3. Probar que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es nulo.

QVQ $\exists \{I_n\}_{n\in J} \;/\; A \subseteq \bigcup_{n\in J} I_n$ y $\forall \varepsilon>0 \; \sum \text{long } I_n < \varepsilon$

Idea: un conjunto numerable puede ser escrito como la unión numerable de sus elementos → puedo plantear intervalos que contenga a c/punto → tengo una familia numerable de intervalos

Si A es numerable $\to A = \{x_n\}_{n\geq 1}$ con $x_n \neq x_m$ para $n \neq m$

→ Dado $\varepsilon>0$ para c/$n\in\mathbb{N}$ defino $I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$ → tengo una familia numerable de intervalos / $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists I_n \;/\; x_n \in I_n$

$$\to \forall n\in\mathbb{N} \; x_n \subseteq I_n \to \underbrace{\bigcup_{n\geq 1} x_n}_{= A} \subseteq \bigcup_{n\geq 1} I_n$$

$$\to A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} I_n$$

Queda ver que $\sum_{n\geq 1} \text{long } I_n < \varepsilon$

$$\sum_{n\geq 1} \text{long } I_n = \sum_{n\geq 1} x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} - x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \sum_{n\geq 1} \frac{2\varepsilon}{2^{n+2}} = \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$$