U_\delta(s) \cap B = \emptyset$, ein Widerspruch zur Definition von s als Infimum von B. $\square$

Kommentar 1.

(a) Dieses Theorem ist der Ersatz des Mittelwertsatzes aus Abschnitt 6.9 für Banachraum-wertige Funktionen; es ist für diese Funktionen ähnlich fundamental wie der Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen.

(b) Bei J. Dieudonné heißt dieses Theorem aus historischen Gründen auch „Mittelwertsatz“, H. Cartan spricht vom „Satz vom beschränkten Wachstum“.

(c) Der Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen läßt sich auch auf andere Weise auf Banachraum-wertige Funktionen verallgemeinern. Zum Beispiel gilt das folgende Theorem:

Mittelwertabschätzungssatz. Ist $f\colon [a,b] \to E$ eine auf einem Intervall definierte stetige Funktion in einen $\mathbf{K}$-Banachraum E, welche auf $]a,b[$ differenzierbar ist, so existiert ein $t_0 \in \,]a,b[$, so daß gilt:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(t_0)\| \cdot (b-a). \tag{2}$$

Wie wir im Kommentar am Ende von Abschnitt 6.9 gesehen haben, können wir für $\dim E \geq 2$ nicht erwarten, ein $t_0 \in \,]a,b[$ zu finden, für das in (2) Gleichheit gilt.

Der Mittelwertabschätzungssatz wird mit der folgenden Folgerung aus dem „Fortsetzungssatz von Hahn–Banach“, einem Theorem der Funktionalanalysis, bewiesen:

Folgerung des Fortsetzungssatzes von Hahn–Banach. Ist E ein $\mathbf{K}$-Banachraum, so existiert zu jedem Vektor $v_0 \in E$ eine *Linearform* (d. h. eine $\mathbf{K}$-wertige lineare Abbildung) $\lambda\colon E \to \mathbf{K}$ mit

$$\lambda(v_0) = \|v_0\| \wedge \forall v \in E\colon\ |\lambda(v)| \leq \|v\|\,.$$

Beweis für den Mittelwertabschätzungssatz. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ annehmen (indem wir im Falle von $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ den Banachraum E als Banachraum über $\mathbf{R}$ betrachten). Sei $v_0 := f(b) - f(a)$. Wir wählen eine Linearform $\lambda\colon E \to \mathbf{R}$ nach der Folgerung, und definieren damit die Funktion $\psi := \lambda \circ f\colon [a,b] \to \mathbf{K}$. Da λ nach Aufgabe 2 aus Abschnitt 5.3 stetig ist, ist auch ψ stetig und wegen der Vertauschbarkeit von Differentiation und linearen Operationen (vgl. 6.7) auf dem Intervall $]a,b[$ differenzierbar. Nach dem klassischen Mittelwertsatz existiert daher ein $t_0 \in \,]a,b[$ mit $\psi(b) - \psi(a) = \psi'(t_0) \cdot (b-a)$. Wegen $\psi' = \lambda \circ f$ folgt dann

$$\begin{aligned}\|f(b) - f(a)\| = \|v_0\| = \lambda(v_0) = \lambda(f(b) - f(a)) = \lambda(f(b)) - \lambda(f(a)) = \psi(b) - \psi(a)\\ = \psi'(t_0) \cdot (b-a) = \lambda(f'(t_0)) \cdot (b-a) \leq \|f'(t_0)\| \cdot (b-a).\end{aligned}$$

□

Theorem 2 (Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen)**.** Sei $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall, und sei $f\colon I \to E$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung folgendermaßen durch eine Konstante $L \in [0, \infty[$ abgeschätzt werden kann:

$$\forall t \in I\colon\ \|f'(t)\| \leq L.$$

Dann gilt:

$$\forall t, s \in I\colon\ \|f(t) - f(s)\| \leq L \cdot |t - s|\,;$$

insbesondere ist f gleichmäßig stetig.

Kommentar 2. Ist f stetig differenzierbar (vgl. 6.4) und I folgenkompakt, so ist $L := \sup\{\|f'(t)\| \mid t \in I\} < \infty$, und das letzte Theorem kann mit dieser Konstanten angewendet werden.

Korollar. Ist $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ ein Intervall und $f\colon I \to E$ eine stetige Funktion, die auf $I^{\circ} :=]\inf(I), \sup(I)[$ differenzierbar mit Ableitung $f' \equiv 0$ ist, so ist f konstant (vgl. (a) des Theorems aus Abschnitt 6.10).

6.16 Über Fehlerfortpflanzung

In den Naturwissenschaften wird laufend folgendes Verfahren zur Bestimmung einer Größe, sagen wir G, benutzt: Eine Funktion $G = f(A)$ ist bekannt, es wird A gemessen und vermittels f die interessierende Größe bestimmt. (Beispiel: Zur Bestimmung der Temperatur wird die Höhe einer Quecksilber-/Alkohol-/Wassersäule abgelesen.) Da sich die Größe A aber nur bis auf einen gewissen Meßfehler ermitteln läßt, ist es wichtig zu wissen, wie sich dieser Meßfehler auf die Berechnung von $G = f(A)$ auswirkt. Dazu wird das in folgender Aufgabe beschriebene Verfahren angewendet.

Aufgabe.

(a) Seien D eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}$, $f\colon D \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion, $t_0 \in D$ und $\delta \in \mathbf{R}_+$ mit $U_\delta(t_0) \subseteq D$. Man zeige: Existieren m, $M \in \mathbf{R}$ mit

$$\forall t \in U_\delta(t_0)\colon m \leq |f'(t)| \leq M,$$

so gilt für alle $h \in \mathbf{R}$ mit $|h| < \delta$, daß

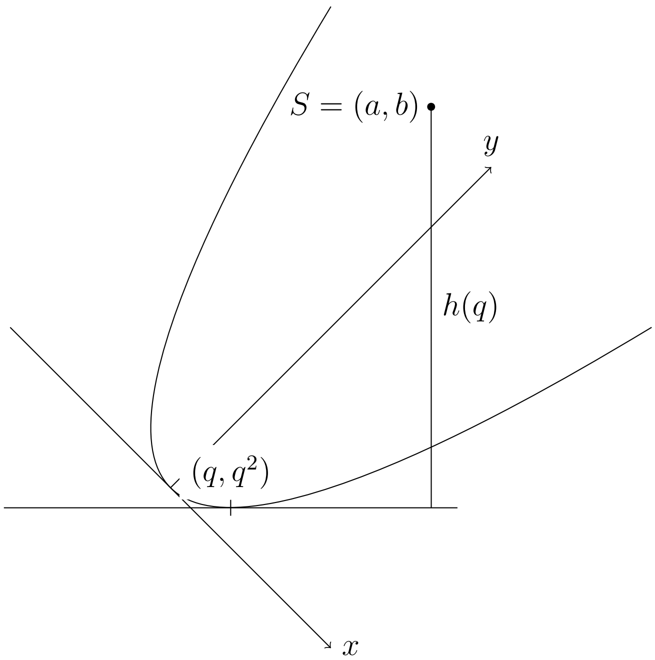
$$m \cdot |h| \leq |f(t_0 + h) - f(h)| \leq M \cdot |h|\,.$$

(b) Man schätze den Fehler ε ab, wenn man bei der Berechnung von π^7 den Näherungswert $\pi \approx 3{,}14$ benutzt? Wie groß ist der auf diese Weise approximativ bestimmte Wert von π^7 und von welcher Größe ist der relative Fehler ε/π^7?

6.17 Gleichgewichtslagen eines inhomogenen Parabelsegmentes

Aufgabe. Ein aus starkem Blech gearbeitetes Parabelsegment der Masse m werde mit der Randkante auf einer waagerechten Ebene aufgesetzt, so daß es sich dort (auf der Kante abrollend) frei bewegen kann. Wir lassen variable Dicke des Bleches zu, so daß wir über die Lage des Schwerpunktes S keine Angaben machen können (außer der, daß S ein Punkt des Segmentes ist). Es soll untersucht werden, wie die Zahl der stabilen Gleichgewichtslagen (siehe unten) des Parabelsegmentes von der Lage des Schwerpunktes abhängt.

Mathematisierung des Problems: Mit dem Parabelsegment verbinde man fest ein kartesisches Koordinatensystem und nehme an, daß in diesem die Parabel die Gleichung $y = x^2$ hat. Die möglichen Lagen (gemeint sind auch die Nicht-Gleichgewichtslagen) des Segmentes sind dann durch den jeweiligen Berührungspunkt (q, q^2) des Segmentes mit der Ebene, das heißt durch den Parameter q, charakterisiert. Der Schwerpunkt möge die Koordinaten (a, b) haben:



(a) Man bestimme mit Methoden der Linearen Algebra in Abhängigkeit von q die Höhe $h(q)$ von S über der Ebene.

(b) Damit ist $V(q) := m \cdot g \cdot h(q)$ die potentielle Energie (wobei die Ebene das Nullniveau definiert) des vorliegenden mechanischen Systems (hierbei ist

$g \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ die Erdbeschleunigung). Bekanntlich befindet sich dieses in einer *stabilen Gleichgewichtslage*, wenn V für den zugehörigen Parameter q ein strenges lokales Minimum hat.

Man beweise folgende Reihe von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} V'(q) = 0 &\iff P_{(a,b)}(q) := 2 \cdot q^3 - (2b-1) \cdot q - a = 0 \\ &\iff \begin{array}{l}\text{Der Schwerpunkt } S \text{ liegt auf der Normalen der Parabel} \\ \text{im Punkte } (q, q^2).\end{array} \end{aligned}$$

(c) Man berechne mit Hilfe der letzten Teilaufgabe die Positionen von S, für welche es nur eine stabile Gleichgewichtslage des Systems gibt. Insbesondere bestimme man die Trennlinie zu dem Bereich der Positionen von S, für welche es mehrere stabile Gleichgewichtslagen des Systems gibt (wieviele sind es?).

(Tip: Zunächst untersuche man die Gestalt des Graphen $P_{(a,b)}$ durch eine „klassische Kurvendiskussion“ und ermittle dadurch die Anzahl der Nullstellen von $P_{(a,b)}$.)