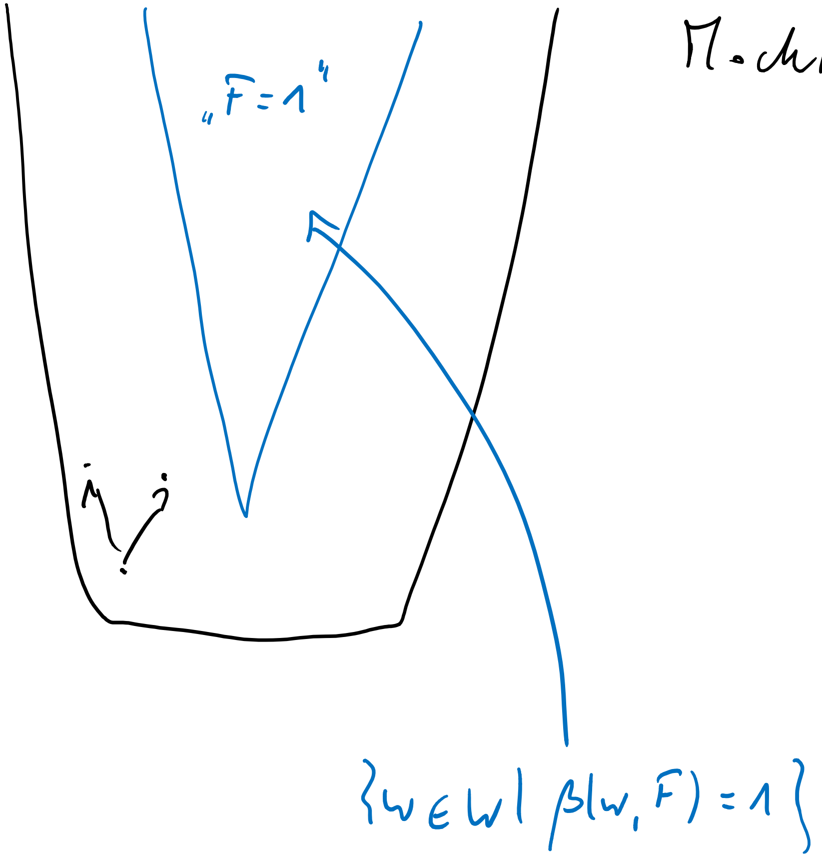
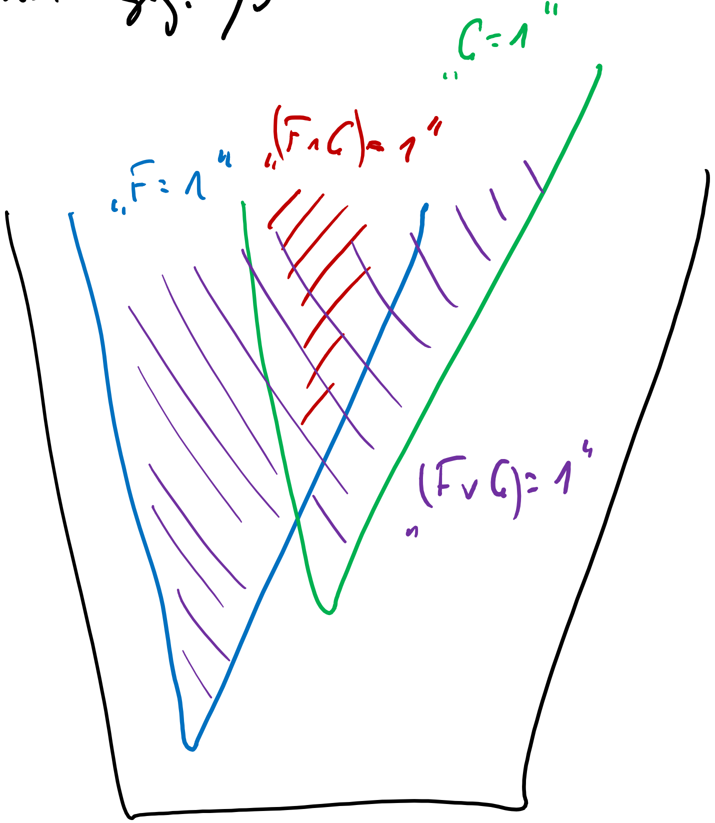
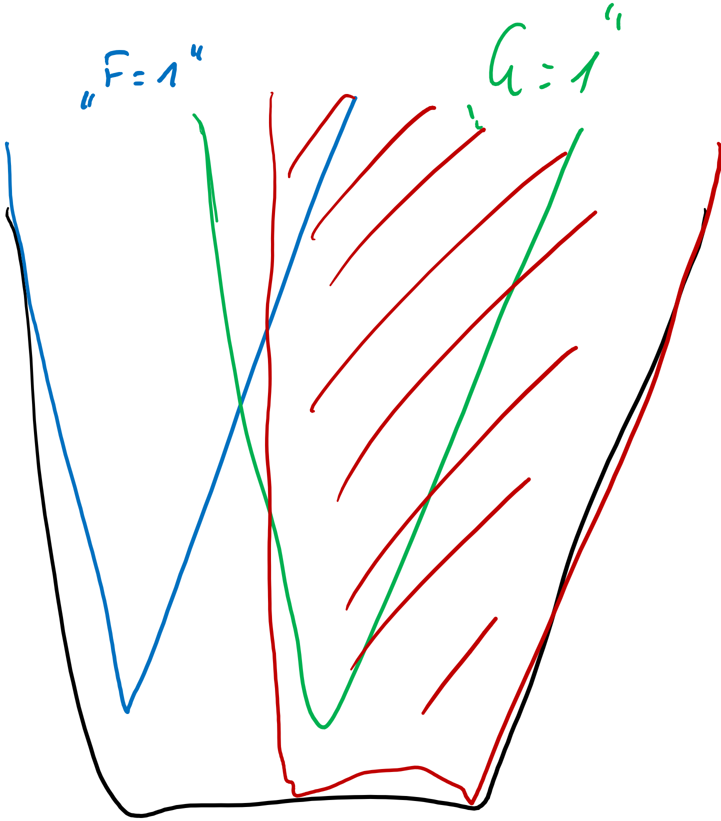
Modell mit geg. β

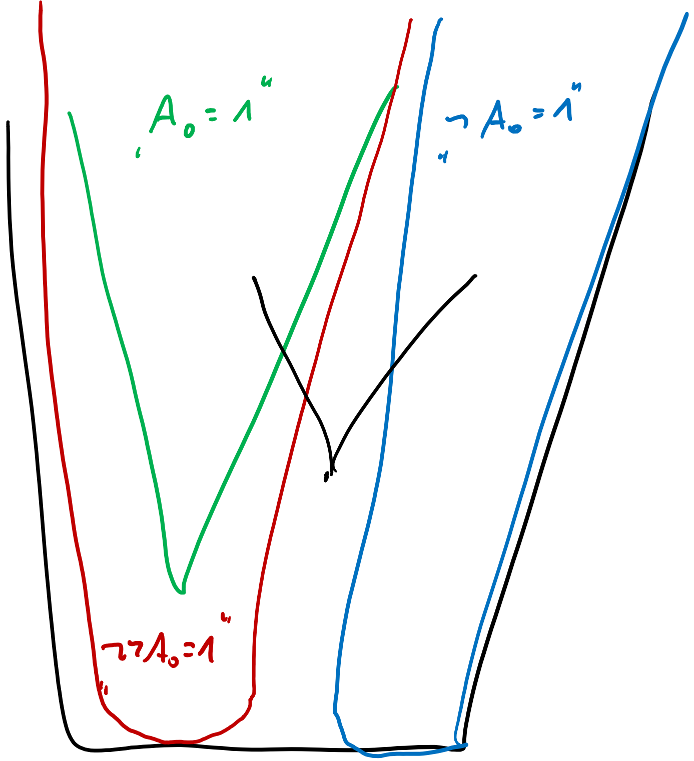






„F → G = 1"

maximale unter ⊆ abgeschlossene, disjunkt zu „F=1" \ „G=1"



man sieht: $\neg\neg\neg A_0 \sim_{int} \neg A_0$

Bem: Die intuitionistische Aussagenlogik ist entscheidbar.

Problem: gegeben F und G, ist $F \sim_{int} G$?

Satz: es gibt einen Algorithmus, der dies entscheidet.

Zutaten (1): Es gibt ein endl. Kalkül dafür, also endl. viele Äquivalenzregeln, aus denen mit Substitution alles folgt.
(aber keine Normalform)

(2) Wenn $F \not\sim_{int} G$, dann existiert endliches Modell $(W, \leq)$, β und $w \in W$ mit $\beta(w, F) \neq \beta(w, G)$

Lasse beide Verfahren gleichzeitig laufen!

Coq

ein paar Stichworte zu dem, was es noch so gibt:

- Tableau-Methoden / Baum-Kalküle

- implicational propositional logic (Implikationsaussagenlogik)

$\{\to, \bot\}$ ist vollständiges Junktorensystem

Idee: Beschränkung auf $\to$, eine Aussagenvariable kann später die Rolle von $\bot$ zugewiesen werden

Axiomensystem: $(A_0 \to (A_1 \to A_0))$

$((A_0 \to (A_1 \to A_2)) \to ((A_0 \to A_1) \to (A_0 \to A_2)))$

$(((A_0 \to A_1) \to A_0) \to A_0)$ Peirce' law

sind Tautologien

Regel: Modus Ponens — Wenn F, $(F \to G)$ Tautologien, dann auch G

Substitution

alternativ

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & 0 & \times & 1 & 0 & 0? & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$(((A_0 \to A_1) \to A_2) \to ((A_2 \to A_0) \to (A_3 \to A_0)))$$

Hinweis zum neuen Übungsblatt:
bei Aufgabe 4 (a): „$n \geq 1$" statt „$n \geq 2$" (Korrektur kommt)
ist nicht falsch, aber mit $n=1$ ist der Induktionsanfang leichter.
Bei (a)-(c) geht übrigens auch $n \geq 0$

3 Prädikatenlogik

Prädikatenlogik erster Stufe
(first order)

(auch: Quantorenlogik)

Bsp: math. Struktur $(\mathbb{R}; \underbrace{+, \cdot}_{\text{zweistellig}}, \underbrace{-}_{\text{1-stellig}}, \overbrace{0, 1}^{\text{Konstanten}}, \underbrace{\leq}_{\text{zweistellige Relation}})$

$\sim$ verhält sich zu $\leftrightarrow$
ähnlich wie $=$ zu $\doteq$

3.1 Syntax

Sprache $\mathcal{L}$ besteht aus

[fester Teil]
- alle Junktoren der Aussagenlogik
- Quantoren: $\forall$ Allquantor
  $\exists$ Existenzquantor
- Gleichheitszeichen: $\doteq$
- Individuenvariablen: $v_0, v_1, v_2, v_3 \dots$
- Klammern: ( )

[variabler Teil]
- Funktionszeichen f_i für $i \in I$ (endlich oder unendlich)
  mit fester, gegebener Stelligkeit $\in \mathbb{N}$
- Relationszeichen R_j für $j \in J$ (endlich oder unendlich)
  mit fester, gegebener Stelligkeit $\in \mathbb{N}$

Spezialfall $n=0$

0-stellige Funktionen entsprechen Konstanten und werden oft mit c_i bezeichnet
0-stellige Relationszeichen entsprechen Aussagenvariablen — " — A_i bezeichnet

In der Praxis oft andere Namen für Funktions- und Relationszeichen
z.B. $f, g, h, +, \cdot$ $R, S, T, A, B, C, \leq, \in$

Einstellige Relationszeichen heißen auch Prädikate.

$\mathcal{L}$-Terme: („Terme sind Bezeichnungen für Elemente der betrachteten Struktur")

- Jede Individuenvariable ist ein $\mathcal{L}$-Term v_i
- Wenn f_i ein n-stelliges Funktionszeichen ist und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ $\mathcal{L}$-Terme, dann ist $f_i \tau_1 \ldots \tau_n$ ein $\mathcal{L}$-Term

Insbesondere ist c_i ein $\mathcal{L}$-Term für Konstanten c_i

Lemma (eindeutige Lesbarkeit von Termen)

Wenn $f_i \tau_1 \dots \tau_n = f_j \tau_1' \dots \tau_m'$,

dann ist $f_i = f_j$, $n = m$ und $\tau_i = \tau_i'$

Beweis: Übung (analog zur Aussagenlogik in polnischer Notation)

$\mathcal{L}$-Formeln („Formeln stehen für Aussagen")

atomare $\mathcal{L}$-Formel:
- $\perp$ und $\top$
- Wenn R_i ein n-stelliges Relationszeichen und $\tau_1, \dots, \tau_n$ $\mathcal{L}$-Terme, dann: $R_i \tau_1 \dots \tau_n$
- Wenn τ_1, τ_2 $\mathcal{L}$-Terme: $\tau_1 \doteq \tau_2$ (besser eigentlich $\doteq \tau_1 \tau_2$)

zusammengesetzte $\mathcal{L}$-Formeln: Wenn φ_1, φ_2 $\mathcal{L}$-Formeln sind, dann auch:
- $\neg \varphi_1$ $\quad (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ $\quad (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ $\quad (\varphi_1 \to \varphi_2)$ $\quad (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$
- (Wenn v_i Individuenvariable:) $\quad \exists v_i\, \varphi_1$ $\quad \forall v_i\, \varphi_1$

Bsp

$$\forall v_1 \, \exists v_0 \, v_0 \doteq v_1$$

$$(v_0 \doteq c_0 \wedge R_2 v_1 v_2)$$

$$\forall v_3 \, \forall v_4 \, (v_0 \doteq v_1)$$

$$\exists v_0 \, \exists v_0 \, \exists v_0 \, (\neg\neg\neg\neg\, v_0 \doteq v_1 \vee v_0 \doteq v_1)$$

$$\exists v_0 \, (\forall v_1 \, v_0 \doteq v_1 \vee \exists v_3 \, R_1 v_1 v_2)$$