2. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ Probar:

(a) χ_A es medible $\iff A \in \mathcal{M}$.

(b) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

(c) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.

ⓐ $\rightarrow$) Sea $\chi_A(x)$ medible QVQ $A \in \mathcal{M}$

Si χ_A es medible $\rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \; \{\chi_A > a\} \in \mathcal{M}$

tiene solo 2 valores $\{0,1\}$

$A = \{x \in \mathbb{R} / \chi_A(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} / \chi_A(x) > 0\} \in \mathcal{M}$

hipótesis

$\leftarrow$) Sea $A \in \mathcal{M}$ QVQ χ_A es medible

QVQ $\forall a \in \mathbb{R} \; \{\chi_A < a\} \in \mathcal{M}$

Si $a \in (-\infty, 0] \rightarrow \{x \in \mathbb{R} / \chi_A < a\} = \emptyset \in \mathcal{M}$

Si $a \in (0; 1] \rightarrow \{x \in \mathbb{R} / \chi_A < 1\} = A^c \in \mathcal{M}$

Si $a \in (1; +\infty) \rightarrow \{x \in \mathbb{R} / \chi_A < a\} = A \in \mathcal{M}$

podemos pedirlo así

QVQ $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

$$\chi_{A\cap B} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (A\cap B) \equiv \text{si } x\in A \wedge x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin (A\cap B) = \text{si } (x\in A \vee x \in B) \wedge x \notin A\cap B \end{cases}$$

$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B \equiv \forall x \in \mathbb{R} / \chi_{A\cap B} = a \longleftrightarrow \chi_A \cdot \chi_B = a$

Tenemos que ver que toman los mismos valores para los mismos x

→ los 2 únicos valores son $\{0,1\}$

$\chi_{A\cap B} = 1 \longleftrightarrow x \in A\cap B \longleftrightarrow x\in A \wedge x \in B$
$\longleftrightarrow \chi_A = 1 \wedge \chi_B = 1 \longleftrightarrow \chi_A \cdot \chi_B = 1$

$\chi_{A\cap B} = 0 \longleftrightarrow x \notin A\cap B \longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B) \vee$
$(x \notin A \wedge x \notin B) \longleftrightarrow (\chi_A = 1 \wedge \chi_B = 0) \vee (\chi_A = 0 \wedge \chi_B = 1) \vee (\chi_A = 0 \wedge$
$\chi_B = 0) \longleftrightarrow \chi_A \cdot \chi_B = 0$

QVQ $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$

$$\chi_{A\cup B}=0 \longleftrightarrow x\notin (A\cup B) \longleftrightarrow x\notin A \wedge x\notin B \rightarrow \chi_A=\chi_B=\chi_{A\cap B}=0$$

$$\longleftrightarrow \chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=0$$

$$\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=0 \longleftrightarrow \chi_A+\chi_B=\underbrace{\chi_{A\cap B}}_{=1 \to \chi_A+\chi_B=2} \longleftrightarrow \chi_A=\chi_B=\chi_{A\cap B}=0$$

y no vale

$$\chi_{A\cup B}=1 \rightarrow x\in A\cup B \longleftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\notin A\wedge x\in B)\vee(x\in A\cap B)$$

$$\longleftrightarrow (\chi_A=1 \wedge \chi_B=\chi_{A\cap B}=0)\vee(\chi_B=1 \vee \chi_A=\chi_{A\cap B}=0)\vee(\chi_A=\chi_B=\chi_{A\cap B}=1) \longleftrightarrow$$

$$\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=1$$