13. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Supongamos que E tiene medida finita. Probar que f es integrable.

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible y acotada y E con medida finita

QVQ $\int_E f \, d\mu < +\infty$

f es integrable $\longleftrightarrow$ $|f|$ es integrable

Estudiemos $|f|$

$\to$ Como f está acotada $\to$ $|f(x)| \leq M \ \forall x \in E$

$\to$ $|f| \leq M \ \forall x \in E \to f^+ + f^- \leq M \ \forall x \in E$

$\to$ $f^+ \leq M \ \forall x \in E$ y $f^- \leq M \ \forall x \in E$

Veamos qué pasa si tengo φ simple en E. Sup que se escribe

$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \to \int_E \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \underbrace{\mu(E_i)}$ $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una partición

$\mu\left(\bigcup_{i=1} E_i\right) = \mu(E) \to$

$\mu\left(\bigcup_{i=1} E_i\right) = \sum_{i=1} \mu(E_i) < +\infty$

es disjunta $\quad$ E tiene medida finita

$\longrightarrow \int_E \varphi \, d\mu = \mu(E) \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = K \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

Como $f^+ \geq 0$ y es medible (f lo es) $\to \exists\, \varphi_n$ simples medibles $/\ 0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ y $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f^+$

Conv Monótona $\to \displaystyle\int_E f^+\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int \varphi_n\, d\mu$

Como $f^+ \leq M \to \varphi_n \leq M \to \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \chi_{E_i} \leq M \to \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \leq M$

$$\int_E \varphi_n\, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, \mu(E_i) = \mu(E) \cdot \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \leq \underbrace{\mu(E)}_{\text{finito}} \cdot M \leq K < +\infty$$

$$\to \int_E f^+\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E \varphi_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} K = K < +\infty$$

$\to f^+$ es integrable

Si hacemos el mismo razonamiento verificamos que f^- es integrable

$\to \displaystyle\int_E |f|\, d\mu < +\infty \to f$ es integrable