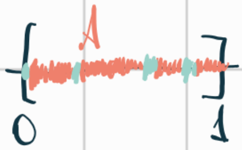
10. Sea $A \subseteq [0,1]$ un conjunto medible Lebesgue tal que $\mu(A) = 1$. Probar que A es denso en $[0,1]$.

Sea $A \subseteq [0,1] \in \mathcal{M} / \mu(A) = 1$ QVQ $\bar{A} = [0,1]$

Dibujo en forma de intervalo



QVQ $\forall x \in [0,1]\ \exists (a_n)_{n \geq 1} \subseteq A / a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

Sea $x \in [0,1]$

→ si $x \in A$ → Considero $a_n = x\ \forall n \in \mathbb{N}$

→ si $x \notin A$ tengo que hallar una sucesión

→ Como $[0,1]^\circ \neq \emptyset \to \forall \tilde{x} \in [0,1]\ \exists r > 0\ B_r(x) \subseteq [0,1]$

→ $[0,1] = A \overset{d}{\cup} B$ con B nulo — a lo sumo numerable

→ $B = \{x_1, \dots, x_n\}$

→ QVQ $\forall x_i \in B\ \exists (a_n)_{n \geq 1} \subseteq A / a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_i$

Como B es nulo $B \subseteq \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} \{I_n\}$ intervalos abiertos → $\forall x_i \in B\ \exists I_i /$

$x_i \subseteq I_i$ y además como $[0,1]^\circ \neq \emptyset$ → puedo hacer que $I_i \subseteq [0,1]$

→ Sea $x_i \in B$, $\exists \varepsilon > 0 / x_i \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq [0,1]$

¿vale esto?

Si fijo ε como $(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon) \subseteq [0,1] \to \exists\, a_1 \in A \,/\, |a_1 - x_i| < \varepsilon$

Si considero $\varepsilon/2$, $x_i \subseteq (x_i - \varepsilon/2, x_i + \varepsilon/2) \subseteq [0,1] \to a_2 \in A \,/\, a_2 \neq a_1$

$\to \quad |a_2 - x_i| < \varepsilon/2$

$\vdots$

Si considero $\varepsilon/n \to \exists\, a_n \in A \,/\, a_n \neq a_{n-1}$ y $|x_i - a_n| < \varepsilon/n \to 0$

$\to \exists (a_n)_{n \geq 1} \subseteq A \,/\, a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_i$

MAL

CORREGIDO

Sea $A \subseteq [0,1] \,/\, \mu(A) = 1$ QVQ $\bar{A} = [0,1]$

$[0,1] = A \overset{d}{\cup} B \to \mu(B) = 0 \leftarrow B$ es nulo

QVQ $\forall x \in [0,1] \to \exists (a_n)_{n\geq 1} \subseteq A \,/\, a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

Sea $x \in [0,1] \to$ si $x \in A \to$ considero $a_n = a \ \forall n \in \mathbb{N}$

si $x \in B \to$ como $\mu(B) = 0$ entonces $B^\circ = \emptyset$

$\to \forall b \in B, \forall r > 0 \quad B_r(b) \not\subseteq B$

Sea $x \in B$ $\longrightarrow$ si considero $r = 1 \longrightarrow B_r(x) \notin B \longrightarrow \exists\, a_1 \in A /$

$a_1 \in B_r(x)$

Voy a construir una sucesión así

Sea $r = 1$ $\exists\, a_1 \in A /\ |a_1 - x| < 1$

$r = 1/2$ $\exists\, a_2 \in A /\ |a_2 - x| < 1/2$

$\vdots$

$r = 1/n$ $\exists\, a_n \in A /\ |a_n - x| < 1/n \longrightarrow 0$

$\longrightarrow a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$