Kapitel 1 – Grundlagen

1. Mathematische Grundlagen

2. Beispielrechner ReTI

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

UNI FREIBURG

Dr. Tobias Schubert, Dr. Ralf Wimmer

Professur für Rechnerarchitektur

WS 2016/17

Mathematische Grundlagen

- Verständigung auf gemeinsame Basis
- Die meisten Begriffe sollten bekannt sein, bzw. werden in anderen Vorlesungen noch formal und im Detail eingeführt.
- Hier: Informale, möglichst intuitive Einführung
  - Mengen, Funktionen, Relationen
  - Boolsche Algebra $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg)$
  - Graphen, O-Notation
  - Beweistechniken

„Philosophie” der Mathematik

- Gegeben gewisse Aussagen (Axiome), welche andere Aussagen lassen sich aus ihnen herleiten?
- Sind die Axiome wahr und existiert eine solche Herleitung (Beweis), so sind die Folgerungen unumstößlich und indiskutabel wahr!
- Beschreiben die Axiome etwa ein physikalisches System, so gelten die hergeleiteten Folgerungen für dieses System.
- Die Frage, ob Axiome Realitätsbezug haben, ist aber außerhalb der (reinen) Mathematik!

Menge (Naive Definition)

Definition

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohldefinierten, paarweise verschiedenen Objekten zu einem Ganzen.

- Die Objekte nennt man Elemente der Menge.
  (Für eine formal vollständige Definition der Menge bräuchte man mehrere Vorlesungsstunden.)

- Notation: Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ paarweise verschieden, so schreibt man die Menge M, die aus ihnen besteht, als $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
  - $a_i \in M$ bezeichnet, dass a_i Element von M ist.

Beispiele für Mengen

- Leere Menge: $\varnothing$ (es gibt kein $a \in \varnothing$).
- Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- Menge der booleschen Werte: $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.
- Achtung: Die Anordnung von Elementen der Menge und gegebenenfalls Wiederholungen sind belanglos: $\{a, b, c\} = \{c, a, b\} = \{a, a, b, c, a, b\}$.
- Eine Menge kann Elemente enthalten, die selber Mengen sind, z.B. $\{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$.

Spezifikation von Mengen

- Man kann eine Menge durch Angabe von Zusatzbedingungen spezifizieren.

  Beispiele:

  - Menge der ganzen Zahlen:
    $\mathbb{Z} = \{z, -z \mid z \in \mathbb{N}\}$.
  - Menge der rationalen Zahlen:
    $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, p, q \text{ teilerfremd}\}$.
  - Menge der endlichen Zeichenketten:
    $\mathit{STRINGS} = \{s_1 s_2 \ldots s_n \mid n \in \mathbb{N}, s_i \text{ ein Buchstabe}\}$.

UNI FREIBURG

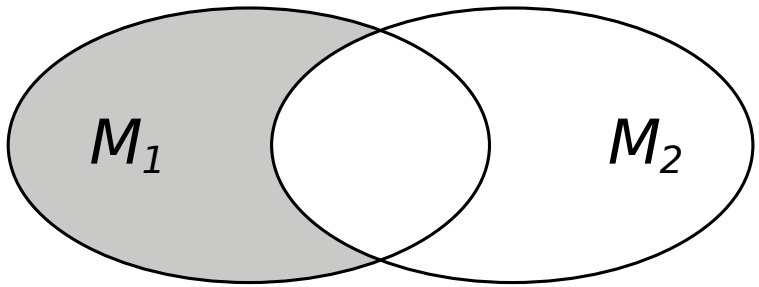
Untermengen, Potenzmenge, Mächtigkeit

- Menge U ist Untermenge von M, wenn jedes Element von U auch Element von M ist.
  - Notation: $U \subset M$ bzw. $M \supset U$
  - Achtung: $\{a\} \subset \{a,b,c\}$, aber $a \in \{a,b,c\}$
- Potenzmenge von M : $Pot(M) = \{m \mid m \subset M\}$.
  - $Pot(\{a,b,c\})$
    $= \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
- Die Anzahl $|M|$ der Elemente einer Menge M heißt Mächtigkeit oder Kardinalität von M.

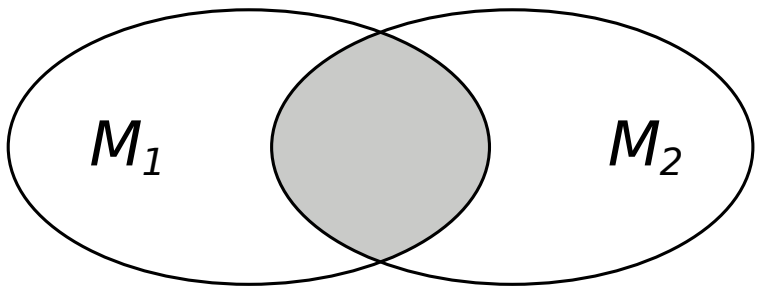
UNI FREIBURG

Operationen auf Mengen 1/2

- Mengendifferenz: $M_1 \setminus M_2 = \{m \mid m \in M_1 \text{ und } m \notin M_2\}$

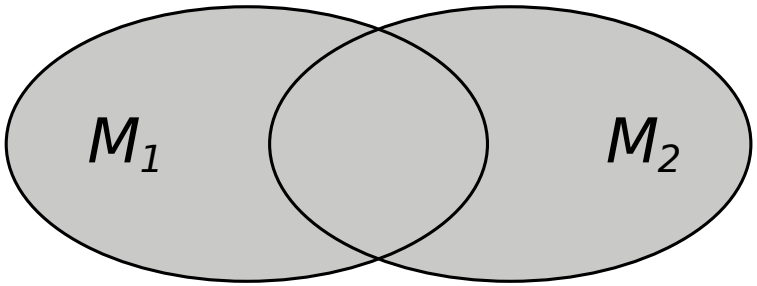


- Mengenschnitt: $M_1 \cap M_2 = \{m \mid m \in M_1 \text{ und } m \in M_2\}$



Operationen auf Mengen 2/2

- Mengenvereinigung: $M_1 \cup M_2 = \{m \mid m \in M_1 \text{ oder } m \in M_2\}$



- Kartesisches Produkt:

$$M_1 \times M_2 = \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1 \text{ und } m_2 \in M_2\}$$

  - (m_1, m_2) ist ein Tupel, bei dem es, im Gegensatz zu einer Menge $\{m_1, m_2\}$, auf die Reihenfolge ankommt!
  - Notation: $M^n = M \times \cdots \times M$ (n mal).

Relationen

Definition

Eine Relation R zwischen den Mengen X und Y ist eine Teilmenge von $X \times Y$.

- Notation: Statt $(x,y) \in R$ schreibt man xRy.
- Beispiele:
  - Relation $<$ zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$.
    $<= \{(0,1),(0,2),\ldots,(1,2),(1,3),\ldots\}$
  - $R = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}, a+b \text{ ungerade } \}$

Funktionen

Definition

Seien X und Y Mengen. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist eine Relation zwischen den Mengen X und Y, wobei für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert, so dass $(x,y) \in f$.

- X heißt Definitionsbereich, Y Wertebereich von f.

- Notation: Statt $(x,y) \in f$ schreibt man $y = f(x)$.

- Beispiele:
  - Quadratfunktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x^2$.
    $f = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25),\dots\}$
  - Kardinalitätsfunktion $f : Pot(\{a,b,c\}) \to \mathbb{N}$.
    $f = \{(\varnothing,0),(\{a\},1),(\{b\},1),(\{c\},1),(\{a,b\},2),$
    $(\{a,c\},2),(\{b,c\},2),(\{a,b,c\},3)\}$

UNI FREIBURG

Beispiele: Relationen, Funktionen

- Jede Funktion ist auch eine Relation.
- Aber es gibt natürlich Relationen, die keine Funktionen sind.
- Beispiel:
  - $\sin^{-1}(x) = \{(\sin(x), x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist eine Relation, aber keine Funktion!

Summen und Produkte (Notation)

- Wir schreiben für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

$$\prod_{i=m}^{n} f(i) = f(m) \cdot f(m+1) \cdot \cdots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$$

- Beispiel:

$$\sum_{i=0}^{5} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

- Schreibweise mit beliebigen Bedingungen:

$$\sum_{i,j>0, i+2j\leq 5} (i^2/j) = (1^2/1) + (1^2/2) + (2^2/1) + (3^2/1) = 14,5$$

Boolesche Algebra $(\{0,1\},\wedge,\vee,\neg)$ 1/4

Definition

- $\mathbb{B} := \{0,1\}$
- Konjunktion (UND-Verknüpfung) $\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$
  $0 \wedge 0 = 0, \quad 0 \wedge 1 = 0, \quad 1 \wedge 0 = 0, \quad 1 \wedge 1 = 1$
- Disjunktion (ODER-Verknüpfung) $\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$
  $0 \vee 0 = 0, \quad 0 \vee 1 = 1, \quad 1 \vee 0 = 1, \quad 1 \vee 1 = 1$
- Negation $\neg : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$
  $\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0$
- Boolescher Ausdruck
  - Die Elemente aus $\mathbb{B}$ sind boolesche Ausdrücke.
  - Seien A und B boolesche Ausdrücke, dann sind $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$ wieder boolesche Ausdrücke.

UNI FREIBURG

Boolesche Algebra $(\{0,1\},\wedge,\vee,\neg)$ 2/4

Konventionen

- Man schreibt auch $\cdot$ statt $\wedge$ und $+$ statt $\vee$.
- Für $\neg x$ sind viele Notationen üblich: $\sim x$, x' oder $\overline{x}$.
- Zur Vereinfachung der Notation bei booleschen Ausdrücken vereinbaren wir:
  Negation $\sim$ bindet stärker als Konjunktion $\cdot$, Konjunktion $\cdot$ bindet stärker als Disjunktion $+$.

Boolesche Algebra $(\{0,1\},\wedge,\vee,\neg)$ 3/4

Axiome der booleschen Algebra

Kommutativität:	$x+y=y+x$
	$x\cdot y=y\cdot x$
Assoziativität:	$x+(y+z)=(x+y)+z$
	$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
Absorption:	$x+(x\cdot y)=x$
	$x\cdot(x+y)=x$
Distributivität:	$x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$
	$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$
Komplement:	$x+(y\cdot\neg y)=x$
	$x\cdot(y+\neg y)=x$

Boolesche Algebra $(\{0,1\},\wedge,\vee,\neg)$ 4/4

- Neben der vorgestellten gibt es weitere boolesche Algebren, in denen diese Axiome gelten.
- Die folgenden Regeln sind aus den Axiomen ableitbar:

Weitere Regeln für boolesche Algebren

Doppeltes Komplement:	$\neg(\neg x) = x$
Idempotenz:	$x + x = x \cdot x = x$
De-Morgan-Regel:	$\neg(x + y) = (\neg x) \cdot (\neg y)$
	$\neg(x \cdot y) = (\neg x) + (\neg y)$
Consensus-Regel:	$(x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z)$
	$= (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) + (y \cdot z)$
	$(x + y) \cdot ((\neg x) + z)$
	$= (x + y) \cdot ((\neg x) + z) \cdot (y + z)$

UNI FREIBURG

Boolesche Funktion

Definition

Eine boolesche Funktion f in n Variablen und mit m Ausgängen ist eine Funktion

$$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m (n, m \in \mathbb{N}).$$

- Die Menge aller booleschen Funktionen in n Variablen mit m Ausgängen ist

$$\mathbb{B}_{n,m} := \{f \mid f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m\}.$$

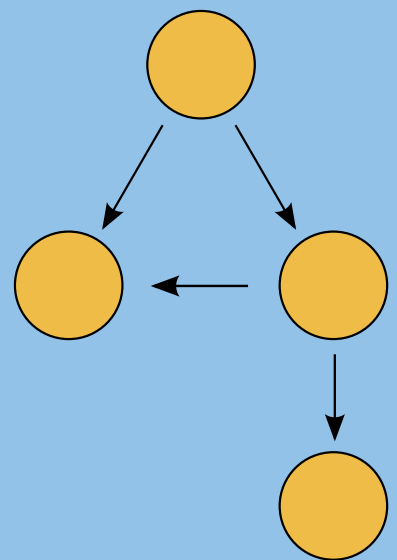
- Wir schreiben abkürzend $\mathbb{B}_n$ statt $\mathbb{B}_{n,1}$.
- Ein digitaler Schaltkreis ohne Speicherelemente, mit n Eingängen und m Ausgängen realisiert eine solche Funktion! (Details später)

Gerichteter Graph

Definition

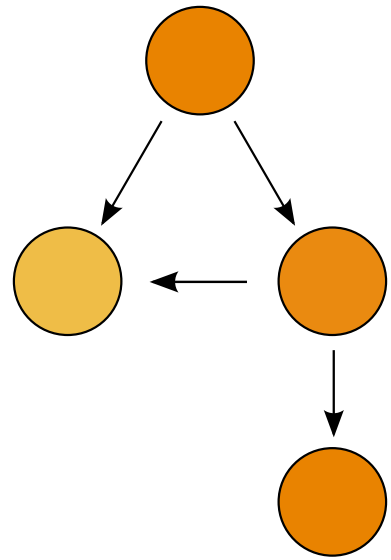
$G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph, wenn folgendes gilt:

- V endliche, nichtleere Menge (Knoten)
- E endliche Menge (Kanten)
- Abbildungen $Q : E \to V$ und $Z : E \to V$
  $Q(e)$ ist Quelle, $Z(e)$ Ziel einer Kante e
- Abbildungen $\mathit{indeg} : V \to \mathbb{N}$ und $\mathit{outdeg} : V \to \mathbb{N}$
  $\mathit{indeg}(v) =\mid \{e \mid Z(e) = v\} \mid$ ist der Eingangsgrad,
  $\mathit{outdeg}(v) =\mid \{e \mid Q(e) = v\} \mid$ der Ausgangsgrad von v.



Pfade in gerichteten Graphen

- Ein Knoten mit
  - $indeg(v) = 0$ heißt Wurzel.
  - $outdeg(v) = 0$ heißt Blatt.
  - $outdeg(v) > 0$ heißt innerer Knoten.



- Ein Pfad (der Länge k) in G ist eine Folge von k Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ $(k \geq 0)$ mit $Z(e_i) = Q(e_{i+1})$ für alle i $(k-1 \geq i \geq 1)$
- Ein Zyklus in G ist ein Pfad der Länge ≥ 1 in G, bei dem Ziel und Quelle identisch sind (G heißt azyklisch, falls kein Zyklus in G existiert).
- Die Graph-Tiefe eines azyklischen Graphen ist definiert als die Länge des längsten Pfades in G.

UNI FREIBURG

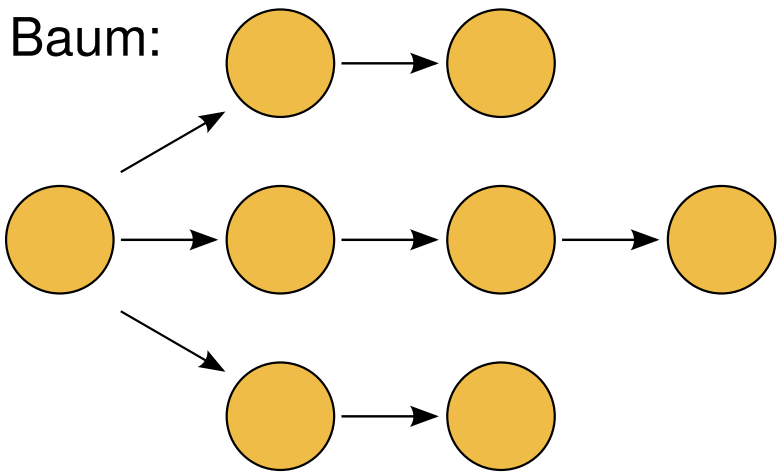
Bäume, Binäre Bäume

Definition

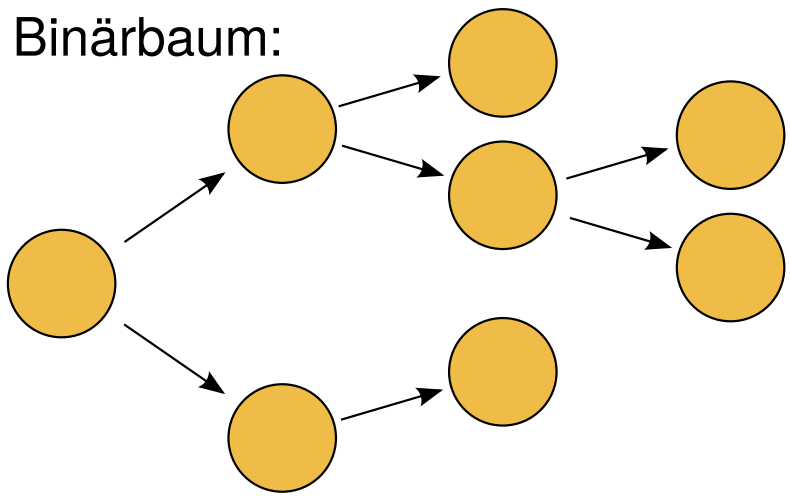
Ein Baum ist ein gerichteter, azyklischer Graph mit genau einer Wurzel w ($indeg(w) = 0$) und $indeg(v) = 1$ für alle andere Knoten v. Ein Baum heißt binär (bzw. Binärbaum), wenn für seine innere Knoten v $outdeg(v) \leq 2$ gilt.

Beispiele:

Baum:



Binärbaum:

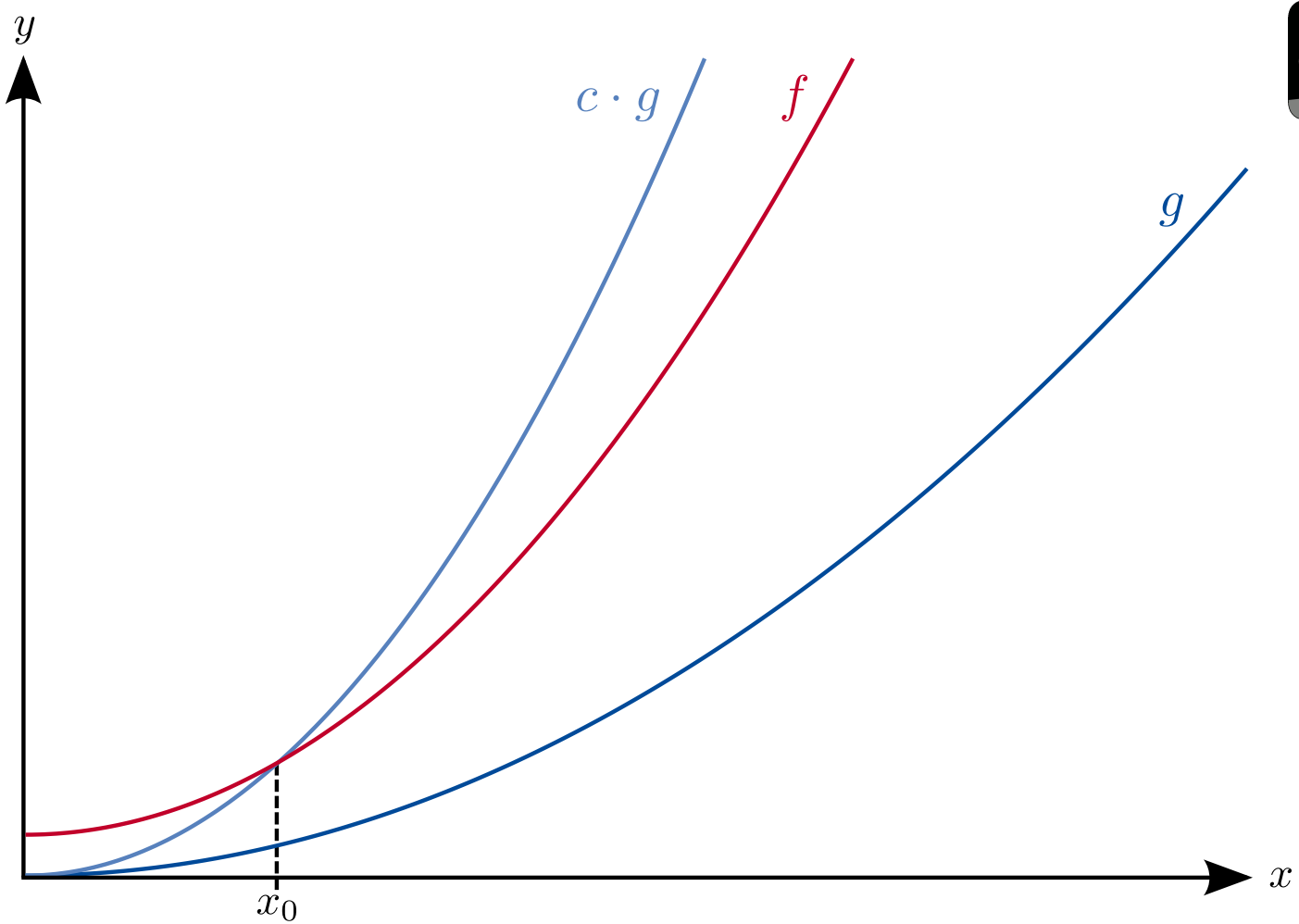


Groß-O-Notation (1/2)

- Seien $f, g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.
  Man schreibt $f(x) \in O(g(x))$, wenn es $c \in \mathbb{R}_0^+, x_0 \in \mathbb{R}_0^+$ gibt, so dass $f(x) \leq c \cdot g(x)$ für alle $x > x_0$ gilt.
  - Beispiel: $5x + 2 \in O(x^2)$
    Beweis: Setze $c = 5, x_0 = 1$
    $5x + 2 \leq 5 \cdot x^2$, für $x > 1$.
- Groß-O-Notation wird verwendet, um Größe von parametrisierten Objekten (z.B. Graphen), Laufzeit von Algorithmen (Anzahl von Rechenschritten in Abhängigkeit von der Eingabe) usw. asymptotisch, d.h. bis auf eine multiplikative Konstante, abzuschätzen.
- Die Notation $f(x) = O(g(x))$ ist weit verbreitet, aber eigentlich falsch, da $O(g(x))$ eine Menge ist. So folgt aus $f(x) = O(g(x))$ und $h(x) = O(g(x))$ keinesfalls $f(x) = h(x)$!

UNI FREIBURG

Groß-O-Notation (2/2)



Beweistechniken

- Sukzessive Folgerungen bzw. Direkter Beweis
- Indirekter Beweis bzw. Beweis durch Widerspruch
- Vollständige Induktion

Sukzessive Folgerungen

Gegeben Aussage A, es soll Aussage B bewiesen werden.

- Sukzessive Folgerungen:
  Aus A folgt C, aus C folgt D, aus D folgt B, also gilt B.

Beispiel: Sukzessive Folgerungen

- Gegeben $f, g, h, \quad f(x) \in O(g(x)),\ g(x) \in O(h(x))$.
  Dann gilt $f(x) \in O(h(x))$.

Beweis:

1. Aus $f(x) \in O(g(x))$ folgt die Existenz von $c_f, x_{0f} : f(x) \leq c_f \cdot g(x)$ für $x > x_{0f}$. Aus $g(x) \in O(h(x))$ folgt die Existenz von $c_g, x_{0g} : g(x) \leq c_g \cdot h(x)$ für $x > x_{0g}$.
2. Man setze $x_0 := max\{x_{0f}, x_{0g}\}$. Dann gilt für $x > x_0$ sowohl $f(x) \leq c_f \cdot g(x)$ als auch $g(x) \leq c_g \cdot h(x)$.
3. Man setze $c := c_f \cdot c_g$. Dann gilt für $x > x_0$:
   $f(x) \leq c_f \cdot g(x) \leq c_f(c_g \cdot h(x)) = c \cdot h(x)$.
   Dies bedeutet aber gerade $f(x) \in O(h(x))$

UNI FREIBURG

Indirekter Beweis 1/2

Es soll Aussage S bewiesen werden.

- Indirekter Beweis: Man nimmt an, $\neg S$ (also die Umkehrung von S) würde gelten. Daraus leitet man einen Widerspruch her (z.B. “es gilt C **und** $\neg C$”, “$31 = 42$”, ...).

- Da der Widerspruch schrittweise aus $\neg S$ logisch hergeleitet wurde, kann $\neg S$ nicht gelten und somit muss S gelten.

Indirekter Beweis 2/2

- Betrachte den Spezialfall $S = A \Rightarrow B$.
  - Dann ist $\neg S = A \wedge \neg B$. Man nimmt also an, dass A gilt, aber $\neg B$.
  - Ergibt sich aus der Annahme ein Widerspruch, dann muss aus der Gültigkeit von A die Gültigkeit von B folgen.
  - Ergibt sich der Widerspruch speziell durch Herleitung von $\neg A$ aus $\neg B$, dann reduziert sich der Widerspruchsbeweis auf den Spezialfall Beweis der "Kontraposition" $\neg B \Rightarrow \neg A$.
  - $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind logisch äquivalent.
  - Implizit setzt man immer die Gültigkeit sämtlicher Axiome voraus. Sei Ax die Aussage "Sämtliche Axiome gelten".
  - Dann ist $S' = (A \wedge Ax) \Rightarrow B$ zu beweisen.
  - Annahme ist dann also: $\neg S' = A \wedge Ax \wedge \neg B$ gilt.

UNI FREIBURG

Beispiel: Indirekter Beweis

- Zu zeigen: $x^2 \notin O(x)$

Beweis:

- Wir nehmen an, dass $x^2 \in O(x)$ wäre. Dann gibt es c und x_0, so dass für $x > x_0$ gilt:
$$x^2 \leq c \cdot x \tag{1}$$
- Nun suchen wir ein x_1, für das $x_1^2 = c \cdot x_1$. Dies ist für $x_1 = c$ der Fall.
- Für alle $x > x_1 = c$ ist $x^2 > c \cdot x$. Man wähle ein $x_2 > max\{x_0, x_1\}$. Dann gilt auch für x_2:
$$x_2^2 > c \cdot x_2 \tag{2}$$
- Andererseits muss für x_2 auch (1) gelten. Widerspruch! Somit kann die Annahme nicht stimmen.

UNI FREIBURG

Vollständige Induktion

- Die vollständige Induktion ist eine Beweismethode für Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen n gelten sollen.
- Zuerst wird die Aussage für den Basisfall $n = 0$ beweisen (manchmal auch $n = 1$ oder höher).
- Dann wird der Induktionsschritt durchgeführt:
  Unter der Annahme, dass die Aussage für n gilt (Induktionsvoraussetzung) wird bewiesen, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt.
- Daraus folgt die Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen.

Vollständige Induktion: Beispiel (1/2)

- **Behauptung:**

  $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

- **Induktionsanfang:**
  Zeige die Behauptung für $n = 1$.

  $$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Vollständige Induktion: Beispiel (2/2)

- **Induktionsvoraussetzung** (IV)**:**
  Nehme an, die Behauptung gilt für *ein* $n \in \mathbb{N}$.
  Also: Es gibt ein n für das gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

- **Induktionsschritt:**
  Zeige die Behauptung für $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{IV}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1} \quad \square$$

UNI FREIBURG