9. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ tal que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en X. Probar que:

(a) La función suma $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en X.

(b) Si $X = [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Sea X un e.m

$(f_n(x))_{n\geq 1}$ continua $\forall n \in \mathbb{N}$ y $f_n(x): X \to \mathbb{R}$ /

$\sum_{n\geq 1} f_n$ Converge uniformemente

QVQ $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en X

Sabemos que * f_n es continua $\forall n \in \mathbb{N}$

preguntar { * $\sum_{n\geq 1} f_n$ Converge uniformemente $\to \sum_{n=1}^{N} f_n$ converge uniformemente a $\sum_{n\geq 1} f_n$

* Dados (X, d_X) y (Y, d_Y) e.m si tenemos $f_n, f: X \to Y$ con f_n continua $\forall n \in \mathbb{N}$ / $f_n \rightrightarrows f \to f$ es continua

QVQ $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ es continua. Para eso veamos que $\sum_{n=1}^{N} f_n$ es continua $\forall n \in \mathbb{N}$

Sea $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ QVQ es continua $\forall N \in \mathbb{N}$

Como $(f_n)_{n\geq 1}$ es continua $\forall n \in \mathbb{N} \to S_N$ al ser una suma de funciones continuas es continua $\forall N$

$\rightarrow S_N$ es continua $\forall N \in \mathbb{N}$ y $S_N \rightrightarrows f$ $\rightarrow f$ es continua

(b) Si $X=[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)dx$

Del ítem anterior sabemos que $S_N, f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas

y que $S_N \rightrightarrows f$ $\underset{\text{Por Teo}}{\longrightarrow}$ $\lim \int_a^b S_N(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} S_N(x)dx$ $\rightarrow$

$\lim \int_a^b S_N(x)dx = \int_a^b \sum_{n\geq 1} f_n \rightarrow$

$\lim \int_a^b S_N(x)dx = \int_a^b f(x) \rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_N = \sum_{n\geq 1} f_n$

$\sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)dx$