Nachklausur zur Vorlesung: Mathematische Logik für Informatiker

WS 2013/14

Geben Sie am Ende der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts ab. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Viel Erfolg!

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Geburtsort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte maximal	4	4	4	4	4	4	4	4	4	36
Punkte erreicht										

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Bringen Sie die aussagenlogische Formel

$$(((C \vee \neg D) \to B) \leftrightarrow \neg\neg A)$$

in disjunktive Normalform und in konjunktive Normalform.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar, welche sind allgemeingültig? Begründen Sie die Antwort.

1. $(((A \wedge \neg C) \vee (B \wedge C)) \to A)$
2. $(((\neg B \vee A) \wedge (D \vee \neg C)) \wedge ((\neg A \vee \neg D) \wedge (C \vee B)))$

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei $L = \{f\}$ eine Sprache der Logik erster Stufe mit zweistelligem Funktionssymbol f. Finden Sie L-Aussagen φ, ψ so dass:

- $(\mathbb{Q}_{>0}, +) \models \varphi$ aber $(\mathbb{Q}, +) \not\models \varphi$ (wobei $\mathbb{Q}_{>0} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$)
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \not\models \psi$ aber $(\mathbb{Q}, \cdot) \models \psi$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Welche der folgenden Strukturen sind isomorph? Begründen Sie Ihre Antwort.

- $(\mathbb{R}, +, 0)$
- $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$, wobei $\mathbb{R}_{>0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$;
- $(\mathbb{Q}, +, 0)$;
- $(\mathbb{N}, +, 0)$.

Aufgabe 5. *(4 Punkte)*

1. Ist das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ definierbar in der Struktur $(\mathbb{R}, \cdot, \leq)$?
2. Ist das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ definierbar in der Struktur $(\mathbb{R}, +, \leq)$?

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6. *(4 Punkte)*
Sei $L = \{f, g, a\}$ mit zweistelligem Funktionssymbol f, einstelligem Funktionssymbol g und Konstantensymbol a. Welche der folgenden Implikationen sind allgemeingültig? Welche lassen sich mit dem Hilberkalkül begründen?

1. $(\forall x(g(x) \doteq f(a,a)) \to \exists y \forall x(y \doteq g(x)))$

2. $(\forall x(g(x) \doteq f(a,x)) \to \exists y \forall x(y \doteq g(x)))$

Wenn eine Implikation nicht allgemeingültig ist, finden Sie bitte ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 7. *(4 Punkte)*
Gegeben sei die Sprache $L = \{E\}$, wobei E ein zweistelliges Relationszeichen ist. Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller L-Strukturen $\mathfrak{X} = (X, E^{\mathfrak{X}})$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- $\mathfrak{X}$ ist eine Äquivalenzrelation (das heißt, $E^{\mathfrak{X}}$ ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf X);
- Alle Äquivalenzklassen von $\mathfrak{X}$ sind endlich.

Zeigen Sie, dass es keine L-Theorie T gibt, deren Modelle genau die L-Strukturen aus $\mathcal{K}$ sind.

Aufgabe 8. *(4 Punkte)*
Sei $L = \{P\}$ mit zweistelligem Prädikatssymbol P. Bestimmen Sie für die folgenden Aussagen jeweils eine äquivalente pränexe Normalform, eine Skolem-Normalform sowie eine Herbrand-Normalform.

1. $\exists v_2 \forall v_3 (\forall v_1 P(v_2, v_1) \leftrightarrow P(v_2, v_3))$
2. $\neg \exists v_1 \neg \forall v_2 (P(v_2, v_1) \wedge \exists v_3 (P(v_3, v_2) \vee P(v_3, v_1)))$

Aufgabe 9. *(4 Punkte)*
Sei $L = \{P, R, f, a, b, c\}$ mit zweistelligem Prädikatssymbol P, einstelligem Prädikatssymbol R, einstelligem Funktionssymbol f, und Konstantensymbolen a, b, c. Zeigen Sie die Allgemeingültigkeit von

$$\begin{aligned}(\forall x \forall y \forall z((P(x, f(y)) \to P(a,z)) \vee (P(x,f(y)) \to R(x)))\\ \to (P(a, f(f(b))) \to (\forall w P(a, f(w)) \vee R(a))))\end{aligned}$$

mittels (Unifizierung und) Resolution.