. Sean $g_n : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ converge a una función $g(x)$. Probar que g es medible y que

$$\int_E g \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E g_n \, d\mu.$$

Sean $g_n : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas / $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \to g$

QVQ ① g es medible

② $\int_A g \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E g_n \, d\mu$

① QVQ $\{g > a\}$

$g = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} g_n \to \{g > a\} = \{\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} g_n > a\}$

S_N es una suc de funciones medibles ya que sumas finitas de medibles es medible

$\to \lim_{N \to +\infty} S_N$ es medible $\to g$ es medible

Supongamos que NO es medible $\Rightarrow \nexists\, \varphi_n$ suc de funciones medibles simples $/ 0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ y $\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} g \ \forall x$

$\to$ ABS! Ya que $g = \lim_{N \to +\infty} S_N$ con $S_N = \sum_{i=1}^{N} g_n$ que es medible simple por ser suma finita de simples medibles y además $S_N \leq S_{N+1}$ ya que son sumas de funciones positivas

MAL

$\to$ Como g es medible $\to \exists \int_E g \, d\mu$

② QVQ $\int_E \sum_{n\geq 1}^{\infty} g_n = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \int_E g_n \, d\mu$

Sea $S_N = \sum_{n=1}^{N} g_n$, $0 \leq S_N \leq S_{N+1}$ $\forall N$ ya que $g_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

Como $g = \lim_{N\to+\infty} S_N \longrightarrow$ por conv monótona

$$\int_E \lim_{N\to+\infty} S_N \, d\mu = \lim_{N\to+\infty} \int_E S_N \, d\mu$$

$$\overset{\text{def}}{=}$$

$$\int_E \sum_{n\geq 1}^{\infty} g_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E \sum_{n=1}^{N} g_n \, d\mu$$

$$= g \qquad\qquad \text{linealidad } \int$$

$$\int_E g \, d\mu = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_E g_n \, d\mu$$

$$\int_E g \, d\mu = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \int_E g_n \, d\mu$$