6. Definimos ℓ^∞ como el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales:

$$\ell^\infty = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \colon \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}$$

con la norma

$$\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

(a) Probar que la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de ℓ^∞ no es compacta.

(b) Probar que no hay ningún conjunto numerable denso en ℓ^∞.

(a) ¿Cómo es $\bar{B}(0,1)$ en l_∞? $\bar{B}(0,1) = \{(a_n)_{n\geq 1} \subseteq l_\infty / \|0 - a_n\|_\infty \leq 1 \ \forall n \geq 1\}$

Para probar que NO es compacta basta con encontrar una suc contenida en la bola / tenga una subsuc convergente

Como nuestro espacio normado es de sucesiones, si tomamos una sucesión contenida acá va a ser una suc de sucesiones

subsucesiones

$$\text{Consideramos } (X_n^N)_{N\geq 1} = \begin{matrix} (1, & 1, & \dots, & 1, & \dots) \\ (0, & 1, & \dots, & 1, & \dots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0, & 0, & \dots, & 1, & \dots) \end{matrix}$$

¿Pertenece a l_∞? $\|X_n^N\|_\infty = 1 \ \forall n \geq 1$

Como $\|X_n^N\| = 1 \ \forall n \geq 1 \longrightarrow$ vale para cualquier subsucesión que pueda considerar $\longrightarrow$ ninguna va a converger

(b) QVQ $\nexists$ subconjunto numerable denso en ℓ_∞, es decir, $\nexists A \sim \mathbb{N} / \overline{A} = \ell_\infty$

Supongamos que existe $\rightarrow \exists A \sim \mathbb{N} / \forall \ell \in \ell_\infty, \exists (a_n)_{n \geq 1} \subseteq A / a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

Como $A \sim \mathbb{N}$, $A = \{x_n^N\}_{N \geq 1}$ con $x_n^N \neq x_n^M$ para $N \neq M$ donde $x_n^N \in \ell_\infty$

$$\rightarrow \quad A = \begin{matrix} (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, \dots) \\ (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, \dots) \\ \vdots \\ (x_1^N, x_2^N, \dots, x_n^N, \dots) \\ \vdots \end{matrix}$$

Vamos a demostrar que $\exists \ell \in \ell_\infty, \ell \notin A / \nexists (a_n)_{n \geq 1} \subseteq A /$
$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

Sea $\ell = (x_1^1 + 1, x_2^2 + 1, x_3^3 + 1, \dots, x_n^N + 1, \dots)$

$\rightarrow \ell \in \ell_\infty$ y $\ell \notin A$

$\ell \in \ell_\infty$: $\sup |\ell_n| < +\infty \rightarrow \ell_i = x_i^i + 1 \rightarrow |\ell_i| = |x_i^i + 1| \leq |x_i^i| + |1|$

$$\leq \underbrace{\sup |x_i^i|}_{\substack{\text{Como } x_i^i \in A \text{ y} \\ A \subset \ell_\infty \\ \sup|x_i^i| < +\infty}} + 1 < +\infty$$

$\ell \notin A$: $\forall n \in \mathbb{N}, \ell_n \neq A_n^N$
$N \in \mathbb{N}$

¿$\exists (a_n)_{n\geq 1} \subseteq A / a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$?

Si pienso a A como una sucesión de sucesiones tengo que $\forall N \in \mathbb{N}$

$\|a_n^N - \ell\|_\infty \geq 1 \rightarrow \|A - \ell\|_\infty \geq 1$

$\rightarrow$ en particular cualquier subsucesión que yo tome cumple que $\|a^i - \ell\| \geq 1$

$\rightarrow$ Sea $\varepsilon = 1/2$, $\nexists n \in \mathbb{N} / \|a_n^i - \ell\| < 1/2 \ \forall i$

$\rightarrow \nexists a_n \subseteq A / a_n \rightarrow \ell$

$\rightarrow$ ¡ABS! porque habíamos dicho que A era denso en ℓ_∞ y vimos que

$\exists \ell_\infty / \nexists (a_n)_{n\geq 1} \subseteq A / a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$