7. Sean X, Y espacios métricos, y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $f_n : X \to Y$ uniformemente continuas que converge uniformemente a una función $f : X \to Y$. Probar que f es uniformemente continua.

Sea $(f_n)_{n\geq 1} : X \to Y \,/\, f_n \rightrightarrows f$ y f_n UC $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces f es UC

QVQ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, d_X(x, x_0) < \delta \to d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in X$

Sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \,/\, d_X(x, x_0) < \delta \to d_Y(f_n(x), f_{n_0}(x_0)) < \varepsilon \ \forall x \in X$

Como también que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X$

Fijo ε

* para ese ε $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, d_Y(f_{n_0}(x), f(x)) < \varepsilon/3 \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X$
* para ese n_0 tengo $f_{n_0}(x) \,/\, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{\delta} > 0 \,/\, d_X(x, x_0) < \tilde{\delta} \to d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \varepsilon$ $\forall x \in X$

¿Sirve ese $\tilde{\delta}$?

$\tilde{\delta}$ vale $\forall x \in X$ esa es la importancia de la conv unif

$f_n \rightrightarrows f$

Si considero $\delta = \tilde{\delta} \,/\, d_X(x, x_0) < \delta$ UC

$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq d_Y(f(x), f_{n_0}(x)) + d_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d_Y(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) <$

$\frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall x \in X$

podemos asegurarlo ya que las 3 distancias están acotadas $\forall x \in X$