1. Sea X un conjunto y sea

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ es contable o } X \setminus A \text{ es contable}\}.$$

Probar que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra $\rightarrow$ ① $\mathcal{A} \neq \emptyset$

② Si $B \in \mathcal{A} \rightarrow B^c \in \mathcal{A}$

③ Sea $(B_n)_n \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

① QVQ $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \,/\, A$ es contable o A^c es contable$\} \neq \emptyset$

$\rightarrow$ Como $\emptyset \in \mathcal{M} \rightarrow \emptyset \in \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \neq \emptyset$ ✗ Veamos que $\mathbb{R}$ pertenece

Podemos trabajar sólo con $\mathbb{R}$ o $\emptyset$ $\rightarrow A = \mathbb{R} \rightarrow A^c = \emptyset \rightarrow A^c$ es contable $\rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{A}$ /

$\mathcal{A} \neq \emptyset$

② QVQ $B \in \mathcal{A} \rightarrow B^c \in \mathcal{A}$

Si $B \in \mathcal{A} \rightarrow B$ es contable o B^c es contable

- Si B NO es contable $\rightarrow B^c$ es contable

  $\rightarrow B^c \in \mathcal{A}$

- Si B es contable $\rightarrow (B^c)^c \in \mathcal{A} \rightarrow B^c \in \mathcal{A}$

③ QVQ si $(B_n)_n \in \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

o son todos contables o ∃ uno cuyo complemento es o todos los complementos son

- Si $(B_n)_n \in \mathcal{A}$ entonces o $\forall n \in \mathbb{N}$ B_n es contable o

  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, (B_{n_0})^c$ es contable $\rightarrow \mathbb{R} \setminus B_{n_0}$ es contable

ⓐ Si $\forall n \in \mathbb{N}$ B_n es contable $\rightarrow \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} B_n$ es contable

$\rightarrow \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

ⓑ Si $(B_{n_0})^c$ es contable

$\rightarrow \left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right)^c = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\geq 1} B_n \subseteq \mathbb{R} \setminus B_{n_0} \in \mathcal{A}$

Como B_{n_0} NO es contable $\rightarrow \bigcup_{n\geq 1} B_n$ podría NO ser contable. Podría ser muy grande

$\rightarrow$ Sin embargo si, $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{A} \rightarrow \left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right)^c \in \mathcal{A}$

Si agarro $\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right)^c$ y pruebo que está ya está

pero $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\geq 1} B_n \subseteq \mathbb{R} \setminus B_n \rightarrow$ como hay un n_0 / $\mathbb{R} \setminus B_{n_0} \in \mathcal{A}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

si pruebo esta inclusión $\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right)^c \in \mathcal{A}$

ⓒ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(B_n)^c$ es contable $\rightarrow \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{A}$

$\xrightarrow[2]{} \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\geq 1} B_n\right)^c \in \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{A}$