**4.** Sea $X$ un conjunto y sea $B(X,\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones acotadas de $X$ en $\mathbb{R}$. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X,\mathbb{R})$.

(a) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$, mostrar que $f \in B(X,\mathbb{R})$. ¿Sigue valiendo esto si la convergencia es apenas puntual?

$B(X,\mathbb{R}) = \{ f: X \to \mathbb{R} / |f(x)| \leq M \ \forall x \in X \}$, $f_n(x) \subseteq B(X,\mathbb{R})$

Si $f_n \rightrightarrows f$ QVQ $f \in B(X,\mathbb{R}) \longleftrightarrow \forall x \in X \ |f(x)| \leq M$

Sabemos que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X$

Sea $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X$

$$|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \overset{\text{desig } \Delta}{\leq} \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_{n_0}(x)|}_{\substack{\in B(X,\mathbb{R}) \\ \to \leq M \ \forall x \in X}}$$

$\to |f(x)| < \varepsilon + M \ \forall x \in X$ Sale de la continuidad y de que $f_{n_0} \in B(X,\mathbb{R})$

$(\to$ Si $\varepsilon = 1 \to |f(x)| < 1+M)$

$\to f(x) \in B(X,\mathbb{R})$

Queremos mostrar la existencia de 1 cota, se puede fijar $\varepsilon$ y listo

Si $f_n \to f$ podría ocurrir que $M$ dependa de $x \to$

$\forall x \in X \ |f(x)| \leq M(x) \to f \notin B(X,\mathbb{R})$

(b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en $X$, mostrar que existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es *uniformemente acotada*, o es *acotada* en $(B(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Sea $f_n(x) \rightrightarrows f \,/\, f \in X$ QVQ $\exists M>0 \,/\, |f_n(x)| \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$

Dado $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \; \forall x \in X$

$\rightarrow |f_n(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{desig}\,\Delta}}{\leq} \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{<1} + \underbrace{|f(x)|}_{\substack{\text{por (a) sabemos} \\ \text{que } f(x) \in B(X,\mathbb{R})}} \leq 1 + M \quad \forall n \geq n_0 \; \forall x \in X$

$\rightarrow |f(x)| \leq 1 + M \quad \forall n \geq n_0 \; \forall x \in X$, ahora quiero que valga $\forall n \in \mathbb{N}$ o encontrar una cota que se cumpla $\forall n \in \mathbb{N}$

Como los $n_0$ son finitos:

$f_1(x) \in B(X,\mathbb{R}) \rightarrow |f_1(x)| \leq \tilde{M}_1 \; \forall x \in X$

$f_2(x) \in B(X,\mathbb{R}) \rightarrow |f_2(x)| \leq \tilde{M}_2 \quad \forall x \in X$

$\vdots$

$f_{n_0}(x) \in B(X,\mathbb{R}) \rightarrow |f_{n_0}(x)| \leq \tilde{M}_{n_0} \; \forall x \in X$

Si tomo $R = \max\{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \ldots, \tilde{M}_{n_0}, 1+M\}$

$\rightarrow |f_n(x)| \leq R \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X$