Dozent: PD Dr. Markus Junker
Assistent: Andreas Claessens

BLATT 3

(31.10.2016)

Aufgabe 1

Sei $(F_1 \dot{\vee} F_2)$ eine Abkürzung für $((F_1 \vee F_2) \wedge \neg(F_1 \wedge F_2))$ („ausschließlich oder“) und $(F_1|F_2)$ eine Abkürzung für $(\neg F_1 \wedge \neg F_2)$.

(i) Welche der „Junktoren“ $\dot{\vee}$, $|$, $\leftrightarrow$ sind assoziativ bis auf logischer Äquivalenz?

(ii) Zeigen Sie: $(F_1 \dot{\vee} F_2) \;\sim\; \neg(F_1 \leftrightarrow F_2)$

Aufgabe 2

Zeigen Sie

(i) $((F_1 \wedge F_2) \to F_3) \;\sim\; ((F_1 \to F_3) \vee (F_2 \to F_3))$
$((F_1 \vee F_2) \to F_3) \;\sim\; ((F_1 \to F_3) \wedge (F_2 \to F_3))$

(ii) $(F_1 \to (F_2 \wedge F_3)) \;\sim\; ((F_1 \to F_2) \wedge (F_1 \to F_3))$
$(F_1 \to (F_2 \vee F_3)) \;\sim\; ((F_1 \to F_2) \vee (F_1 \to F_3))$

(iii) $((F_1 \wedge F_2) \to F_3) \;\sim\; (F_1 \to (F_2 \to F_3))$

(iv) $\vdash \; ((F_1 \to F_2) \vee (F_2 \to F_3))$

(Hinweis: Umformungen sind eventuell schneller als Wahrheitstafeln)

Aufgabe 3

Sei $\mathfrak{B} = (B, \sqcap, \sqcup, ^{\mathrm{C}}, 1, 0)$ eine Boole'sche Algebra.

(i) Zeigen Sie $a \sqcap b = a \;\Leftrightarrow\; a \sqcup b = b$

(ii) Wir definieren die Relation $\leq$ auf $\mathfrak{B}$ durch $a \leq b$, wenn $a \sqcup b = a$ ist. Zeigen Sie, dass $\leq$ eine partielle Ordnung ist, d.h. dass sie reflexiv und transitiv ist.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die oben definierte partielle Ordnung $\leq$ auf der Lindenbaum-Algebra $\mathfrak{F}_i$, der Tarski-Lindenbaum-Algebra über den Aussagenvariablen $A_0, \ldots, A_{i-1}$.

(i) Zeigen Sie:

$$F/_\sim \leq G/_\sim \;\Leftrightarrow \vdash (F \to G) \;\Leftrightarrow\; F \vdash G$$

Definition: Ein Element a einer Boole'schen Algebra $\mathfrak{B}$ heißt *Atom*, wenn $a \neq 0$ und für jedes $b \in B$ aus $0 \leq b \leq a$ stets $b \in \{0, a\}$ folgt, d.h. a ist minimal bzgl. $\leq$ unter den Elementen $\neq 0$.

(ii) Zeigen Sie, dass es in $\mathfrak{F}_\infty$ keine Atome gibt.

(iii) Bestimmen Sie die Atome von $\mathfrak{F}_i$ für $i \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie, dass es für jede Formel $F \not\sim \perp$ ein Atom $A/_\sim$ gibt, mit $A/_\sim \leq F/_\sim$.

Abgabe bis Montag 07.11.2016, 10:15 Uhr,
im Briefkasten in Gebäude 51 (siehe Briefkastenaufschrift)
Auf die Abgaben gehören die Namen der Abgebenden und die Gruppennummer!!!