10. Consideremos en $C([0,1])$ las normas

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad \text{y} \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

[redacted]

Sean $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ las funcionales lineales definidas por

$$\mathcal{E}f = f(0), \qquad \mathcal{I}f = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Decidir, para cada una de las normas, si cada una de las funcionales es continua; en caso afirmativo, acotar su norma.

Para verificar si son continuas podemos

* Ver la continuidad en alguno de sus puntos
* Ver si su núcleo es cerrado
* Ver si son acotadas

Vamos a ver si son acotadas. Para eso tenemos que ver si $\|Tx\|_F \le C\|x\|_E$

$\mathcal{E}f = f(0)$

$\|\cdot\|_\infty$: $|f(0)| \le \max\limits_{0\le x\le 1} |f(x)| = \|f\|_\infty$

$\to |f(0)| \le \|f\|_\infty$

$\to$ $f(0)$ con $\|\cdot\|_\infty$ está acotada $\to$ $\mathcal{E}f$ es continua con $\|\cdot\|_\infty$

Acotamos la norma, $|\mathcal{E}f| \le \|f\|_\infty \to \sup\limits_{f\ne 0} \dfrac{|\mathcal{E}f|}{\|f\|_\infty} \le 1$

$\to \|\mathcal{E}f\| \le 1$

$\|\cdot\|_1$: Veamos que con esta distancia NO es continua. Mostremos un contraejemplo

Supongamos que Ef es continua con $\|\cdot\|_1$, entonces es acotada
Por lo tanto, $|Ef| \leq c\|f\|_1 \; \forall f \in \mathcal{C}([0,1])$ y que

$$\sup \frac{|Ef|}{\|f\|_1} \leq c \longleftarrow$$

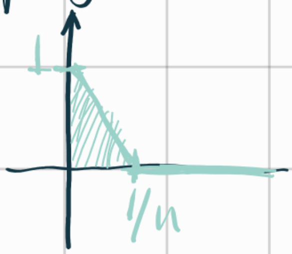
$$\sup_{\|f\|_1 = 1} |Ef| \leq C$$

Vamos a querer $f / \int_0^1 |f(t)|dt = 1$ pero $f(0) = C+1$

Preguntar

CORRECCIÓN

Supongamos la suc $(f_n) \subseteq \mathcal{C}([0,1]) /$ $f_n = \begin{cases} \text{recta si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 \text{ si } x \geq 1/n \end{cases}$



$\longrightarrow$ Esta suc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Supongamos que Ef es continua $\to \underbrace{Ef_n}_{1} \longrightarrow E0$
$1 \longrightarrow 0$

¡ABS! Ef NO es continua

$If = \int_0^1 f(x)\,dx$

$\|\cdot\|_\infty$: $\left|\int_0^1 f(x)\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dt \leq \int_0^1 \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty$

$\rightarrow \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$

$\rightarrow$ f es continua con las 2.

Con $\|\cdot\|_\infty \rightarrow \|If\| \leq 1$

$\|\cdot\|_1 \rightarrow \|If\| \leq 1$