Gedankenaufschrieb zur Logik-Klausur WS 14/15

Bei Kebekus

Gedankenaufschrieb zur Logik-Klausur WS 14/15 bei Kebekus

Anmerkung

Dies ist ein Gedankenaufschrieb. Keine Garantie für Richtigkeit der Aufgaben (obwohl ich mir doch ziemlich sicher bin). Die Klausur dauerte 2 Stunden. Ein handschriftlicher DIN-A4-Zettel war als Hilfsmittel erlaubt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) *Bringen Sie die folgende Formel in KNF.*

b) *Bringen Sie die folgende Formel in DNF.*

$$((A \vee B) \leftrightarrow ((B \wedge C) \rightarrow A))$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar? Welche sind allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)
$$((A \to \neg B) \to \neg(C \wedge \neg A))$$

b)
$$((\neg(\neg A \vee B) \wedge \neg A) \to C)$$

c)
$$((\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg C) \to A)$$

d)
$$((\neg A \to C) \leftrightarrow \neg(C \vee A))$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei A_i eine aussagenlogische Variable, Φ_i eine aussagenlogische Formel, die wie folgt rekursiv definiert ist:

$$\Phi_0 = a_0$$
$$\Phi_n = \begin{cases} A_n \wedge \Phi_{n-1} & n\_gerade \\ A_n \vee \Phi_{n-1} & n\_ungerade \end{cases}$$

Und sei $\Gamma = \{\Phi_i, i \in \mathcal{N}\}$. Zeigen Sie, dass Γ erfüllbar ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien Φ und Ψ zwei semantisch äquivalente, aussagenlogische Formeln. Sei $\mathcal{E}$ eine weitere Formel. Sei A eine Variable. Sei $\mathcal{E}(A|\Psi)$ eine Formel, in der jedes A in $\mathcal{E}$ durch Ψ ersetzt wird, analog für $\mathcal{E}(A|\Phi)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}(A|\Phi)$ semantisch äquivalent ist zu $\mathcal{E}(A|\Psi)$. Hinweis: Dies können Sie z.B. induktiv über den Aufbau von $\mathcal{E}$ tun.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sind die folgenden Mengen Turing-berechenbar? Sind Sie rekursiv aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\{a_i | a_i \in \mathcal{N}\}$, wobei a_i rekursiv definiert wie folgt:
$a_0 = 2$
$a_1 = 3$
$a_{n+1} = a_n * a_{n-1}$

b) $\{P(t) | P$ ist ein Python-Skript, das auf die Eingabe t nicht stoppt $\}$.

c) $\{(P, t, t') | P(t)$ stoppt und $P(t')$ stoppt $\}$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Sei $L = \{\odot, c, \prec\}$ eine Sprache mit dem zweistelligen Funktionssymbol $\odot$, dem zweistelligen Prädikatensymbol $\prec$ und der Konstanten c. Außerdem gibt es die 3 Strukturen:
$A_1 = (\mathcal{Z}, +, 0, <)$
$A_2 = (\mathcal{N}, +, 0, <)$
$A_3 = (\mathcal{Z}, *, 2, <)$
Beweisen Sie, dass die Menge der geraden natürlichen Zahlen inklusive der 0 durch jede der drei Strukturen definiert werden kann.
Beweisen Sie außerdem, dass A_1 nicht isomorph ist zu A_2.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Sei $L = \{P, f, c, Q, R\}$ eine Sprache mit dem einstelligen Funktionssymbol f, dem einstelligen Prädikatensymbol P, der Konstanten c und den beiden zweistelligen Prädikatensymbolen Q und R. Außerdem gibt es die Formelmenge $\Gamma = \{\forall x(P(x) \land Q(x, c)), \forall x(R(x, f(x)))\}$

a) *Finden Sie eine L-Formel Φ, s.d. $\nvdash \Phi$ und $\nvdash \neg\Phi$.*

b) *Finden Sie zwei nicht-isomorphe L-Strukturen, die Γ erfüllen.*

c) *Sind folgende L-Formeln allgemeingültig? Sind Sie Tautologien? Begründen Sie Ihre Antwort.*
$\Phi_1 = (\forall x P(x) \lor \forall x Q(x, c))$
$\Phi_2 = ((\forall x P(x) \land \forall x Q(x, c)) \to \forall x Q(x, c)$
$\Phi_3 = ((\forall x P(x) \land \forall x Q(x, c)) \to Q(x, c)$
$\Phi_4 = (\exists x R(f(x), x))$