1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $A \in \mathcal{M}$.

(b) Existen una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados contenidos en A y un conjunto Z de medida nula tales que $A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \cup Z$.

(c) Existen una sucesión $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos que contienen a A y un conjunto H de medida nula tales que $A = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) \setminus H$.

$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a$ ✗ vamos a probar $a \longleftrightarrow b$ y $a \longleftrightarrow c \rightarrow b \longleftrightarrow c$

$\boxed{a \longrightarrow b}$

Sea $A \in \mathcal{M} \rightarrow$ sabemos que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists F \subseteq A$ cerrado $/ \mu(A \setminus F) < \varepsilon$

Es decir, todo conjunto medible puede ser aproximado por cerrados que van a estar lo suficientemente cerca pero NO van a ser A

$\rightarrow$ puedo unirles un nulo para que sean como A.

Sea $\varepsilon = 1 \rightarrow \exists F_1 \subseteq A / \mu(A \setminus F_1) < 1$

Si $\varepsilon = 1/2 \rightarrow \exists F_2 \subseteq A / \mu(A \setminus F_2) < 1/2$ y $F_2 \supseteq F_1$

$\vdots$

Sea $\varepsilon = 1/n$ $\exists F_n \subseteq A / \mu(A \setminus F_n) < 1/n$ y $F_n \supseteq F_{n-1}$

$\vdots$

$\rightarrow$ Si considero la unión de todos casi que tengo A

$\rightarrow$ defino $H / H = A \setminus \bigcup F_n \rightarrow H$ es nulo ya que $\mu(H) = \mu\left(A \setminus \bigcup_{n\geq 1} F_n\right) \overset{\text{Cont de la medida}}{\leq}$

$\mu(A \setminus F_n) = 1/n \longrightarrow 0$

$\rightarrow A = \left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) \cup H$

$\boxed{(b) \to (a)}$ QVQ $A \in \mathcal{M}$

$$A = \underbrace{\bigcup_{n \geq 1} F_n}_{} \cup \underbrace{Z}_{\in \mathcal{M} \text{ por ser nulo}} \to A \in \mathcal{M}$$

$$\left(\bigcup F_n\right) = \left(\bigcap_{n \geq 1} F_n^c\right)^c$$

$\mathcal{M}$ es cerrada por intersecciones numerables y como $\forall n \in \mathbb{N}$ F_n^c es abierto $\in \mathcal{M}$

$$\to \bigcap_{n \geq 1} F_n^c \in \mathcal{M} \to \left(\bigcap_{n \geq 1} F_n^c\right)^c \in \mathcal{M}$$

$\boxed{(a) \to (c)}$

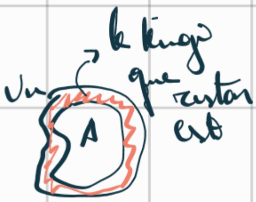
Como $A \in \mathcal{M} \to \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $U \supseteq A$ abierto / $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$ $\to$ vamos a replicar la idea de arriba

Sea $\varepsilon = 1 \to \exists$ $U_1 \supseteq A$ / $\mu(U_1 \setminus A) = 1$

$\varepsilon = 1/2 \to \exists$ $U_2 \supseteq A$ y $U_2 \subseteq U_1$ / $\mu(U_2 \setminus A) = 1/2$

$\vdots$

$\varepsilon = 1/n \to \exists U_n \supseteq A$ y $U_n \subseteq U_{n-1}$ / $\mu(U_n \setminus A) = 1/n$



$\vdots$

$\to$ si interseco todos los U_i casi que tengo A

$\to$ defino $H = \bigcap U_n \setminus A$. Veamos que es nulo

$$\bigcup_{n \geq 1}^{\infty} U_n \subseteq U_{n_0}$$

$$\mu(H) = \mu\left(\bigcap U_n \setminus A\right) \leq \mu(U_n \setminus A) = 1/n \to 0$$

$$\to A = \left(\bigcap_{n \geq 1} U_n\right) \setminus H$$

$$\boxed{c \to a}$$

$$A = \underbrace{\left(\bigcap_{n\geq 1} U_n\right)}_{\in \mathcal{M}} \setminus \underbrace{H}_{\in \mathcal{M} \to H^c \in \mathcal{M}} = \bigcap U_n \underbrace{\cap H^c}_{\in \mathcal{M}\ \text{intersec}} \to A \in \mathcal{M}$$

ya que es cerrada x intersecciones numerables

Entonces como $b \to a$ y $a \to c \Rightarrow b \to c$

$c \to a$ y $a \to b \Rightarrow c \to b$ } $b \leftrightarrow c$