1. Probar que dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X y dada $f : X \to \mathbb{R}$, son equivalentes:

(a) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(b) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(c) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(d) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Concluir que si $X \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, entonces f es medible si y sólo si vale alguno de (y por lo tanto todos) los items de arriba.

Tengo que probar equivalencia. Puedo hacer $a \to b \to c \to d \to a$ u otra cosa.

$\boxed{a \rightleftarrows b}$ Sea $\{f > a\} \in \mathcal{A}$ QVQ $\{f \leq a\} \in \mathcal{A}$

$\{f \leq a\} = (\underbrace{\{f > a\}}_{\in \mathcal{A}})^c \in \mathcal{A}$ → def σ-álgebra

La vuelta es análoga.

$\boxed{c \rightleftarrows d}$ Sea $\{f \geq a\} \in \mathcal{A}$ QVQ $\{f < a\} \in \mathcal{A}$

$\{f < a\} = (\underbrace{\{f \geq a\}}_{\in \mathcal{A}})^c \in \mathcal{A}$ → def σ-álgebra

La vuelta es análoga

$\boxed{b \to d}$ Si puedo esto tengo $a \rightleftarrows b \to d \rightleftarrows c$ me faltaría probar $c \to a$

Sea $\{f \leq a\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$ QVQ $\{f < a\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$

→ La estrategia va a ser escribir a $\{f<a\}$ en función de medibles

Sé que $1/n \to 0 \Rightarrow a - 1/n \to a$

$\xrightarrow[\text{hip}]{} \{f \leq a\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R} \to \{f \leq a - 1/n\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$

si hago tender $n \to +\infty \Rightarrow f \leq a -$ "algo muy cercano a 0 pero nunca 0" $\to f < a$

$$\to \{f<a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{f \leq a - 1/n\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

↳ def σ-álgebra

$\boxed{c \to a}$ Sea $\{f \geq a\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$ QVQ $\{f > a\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$

Misma idea → escribir a $\{f>a\}$ en función de medibles

Si $\{f \geq a\} \to \{f \geq a + 1/n\}\ \forall n \in \mathbb{N}$

cuando $n \to +\infty$, $1/n \to 0$ pero $a + 1/n > a$

$$\to \{f>a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{f \geq a + 1/n\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

↳ def σ-álgebra

Listo, probamos que $a \to b \to d \to c \to a \Rightarrow$ son equivalentes

Si $X \in \mathcal{M}$ y $A \in \mathcal{M}$

f es medible $\longleftrightarrow$ sucede alguna

$\rightarrow$) f es medible $\rightarrow$ $\underbrace{\{f \leq a\} \in \mathcal{M} \; \forall a \in \mathbb{R}}_{\text{ítem (b)}}$

def

$\leftarrow$) Si sucede alguna, como son equivalentes $\rightarrow$ sucede (b)

(b) $\rightarrow$ def de medible