9. Sea $A \in \mathcal{M}$. Probar que si $\mu(A) = 0$ entonces $A^\circ = \emptyset$. ¿Vale la vuelta?

Sea $A \in \mathcal{M} / \mu(A) = 0$ QVQ $A^\circ = \emptyset$

Por hipótesis A es nulo $\rightarrow A$ es a lo sumo numerable X

QVQ $\forall r > 0 \; B_r(x) \nsubseteq A \; \forall x \in A$

Supongamos que $A^\circ \neq \emptyset$

$\rightarrow \exists r > 0 / B_r(x) \subseteq A \rightarrow (x-r, x+r) \subseteq A$

No olvidarse que en $\mathbb{R}$ $B_r(x)$ son intervalos

Como $(x-r, x+r) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \#(x-r, x+r) = c \rightarrow \# A \geq c$ ¡ABS!

$\rightarrow$ por hipótesis A es a lo sumo numerable

Está mal $\rightarrow$ ¡el conjunto de Cantor es un contraejemplo!

Supongamos $A^\circ \neq \emptyset$

$\rightarrow \exists x \in A \; \exists r > 0 / (x-r, x+r) \subseteq A \rightarrow \mu((x-r, x+r)) \leq \mu(A) \rightarrow 2r \leq \mu(A)$

$\rightarrow \mu(A) \geq 2r > 0 \rightarrow \mu(A) > 0$ monotonía de μ

¡ABS!

$\rightarrow$ ¿Vale la vuelta? NO $\rightarrow$ los irracionales del $[0,1] = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ tiene interior vacío pero $\mu(\mathbb{I}) = 1$