Kapitel 1 – Grundlagen

1. Mathematische Grundlagen

2. Beispielrechner ReTI

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

UNI FREIBURG

Dr. Tobias Schubert, Dr. Ralf Wimmer

Professur für Rechnerarchitektur

WS 2016/17

Mathematische Grundlagen

- Verständigung auf gemeinsame Basis
- Die meisten Begriffe sollten bekannt sein, bzw. werden in anderen Vorlesungen noch formal und im Detail eingeführt.
- Hier: Informale, möglichst intuitive Einführung
  - Mengen, Funktionen, Relationen
  - Boolsche Algebra $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg)$
  - Graphen, O-Notation
  - Beweistechniken

„Philosophie" der Mathematik

- Gegeben gewisse Aussagen (Axiome), welche andere Aussagen lassen sich aus ihnen herleiten?
- Sind die Axiome wahr und existiert eine solche Herleitung (Beweis), so sind die Folgerungen unumstößlich und indiskutabel wahr!
- Beschreiben die Axiome etwa ein physikalisches System, so gelten die hergeleiteten Folgerungen für dieses System.
- Die Frage, ob Axiome Realitätsbezug haben, ist aber außerhalb der (reinen) Mathematik!

Menge (Naive Definition)

Definition

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohldefinierten, paarweise verschiedenen Objekten zu einem Ganzen.

- Die Objekte nennt man Elemente der Menge.
  (Für eine formal vollständige Definition der Menge bräuchte man mehrere Vorlesungsstunden.)

- Notation: Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ paarweise verschieden, so schreibt man die Menge M, die aus ihnen besteht, als $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
  - $a_i \in M$ bezeichnet, dass a_i Element von M ist.

Beispiele für Mengen

- Leere Menge: $\varnothing$ (es gibt kein $a \in \varnothing$).
- Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- Menge der booleschen Werte: $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.
- Achtung: Die Anordnung von Elementen der Menge und gegebenenfalls Wiederholungen sind belanglos: $\{a, b, c\} = \{c, a, b\} = \{a, a, b, c, a, b\}$.
- Eine Menge kann Elemente enthalten, die selber Mengen sind, z.B. $\{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$.

Spezifikation von Mengen

- Man kann eine Menge durch Angabe von Zusatzbedingungen spezifizieren.

  Beispiele:

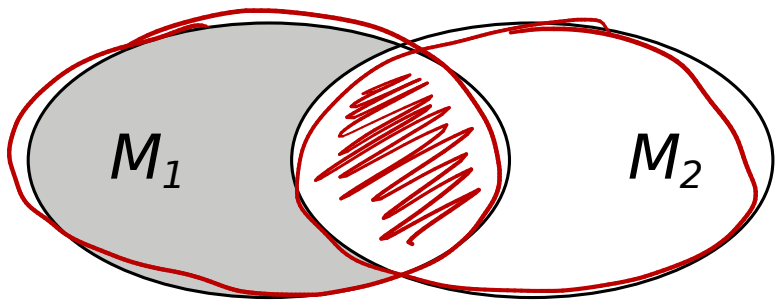
  - Menge der ganzen Zahlen:
    $\mathbb{Z} = \{z, -z \mid z \in \mathbb{N}\}$.
  - Menge der rationalen Zahlen:
    $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, p, q \text{ teilerfremd}\}$.
  - Menge der endlichen Zeichenketten:
    $STRINGS = \{s_1 s_2 \ldots s_n \mid n \in \mathbb{N}, s_i \text{ ein Buchstabe}\}$.

Untermengen, Potenzmenge, Mächtigkeit

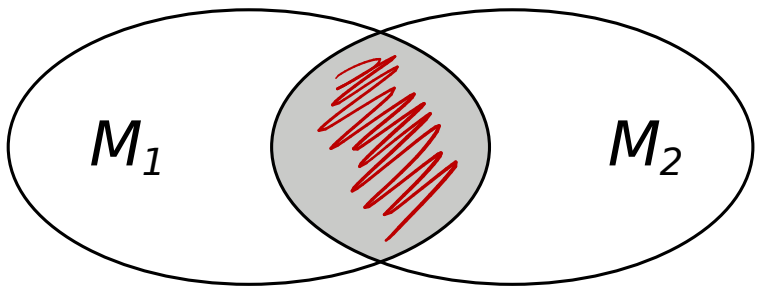
- Menge U ist Untermenge von M, wenn jedes Element von U auch Element von M ist.
  - Notation: $U \subset M$ bzw. $M \supset U$
  - Achtung: $\{a\} \subset \{a,b,c\}$, aber $a \in \{a,b,c\}$
- Potenzmenge von M : $Pot(M) = \{m \mid m \subset M\}$.
  - $Pot(\{a,b,c\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
- Die Anzahl $|M|$ der Elemente einer Menge M heißt Mächtigkeit oder Kardinalität von M.

Operationen auf Mengen 1/2

- Mengendifferenz: $M_1 \setminus M_2 = \{m \mid m \in M_1 \text{ und } m \notin M_2\}$

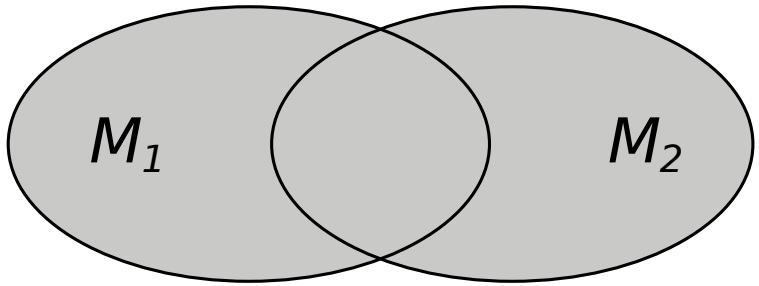


- Mengenschnitt: $M_1 \cap M_2 = \{m \mid m \in M_1 \text{ und } m \in M_2\}$



Operationen auf Mengen 2/2

- Mengenvereinigung: $M_1 \cup M_2 = \{m \mid m \in M_1 \text{ oder } m \in M_2\}$



- Kartesisches Produkt:

$$M_1 \times M_2 = \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1 \text{ und } m_2 \in M_2\}$$

  - (m_1, m_2) ist ein Tupel, bei dem es, im Gegensatz zu einer Menge $\{m_1, m_2\}$, auf die Reihenfolge ankommt!
  - Notation: $M^n = M \times \cdots \times M$ (n mal).

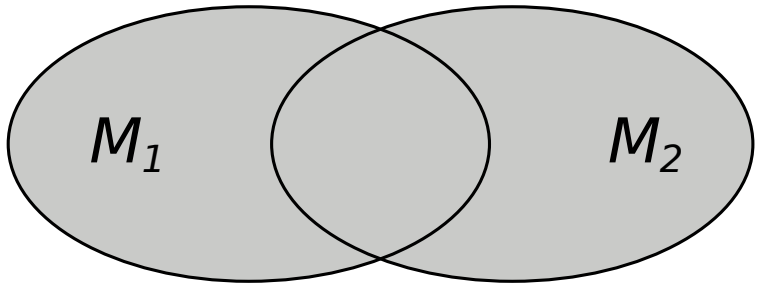
$\hookrightarrow \{m_2, m_1\}$

$= \{(m_1, \ldots, m_n) \mid m_1 \in M, m_2 \in M, \ldots, m_n \in M\}$

$M^2 = M \times M$

Operationen auf Mengen 2/2

- Mengenvereinigung: $M_1 \cup M_2 = \{m \mid m \in M_1 \text{ oder } m \in M_2\}$



- Kartesisches Produkt:

$$M_1 \times M_2 = \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1 \text{ und } m_2 \in M_2\}$$

  - (m_1, m_2) ist ein Tupel, bei dem es, im Gegensatz zu einer Menge $\{m_1, m_2\}$, auf die Reihenfolge ankommt!
  - Notation: $M^n = M \times \cdots \times M$ (n mal).

SMILE – Mengen

El. ∈ UM	1	2	3	4	5
UM_1	0	1	0	1	0
UM_2	1	1	0	0	0

Frage: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a. $\text{Pot}(\{la, le, lu\}) = \{\emptyset, \{la\}, \{le\}, \{lu\}, \{la, le\}, \{la, lu\}, \{le, lu\}, \{la, le, lu\}\}$ — 3 Elemente → $2^3 = 8$ — Gilt

b. $|Pot(\{1,2,3,4,5\})| = 32$ — unknown

c. $\{a, a, b, c\} \setminus \{a, b\} = \{a, c\}$ — gilt nicht!

d. $|\{a, a, b, c\}| = 3$ — gilt

e. $(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ — gilt nicht!

$2^5 = 32$

$\{a, a, b, c\} = \{a, b, c\}$

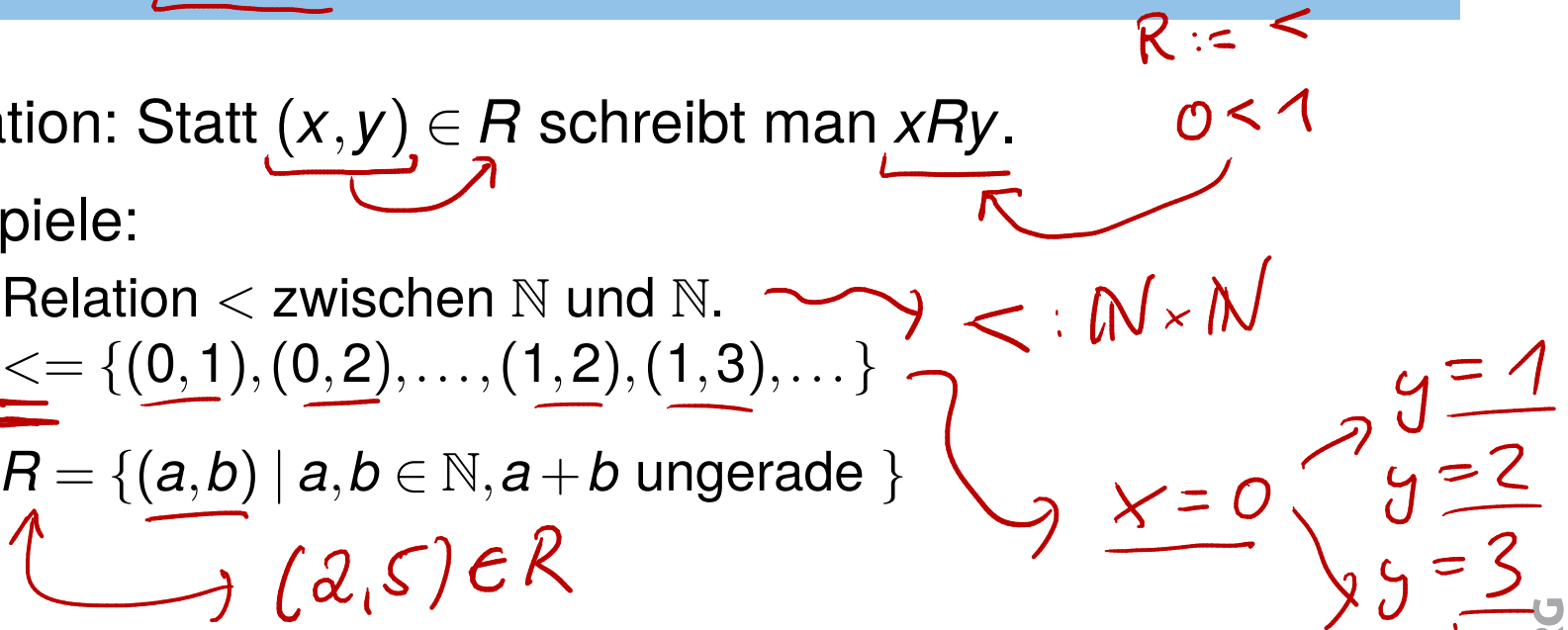
$\{a, b, c\} \setminus \{a, b\} = \{c\}$

Relationen

Definition

Eine Relation R zwischen den Mengen X und Y ist eine Teilmenge von $X \times Y$.

- Notation: Statt $(x,y) \in R$ schreibt man xRy.
- Beispiele:
  - Relation $<$ zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$.
    $<= \{(0,1),(0,2),\ldots,(1,2),(1,3),\ldots\}$
  - $R = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}, a+b \text{ ungerade } \}$



Funktionen

Definition

Seien X und Y Mengen. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist eine Relation zwischen den Mengen X und Y, wobei für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert, so dass $(x,y) \in f$.

- X heißt Definitionsbereich, Y Wertebereich von f.

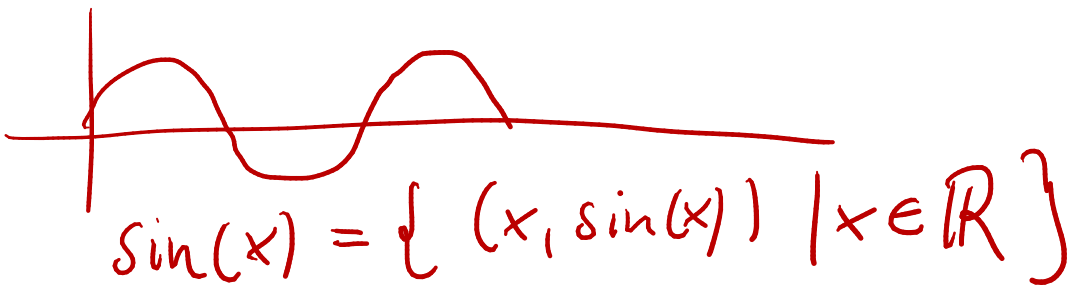
- Notation: Statt $(x,y) \in f$ schreibt man $y = f(x)$.

- Beispiele:
  - Quadratfunktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x^2$.
    $f = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25),\dots\}$
  - Kardinalitätsfunktion $f : Pot(\{a,b,c\}) \to \mathbb{N}$.
    $f = \{(\varnothing,0),(\{a\},1),(\{b\},1),(\{c\},1),(\{a,b\},2),$
    $(\{a,c\},2),(\{b,c\},2),(\{a,b,c\},3)\}$

Beispiele: Relationen, Funktionen

- Jede Funktion ist auch eine Relation. ✓
- Aber es gibt natürlich Relationen, die keine Funktionen sind. (liegt an dem „genau" in Def. Folie 12)
- Beispiel:
  - $\sin^{-1}(x) = \{(\sin(x), x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist eine Relation, aber keine Funktion!

Wertebereich — Bildbereich



Summen und Produkte (Notation)

- Wir schreiben für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

$$\prod_{i=m}^{n} f(i) = f(m) \cdot f(m+1) \cdot \cdots \cdot f(n-1) \cdot f(n)$$

- Beispiel:

$$\sum_{i=0}^{5} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

- Schreibweise mit beliebigen Bedingungen:

$$\sum_{i,j>0, i+2j\leq 5} (i^2/j) = (1^2/1) + (1^2/2) + (2^2/1) + (3^2/1) = 14{,}5$$

$i \in \{1,2,3\}$

$j \in \{1,2\}$

Boolesche Algebra $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg)$ 1/4

Definition

- $\mathbb{B} := \{0,1\}$
- Konjunktion (UND-Verknüpfung) $\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$
  $0 \wedge 0 = 0, \quad 0 \wedge 1 = 0, \quad 1 \wedge 0 = 0, \quad 1 \wedge 1 = 1$
- Disjunktion (ODER-Verknüpfung) $\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$
  $0 \vee 0 = 0, \quad 0 \vee 1 = 1, \quad 1 \vee 0 = 1, \quad 1 \vee 1 = 1$
- Negation $\neg : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$
  $\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0$
- Boolescher Ausdruck
  - Die Elemente aus $\mathbb{B}$ sind boolesche Ausdrücke.
  - Seien A und B boolesche Ausdrücke, dann sind $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$ wieder boolesche Ausdrücke.

Boolesche Algebra $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg)$ 2/4

Konventionen

- Man schreibt auch $\cdot$ statt $\wedge$ und $+$ statt $\vee$.
- Für $\neg x$ sind viele Notationen üblich: $\sim x$, x' oder $\overline{x}$.
- Zur Vereinfachung der Notation bei booleschen Ausdrücken vereinbaren wir:
  Negation $\sim$ bindet stärker als Konjunktion $\cdot$, Konjunktion $\cdot$ bindet stärker als Disjunktion $+$.

Boolesche Algebra $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg)$ 3/4

Axiome der booleschen Algebra

Kommutativität:
$$x + y = y + x$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$

Assoziativität:
$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Absorption: Auslöschung
$$x + (x \cdot y) = x$$
$$x \cdot (x + y) = x$$

$x = 1 \rightarrow 1 \vee (1 \cdot y) = 1 = x$

$x = 0 \rightarrow 0 \vee (0 \cdot y) = 0 \vee 0 = 0 = x$

Distributivität:
$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$
$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Komplement:
$$x + (y \cdot \neg y) = x$$
$$x \cdot (y + \neg y) = x$$

immer gleich

$(0 \wedge \neg 0) = 0 \wedge 1 = 0$

$(1 \wedge \neg 1) = 1 \wedge 0 = 0$

Boolesche Algebra $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg)$ 3/4

Axiome der booleschen Algebra

Kommutativität:	$x + y = y + x$
	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität:	$x + (y + z) = (x + y) + z$
	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Absorption:	$x + (x \cdot y) = x$
	$x \cdot (x + y) = x$
Distributivität:	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
Komplement:	$x + (y \cdot \neg y) = x$
	$x \cdot (y + \neg y) = x$

SMILE – Boolesche Ausdrücke

$13 = 42$ ↯ gleichbed. mit $13 \neq 42$

Frage: Welche dieser Umformungen Boolescher Ausdrücke sind richtig? Das heißt, die Gleichung ist immer erfüllt für alle möglichen Werte von $x, y \in \mathbb{B}$.

a. $x + 1 = 1 + x \cdot y$ $\Leftarrow$ $1 = 1$

b. $x + \neg x = x$ $x = 0 \rightarrow 0 + 1 \neq 0$ ↯

c. $(x \cdot (\neg x + (y \cdot \neg y))) = x$

$y \cdot \neg y = 0$

$\neg x + 0$

$\neg x$

$x \cdot \neg x = 0$

$\Rightarrow 0 = x$

↯ x kann auch 1 sein $\Rightarrow 0 = 1$ ↯

Boolesche Algebra $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg)$ 4/4

- Neben der vorgestellten gibt es weitere boolesche Algebren, in denen diese Axiome gelten.
- Die folgenden Regeln sind aus den Axiomen ableitbar:

Weitere Regeln für boolesche Algebren

Doppeltes Komplement: $\neg(\neg x) = x$

Idempotenz: $x + x = x \cdot x = x$

De-Morgan-Regel: $\neg(x + y) = (\neg x) \cdot (\neg y)$

$\neg(x \cdot y) = (\neg x) + (\neg y)$

Consensus-Regel: $(x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z)$

$= (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) + (y \cdot z)$

$(x + y) \cdot ((\neg x) + z)$

$= (x + y) \cdot ((\neg x) + z) \wedge (y + z)$

Resolutions-Regeln

Boolesche Funktion

Definition

Eine boolesche Funktion f in n Variablen und mit m Ausgängen ist eine Funktion

$$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m (n, m \in \mathbb{N}).$$

- Die Menge aller booleschen Funktionen in n Variablen mit m Ausgängen ist

$$\mathbb{B}_{n,m} := \{f \mid f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m\}.$$

$f_{SK} : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$

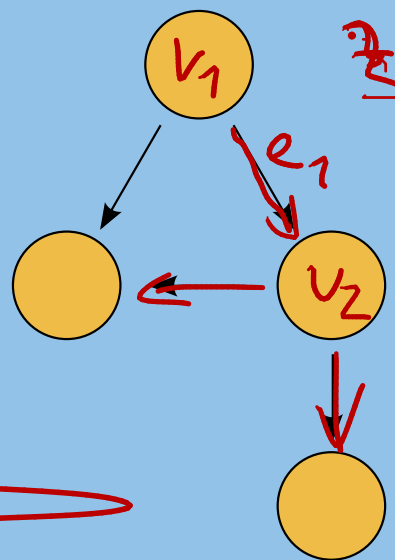
- Wir schreiben abkürzend $\mathbb{B}_n$ statt $\mathbb{B}_{n,1}$.
- Ein digitaler Schaltkreis ohne Speicherelemente, mit n Eingängen und m Ausgängen realisiert eine solche Funktion! (Details später)

Gerichteter Graph

Definition

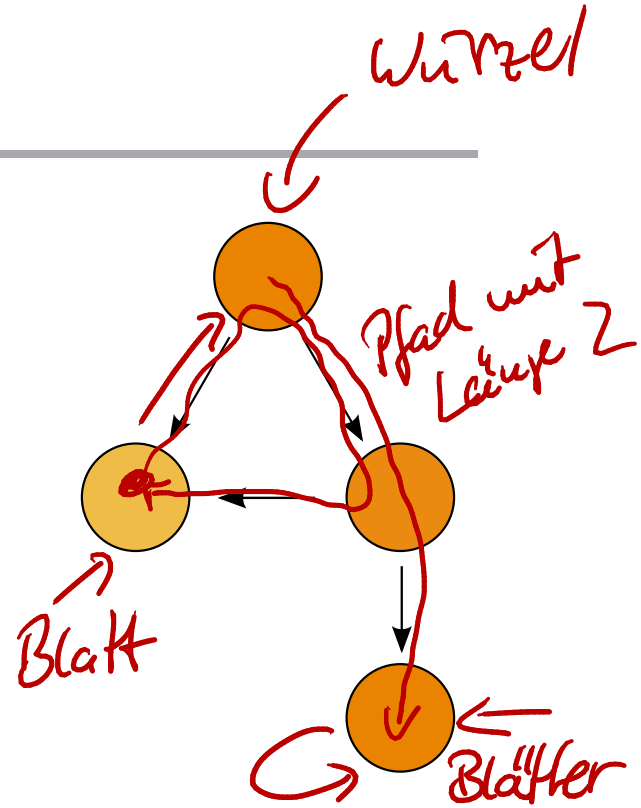
$G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph, wenn folgendes gilt:

- V endliche, nichtleere Menge (Knoten)
- E endliche Menge (Kanten)
- Abbildungen $Q : E \to V$ und $Z : E \to V$
  $Q(e)$ ist Quelle, $Z(e)$ Ziel einer Kante e
- Abbildungen $indeg : V \to \mathbb{N}$ und $outdeg : V \to \mathbb{N}$
  $indeg(v) = |\{e \mid Z(e) = v\}|$ ist der Eingangsgrad,
  $outdeg(v) = |\{e \mid Q(e) = v\}|$ der Ausgangsgrad von v.



Pfade in gerichteten Graphen

- Ein Knoten mit
  - $indeg(v) = 0$ heißt Wurzel.
  - $outdeg(v) = 0$ heißt Blatt.
  - $outdeg(v) > 0$ heißt innerer Knoten.



- Ein Pfad (der Länge k) in G ist eine Folge von k Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ $(k \geq 0)$ mit $Z(e_i) = Q(e_{i+1})$ für alle i $(k-1 \geq i \geq 1)$
- Ein Zyklus in G ist ein Pfad der Länge ≥ 1 in G, bei dem Ziel und Quelle identisch sind (G heißt azyklisch, falls kein Zyklus in G existiert).
- Die Graph-Tiefe eines azyklischen Graphen ist definiert als die Länge des längsten Pfades in G.

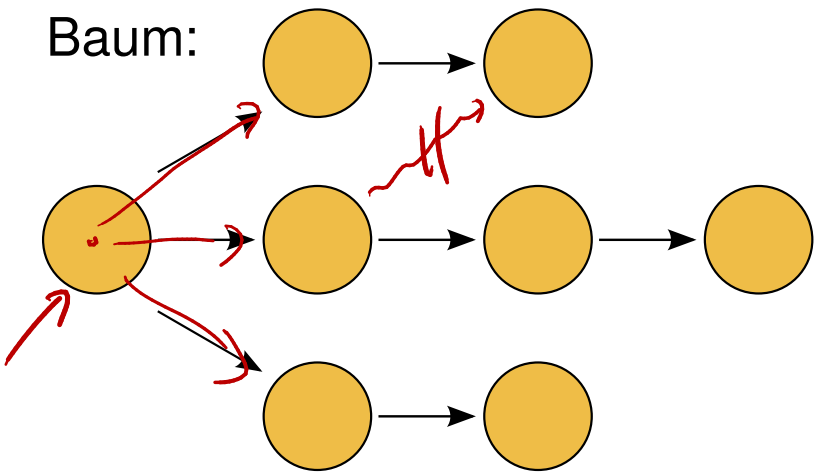
Bäume, Binäre Bäume

Definition

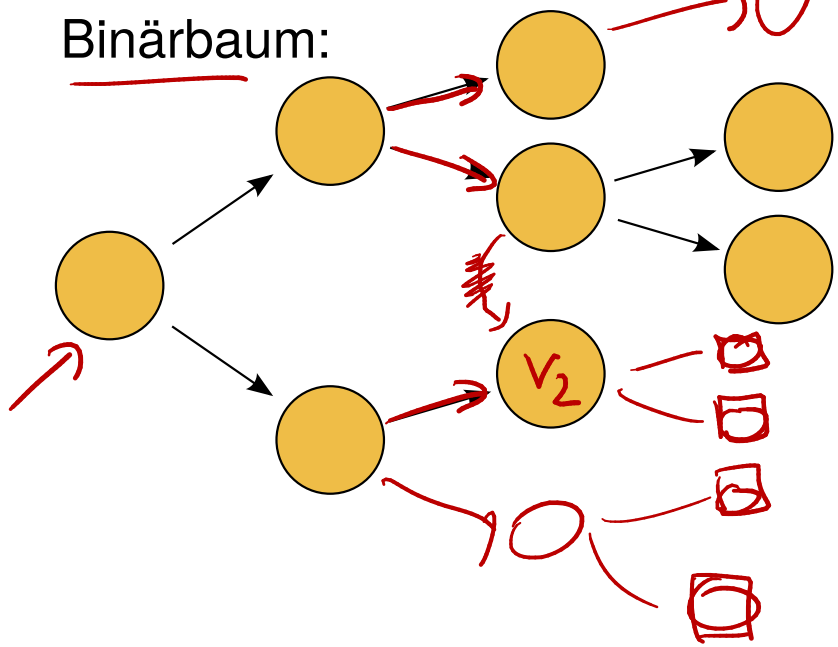
Ein Baum ist ein gerichteter, azyklischer Graph mit genau einer Wurzel w ($indeg(w) = 0$) und $indeg(v) = 1$ für alle andere Knoten v. Ein Baum heißt binär (bzw. Binärbaum), wenn für seine innere Knoten v $outdeg(v) \leq 2$ gilt.

Beispiele:

Baum:



Binärbaum:



Groß-O-Notation (1/2)

positive, reelle Zahlen (inklusive 0)

- Seien $f, g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.
  Man schreibt $f(x) \in O(g(x))$, wenn es $c \in \mathbb{R}_0^+, x_0 \in \mathbb{R}_0^+$ gibt, so dass $f(x) \leq c \cdot g(x)$ für alle $x > x_0$ gilt.
  - Beispiel: $5x + 2 \in O(x^2)$ ← besser: $o(x)$
    Beweis: Setze $c = 5, x_0 = 1$
    $5x + 2 \leq 5 \cdot x^2$, für $x > 1$.

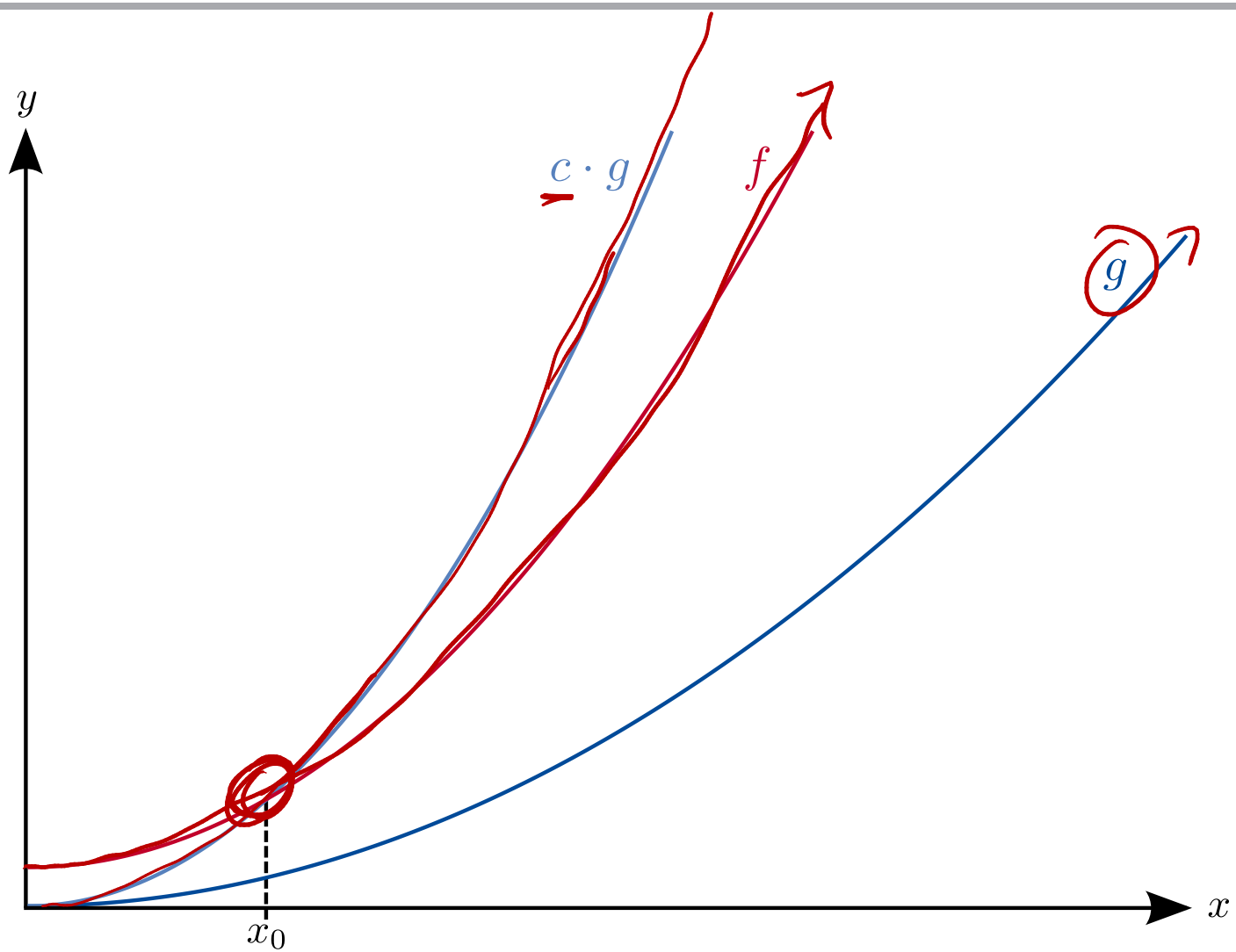
$x=1: \; 5\cdot 1+2 = 7 \not\leq 5\cdot 1^2 = 5$
$x=2: \; 5\cdot 2+2 = 12 \leq 5\cdot 2^2 = 20$

- Groß-O-Notation wird verwendet, um Größe von parametrisierten Objekten (z.B. Graphen), Laufzeit von Algorithmen (Anzahl von Rechenschritten in Abhängigkeit von der Eingabe) usw. asymptotisch, d.h. bis auf eine multiplikative Konstante, abzuschätzen.

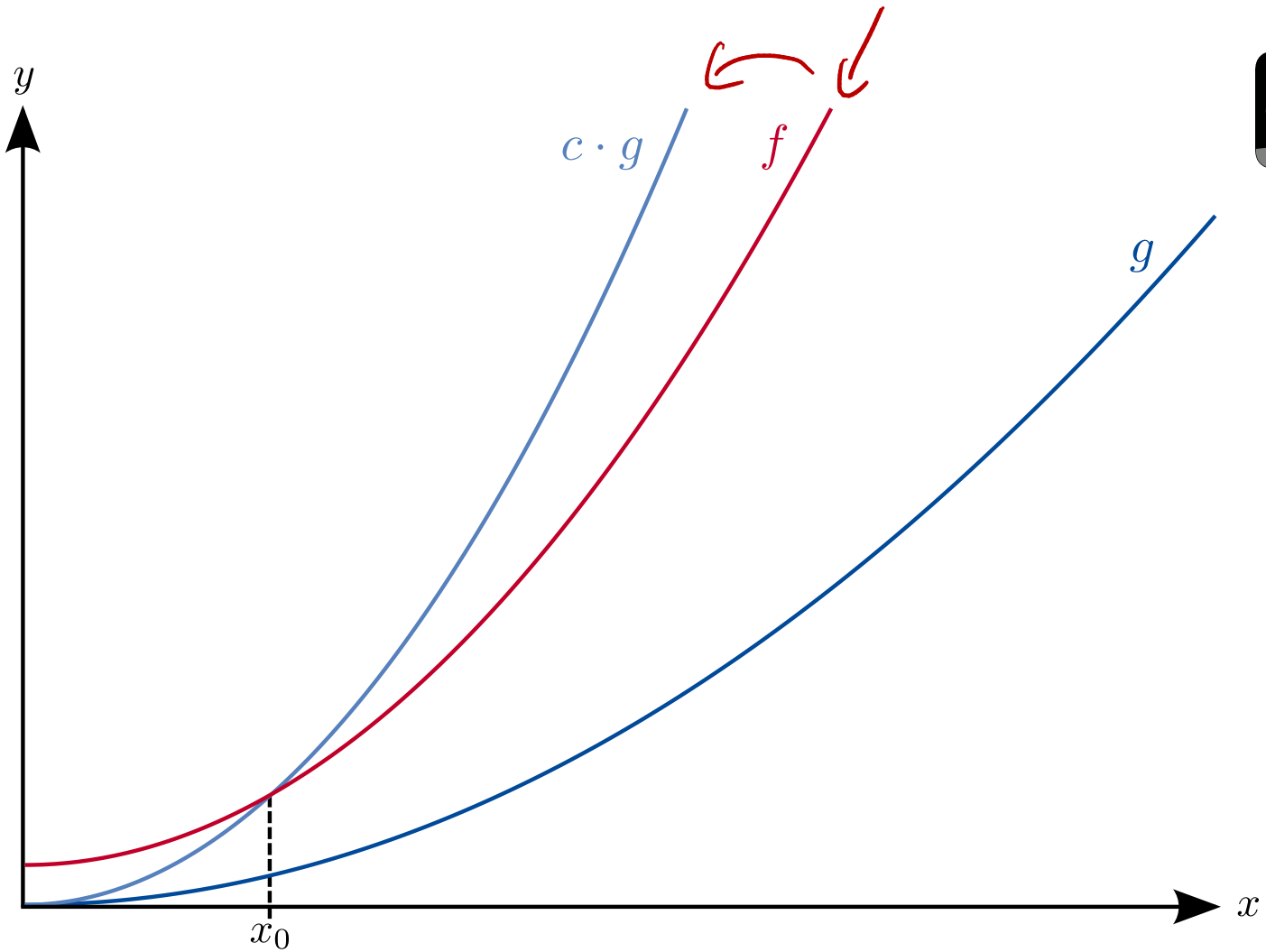
$f(x) = 5x+2$
$h(x) = 2x^2$
$\Rightarrow f(x), h(x) \in O(x^2)$

- Die Notation $f(x) = O(g(x))$ ist weit verbreitet, aber eigentlich falsch, da $O(g(x))$ eine Menge ist. So folgt aus $f(x) = O(g(x))$ und $h(x) = O(g(x))$ keinesfalls $f(x) = h(x)$!

Groß-O-Notation (2/2)

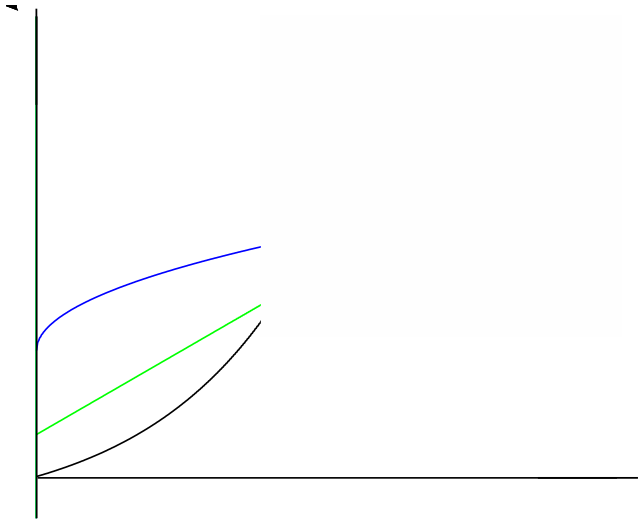


Groß-O-Notation (2/2)



SMILE – O-Notation

Gegeben: blau schwarz grün
$f(x) = \sqrt{x} + 2, \quad g(x) = 0,5e^x, \quad h(x) = x + 1,$
Welche Aussagen sind dann wahr?



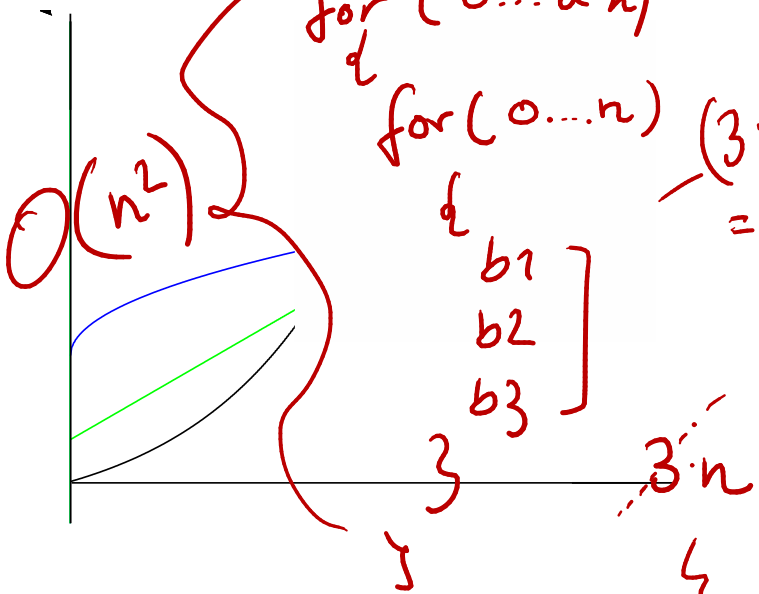
- $g \in O(h)$ NEIN
- $h \in O(f)$ NEIN
- $f \in O(g)$ JA

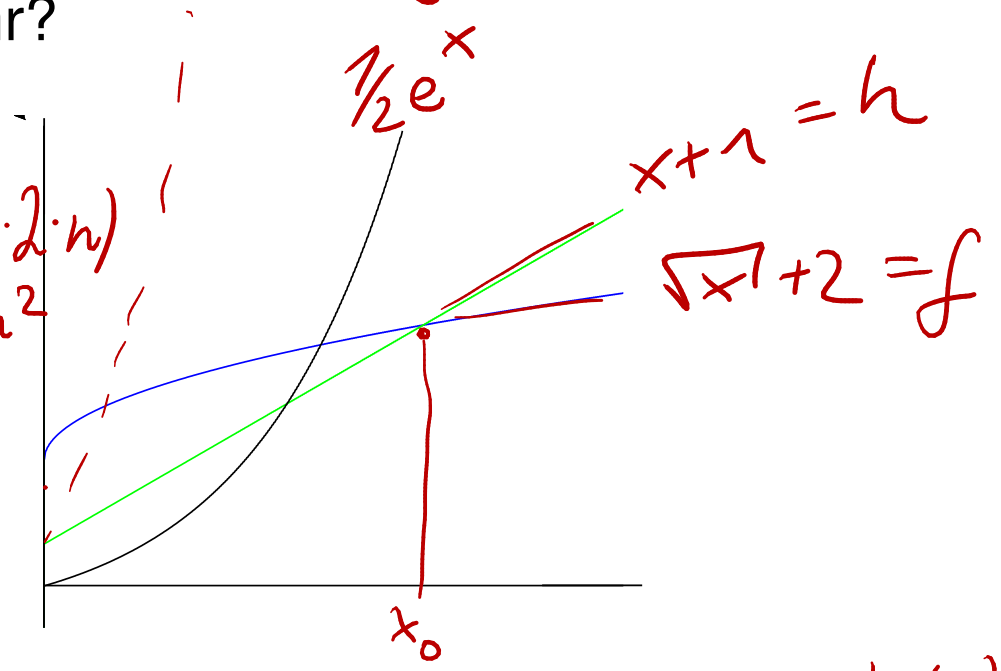
SMILE – O-Notation

Gegeben:

$f(x) = \sqrt{x} + 2, \quad g(x) = 0{,}5e^x, \quad h(x) = x + 1,$

Welche Aussagen sind dann wahr?





- $g \in O(h)$ –
- $h \in O(f)$ –
- $f \in O(g)$ +

$\forall x > x_0 : f(x) < h(x)$

O(n)

$\leq c \cdot g$

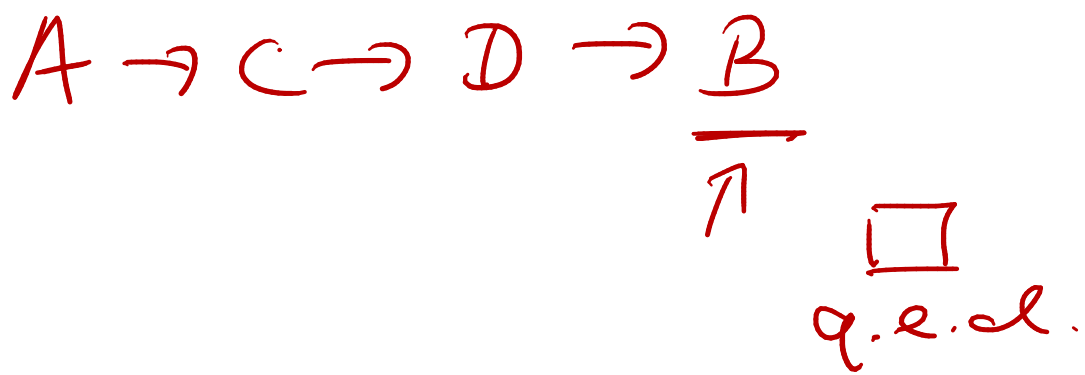
Beweistechniken

- Sukzessive Folgerungen bzw. Direkter Beweis
- Indirekter Beweis bzw. Beweis durch Widerspruch
- Vollständige Induktion

Sukzessive Folgerungen

Gegeben Aussage A, es soll Aussage B bewiesen werden.

- Sukzessive Folgerungen:
  Aus A folgt C, aus C folgt D, aus D folgt B, also gilt B.



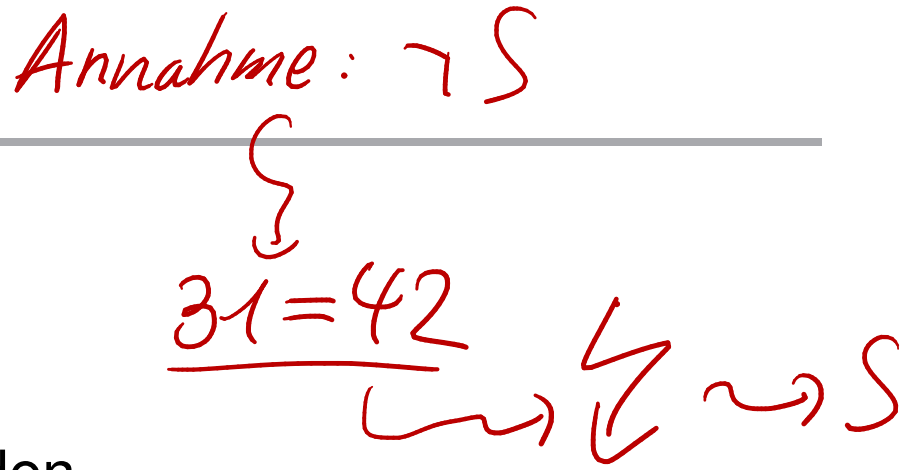
Beispiel: Sukzessive Folgerungen

- Gegeben f, g, h, $f(x) \in O(g(x))$, $g(x) \in O(h(x))$.
  Dann gilt $f(x) \in O(h(x))$.

Beweis:

1. Aus $f(x) \in O(g(x))$ folgt die Existenz von $c_f, x_{0f} : f(x) \leq c_f \cdot g(x)$ für $x > x_{0f}$. Aus $g(x) \in O(h(x))$ folgt die Existenz von $c_g, x_{0g} : g(x) \leq c_g \cdot h(x)$ für $x > x_{0g}$.
2. Man setze $x_0 := max\{x_{0f}, x_{0g}\}$. Dann gilt für $x > x_0$ sowohl $f(x) \leq c_f \cdot g(x)$ als auch $g(x) \leq c_g \cdot h(x)$.
3. Man setze $c := c_f \cdot c_g$. Dann gilt für $x > x_0$:
   $f(x) \leq c_f \cdot g(x) \leq c_f(c_g \cdot h(x)) = c \cdot h(x)$.
   Dies bedeutet aber gerade $f(x) \in O(h(x))$

Indirekter Beweis 1/2



Es soll Aussage S bewiesen werden.

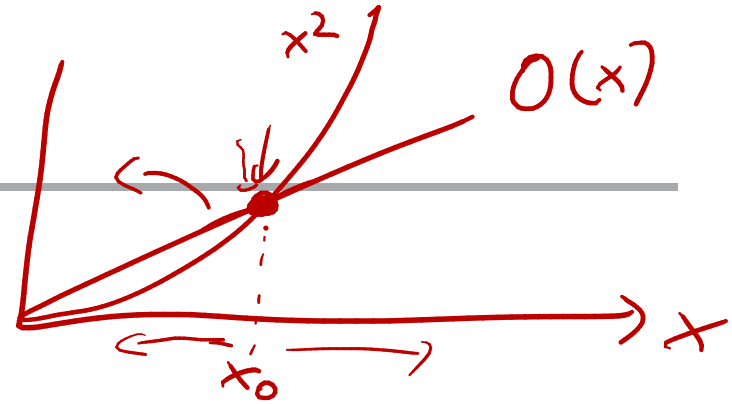
- Indirekter Beweis: Man nimmt an, $\neg S$ (also die Umkehrung von S) würde gelten. Daraus leitet man einen Widerspruch her (z.B. “es gilt C **und** $\neg C$”, “$31 = 42$”, ...).

- Da der Widerspruch schrittweise aus $\neg S$ logisch hergeleitet wurde, kann $\neg S$ nicht gelten und somit muss S gelten.

Indirekter Beweis 2/2

- Betrachte den Spezialfall $S \widetilde{=} A \Rightarrow B$.
  - Dann ist $\neg S \widetilde{=} A \wedge \neg B$. Man nimmt also an, dass A gilt, aber $\neg B$.
  - Ergibt sich aus der Annahme ein Widerspruch, dann muss aus der Gültigkeit von A die Gültigkeit von B folgen.
  - Ergibt sich der Widerspruch speziell durch Herleitung von $\neg A$ aus $\neg B$, dann reduziert sich der Widerspruchsbeweis auf den Spezialfall Beweis der "Kontraposition" $\neg B \Rightarrow \neg A$.
  - $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind logisch äquivalent.
  - Implizit setzt man immer die Gültigkeit sämtlicher Axiome voraus. Sei Ax die Aussage "Sämtliche Axiome gelten".
  - Dann ist $S' = (A \wedge Ax) \Rightarrow B$ zu beweisen.
  - Annahme ist dann also: $\neg S' = A \wedge Ax \wedge \neg B$ gilt.

Beispiel: Indirekter Beweis



- Zu zeigen: $x^2 \notin O(x)$

Beweis:

- Wir nehmen an, dass $x^2 \in O(x)$ wäre. Dann gibt es c und x_0, so dass für $x > x_0$ gilt:

$$x^2 \leq c \cdot x \qquad (1)$$

- Nun suchen wir ein x_1, für das $x_1^2 = c \cdot x_1$. Dies ist für $x_1 = c$ der Fall.
- Für alle $x > x_1 = c$ ist $x^2 > c \cdot x$. Man wähle ein $x_2 > max\{x_0, x_1\}$. Dann gilt auch für x_2:

$$x_2^2 > c \cdot x_2 \qquad (2)$$

- Andererseits muss für x_2 auch (1) gelten. Widerspruch! Somit kann die Annahme nicht stimmen.

Vollständige Induktion

- Die vollständige Induktion ist eine Beweismethode für Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen n gelten sollen.
- Zuerst wird die Aussage für den Basisfall $n = 0$ beweisen (manchmal auch $n = 1$ oder höher).
- Dann wird der Induktionsschritt durchgeführt: Unter der Annahme, dass die Aussage für n gilt (Induktionsvoraussetzung) wird bewiesen, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt.
- Daraus folgt die Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen.

Vollständige Induktion: Beispiel (1/2)

- **Behauptung:**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- **Induktionsanfang:**
  Zeige die Behauptung für $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Vollständige Induktion: Beispiel (2/2)

- **Induktionsvoraussetzung** (IV)**:**
  Nehme an, die Behauptung gilt für *ein* $n \in \mathbb{N}$.
  Also: Es gibt ein n für das gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

- **Induktionsschritt:**
  Zeige die Behauptung für $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{IV}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1} \quad \square$$

(n+1)-Summenglied

qed.