5. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Probar que:

(a) Si f es continua en $[0,1]$, entonces es medible.

(b) Si f es continua en casi todo punto de $[0,1]$ entonces es medible.

(a) Sea f continua QVQ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{f \leq a\} \in \mathcal{M}$

$\{f \leq a\} = f^{-1}((-\infty; a]) \in \mathcal{M}$

↪ es continua → preimagen de cerrado es cerrada

(b) f continua en ctp $\longrightarrow$ $\mu(\{f \text{ no continua}\}) = 0$

QVQ $\{x \in X / f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$

$$\{x \in X / f(x) \leq a\} = \underbrace{(\{x \in X / f \leq a\} \cap \{f \text{ continua}\})}_{\left(f\big|_{\{f \text{ continua}\}}\right)^{-1}((-\infty; a])} \cup \underbrace{(\{f \leq a\} \cap \{f \text{ no continua}\})}_{= (*)}$$

$$\left(f\big|_{\{f \text{ continua}\}}\right)^{-1}((-\infty; a]) = \underbrace{(F \cap \{f \text{ continua}\})}_{\in \mathcal{M}} \subseteq \{f \leq a\}$$

$\rightarrow \mu((*)) = 0 \Rightarrow (*) \in \mathcal{M}$

Sea $A \subseteq X$

V abierto de $A \iff$
$\exists U$ abierto de X /
$V = U \cap A$