2. Übung zur Analysis I

Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen Caren Schinko, M. Sc.

24. Oktober 2016*

7. s. Sind A und B zwei Aussagen, so ist

$$A \implies B \quad \text{äquivalent zu} \quad \neg B \implies \neg A.$$

(Tip: Stelle für beide Aussagen die Wahrheitstafeln auf; vergleiche dazu den Beweis des Theorems in Abschnitt 0.3 der Vorlesung.)

8. m. Sei $m \in \mathbf{Z}$. Sei $A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots$ eine Folge von Aussagen. Zeige folgende Modifikationen der vollständigen Induktion:

(a) **Voraussetzung:** Es gelte

(i) A_m ist wahr,

(ii) Ist $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq m$ und ist A_n wahr, so ist auch A_{n+1} wahr.

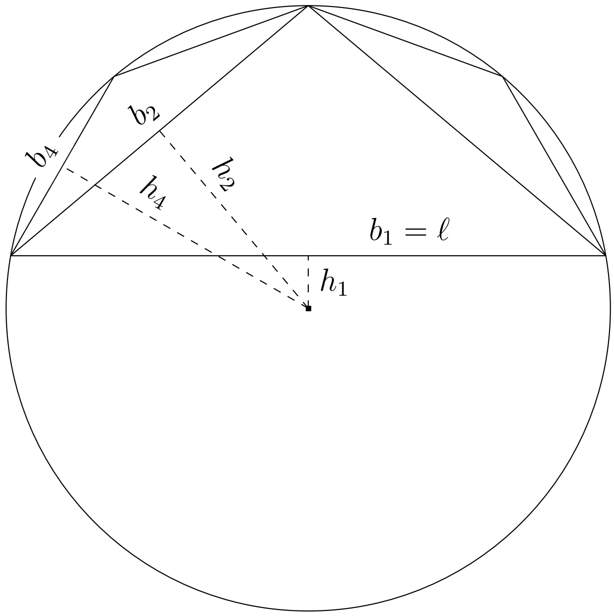
Behauptung: A_n ist wahr für $n \in \mathbf{Z}$ mit $n \geq m$.

(b) **Voraussetzung:** Es gelte: Ist $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq m$ und gilt A_k für $m \leq k < n$, so gilt A_n.

Behauptung: A_n ist wahr für $n \in \mathbf{Z}$ mit $n \geq m$.

9. s. Berechnung der Bogenlänge des Einheitskreises über einer Sehne (Teil 1). Es sei s eine Sehne der Länge ℓ des Einheitskreises. Wir wollen die Länge des Bogens B über der Sehne s nach einem von Archimedes von Syrakus vorgeschlagenem Verfahren bestimmen. Dabei wird B durch Sehnenzüge Σ_n (mit $n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$) gleichlanger Sehnen angenähert. Die Länge einer Sehne von Σ_n werde mit b_n bezeichnet. Dabei ergibt sich b_{2n} aus b_n gemäß der folgenden Abbildung:

*Die bearbeiteten Übungsblatter sind bis 9:55 Uhr am 31. Oktober 2016 in den Analysis-Briefkasten einzuwerfen.



Eine Annäherung an die Länge des Bogens B liefert dann die Folge $(B_{2^k})_{k\in\mathbf{N}_0}$ mit $B_{2^k} = 2^k \cdot b_{2^k}$.

(a) Entwickle ein Verfahren zur rekursiven Berechnung von b_{2^k} und damit von B_{2^k}.

(b) Teste Dein Verfahren mit einem (Taschen-)Rechner mit dem Eingabewert $\ell = 2$.

(c) Schreibe für das Verfahren ein (Scheme-)Programm.

(Tip: Für betraglich sehr kleines ε tritt numerisch in einem Ausdruck der Form $1-\sqrt{1-\varepsilon}$ *Auslöschung* ein, also Verlust an Genauigkeit durch Subtraktion fast gleich großer Gleitkommazahlen. In diesem Falle gelingt die Vermeidung der Auslöschung durch eine einfache Termumformung: $1-\sqrt{1-\varepsilon} = \frac{(1-\sqrt{1-\varepsilon})\cdot(1+\sqrt{1-\varepsilon})}{1+\sqrt{1-\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon}}$.)

10. s. Binomialkoeffizienten. Für $a \in \mathbf{R}$ definieren wir die Folge der *Binomialkoeffizienten* $\binom{a}{n}$ für $n \in \mathbf{N}_0$ rekursiv durch

$$\binom{a}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{a}{n+1} := \frac{a-n}{n+1}\cdot\binom{a}{n}.$$

Seien im folgenden $a \in \mathbf{R}$ und m, $n \in \mathbf{N}_0$. Zeige:

(a) $\binom{a}{n} + \binom{a}{n+1} = \binom{a+1}{n+1}$.

Bemerkung. In dieser Gleichung ist für die speziellen Werte $a \in \mathbf{N}_0$ das Bildungsgesetz des *Pascalschen Dreiecks* enthalten. Dieses ist eine Funktionstafel für die Werte der Binomialkoeffizienten $\binom{a}{n}$ für a, $n \in \mathbf{N}_0$ mit $n \leq a$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

(b) Für $n \leq m$ gilt $\displaystyle\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

(c) Für $n > m$ gilt $\displaystyle\binom{m}{n} = 0$.

(d) $\displaystyle\binom{m}{n} \in \mathbf{N}_0$.
(Tip: Benutze (a).)