Encontrar el límite puntual de la sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

i. $f_n(x) = x^n$, $A = (-1, 1]$.

Si $|x| < 1 \to \quad x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$|x| = 1 \longrightarrow \quad x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Mi candidato a límite es $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$

Sea $\varepsilon > 0$ qvq $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$

Si $x = 1$

$|f_n(x) - f(x)| = |1^n - 1| = |1 - 1| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si $x \neq 1$

$|x^n - 0| = |x^n| \leq |x|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad |x|^n < \varepsilon$

Despejar n_0 de acá es un lardo, se puede usar que

$\lim\limits_{n \to +\infty} |x|^n = 0$ y listo!

ii. $f_n(x) = x^{-n}e^x$, $A = (1, +\infty)$.

Si fijo x $\longrightarrow$ $x_0^{-n} \underbrace{e^{x_0}}_{cte} = \frac{1}{x_0^n} M \longrightarrow 0$

Mi candidato a límite es $f(x)=0$

Sea $\varepsilon>0$ qvq $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \ \forall n \geq n_0$

$|x^{-n}e^x| = \left|\frac{1}{x^n}e^x\right|$

Vamos a hacerlo por límite

$\lim_{n\to+\infty} x^{-n}e^x = e^x \lim_{n\to+\infty} x^{-n} = e^x \cdot 0 = 0$ ✓

iii. $f_n(x) = n^2x\,(1-x^2)^n$, $A = [0,1]$

Si fijo $x=1$ $f_n(x)=0$

$x=0$ $f_n(x)=0$

$0<|x|<1$ $f_n(x) = \underbrace{n^2}_{\to+\infty} x_0 \cdot \underbrace{(1-x_0)^n}_{\to 0}$

Mi candidato a límite es $f(x)=0$

Veamos el límite si $0<|x|<1$

$\lim_{n\to+\infty} n^2x(1-x)^n = x \lim_{n\to+\infty} n^2(1-x)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{1/(1-x)^n} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{-(1-x)^n \ln|1-x|} \overset{L'H}{=}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{(1-x)^n \ln^2|1-x|} = 0$

$\longrightarrow$ $f_n \longrightarrow f$

iv. $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $A = \mathbb{R}$

El candidato a límite es 0

Veamos con lim

$$\lim_{n \to +\infty} xe^{-nx^2} = x \lim_{n \to +\infty} e^{-nx^2} = x \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^{nx^2}} = x \cdot 0 = 0$$

(b) Para la sucesión de **i.**, probar que la convergencia es uniforme sobre $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, y para la de **ii.**, que es uniforme sobre $[2, 5]$.