Dozent: PD Dr. Markus Junker
Assistent: Andreas Claessens

# BLATT 11

(09.01.2017)

## Aufgabe 1

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, $\mathfrak{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $n \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $D \subseteq M^n$ heißt $\mathcal{L}$-definierbar, falls es eine $\mathcal{L}$-Formel $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ gibt mit

$$D = \phi^{\mathfrak{M}} = \{(m_1, \ldots, m_n) \in M^n \mid \mathfrak{M} \models \phi[m_1, \ldots, m_n]\}$$

Zeigen Sie, dass die $\mathcal{L}$-definierbaren Teilmengen von $M^n$ eine Boole'sche Unteralgebra der Potenzmengenalgebra von $M^n$ bilden.

## Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Formeln $\phi$ und $\psi$ aus den Aufgabenteilen (a) und (b) jeweils erfüllbar sind, aber kein endliches Modell haben.

(a) $\mathcal{L}_1$ besteht aus dem einstelligen Funktionszeichen $f$ und $\phi$ ist die $\mathcal{L}_1$-Formel, die aus der Konjunktion der folgenden Formeln besteht:

$$\exists v_0 \forall v_1 \ \neg f v_1 \doteq v_0$$
$$\forall v_0 \forall v_1 \ (f v_0 \doteq f v_1 \rightarrow v_0 \doteq v_1)$$

(b) $\mathcal{L}_2$ besteht aus dem zweistelligen Relationszeichen $<$ und $\psi$ ist die $\mathcal{L}_2$-Formel, die aus der Konjunktion der folgenden Formeln besteht:

$$\forall v_0 \ \neg v_0 < v_0$$
$$\forall v_0 \forall v_1 \ (v_0 < v_1 \vee v_0 \doteq v_1 \vee v_1 < v_0)$$
$$\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \ ((v_0 < v_1 \wedge v_1 < v_2) \rightarrow v_0 < v_2)$$
$$\exists v_0 \exists v_1 \ \neg v_0 \doteq v_1$$
$$\forall v_0 \forall v_2 \ (v_0 < v_2 \rightarrow \exists v_1 \ (v_0 < v_1 \wedge v_1 < v_2))$$

## Aufgabe 3

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, die keine Funktionszeichen und Konstantenzeichen enthält und nur einstellige Relationszeichen. Es sollen in dieser Aufgabe nur Formeln betrachtet werden, in denen das Gleichheitszeichen nicht vorkommt.

(a) Zeigen Sie, dass jede solche $\mathcal{L}$-Formel äquivalent zu einer Formel der Form

$$\bigvee_i \bigwedge_j (\neg)(\exists v_{ij})((\neg)P_1^{ij} v_{ij} \wedge \cdots \wedge (\neg)P_{n_{ij}}^{ij} v_{ij})$$

ist, wobei die $v_{ij}$ Individuenvariablen und die $P_k^{ij}$ Prädikate in $\mathcal{L}$ sind.

(b) Leiten Sie daraus her, dass jede erfüllbare $\mathcal{L}$-Aussage (ohne Gleichheitszeichen) ein endliches Modell hat.

*Hinweis zu (a):* Induktion über den Aufbau der Formeln. Arbeiten Sie mit dem vollständigen Junktoren-Quantoren-System $\{\neg, \vee, \exists\}$. Benutzen Sie folgende Ergebnisse:

- Falls $v_i$ in $\chi$ nicht vorkommt, ist $\exists v_i(\psi \wedge \chi) \sim (\exists v_i \psi \wedge \chi)$
- Es gilt $\exists v_i \exists v_i \phi \;\sim\; \exists v_i \phi$.
- Blatt 10, Aufgabe 4
- wegen der aussagenlogischen Distributivgesetze ist jede Formel der Form $\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} \phi_{ij}$ äquivalent zu einer Formel $\bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \phi_{ij}$ für ein geeignetes $J$.

*Bemerkung:* Teil (b) gilt auch, wenn das Gleichhheitszeichen und Konstanten zugelassen sind.

## Aufgabe 4

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, seien $\chi(v_0, v_1)$ und $\phi(v_0)$ $\mathcal{L}$-Formeln und $\psi$ eine $\mathcal{L}$-Aussage. Geben Sie im Hilbert-Kalkül aus der Vorlesung Beweise für folgende Aussagen an:

$$(\exists v_0 \exists v_1 \chi \to \exists v_1 \exists v_0 \chi)$$
$$(\exists v_0(\phi \wedge \psi) \to (\exists v_0 \phi \wedge \psi))$$

*Hinweis:* Abgeleitete Axiome und Regeln aus der Vorlesung dürfen benutzt werden.

Abgabe bis Montag 16.01.2017, 10 Uhr,
im Briefkasten in Gebäude 51 (siehe Briefkastenaufschrift)
Auf die Abgaben gehören die Namen der Abgebenden und die Gruppennummer!!!