11. Consideremos, por definición, que $y(x) = \sin(x)$ es la única función $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable que satisface $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Probar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\sin(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

y que la serie converge absoluta y uniformemente en todo conjunto acotado.

¿Es uniforme la convergencia en $\mathbb{R}$? *Sugerencia: usar que* $\sin(x)$ *es una función acotada.*

Primero probemos que $\sin(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

$$\sin(0) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{+1}{1!} x^1 + \frac{(-1)}{3!} x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots = \underset{\underset{x=0}{\uparrow}}{0}$$

$$\sin'(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)!} x^{2k} = \underbrace{\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k}}_{} = \frac{1}{0!} + \frac{(-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$x = 0$

$\downarrow$

$= 1$

Cuando se deriva una serie esta va a empezar desde $k=1$ $\to$ queremos que inicie del 0 $\to$ sumamos 1 a todos los términos $\to$ $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} x^{2k+2}$

Falta chequear que $y'' + y = 0$

$$y'' = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2k+2}{(2k+2)!} x^{2k+1} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{k+2}}{(2k+3)!} x^{2k+3}$$

$$y'' + y = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{k+2}}{(2k+3)!} x^{2k+3} + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Vamos a probar que converge unif y absolutamente en todo conjunto acotado.

Para eso llamos el radio de convergencia

$$\sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \to a_n = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \xrightarrow{\text{D'Alambert}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} \cdot \frac{(2k+1)!}{(-1)^k} = \frac{-1}{(2k+2)(2k+3)} \longrightarrow 0$$

$$\longrightarrow 0 = \ell$$

Si quisiera definir el radio de convergencia $R = \infty$

$\to$ voy a considerar $|x| \leq r < R = \frac{1}{\ell}$

Este 1er paso fue para definir radio de convergencia y una cota para x $\to$ así tenemos una C_k y podemos aplicar el criterio de Weierstrass

$$f_n = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \xrightarrow{\text{Weierstrass}} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| \leq \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} r^{2k+1} \longrightarrow$$

Ahora como tenemos $C_k \subseteq \mathbb{R} \to$ D'Alambert o Cauchy

$$\text{D'Alembert} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} r^{2k+3} \cdot \frac{(2k+1)!}{(-1)^k} \frac{1}{r^{2k+1}} \right| = \left| \frac{-r^2}{(2k+2)(2k+3)} \right|$$

$$= \frac{r^2}{(2k+2)(2k+3)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

$\to$ acabamos de probar que la serie converge uniforme y absolutamente

$\forall x / |x| \leq r$ → es decir, en todo compacto

∴ en todo acotado

→ Como el seno es periódico si particionamos $\mathbb{R}$ en intervalos $[k ; k+2\pi]$ entonces podemos extender a todo $\mathbb{R}$