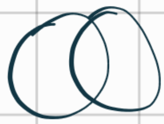
13. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{M}$ tales que $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n \triangle B)=0$. Probar que $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(B)$.

Sea $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n \triangle B)=0$ QVQ $\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\mu(B)$



Sabemos que $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} / |\mu(A_n\triangle B)|<\varepsilon\ \forall n\geq n_0$; el límite nos dice que son el mismo conjunto

$\mu(A_n \triangle B)<\varepsilon$

$\mu((A_n\setminus B)\cup(B\setminus A_n)) = \mu(A_n\setminus B)+\mu((B\setminus A_n)\setminus(A_n\setminus B)) = \mu(A_n\setminus B)+\mu(B\setminus A_n)<\varepsilon$

QVQ $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} / |\mu(A_n)-\mu(B)|<\varepsilon\ \forall n\geq n_0$

Sea $\varepsilon>0$ QVQ $\exists n_0 \in\mathbb{N} / |\mu(A_n)-\mu(B)|<\varepsilon \ \forall n\geq n_0$

$|\mu(A_n)-\mu(B)| = |\mu(A_n)-\mu((B\setminus A_n)\overset{d}{\cup}(A_n\cap B))| =$

$|\mu((A_n\setminus B)\overset{d}{\cup}(B\cap A_n)) - \mu((B\setminus A_n)\overset{d}{\cup}(A_n\cap B))| =$

$|\mu(A_n\setminus B)+\cancel{\mu(B\cap A_n)}-\mu(B\setminus A_n)-\cancel{\mu(A_n\cap B)}|$

$|\mu(A_n\setminus B)-\mu(B\setminus A_n)| \leq$

$\mu(A_n\setminus B)+\mu(B\setminus A_n)<\varepsilon\ \forall n\geq \tilde{n}_0$

Si considero $n_0=\tilde{n}_0$