8. Sea $(f_n)_{n\geq 1} : [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones derivables que converge puntualmente a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Probar que si existe $c > 0$ tal que $|f_n'(x)| \leq c$ para todo $x \in [a,b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua.

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones derivables / $f_n \to f$

Si $\exists c>0$ $|f_n'(x)| \leq c$ $\forall x \in [a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ QVQ f es continua

QVQ $\forall x \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 / d(x,x_0) < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Sabemos que

- $f_n \to f \leftrightarrow \forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon, x) / |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$
- $|f'(x)| \leq c \to f$ es Lipschitz $\to |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq c\, d(x,x_0) \to f_n$ es UC y podemos considerar $\delta = \varepsilon / c$
- f_n es UC $\to \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 / d(x,x_0) < \delta \to |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in [a,b]$

Fijemos ε y x_0

$\to$ para ese ε y x_0: $\exists \tilde{n}_0(\varepsilon, x_0) / |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq \tilde{n}_0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \tilde{\delta} = \frac{\varepsilon}{c} / d(x,x_0) < \delta \to |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x \in [a,b]$

si vale para $\frac{\varepsilon}{c}$ como $\frac{\varepsilon}{3c} < \frac{\varepsilon}{c}$ vale para $\frac{\varepsilon}{3c} \to \tilde{\delta} = \frac{\varepsilon}{3c}$

Si considero $\delta = \tilde{\delta} / d(x,x_0) < \delta$ QVQ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + \underbrace{|f_n(x) - f_{n_0}(x)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f(x_0)|}_{\varepsilon/3} <$$

Considero $n \geq n_0 \geq \tilde{n}_0$

$$c\,\underbrace{d(x,x_0)}_{<\tilde{\delta}} + \frac{2\varepsilon}{3} < c\tilde{\delta} + \frac{2\varepsilon}{3} = c\,\frac{\varepsilon}{3c} + \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$