1. Probar que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ definen normas en $\mathbb{R}^n$, donde

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

QVQ definen normas

Para eso deben cumplir

1. $\|x\| = 0 \longleftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall x \in E$
3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Veamos el primer caso

$||x||_1$ define una norma en $\mathbb{R}^n$. Veamos

porque

$+$

1 $\rightarrow$ Sea $||x||_1 = 0$ QVQ

$x = 0$

Si $||x||_1 = 0 \rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0$$

Como es una sumatoria de términos positivos $\rightarrow$ la única forma de que dé 0 es si $x = 0$

1 $\Leftarrow$ trivial

2 QVQ $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$

$$\|\lambda x\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| =$$

$|ab| = |a||b|$

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda| |x_i| =$$

$$|\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$$

3 QVQ

$$\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$$\|x+y\|_1 = |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| =$$

$$\|x\|_1 + \|y\|_1$$

$$\longrightarrow \|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ es una norma

QVQ $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$

define una norma en $\mathbb{R}^n$

1) $\Leftarrow$) trivial

$\Rightarrow$) Sea $\|x\|_2 = 0$ QVQ

$x = 0$

Repetimos el argumento

Como es una sumatoria de términos positivos esta solo puede ser 0 si c/elemento es 0

(2) QVQ $\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \, \|x\|_2$

$$\|\lambda x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^2\right)^{1/2} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^2 |x_i|^2\right)^{1/2} =$$

$$\left(|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} =$$

$$|\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} =$$

$$|\lambda| \, \|x\|_2$$

(3) QVQ

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

Vamos a sacarnos de encima el $1/2$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i^2| + k\, x_iy_i| + |y_i^2| =$$

$$\sum |x_i|^2 + 2\sum |x_iy_i| + \sum |y_i|^2$$

CS: $x^*y \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

$$\sum^{n} |x_iy_i| = x^*y \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

$$\to 2\sum_{i=1}^{n} |x_iy_i| \leq 2\|x\|_2 \|y\|_2$$

$$\sum |x_i|^2 + 2\sum |x_i y_i| + \sum |y_i|^2$$

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\longrightarrow \|x+y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\longrightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

QVQ $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

① $\Leftarrow$ trivial

$\Rightarrow$ Sea $\|x\|_\infty = 0$ QVQ

$x = 0$

Si $\|x\|_\infty = 0 \longrightarrow$

$$\max_{1 \le i \le n} |x_i| = 0$$

$$\longrightarrow x = 0$$

(2) QVQ $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$

$$\|\lambda x\|_\infty = \max |\lambda x_i| =$$

$$\max_{1 \le i \le n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \max_{1 \le i \le n} |x_i| =$$

$$|\lambda| \|x\|_\infty$$

③ QVQ $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$\|x+y\|_\infty = \max |x_i + y_i| \leq$

$\max(|x_i| + |y_i|) \leq \max |x_i| + \max |y_i|$

$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$