12. Probar que la serie

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$$

define una función continua en $(0, +\infty)$.

Probar que además f es derivable, y calcular su derivada.

El problema se da cuando $x \to 0$ ya que $\frac{1}{x} \to \infty$, voy a analizar qué pasa en el intervalo $[\varepsilon; +\infty)$ $\forall \varepsilon > 0$

Para ver que es continua vamos a analizar la suc

$S_N = \sum_{n\geq 1}^{N} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ en el intervalo $[\varepsilon; +\infty)$, intervalo donde es continua $\forall n$

Usamos el criterio de Weierstrass $f_n(x) = 2^n \cdot \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right) \to \left|2^n \sin \frac{1}{3^n x}\right| \leq \left|2^n \frac{1}{3^n x}\right|$

$$\leq \left|\frac{2^n}{3^n} \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right| = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{\varepsilon}}_{c_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$\to S_N \rightrightarrows \sum_{n\geq 1} 2^n \cdot \sin \frac{1}{3^n x}$ en $[\varepsilon; +\infty)$

$\to \sum_{n\geq 1} 2^n \cdot \sin \frac{1}{3^n x}$ es continua en $[\varepsilon; +\infty)$

Tenemos que poder generalizar para $(0; +\infty)$

Sea $x \in (0; +\infty) \to \exists \varepsilon > 0 /$ siempre hay un intervalo donde converge $x \in [\varepsilon; +\infty) \to \sum f_n(x)$ es continua en $[\varepsilon; +\infty)$. Puedo hacer esto $\forall x \in (0; +\infty)$ y como la continuidad

es una propiedad local $\to \sum f_n(x)$ es continua $\forall x \in (0;+\infty)$
$\to$ es continua en $(0;+\infty)$

Para probar que es derivable vamos a usar que si $f_n \in \mathcal{C}^1([a.b])$ y $f, g: [a.b] \to \mathbb{R}$ son continuas / $f_n \to f$ y $f_n' \rightrightarrows g \Longrightarrow f$ es derivable y $f' = g$

El argumento va a ser el mismo que arriba. Consideramos $[\varepsilon; +\infty)$ y definimos $S_N = \sum_{n=1}^{N} 2^n \cos\left(\frac{1}{3^n x}\right) \cdot \frac{1}{3^n x^2}$

preguntar

Veamos qué pasa con $S_N \to$ usamos Weierstrass $f_n(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)^n \cos\left(\frac{1}{3^n x}\right) \frac{1}{x^2}$

$$\to \left| -2^n \cdot \cos\left(\frac{1}{3^n x}\right) \cdot \frac{1}{3^n x^2}\right| \leq \left| -2^n \cdot \frac{1}{3^n x} \cdot \frac{1}{3^n x^2}\right| \leq \frac{2^n}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} = \underbrace{\left(\frac{2}{9}\right)^n \frac{1}{\varepsilon^3}}_{C_n}$$

$\sum \left(\frac{2}{9}\right)^n \frac{1}{\varepsilon^3}$ converge ya que $0 < \frac{2}{9} < 1$

$$\to S_N \rightrightarrows \sum_{n \geq 1} -2^n \cdot \cos\left(\frac{1}{3^n x}\right) \frac{1}{3^n x^2} \text{ en } [\varepsilon; +\infty)$$

Como la derivada es local, por el mismo argumento de arriba f es derivable en $(0;+\infty)$ y $f' = \lim_{N \to \infty} S_N$