15. Probar que existe una función sobreyectiva $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que vale 0 en casi todo punto de $[0,1]$. ¿Puede una tal función ser continua?

Sabemos que $\mathcal{C} \subseteq [0,1]$, $\#\mathcal{C} = c$ y $\mu(\mathcal{C}) = 0$

$\to \mu([0,1]\setminus\mathcal{C}) = 1 \to \mu([0,1]\setminus\mathcal{C})$ es denso en $[0,1]$

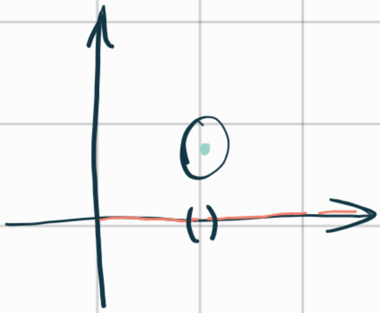
Como $\#\mathcal{C} = 1 \to \exists f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ biyectiva y en particular $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{C}$

$\to$ extiendo f a $[0,1]$ haciéndola valer 0 $\forall x \notin \mathcal{C}$

Ahora, tengo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sobreyectiva / $f(x) = 0$ ctp ya que

$\mu(\{x \in [0,1] / f(x) \neq 0\}) = \mu(\mathcal{C}) = 0$

Veamos que NO es continua



Supongamos que es continua $\to \forall x \in [0,1] \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x) /$

$|x-y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Sea $x \in \mathcal{C}$ y $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x)| \to$

$\forall x_0 \in [0,1]$ t.q. $|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Sin embargo, sabemos que $\exists y \notin \mathcal{C}$ tan cerca de x como queramos

$\to |f(x) - f(y)| = |f(x)| < 1/2 \, |f(x)|$ ¡ABS!