2. Sea E un espacio normado. Probar que se verifican:

(a) Si $x \in E$ y $r > 0$, $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

(b) $\operatorname{diam}(B(x,r)) = 2r$.

(c) Si $y, z \in B(x,r)$ entonces para todo $t \in [0,1]$, $ty + (1-t)z \in B(x,r)$ (es decir, la bola es *convexa*).

ⓐ Si $x \in E$ y $r > 0$ QVQ

$$\overline{B(x,r)} = \bar{B}(x,r)$$

Para probar esto, como no dejan de ser conjuntos basta ver la doble inclusión

Hay una que ya tenemos esta es $\subseteq$

$$\longrightarrow \overline{B(x,r)} \subseteq \bar{B}(x,r)$$

Ahora queremos ver

$$\overline{B(x,r)} \supseteq \bar{B}(x,r)$$

3) Vamos a querer ver que $\forall y \in \bar{B}(x,r) \longrightarrow y \in \overline{B(x,r)}$

Es decir, si $y \in \{z \in E / \|x - z\| \leq r\} \longrightarrow y \in \{z \in E / \forall \tilde{r} > 0 \; B(z,\tilde{r}) \cap B(x,r) \neq \emptyset\}$

Conviene pensarlo así

$\overline{B(x,r)} = \partial B(x,r) \cup B(x,r)$

donde $\partial B(x,r) = \{y \in E /$

$\|x-y\|=r\}$

$\longrightarrow$ Si $y \in \overline{B}(x,r)$

podemos analizar 2 casos

① $\|x-y\|<r$

② $\|x-y\|=r$

① Si $\|x-y\|<r \longrightarrow$

$y \in B(x,r) \longrightarrow$

$y \in \underline{(B(x,r) \cup \partial B(x,r))}$

$\longrightarrow y \in B(x,r)$

(2) Si $\|x - y\| = r \longrightarrow$

$y \in \partial B(x,r) \longrightarrow$

en particular

$y \in \left(\partial B(x,r) \cup \underline{B(x,r)}\right)$

$\longrightarrow y \in \overline{B}(x,r)$

Pregunto si está bien y por qué vale

Está bien, ahora por qué ¿vale?

Vale porque en los espacios normados no existen los puntos aislados. Dado un punto de un c.n. siempre hay una recta que lo contiene

(2) QVQ

$\operatorname{diam}(B(x,r)) = 2r$

$\operatorname{diam}(B(x,r)) =$

$\sup\{\|y-z\| / y,z \in B(x,r)\}$

Obs: $B(x,r) = x + B(0,r)$

Si $y, z \in B(x,r) \longrightarrow$

$\|x-y\| < r$ y $\|x-z\| < r$

Puedo reescribir y y z

$y = y - x + x \quad z = z - x + x$

$\Rightarrow \|y - z\| = \|y - x + x - (z - x + x)\|$

$\|(y - x) + x - z + x - x\| =$

$\|(y - x) - z + x\| \leq$

$\|y - x\| + \|-z + x\| < 2r$

$\rightarrow \|y - z\| < 2r \ \forall y, z \in$

$B(x, r)$

$\rightarrow \sup\{\|y - z\| / y, z \in$

$B(x, r)\} = 2r$

PREGUNTAR!!

Esa última parte está mal, de ahí podemos concluir que $\sup\{\|y-z\|\} \leq 2r$

Probemos que ese supremo se alcanza en algún momento, es decir que $\sup\|y-z\| \geq 2r$

Prop guía 3 ítem anterior

Para eso, usamos que $\text{diam}(B(x,r)) = \text{diam}(\overline{B(x,r)}) = \text{diam}(\bar{B}(x,r))$

Para ver que el sup se alcanza tomamos esos $y, z \in \bar{B}(x,r)$

Para eso elijo $y = x+r$ $z = x-r$

$\to \|y-z\| = \|x+r-x+r\| = \|2r\| = |2r|\|1\| \geq 2r$

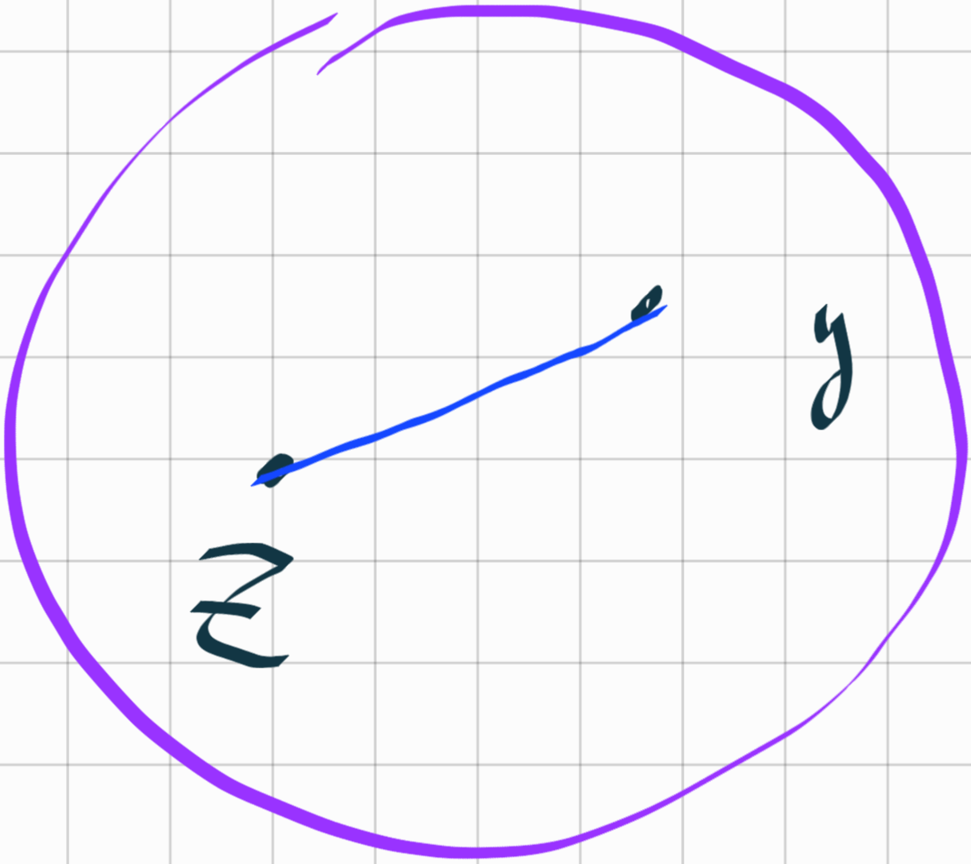
$\to \sup\|y-z\| \geq 2r$

Por lo tanto, $\sup\|y-z\| = 2r \to \text{diam}(B(x,r)) = 2r$

③ Si $z, y \in B(x, r)$

$\rightarrow \forall t \in [0; 1]$

$zt + (1-t)y \in B(x, r)$



Queremos ver que si z e y están

en la bola, el segmento que los une también

Sean $z, y \in B(x,r)$

QVQ $\forall t \in [0,1]$

$tz + (1-t)y \in B(x,r)$

Que es equivalente a pedir

que $\|x - (tz + (1-t)y)\| < r$ $\forall$
$t \in [0,1]$

Sabemos $\|x - z\| < r$

$\|x - y\| < r$

Podemos reescribir tanto a y como a z,

$$y = y + x - x \quad y \quad z = z + x - x$$

$$\|x - tz - (1-t)y\| =$$

$$\|x - t(z + x - x) - (1-t)(y + x - x)\|$$

$$= \|x - tz + tx - tx - (y + x - x - yt - tx + tx)\| =$$

$$\|\cancel{x} - tz + tx \cancel{-tx} - y - \cancel{x} + x + ty - tx + \cancel{t}x\| =$$

$$\|t(x - z) + (1-t)(x-y)\| \leq$$

$$\|t(x - z)\| + \|(1-t)(x-y)\| =$$

$|t| \, \|x-z\| + |1-t| \, \|x-y\| =$ como

$t\|x-z\| + (1-t)\|x-y\| <$ $t \in [0,1]$

$t r + (1-t) r =$ puedo sacar los módulos

$tr + r - tr = r \quad \forall t \in [0,1]$

$\longrightarrow \|x-(tz+(1-t)y)\| < r \quad \forall t \in [0,1]$

$\longrightarrow tz + (1-t)y \in B(x,r)$ ✓