Probar que $\forall a>0$ $\dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \sum_{n\geq 0} -ne^{-nx}$ converge uniforme y absolutamente en $[a,+\infty)$

11 Sugerencia estudiar $\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$

El problema si $x\to 0$ es que $e^{-nx} \to 1^{-n}=1 \to \sum \cdot n$ diverge!

Vamos a analizar que pasa en $[a,+\infty)$

Para eso veamos que pasa con $\sum e^{-nx} = \sum (e^{-x})^n$

Definimos $S_N = \sum_{n=0}^{N} (e^{-x})^n$ en $[a,+\infty)$

Considero $f_n = (e^{-x})^n$ y aplico Weierstrass

$\to |(e^{-x})^n| = |e^{-x}|^n \leq |e^{-a}|^n = |1/e^a|^n$ Converge ya que $0 < 1/e^a < 1$

$\to S_N \rightrightarrows \sum_{n\geq 0} (e^{-x})^n$

Veamos que pasa con $\sum_{n\geq 0} -n(e^{-x})^n$. Para eso defino $S_N = \sum_{n=1}^{N} -n(e^{-x})^n$

Considero $f_n = -n(e^{-x})^n$ y aplico Weierstrass

$$|-n(e^{-x})^n| \leq n|e^{-x}|^n \leq \underbrace{n(1/e^a)^n}_{c_n} \xrightarrow{\text{D'Alembert}} \frac{(n+1)}{(e^a)^{n+1}} \cdot \frac{(e^a)^n}{n} =$$

$$\frac{n+1}{n} e^{an-an-a} = \frac{n+1}{n} \cdot e^{-a} = \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot e^{-a}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-a}$$

→ S_N converge absoluta y uniformemente a $\sum_{n\geq 0} -ne^{-nx}$ en $[a, +\infty)$ $\forall a>0$.