4. Sea E un espacio normado y $S \subseteq E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

(a) $\overline{S}$ también es un subespacio.

Si: E es normado $\rightarrow$ E es un e.v

Sean E e.n y $S \subseteq E$ un sev QVQ $\overline{S}$ es s-e.v

Sabemos que E es un e.v y que S es un s-e.v

$\rightarrow$ ① $0_E \in S$

② $x +_E y \in S \; \forall x, y \in S$

$\lambda \cdot_E x \in S \; \forall \lambda \in$ Cuerpo de E y $x \in S$

QVQ $\overline{S}$ Cumple estas propiedades

① ¿$0_E \in \overline{S}$? Como $S \subseteq \overline{S}$ y $0_E \in S \longrightarrow 0_E \in \overline{S}$

② ¿$x +_E y \in \overline{S} \; \forall x, y \in \overline{S}$?

Sabemos que $x + y \in \overline{S} \longleftrightarrow \exists (x+y)_n \subseteq S /$ $(x+y)_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x+y)$

Si $x, y \in \overline{S} \rightarrow \exists (x_n)_{n \geq 1} \wedge (y_n)_{n \geq 1} \subseteq S /$
$x_n \xrightarrow[+\infty]{} x$, $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} y$

Si considero $x_n + y_n = (x+y)_n$ pero como además
$(x_n)_{n \geq 1} \subseteq S$ y $(y_n)_{n \geq 1} \subseteq S \rightarrow (x+y)_n \subseteq S$

Por álgebra de límites $x_n + y_n \rightarrow x+y \rightarrow$

$$(x_n + y_n) = (x+y)_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x+y$$

$\therefore \exists (z_n)_{n \geq 1} \subseteq S / z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x+y$

$\rightarrow \quad x+y \in \overline{S}$

(3) ¿$\lambda x \in \overline{S}$ $\forall x \in \overline{S}$ y $\lambda \in$ cuerpo de E?

Como $x \in \overline{S} \rightarrow \exists (x_n)_{n \geq 1} \subseteq S / x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

Por álgebra de límites $\lambda x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda x$
$\rightarrow \quad \lambda x \in \overline{S}$

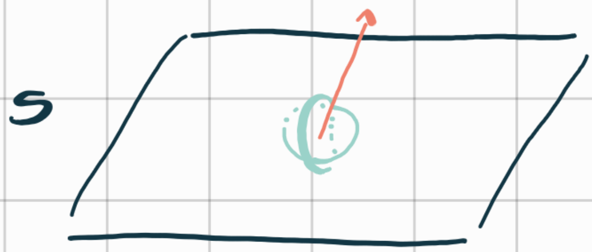
(b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.

Sé que E es un e.v. y que $S \subseteq E$ es un subespacio
Además sé que $\overline{S}$ es un subespacio

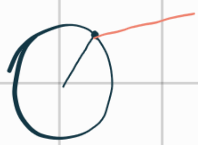
$S^\circ = \{ x \in E / \exists r>0 / B(x,r) \subseteq S \}$

Sea $S \neq E$ QVQ $S^\circ = \emptyset$ quiero ver que para cualquier bola se meten elementos de E

Supongamos $\mathbb{R}^3$ con $\|\cdot\|_2$ y $S = \mathbb{R}^2$



Vemos que para cualquier bolita me entra un elemento que no corresponde



Vayamos por el absurdo.

Supongamos que $S^\circ \neq \emptyset \to \exists$ al menos un $x / x \in S^\circ \to$
$\exists r>0 / B(x,r) \subseteq S \leftrightarrow x + \underset{\sim}{B(0,r)} \subseteq S$

Veamos que se nos meten elementos que NO son de S

E es un espacio vectorial

Como $S \neq E \rightarrow \exists$ al menos un $e \in E \setminus S \rightarrow$ $\lambda e \notin S$

Sea $e \in E \setminus S \,/\, \|e\| = r/2 \longrightarrow e \in B(0, r)$

Ahora, $B(0,r) \subseteq S \rightarrow e \in S \rightarrow$ ¡ABS!

(c) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.

Cómo $\dim(S) < \infty \longrightarrow S$ es de Banach $\rightarrow$ S es de Banach es cerrado.

(d) Si S es un hiperplano, entonces S es o bien denso o bien cerrado en E.

Como QVQ $p \to (q \vee r)$ basta con ver $p \to q$ o $p \to r$

Supongamos que S NO es cerrado.

QVQ S es denso en $E \longleftrightarrow \overline{S} = E \leftrightarrow \overline{S} = S \oplus \underbrace{\langle x \rangle}$

queremos ver que a la clausura se le agrega $\langle x \rangle$

Vamos a querer ver que $\langle x \rangle$ y $s + \lambda x \in \overline{S}$

Como S NO es cerrado $\exists (s_n)_{n \geq 1} \subseteq S \,/\, s_n \to e$ con $e \notin S$ y $e = s + \lambda x$

$\to \quad s_n \to s + \lambda x$

$\to \quad s_n - s \to \lambda x$

$\to \quad \exists \tilde{s}_n = s_n - s \subseteq S \,/\, \tilde{s}_n \to \lambda x$

$\to \lambda x \in \overline{S}$, como $\overline{S}$ es un s.e.v $\to \langle x \rangle \in \overline{S}$ pero

también $e \in \overline{S} \to \langle e \rangle \in \overline{S} \to$ tengo $e = s + \lambda x$ para algún x pero también pertenecen $\langle x \rangle$

$\to$ como es s.e.v la suma con dentro

$\to e + \langle x \rangle$

$= s + \lambda x + \langle x \rangle =$

$s + \langle x \rangle \in \overline{S}$

$\to \quad \overline{S} = S \oplus \langle x \rangle$