(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$.

Sabemos que $\sin(x) = 0 \longleftrightarrow x = 0$ o $x = \pi$ o $x = 2\pi$

Ahora como $n \geq 1$, $\forall x \in [0, 2\pi]$ $\exists n \in \mathbb{N} / nx = 0 = \pi = 2\pi$

Mi candidato a límite es $f(x) = 0$

Convergencia puntual

QVQ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \left|\frac{1}{n}\sin nx\right| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Sea $\varepsilon > 0$ QVQ $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \left|\frac{1}{n}\sin nx\right| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

$\longrightarrow \left|\frac{1}{n}\sin(nx)\right| = \underbrace{\left|\frac{1}{n}\right|}_{\to 0}|\sin nx| = \frac{1}{n}|\sin nx| \leq \frac{1}{n}\cdot 1 < \varepsilon \longrightarrow$ si $n_0 = \varepsilon + 1$

(otra forma de verlo es que si $n \to \infty$ tenemos $0 \times$ acotado $= 0$)

$\longrightarrow \forall n \geq n_0$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Como n. NO depende de x es uniforme

$\longrightarrow \frac{1}{n}\sin nx \rightrightarrows 0$

(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

Si fijo un x veo que el argumento toma la forma

$\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, entonces si $\frac{x}{n} \to 0$

QVQ $\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| < \varepsilon$

Dado $\varepsilon > 0$ qvq $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \left|\sin \frac{x}{n}\right| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$

$\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n}$ Si fijo x $\frac{|x|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\longrightarrow \frac{|x|}{n} < \varepsilon \to \frac{|x|}{\varepsilon} < n$ considero $n_0 = \frac{|x|}{\varepsilon} + 1$

$\to \forall n \geq n_0$ converge puntualmente a 0

Queremos estudiar convergencia uniforme

Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$, entonces $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \left|\sin \frac{x}{n}\right| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Sea $\varepsilon = 1/2$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \left|\sin \frac{x}{n}\right| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Si considero $x = n_0 \to \left|\sin \frac{x}{n}\right| \leq \frac{|x|}{n} = \frac{n_0}{n} = 1\ \forall n \geq n_0$

¡ABS!

(c) $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_n(x,y) = \frac{n}{n+1}(x,y).$

Analicemos convergencia puntual

Si fijo (x,y) entonces tengo $\left(\frac{an}{n+1}, \frac{bn}{n+1}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (a,b)$

Mi candidato a límite es $f(x,y) = (x,y)$

Sea $\varepsilon > 0$ qvq $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \|f_n(x) - f(x,y)\|_2 < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$

$\|f_n(x,y) - f\|_2 = \left\| \frac{n}{n+1}(x,y) - (x,y) \right\|_2 = \left\| (x,y)\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) \right\|_2 = \left\| (x,y) \cdot \frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{n+1} \right\|_2 = \left\| (x,y) \frac{1}{n+1} \right\|_2$

$\|(x,y)\|_2 \frac{1}{n+1} < \varepsilon \to \frac{\|(x,y)\|_2}{\varepsilon} - 1 < n \to$ 1 considero $n_0 = \frac{\|(x,y)\|_2}{\varepsilon}$ converge

$\forall n \geq n_0$

Ahora hay que analizar convergencia uniforme

Busquemos $\alpha > 0$ un n_k y una suc $(a_k)_{k \geq 1}$ / $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$

$\forall k \in \mathbb{N}$

Propongo $\alpha = 1$, $n_k = n$ y $a_k = (k^2, 0)$

Veamos q' $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha\ \forall k \in \mathbb{N}$

$\left\| \frac{k}{k+1}(k^2,0) - (k^2,0) \right\|_2 = \left\| (k^2,0) \cdot \left(\frac{k}{k+1} - 1\right) \right\|_2 = \left\| (k^2,0) \cdot \frac{k - k - 1}{k+1} \right\|_2 = \left\| (k^2,0) \cdot \frac{-1}{k+1} \right\|_2 =$

$\left\| (1,0)\, k^2 \cdot \frac{-1}{k+1} \right\|_2 = \| (1,0) \underbrace{(k+1)}_{\text{escalar va afuera}} \|_2 = |k+1|\ \|(1,0)\|_2 = k+1 \geq 1\ \forall k \in \mathbb{N}$

(d) $f_n : C([0,1]) \to C([0,1])$, $f_n(\varphi) = \frac{n}{n+1}\,\varphi$.

Aquí en $C([0,1])$ consideramos la distancia d_∞.

Analicemos convergencia puntual. Es un caso muy similar al anterior

propongo $f = \varphi$ como candidato a límite

Sea $\varepsilon > 0$ que $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \|f_n(x) - f(x)\|_\infty < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$

$\max\limits_{0 \le x \le 1} \left| \frac{n}{n+1} \varphi(x) - \varphi(x) \right| = \max\limits_{0 \le x \le 1} \left| \varphi(x) \cdot \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \max\limits_{0 \le x \le 1} |\varphi(x)| < \varepsilon \to$ si considero

$n_0 = \dfrac{\max\limits_{0 \le x \le 1} |\varphi(x)|}{\varepsilon}$. converge $\forall n \geq n_0$

Veamos la convergencia uniforme

Propongo $n_k = n_0$ y $\varphi_k = (k^2-1)x$ y $x = 1$

$\to \max\limits_{0 \le x \le 1} \left| \frac{k}{k+1} \cdot (k^2-1)x - (k^2-1)x \right| = k^2 + 1 \geq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$