Logik für Studierende der Informatik

Markus Junker

Wintersemester 2016/17
Version von 26. Oktober 2016

1 Einleitung

17. 10. 2016

Logik wird manchmal als die „Lehre vom korrekten Schließen“ bezeichnet. Untersuchungsobjekte der Logik sind Argumente, die typischerweise die Form

$$\begin{array}{l} \text{Prämisse 1} \\ \qquad\vdots \\ \text{Prämisse } n \\ \hline \text{Schlussfolgerung} \end{array}$$

annehmen. Untersucht wird, ob sich die Schlussfolgerung „logisch korrekt“ aus den Prämissen ergibt. Dabei bezieht sich logische Korrektheit üblicherweise nur auf die Form der Sätze unter Abstraktion von ihrem konkreten Inhalt. Logische Schlüsse lassen sich daher in einer formalen Sprache wiedergeben, weshalb Logik auch eine Theorie formaler Sprachen begründet. Logik ist daher aus mehreren Gründen für die Informatik interessant:

- Logik ist Grundlage aller Wissenschaft, insofern wissenschaftliche Argumentation logischen Standard genügen muss („Logik als Propädeutik“).
- Der Logik als eigener Disziplin lag auch immer schon der Gedanke der Berechenbarkeit logischer Schlüsse nahe, weshalb aus der Logik zu Beginn des 20. Jahrhunderts mit einer Theorie der Berechenbarkeit die theoretische Informatik entstanden ist, deutlich vor der Konstruktion der ersten Computer („Logik als historische Grundlage“).
- Die formale Sprache der Logik ist geeignet, um die Arbeitsweise von Programmen zu beschreiben, da eine Berechnung aus Eingaben einer Schlussfolgerung aus Prämissen entspricht.
- Methoden der Logik können helfen, Probleme der theoretischen Informatik zu beschreiben oder zu lösen.

Geschichte: ein paar Namen

- Aristoteles (384–322): Begründer der formalen Logik
- Ramon Llull (1232–1316): Idee einer „logischen Maschine“; Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716): binäre Rechenmaschine, Idee einer „universellen Maschine“
- George Boole (1815–1864), Charles Sanders Peirce (1839–1914), Gottlob Frege (1848–1925): moderne symbolische/formalisierte Logik
- Emil Post (1897–1954), Alonzo Church (1903–1995), Stephen Kleene (1909–1994), Alan Turing (1912–1954): Begründer der Berechenbarkeitstheorie /theoretischen Informatik

2 Aussagenlogik

2.1 Syntax

Aussagenlogische Formeln sind alle Zeichenfolgen (Zeichenketten), die nach den unten erläuterten Regeln aus den unten aufgeführten Zeichen (Symbolen) gebildet werden. Der besseren Kenntlichkeit halber werde ich Zeichen blau schreiben (wie z. B. $\to$), wenn Sie in ihrer Funktion als einzelne Zeichen, aus denen Zeichenketten zusammengesetzt sind, angesprochen sind (und auch Zeichenketten, die keine Formeln sind). Aussagenlogische Formeln werde ich rot schreiben (wie z. B. $(A_0 \to A_1)$), wenn die abgedruckte Zeichenfolge eine aussagenlogische Formel ist, und magenta (wie z. B. $(A_0 \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$) [1], wenn die abgedruckte Zeichenfolge eine Abkürzung für eine aussagenlogische Formel ist oder für eine variable aussagenlogische Formel steht.

Zeichen:

Aussagenvariablen	*Junktoren*		*Klammern*
A_0	nullstellig:	$\top$	(
A_1		$\bot$	)
A_2	einstellig:	$\neg$	
$\vdots$	zweistellig:	$\wedge$	
		$\vee$	
		$\to$	
		$\leftrightarrow$	

Es gibt also unendliche viele Aussagenvariablen. Jede soll dabei als ein einziges Zeiches gelten, also z. B. A_{398652} als ein Symbol. Die Junktoren heißen der Reihe nach: Verum, Falsum, Negations-, Konjunktions-, Disjunktions-, Impikations- und Biimplikations- (oder Äquivalenz-) Junktor. In einer Formel werden die letzten fünf Junktoren oft gelesen als *nicht* – *und* – *oder* – *wenn . . . dann* – *genau dann, wenn*.

Gleichzeitig mit den aussagenlogischen Formeln F wird ihre *Länge* $\mathrm{lg}(F)$ definiert und ihre *Schachtelungstiefe* $\mathrm{tf}(F)$, kurz Tiefe genannt.

Regeln:

- Jede Aussagenvariable bildet eine aussagenlogische Formel der Länge 1 und der Tiefe 0.
- $\top$ und $\bot$ sind aussagenlogische Formeln der Länge 1 und der Tiefe 1.
- Wenn F_1 und F_2 aussagenlogische Formeln sind, dann sind jeweils auch

  $\neg F_1$ (mit Länge $\mathrm{lg}(F_1) + 1$ und Tiefe $\mathrm{tf}(F_1) + 1$)

  $(F_1 \wedge F_2)$
  $(F_1 \vee F_2)$ (jeweils mit Länge $\mathrm{lg}(F_1) + \mathrm{lg}(F_2) + 3$
  $(F_1 \to F_2)$ und Tiefe $\max\{\mathrm{tf}(F_1), \mathrm{tf}(F_2)\} + 1$)
  $(F_1 \leftrightarrow F_2)$

  aussagenlogische Formeln.[2]

Die Menge der aussagenlogischen Formeln wird auch *aussagenlogische Sprache* genannt; für

[1] Man wird sehen, dass in diesem Beispiel die abgedruckte Zeichenfolge aus mehreren Gründen keine aussagenlogisch Formel ist: Es fehlen Klammern und . . . ist kein zulässiges Symbol: dies sind Abkürzungen; zudem ist A_n kein zulässiges Symbol, sondern steht als Variable für eines des Symbole A_0,A_1,A_2,. . .

[2] Mit $\neg F_1$ ist also die Zeichenkette gemeint, die man erhält, indem man das Zeichen $\neg$ vor die mit F_1 bezeichnete Zeichenkette setzt, und nicht etwa die Zeichenkette, die aus den beiden Symbolen $\neg$ und F_1 besteht, etc. Variablen für aussagenlogische Formeln stehen also immer für die Zeichenkette, welche die Formel bildet.

„aussagenlogische Formnel“ schreibe ich im Folgenden oft kurz „Formel“. Formeln der Länge 1 heißen auch *atomare Formeln*, alle anderen *zusammengesetzte Formeln*.

Es sind also z. B. A_{398652} und $\perp$ aussagenlogische Formeln der Länge 1;
$(A_{398652} \to \perp)$ ist eine aussagenlogische Formel der Länge 5 und der Tiefe 2;
$\neg(A_{398652} \to \perp)$ ist eine Formel der Länge 6 und der Tiefe 3.
$(\neg A_{398652} \to \perp)$ ist eine andere Formel der Länge 6, aber der Tiefe 2.
$(\neg(A_{398652} \to \perp) \vee (\neg A_{398652} \to \perp))$ ist eine Formel der Länge 15 und der Tiefe 4.
Die Zeichenkette $A_{398652} \to \perp$ ist keine aussagenlogische Formel, ebensowenig (A_{398652}).

Aussagenlogische Formeln sind *induktiv* definiert. Per Induktion „über den Aufbau der Formeln“ kann man Eigenschaften von Formeln definieren oder beweisen (präzise kann man dies auch per Induktion über die Länge oder die Tiefe tun). Dies soll an zwei Beispielen geschehen.

Eine *Teilformel* einer aussagenlogischen Formel F ist eine aussagenlogische Formel, die im Aufbauprozess von F auftritt. Präzise:

Definition 2.1.1 *Die Menge* $\mathrm{Tf}(F)$ *der Teilformeln von* F *und die Menge* $\mathrm{eTf}(F)$ *der* echten Teilformeln *von* F *sind per Induktion definiert durch:* [3]

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tf}(F) := \mathrm{eTf}(F) \cup \{F\}\\
&\mathrm{eTf}(A_i) = \mathrm{eTf}(\top) = \mathrm{eTf}(\perp) := \emptyset\\
&\mathrm{eTf}(\neg F) := \mathrm{Tf}(F)\\
&\mathrm{eTf}((F_1 \circ F_2)) := \mathrm{Tf}(F_1) \cup \mathrm{Tf}(F_2) \quad \textit{für jedes } \circ \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}
\end{aligned}
$$

Aussagenlogische Formeln sind *eindeutig lesbar*, d. h. der Aufbauprozess einer Formel ist eindeutig bestimmt. Dies wird durch Lemma 2.1.4 beschrieben. Wir brauchen zunächst eine Vorbereitung.

Definition 2.1.2 Klammerungen *sind Zeichenketten aus den Symbolen* (*und*), *die induktiv nach den folgenden Regeln gebildet werden:*

- *die leere Zeichenfolge ist eine Klammerung;*
- *wenn* κ_1 *und* κ_2 *Klammerungen sind, dann auch* $(\kappa_1\kappa_2)$.

Wenn $\kappa = z_1 \dots z_n$ *eine Klammerung ist mit* $z_i \in \{(,)\}$, *dann ist die Klammerungstiefe* $\mathrm{Kt}(\kappa, i)$ *von* κ *an der Stelle* $i \in \{0, \dots, n\}$ *die Anzahl der öffnenden Klammern unter* $z_1, \dots, z_i$ *minus die Anzahl der schließenden Klammern unter* $z_1, \dots, z_i$.

Beispiel:

Klammerung κ :		(	(	(	)	)	(	)	)
$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{Kt}(\kappa, i) =$	0	1	2	3	2	1	2	1	0

Klar ist: Wenn man in einer aussagenlogischen Formel F alle Zeichen außer den Klammern entfernt, erhält man eine Klammerung $\kappa(F)$.

Lemma 2.1.3 *Falls* κ *eine Klammerung der Länge* n *ist, so gilt* $\mathrm{Kt}(\kappa, i) \geqslant 0$ *für alle* i *und* $\mathrm{Kt}(\kappa, i) = 0 \iff i \in \{0, n\}$.

Für $n > 0$ *und* $\kappa = (\kappa_1\kappa_2)$ *gilt* $\mathrm{Kt}(\kappa, i) = 1 \iff i \in \{1, \lg(\kappa_1) + 1, n - 1\}$.

[3] Merken muss man sich den Begriff der Teilformel, die Notationen Tf und eTf dagegen nicht.

Beweis: Für die leere Klammerung und die eindeutige Klammerung $()$ der Länge 2 sind die Eigenschaften offensichtlich. Sei also $\kappa = (\kappa_1\kappa_2)$ mit Klammerungen κ_1, κ_2 der Länge l bzw. $n-2-l$. Dann gilt $\mathrm{Kt}(\kappa, i) = 1+\mathrm{Kt}(\kappa_1, i-1)$ für $0 < i \leqslant l+1$ und $\mathrm{Kt}(\kappa, i) = 1+\mathrm{Kt}(\kappa_2, i-(l+1))$ für $l+1 \leqslant i < n$. Per Induktion über die Länge der Klammerung folgt nun alles leicht. $\square$

Lemma 2.1.4 (eindeutige Lesbarkeit aussagenlogischer Formeln) *Eine Formel F der Länge $\lg(F) > 1$ ist entweder von der Form $\neg F_1$ oder von der Form $(F_1 \circ F_2)$. Dabei ist die Zerlegung jeweils eindeutig, d. h. wenn $\neg F_1 = \neg F_1'$, dann ist $F_1 = F_1'$ und wenn $(F_1 \circ F_2) = (F_1' * F_2')$ mit $\circ, * \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, dann ist $\circ = *$, $F_1 = F_1'$ und $F_2 = F_2'$.*

Beweis: Da F nach den Zusammensetzungsregeln aussagenlogischer Formeln entweder mit $\neg$ oder mit $($ beginnen muss und da man $\neg F_1$ im ersten Fall durch Weglassen des Negationsjunktors erhält, ist alles bis auf den letzten Teil offensichtlich. Sei also $(F_1 \circ F_2) = (F_1' * F_2')$ wie oben. Nun betrachtet man die zugrundeliegende Klammerung $\kappa = \kappa((F_1 \circ F_2)) = \kappa((F_1' * F_2'))$. Klar ist wiederum: F_1 beginnt mit $($ genau dann, wenn F_1' mit $($ beginnt, und F_2' endet mit $)$ genau dann, wenn F_2' mit $)$ endet. Wenn beides der Fall ist, zerlegt sich nach Lemma 2.1.3 κ in $(\kappa_1\kappa_2)$ mit $\kappa_1 \neq \emptyset \neq \kappa_2$, und die eindeutige Trennstelle von κ_1 und κ_2 gibt die Position von $\circ$ und von $*$ an. Ansonsten ist $\kappa = (\kappa')$ und die Klammerung κ' ist entweder die leere Klammerung – nämlich genau dann, wenn F_1 und F_2 atomar sind – oder $\kappa' = \kappa(F_1) = \kappa(F_1')$ – nämlich genau dann, wenn F_1 und F_1' mit $($ beginnen und F_2 und F_2' nicht mit $)$ enden – oder $\kappa' = \kappa(F_2) = \kappa(F_2')$ im umgekehrten Fall. In jedem Fall stehen $\circ$ und $*$ an der gleichen Position, und sind daher insbesondere auch gleich. $\square$

In selber Art kann man beweisen:

Lemma 2.1.5 *Kein echtes Anfangsstück einer aussagenlogischen Formel ist selbst eine aussagenlogische Formel.*

Lemma 2.1.6 (Substitution von Teilformeln) *Wenn F' eine aussagenlogische Formel ist und H, H' Zeichenfolgen, so dass $F = HF'H'$ eine aussagenlogische Formel ist, dann ist F' eine Teilformel von F. Wenn G eine weitere aussagenlogische Formel ist, dann ist auch HGH' eine aussagenlogische Formel.*

Bemerkung 2.1.7 Die präsentierte Syntax der Aussagenlogik ist eine mögliche Variante, wie man eine aussagenlogische Sprache einführen kann. Andere Autoren haben andere Varianten, die sich

- in den Symbolen für die Aussagenvariablen und Junktoren,
- in der Auswahl der Junktoren
- und in der Klammerungsweise

unterscheiden können. Die Darstellung von Formeln, die mit zweistelligen Junktoren zusammengesetzt sind, orientiert sich an der üblichen symbolischen Schreibweise von z. B. Addition und Multiplikation zwischen den Argumenten. Daneben gibt es Notationen, die sich an der abstrakten Funktionsschreibweise $f(x, y)$ orientieren. Statt z. B. $(\neg A_{398652} \to \bot)$ schreibt man dann $\to (\neg(A_{398652}), \bot)$ bzw. klammer- und kommafrei $\to \neg A_{398652}\bot$ („polnische Notation"), oder $A_{398652}\neg\bot \to$ („umgekehrte polnische Notation"). Diese Schreibweisen haben den Vorteil, dass man ohne Klammern auskommt, aber den Nachteil einer für Menschen schlechteren Lesbarkeit.

2.2 Semantik der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik

24. 10. 2016

Die Menge der *Wahrheitswerte* sei $\{0,1\}$ als angeordnete Menge mit $0 < 1$. Der Wahrheitswert 0 heißt auch *falsch*, der Wahrheitswert 1 *wahr*. Bei Bedarf wird die Menge der Wahrheitswerte mit dem Körper $\mathbb{F}_2$ identifiziert, so dss die arithmetischen Operationen $+$ und $\cdot$ benutzt werden können. Eine *Belegung* (der Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten) ist eine Abbildung $\beta : \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{0,1\}$.

Jede Belegung kann über die nächste Festlegeung induktiv zu einer Funktion fortgesetzt werden, die jeder aussagenlogischen Formel F einen Wahrheitswert $\beta(F)$ zuordnet. Dazu muss jedem n-stelligen Junktor $*$ eine n-stellige Funktion $\overline{*} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ zugeordnet werden. Dies geschieht folgendermaßen:[4]

$$\begin{aligned}
&\overline{\top}(w) := 1 && \overline{\bot}(w) := 0 && \overline{\neg}(w) := 1 - w\\
&\overline{\wedge}(v,w) := \min\{v,w\} && \overline{\vee}(v,w) := \max\{v,w\}\\
&\overline{\Rightarrow}(v,w) := \begin{cases} 1 & v \leqslant w \\ 0 & v > w \end{cases} && \overline{\Leftrightarrow}(v,w) := \begin{cases} 1 & v = w \\ 0 & v \neq w \end{cases}
\end{aligned}$$

Wenn nun eine aussagenlogische Formel F mithilfe des n-stelligen Junktors $*$ aus den Formeln $F_1,\ldots,F_n$ zusammengesetzt ist, so setzt man

$$\beta(F) := \overline{*}\big(\beta(F_1),\ldots,\beta(F_n)\big).$$

In polnischer Notation hätte man also $\beta(*F_1 \ldots F_n) = \overline{*}\big(\beta(F_1),\ldots,\beta(F_n)\big)$.

Das Prinzip, dass sich der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Formel F unabhängig von der konkreten Gestalt der Teilformeln nur aus dem führenden Junktor und den Wahrheitswerten der Teilformeln berechnet, heißt *Kompositionalitätsprinzip*. Es beinhaltet auch die *Kontextfreiheit*, die bedeutet, dass die Berechnung unabhängig davon ist, in welcher umfassenderen Formel F als Teilformel vorkommen mag.

Lemma 2.2.1 *Wenn F eine aussagenlogische Formel ist und β_1, β_2 zwei Belegungen sind, die für alle Aussagenvariablen, die in F vorkommen, übereinstimmen, dann gilt $\beta_1(F) = \beta_2(F)$.*

Beweis: Offensichtlich. Formaler Beweis über den Aufbau der Formel. □

$\beta(F)$ nennt man auch den *Wahrheitswertverlauf* von F. Aufgrund des Lemmas braucht man bei n vorkommenden Aussagenvariablen nur 2^n partielle Belegungen auszuwerten, um den Wahrheitswertverlauf zu bestimmen (wobei mit „partiellen belegungen" Belegungen nur der in F vorkommenden Aussagenvariablen gemeint sind). Dies kann man übersichtlich in einer *Wahrheitstafel* tun, z. B.:

A_0	A_1	$\neg A_0$	$(\neg A_0 \to A_1)$	$\bot$	$((\neg A_0 \to A_1) \vee \bot)$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1

[4]Man kann diese Definition problemlos auf eine Boolesche Algebra von Wahrheitswerten ausdehnen; bei der Negation müsste statt $1 - w$ dann allgemeiner das Komplement von w stehen.

Definition 2.2.2 *(a) Eine aussagenlogische Formel F heißt* Tautologie *oder* allgemeingültig*, in Zeichen:* $\vdash F$*, falls* $\beta(F) = 1$ *für alle Belegungen* β*.*

F *heißt* erfüllbar *oder* konsistent*, falls es eine Belegung* β *gibt mit* $\beta(F) = 1$*.*

(b) Zwei aussagenlogische Formeln F_1*,* F_2 *heißen* (logisch) äquivalent *zueinander, in Zeichen:* $F_1 \sim F_2$*, falls* $\beta(F_1) = \beta(F_2)$ *für alle Belegungen* β*.*

(c) Eine aussagenlogische Formel F *wird von einer Menge von Formeln* $\{F_i \mid i \in I\}$ impliziert *(oder* folgt (logisch) *aus dieser Menge), in Zeichen:* $\{F_i \mid i \in I\} \vdash F$*, falls* $\beta(F) = 1$ *für jede Belegung* β*, die für alle* $i \in I$ *die Bedigung* $\beta(F_i) = 1$ *erfüllt.*

(d) Eine Menge von Formeln $\{F_i \mid i \in I\}$ *heißt* widerspruchsfrei *oder* erfülltbar*, falls es eine Belegung* β *gibt mit* $\beta(F_i) = 1$ *für alle* $i \in I$*, und andernsfalls* widersprüchlich.

Für $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash F$ schreibt man auch kurz $F_1, \dots, F_n \vdash F$.

Man beachte, dass aus der Definition das *ex-falso-quodlibet*-Prinzip folgt, d. h. dass jede Formel aus einer widersprüchlichen Formelmenge folgt. Insbesondere gilt $\perp \vdash F$ für jede Formel F.

Lemma 2.2.3
(a) F *ist Tautologie, d. h.* $\vdash F \iff F \sim \top \iff \emptyset \vdash F \iff \neg F$ *ist nicht erfüllbar.*

(b) $F_1 \sim F_2 \iff \vdash (F_1 \leftrightarrow F_2) \iff F_1 \vdash F_2$ *und* $F_2 \vdash F_1$

(c) $F_1, \dots, F_n \vdash F \iff ((\cdot(F_1 \wedge F_2) \wedge \dots) \wedge F_n) \vdash F \iff \vdash (((\cdot(F_1 \wedge F_2) \wedge \dots) \wedge F_n) \to F)$

Beweis: Übung. □

[Dieser Teil muss noch ausgearbeitet werden:

Es gelten nun die folgenden Regeln: Doppelnegation, Tertium non datur, ausgeschlossenes Drittes Kommutativität und Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$ Regeln von de Morgan Definition von $\to$ und $\leftrightarrow$ uniforme Substitution und äquivalente Substitution ...]

Wir benutzen folgende Abkürzungen:

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \text{ oder } \bigwedge_{i=1}^{n} F_i \text{ für } ((\cdot(F_1 \wedge F_2) \wedge \dots) \wedge F_n)$$
$$(F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n) \text{ oder } \bigvee_{i=1}^{n} F_i \text{ für } ((\cdot(F_1 \vee F_2) \vee \dots) \vee F_n)$$

Für $n = 1$ ist dabei $(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) = \bigwedge_{i=1}^{1} F_i = F_1$ und $(F_1 \vee \dots \vee F_n) = \bigvee_{i=1}^{1} F_i = F_1$; für $n = 0$ ist $(F_1 \wedge \dots \wedge F_0) = \bigwedge_{i \in \emptyset} F_i = \top$ und $(F_1 \vee \dots \vee F_0) = \bigvee_{i \in \emptyset} F_i = \perp$.

Definition 2.2.4 *Ein* Literal *ist eine aussgenlogische Formel, die entweder eine Aussagenvariable* A_i *oder eine negierte Aussagenvariable* $\neg A_i$ *ist.*

Eine Formel ist in disjunktiver Normalform *bzw.* konjunktiver Normalform*, wenn sie die Form*

$$((L_{11} \wedge \dots \wedge L_{1n_1}) \vee \dots \vee (L_{k1} \wedge \dots \wedge L_{kn_k}))$$
$$\textit{bzw. } ((L_{11} \vee \dots \vee L_{1n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{k1} \vee \dots \vee L_{kn_k}))$$

mit Literalen L_{ij} *und* $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ *hat.*

Lemma 2.2.5 *Jede Formel ist logisch äquivalent zu einer Formel in disjunktiver Normalform und logisch äquivalent zu einer Formel in konjunktiover Normalform.*

Beweis: (a) Kodieren der Wahrheitstafel!

(b) Umformungen! □

Definition 2.2.6 *Eine Menge von Junktoren J heißt* vollständiges Junktorensystem*, wenn es zu jedem n und jeder n-stelligen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ eine aussagenlogische Formel F gibt mit diesem Wahrheitswertverlauf, d. h. eine Formel, in der nur die Aussagenvariablen $A_1, \ldots, A_n$ vorkommen und für die $\beta(F) = f(\beta(A_1), \ldots, \beta(A_n))$ gilt für alle Belegungen β. (Insbesondere ist jede aussagenlogische Formel logisch äquivalent zu einer Formel, in der alle vorkommenden Junktoren aus J stammen.)*

Folgerung 2.2.7 $\{\neg, \vee, \wedge, \bot, \top\}$ *ist ein vollständiges Junktorensystem.*

Wegen $\bot \sim \neg\top$, $\top \sim (A_0 \vee \neg A_0)$ und den Regeln von de Morgan gilt sogar:

Satz 2.2.8 $\{\neg, \wedge\}$ *und* $\{\neg, \vee\}$ *bilden vollständige Junktorensysteme.*