12. Sea $\mathbb{R}[t]$ el espacio de polinomios, con la norma $\|\cdot\|_\infty$ definida en el Ejercicio 5. Sea $\delta : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ dado por $(\delta p)(t) = p'(t)$, donde p' denota el derivado de p. Probar que δ es un operador lineal que no es continuo.

Va a ser lineal por la linealidad de la derivada, de todas formas probemoslo

Para que sea lineal debe cumplir

(a) $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}[t]$

(b) $\delta(\lambda x) = \lambda \delta(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}[t]$

(a) $\delta(x+y) = (x+y)' \overset{\text{linealidad derivada}}{=} x' + y' = \delta(x) + \delta(y)$

(b) $\delta(\lambda x) = (\lambda x)' = \lambda x' = \lambda \delta(x)$

Probemos que NO es continuo

Supongamos que sí $\rightarrow \forall f, g \in \mathbb{R}[t]$,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / \text{ si } \|f-g\|_\infty < \delta \rightarrow \|\delta(f) - \delta(g)\|_\infty < \varepsilon$

Sea $\varepsilon = 1/2$ y $f = x^2 + x$ y $g = x^2$

$\rightarrow \|f-g\|_\infty = \|x\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |x| = 1$. Si considero $\delta = 2$

$\rightarrow \|f-g\|_\infty < 2$ entonces $\|\delta(f) - \delta(g)\|_\infty < 1/2$

pero $\|\delta(f) - \delta(g)\|_\infty = \|2x+1-2x\|_\infty = \|1\|_\infty = 1 > 1/2$

$\rightarrow$ ¡ABS! $\rightarrow \delta$ no es continuo

CORRECCION

Veamos que NO está acotada $\rightarrow \|\delta p(t)\|_\infty \leq c\,\|p(t)\|_\infty$

La idea va a ser agarrar una f cuya derivada crezca más que la función

Consideramos $p(t) = x^n \rightarrow \delta p(t) = n x^{n-1}$

$$\|\underbrace{n x^{n-1}}_{=n}\|_\infty \leq c \|\underbrace{x^n}_{=1}\|_\infty$$

$$n \leq c \quad \text{¡ABS!}$$

$\delta p(t)$ NO es continua