10. Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles e integrables tales que para todo $A \subseteq E$ medible se tiene que $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$. Probar que $f = g$ en casi todo punto de E.

Sea $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$ con $A \subseteq E$ QVQ $f=g$ en ctp.

$\longrightarrow$ En realidad QVQ $\mu(\{f \neq g\}) = 0$

$\{f \neq g\} = \{f > g\} \cup \{f < g\} \rightarrow$ esta unión es disjunta

$\rightarrow \mu(\{f \neq g\}) \underset{\uparrow}{=} \mu(\{f>g\}) + \mu(\{f<g\})$

σ-aditividad

Si probamos que una de las 2 es 0 ya está

Veamos que $\mu(\{f>g\}) = 0$

Solo tenemos las integrales $\rightarrow$ Sabemos que $\forall A \subseteq E$

$\rightarrow \int_A f = \int_A g$

defino $A = \{f > g\} \rightarrow \int_{\{f>g\}} f = \int_{\{f>g\}} g \rightarrow \int_A f - \int_A g = 0 \rightarrow$

linealidad $\int \longrightarrow \int_A f - g = 0$

$\longleftrightarrow f - g = 0$ en ctp $\rightarrow \mu\{f - g \neq 0\} = 0 \leftarrow \mu(\{f \neq g\}) = \mu\{f > g\} = 0$

de A

Como $\{f > g\} \subseteq \{$