Erinnerung:

Syntax der Aussagenlogik

Aussagenvariablen $A_0, A_1, A_2, \ldots$

Junktoren $\bot \; \top \; \neg \; \wedge \; \vee \; \to \; \leftrightarrow$

Klammern ( )

Regeln Formeln sind $A_i \quad \bot \quad \top$

$\neg F \quad (F_1 \wedge F_2) \quad \ldots$

Variablen für Aussagenvariablen: A_i

A, B, C

etc.

2.2. Semantik der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik

Menge der Wahrheitswerte ist $\{0, 1\}$

falsch (0), wahr (1)

(als Boole'sche Algebra) ← kommt später

als angeordnete Menge $0 < 1$

manchmal (der Bequemlichkeit halber) als $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$

Eine Belegung (der Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten) ist eine Funktion $\beta : \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \{0,1\}$

Soll auf Menge der auss. Formeln fortgesetzt werden!

Jedem n-stelligen Junktor $*$ wird eine Fkt
$\overline{*} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ zugeordnet, und zwar

$$\overline{\top} = 1$$
$$\overline{\bot} = 0$$
$$\overline{\neg}(w) = 1 - w$$
$$\overline{\wedge}(v,w) = \min\{v,w\}$$
$$\overline{\vee}(v,w) = \max\{v,w\}$$
$$\overline{\to}(v,w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \le w \\ 0 & \text{falls } v > w \end{cases}$$
$$\overline{\leftrightarrow}(v,w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } v = w \\ 0 & \text{falls } v \neq w \end{cases}$$

$\top$	$\underline{\underline{t}}$rue
$\bot$	
$\vee$	$\underline{\underline{v}}$el … $\underline{\underline{v}}$el …
$\wedge$	
$\neg$	ähnlich wie Minus
$\to$	
$\leftrightarrow$	

Wenn F durch den n-stelligen Junktor $*$ aus $F_1, \ldots, F_n$ zusammengesetzt ist, dann soll sein

$$\beta(F) := \overline{*}(\beta(F_1), \ldots, \beta(F_n))$$

Kompositionalitätsprinzip / Kontextfreiheit

<u>Lemma:</u> Wenn F eine auss. Formel ist und β_1, β_2 Belegungen, die für alle in F vorkommenden Aussagenvariablen übereinstimmen, dann gilt $\beta_1(F) = \beta_2(F)$.

<u>Beweis</u>: offensichtlich (oder formal über Aufbau der Formel)

$\beta(F)$ heißt auch Wahrheitswerteverlauf von F

Bei n vorkommenden Aussagenvariablen sind zur Berechnung nur die 2^n (partielle) Belegungen dieser Aussagenvariablen nötig.

Berechnung z.B. Wahrheitstafel:

A_0	A_1	$\neg A_0$	$(\neg A_0 \to A_1)$	$\perp$	$((\neg A_0 \to A_1) \vee \perp)$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1

Def (a) F Tautologie / allgemeingültig $\qquad \vdash F$

$\beta(F) = 1$ für alle β

F erfüllbar:

es gibt ein β mit $\beta(F) = 1$

(b) F_1, F_2 äquivalent $\qquad F_1 \sim F_2$

$\beta(F_1) = \beta(F_2)$ für alle β

(c) F folgt (logisch) aus $\{F_i \mid \cancel{\exists}\ i \in I\}$

($\{\ldots\}$ impliziert F)

falls $\beta(F_i) = 1$ für alle $i \in I$, $\qquad \{F_i \mid i \in I\} \vdash F$

dann $\beta(F) = 1$ (für alle β)

insbesondere („ex falso quodlibet")

$$\{\bot\} \vdash F \qquad \text{für jede Formel } F$$

(d) $\{F_i \mid i \in I\}$ heißt <u>widersprüchlich</u>, falls es keine Belegung β gibt mit $\beta(F_i) = 1$ für alle $i \in I$,

andernfalls <u>widerspruchsfrei</u>.

Zusammenhänge:

<u>Lemma</u> (a) F ist Tautologie, d.h. $\vdash F$

$\iff \emptyset \vdash F$

$\iff F \sim \top$

$\iff \neg F$ ist nicht erfüllbar

(b) $F_1 \sim F_2$

$\Longleftrightarrow \quad \vdash (F_1 \leftrightarrow F_2)$

$\Longleftrightarrow \quad F_1 \vdash F_2$ und $F_2 \vdash F_1$

(c) $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash F$

abkürzend: $F_1, \dots, F_n \vdash F$

$\Longleftrightarrow ((\cdot\cdot((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \wedge \dots) \wedge F_n) \vdash F$

$\Longleftrightarrow \quad \vdash (((\cdot\cdot((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \wedge \dots) \wedge F_n) \rightarrow F)$

Viele Regeln:

- Doppelnegation $\neg\neg F \sim F$
- tertium non datur (ausgeschlossenes Drittes) $\vdash (F \vee \neg F)$
- Prinzip des ausgeschlossenen Widerspruchs: $(F \wedge \neg F)$ ist nicht erfüllbar
- $$\left.\begin{array}{l}(F_1 \wedge F_2) \sim (F_2 \wedge F_1) \\ ((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \sim (F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3)) \\ (F \wedge F) \sim F\end{array}\right\}$$ analog für $\vee$ statt $\wedge$

Distributivität: $((F_1 \vee F_2) \wedge F_3) \sim ((F_1 \wedge F_3) \vee (F_2 \wedge F_3))$

Absorption: $(F_1 \wedge (F_1 \vee F_2)) \sim F_1$

und für $\wedge$ und $\vee$ vertauscht!

- Regeln von de Morgan

$$\neg(F_1 \wedge F_2) \sim (\neg F_1 \vee \neg F_2)$$

$$\neg(F_1 \vee F_2) \sim (\neg F_1 \wedge \neg F_2)$$

- Definitionen

$$(F_1 \to F_2) \sim (\neg F_1 \vee F_2)$$

$$(F_1 \leftrightarrow F_2) \sim ((F_1 \to F_2) \wedge (F_2 \to F_1))$$

- Regeln für $\perp$ und $\top$

$$\neg \perp \sim \top$$

$$(F \wedge \perp) \sim \perp \qquad (F \wedge \top) \sim F \qquad \text{etc.}$$

__Notation__ $((\ldots((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \wedge \ldots\ldots) \wedge F_n)$

abkürzend: $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots\ldots \wedge F_n)$

oder $\bigwedge_{i=1}^{n} F_i$ oder $\bigwedge_{i \in \{1,\ldots,n\}} F_i$ oder $\bigwedge \{F_i \mid i = 1,\ldots,n\}$

__Spezialfall__ $n = 1$ $\bigwedge_{i=1}^{1} F_i = F_1$

$n = 0$ $\bigwedge_{i=1}^{0} F_i = \bigwedge_{i \in \emptyset} F_i = \top$

__Analog für Disjunktion!__

$$\bigvee_{i \in \emptyset} F_i = \bot$$

$$\bigwedge_{i\in I} F_i \sim \Big(\bigwedge_{i\in I_0} F_i \wedge \bigwedge_{i\in I_1} F_i\Big) \qquad (F \wedge \top) \sim F$$

$$I = I_1 \dot\cup I_2 \qquad (F \wedge \bot) \sim \bot$$

Def: Ein Literal ist eine Aussagenvariable A_i oder negierte Aussvar. $\neg A_i$

Formel ist in konjunktiver Normalform (KNF), falls die Form hat

$$((L_{11} \vee \dots \vee L_{1n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{k1} \vee \dots \vee L_{kn_k}))$$

und in disjunktiver Normalform (DNF), falls sie die Form hat

$$((L_{11} \wedge \dots \wedge L_{1n_1}) \vee \dots \vee (L_{k1} \wedge \dots \wedge L_{kn_k}))$$

mit Literalen L_{ij} und $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$

Satz: Jede Formel ist äquivalent zu einer Formel in KNF und zu einer Formel in DNF