14. Recordemos que para $c \in \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ denotamos

$$cA = \{ca : a \in A\}.$$

(a) Probar que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $cA \in \mathcal{M}$.

(b) Probar que si $c > 0$ entonces $\mu(cA) = c\,\mu(A)$.

(c) ¿Qué se puede decir de $\mu(cA)$ en el caso $c < 0$?

ⓐ Probar que si $A \in \mathcal{M} \to cA \in \mathcal{M}$

Consideremos $f : X \to Y$ con $\mathcal{M} \subseteq Y$ / $f = \frac{1}{c}x$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$

$\to f^{-1}(\mathcal{M}) = \{ \underbrace{f^{-1}(A)}_{\text{como es biyectiva}} / A \in \mathcal{M} \} = \{ cA / A \in \mathcal{M}, c \in \mathbb{R}_{>0} \} = \mathcal{B}$

$\to$ es una σ-álgebra

Veamos que es medible

$\to \mathcal{M} = \{ x \subseteq X / f(x) \subseteq \mathcal{M} \} = \{ x \subseteq X / \frac{1}{c} x \subseteq \mathcal{M} \} =$

$\{ f(cx) / x \subseteq X \}$