10. Sea $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente. Probar que las dos series de funciones

$$\sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\geq 1} a_n \sin(nx)$$

convergen absoluta y uniformente en $\mathbb{R}$ a funciones continuas.

Para probar esto usamos el criterio de Weierstrass → tenemos que hallar $C_n > 0$ / $|f(x)| \leq C_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$

→ Queremos analizar convergencia de $\sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx)$ → $f(x) = a_n \cos(nx)$

→ $|f(x)| = |a_n||\cos(nx)| \leq |a_n|$ → encontramos C_n

Ahora, si $\sum C_n$ converge, tenemos asegurada la convergencia absoluta y uniforme de $\sum_{n\geq 1} f$ a una f acotada

→ $C_n = a_n$ por hip $\sum a_n$ converge absolutamente

→ $\sum_{n\geq 1} f = \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx)$ converge absoluta y uniformemente a una f acotada

Falta ver continuidad

Si defino $S_N = \sum_{n}^{N} a_n \cos(nx)$ como $a_n \subseteq \mathbb{R}$ y $\cos(x)$ es continua →

$a_n \cos nx$ es continua → S_N es continua $\forall N$ y $S_N \rightrightarrows f$

→ f es continua

Para el sin es análogo