5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Probar que si A es abierto entonces $A \in \mathcal{M}$.

(b) Deducir que si A es cerrado entonces $A \in \mathcal{M}$.

Por la def que dio Vicky (a) sería por def. Sin embargo usamos la def de Martín y un teo que dio Vicky

Def de Martín:

$\mathcal{M}$ es la σ-álgebra generada por

- los nulos
- los intervalos abiertos → Con Vicky vimos que son abiertos

Teo Vicky

(a) Sea A abierto qvq $A \in \mathcal{M}$

Como A es abierto de $\mathbb{R}$ → $\exists \{I_n\}_{n \in J}$ una familia a lo sumo numerable de intervalos disjuntos / $A = \bigcup_{n \in J} I_n$ → unión numerable

→ $A = \bigcup_{n \in J} I_n$ como $\forall n \in J$ $I_n \in \mathcal{M}$ → $\{I_n\}_{n \in J} \subseteq \mathcal{M}$ →

$\bigcup_{n \in J} I_n \in \mathcal{M}$ → $A \in \mathcal{M}$

(b) Si A es cerrado QVQ $A \in \mathcal{M}$

A es cerrado $\Longleftrightarrow$ A^c es abierto

pero $A^c \in \mathcal{M}$ por (a) $\rightarrow$ si $A^c \in \mathcal{M} \xrightarrow{\text{def } \sigma\text{-álgebra}} (A^c)^c \in \mathcal{M} \rightarrow A \in \mathcal{M}$