BLATT 7

(28.10.2016)

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{L} = \{R_0, R_1, f_0, f_1, c_0, c_1\}$, wobei R_0 ein ein- und R_1 ein zweistelliges Relationszeichen ist, f_0 ein ein- und f_1 ein zweistelliges Funktionszeichen und c_0, c_1 Konstantenzeichen sind. Sind folgende Zeichenfolgen $\mathcal{L}$-Terme? Geben Sie in den negativen Fällen eine kurze Begründung an.

(a) $f_0 f_0 f_1 c_0 c_1$	(b) $f_0 f_1 f_0 c_0 c_1$	(c) $v_0 v_2$	(d) $f_1 f_0 f_1 c_1 c_0$
(e) $f_1 v_0 R_0 c_0$	(f) $f_1 v_2 f_0 f_1 c_0 v_2$	(g) $f_1 f_0 c_0 f_0 f_0 f_0$	(h) $f_1 v_0 f_1 f_1 c_0 f_1 c_0 f_0 c_1 f_1 f_0 c_0 v_3$

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{L}$ wie in Aufgabe 1 definiert. Welche der folgenden Zeichenfolgen sind $\mathcal{L}$-Formeln? Geben Sie in den negativen Fällen eine kurze Begründung an.

(a) $\exists v_1 \exists v_1\ R_0 v_1$	(b) $\neg f_1 v_0 \doteq c$	(c) $\exists c_1\ R_1 c_1 c_1$	(d) $\exists v_1\ (R_1 v_2 v_0 \wedge R_0 v_0)$
(e) $(\exists v_0\ f c_0 v_0 \vee R_0 c_1)$	(f) $R_0 v_0 v_2$	(g) $v_2 \doteq \neg v_1$	(h) $\forall v_0 \exists v_2\ (R_1 v_0 v_2)$

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{L} = \{R_0, R_1, c_0\}$; dabei sei R_0 ein ein- und R_1 ein zweistelliges Relationszeichen und c_0 ein Konstantenzeichen. Wir betrachten einen gerichteten Graphen M, bei dem die Knoten blau gefärbt sein können, als $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$. Wir interpretieren $c_0^{\mathcal{M}}$ als einen beliebigen Knoten in M, $R_0^{\mathcal{M}} = \{x \in M \mid x \text{ ist blau}\}$ und $R_1^{\mathcal{M}}$ als Kantenrelation. Drücken Sie die folgenden Aussagen als $\mathcal{L}$-Formeln aus.

(a) Es gibt keine Schleifen.

(b) Auf den blauen Knoten sind die Kanten symmetrisch.

(c) Wenn c_0 blau ist, dann gibt es keine Senken.

(d) Es gibt genau 3 blaue Senken.

(e) c_0 ist eine globale Quelle.

(f) Jeder Pfad der Länge 4 geht durch einen blauen Punkt.

(g) Es gibt unendlich viele blaue Punkte.

(h) Es gibt keine geschlossenen Pfade.

Hinweis: die beiden letzten Aussagen lassen sich nicht durch eine einzige Formel ausdrücken.

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgende Formeln

$$\begin{aligned} F &= (\ldots((A_n \to A_{n-1}) \to A_{n-2}) \to \cdots \to A_0) \\ G &= (A_0 \to \cdots \to (A_{n-2} \to (A_{n-1} \to A_n))\ldots) \\ H &= (\ldots((A_n \leftrightarrow A_{n-1}) \leftrightarrow A_{n-2}) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_0) \end{aligned}$$

Zeigen Sie

(a) Für $n \geq 1$ gilt $\beta(F) = 1$ genau dann, wenn $\min\{i \mid \beta(A_i) = 1\}$ gerade ist. Hierbei ist $\min(\emptyset) = n + 1$

(b) Für $n \geq 1$ gilt $\beta(G) = 0$ genau dann, wenn $\beta(A_n) = 0$ und $\beta(A_0) = \cdots = \beta(A_{n-1}) = 1$.

(c) Für $n \geq 1$ gilt $\beta(H) = 1$ genau dann, wenn $(n + 1) - |\{i \mid \beta(A_i) = 1\}|$ gerade ist.

Abgabe bis Montag 05.12.2016, 10 Uhr,
im Briefkasten in Gebäude 51 (siehe Briefkastenaufschrift)
Auf die Abgaben gehören die Namen der Abgebenden und die Gruppennummer!!!