13. Sea ℓ^2 el espacio vectorial de todas las sucesiones de cuadrado sumable:

$$\ell^2 = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Para $a \in \ell^2$ definimos

$$\|a\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

(a) ¿Es compacta la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de ℓ^2?

(b) Probar que $\gamma : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

es una funcional lineal continua.

Sugerencia: usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

(a) $\bar{B}(0,1) = \{ a_n \in \ell_2 / \|a_n\|_2 \leq 1 \}$

NO va ser compacta

Consideremos

$$S_N = \begin{array}{ll} (1/\sqrt{1}, 0, \dots, 0, \dots) = X^1 & \in \bar{B}(0,1) \\ (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0, \dots) = X^2 & \in \bar{B}(0,1) \\ (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, \dots) = X^3 & \in \bar{B}(0,1) \\ \vdots & \\ (1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n}, 0, \dots) = X^N & \in \bar{B}(0,1) \\ \vdots & \end{array}$$

Esta sucesión estaría convergiendo a $x = (0, 0, \cdots, 0, \cdots)$

$\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \|x_n^N - x\|_2 < \varepsilon \quad \forall N \in \mathbb{N}$

Sin embargo, $\|x_n^N - x\|_2 = \left(\sum_{n \geq 1}^{\infty} |x_n^N|^2\right)^{1/2} = 1 \quad \rightarrow x_n^N \not\rightarrow x$

Como se cumple para c/subsucesión que yo quiera considerar $\rightarrow \overline{B}(0,1)$ NO es compacta

Podemos usar la suc $S_N = \begin{matrix} (1, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ (0, 0, 1, 0, \cdots 0, \ldots) \\ \vdots \\ (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \end{matrix}$

Veamos que NO tiene subconvergente, para eso veamos que NO es de Cauchy, si la suc NO es de Cauchy, las sub no van a ser de Cauchy $\rightarrow$ No converge

Supongamos que S_N es de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \|x_n^N - x_n^M\|_2 < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

Si considero $\varepsilon = 1/2 \rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / \|x_n^N - x_n^M\|_2 < \varepsilon \quad \forall N, M \geq n_0$

$\sqrt{2} < 1/2$

¡ABS!

(b) QVQ $\varphi(a) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ es un operador lineal continuo

Es lineal por la linealidad de la sumatoria

Respecto pedir continuidad, podemos usar

* Continuidad
* acotada
* $Nu(\varphi)$ es cerrado

Como $a_n \in \ell_2 \to \sum |a_n|^2 < +\infty$ en particular $\to$

$\sum \left(\frac{|a_n|}{n}\right)^2 < +\infty$ incluso $\sum |a_n|^2 \geq \sum \left(\frac{|a_n|}{n}\right)^2$ ya que $|a_n| \geq \frac{|a_n|}{n}$

$\to |a_n|^2 \geq \left(\frac{|a_n|}{n}\right)^2 \to \sum |a_n|^2 \geq \sum \left(\frac{|a_n|}{n}\right)^2$

$\to$ Probemos que $\varphi(a)$ es acotado $\to \exists c > 0 /$

$$|\varphi(a)| \leq c\|a\|_2$$

$$\left|\sum \frac{a_n}{n}\right| \leq \sum \frac{|a_n|}{n} \underset{C.S}{\leq} \|1/n\|_2 \|a_n\|_2$$

$$\left(\sum |1/n|^2\right)^{1/2}\left(\sum |a_n|^2\right)^{1/2} = \left(\sum 1/|n|^2 \sum |a_n|^2\right)^{1/2} = \left(\sum |a_n|^2/|n|^2\right)^{1/2} =$$

$$\left(\sum \left(|a_n|/|n|\right)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum |a_n|^2\right)^{1/2} = \|a_n\|_2$$

$$\longrightarrow \left|\sum a_n/n\right| \leq \|a_n\|_2$$