1. Sea A un conjunto, y sea (Y, d) un espacio métrico. Sea $f : A \to Y$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \to Y$.

Probar que la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ *no* converge uniformemente a f si y sólo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k \geq 1} \subseteq A$ tales que

$$d\left(f_{n_k}(a_k), f(a_k)\right) \geq \alpha \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

$\rightarrow$) $f_n \not\rightrightarrows f$ QVQ $\exists \alpha > 0$, $(f_{nk})_{k \geq 1}$ y $(a_k)_{k \geq 1} \subseteq A /$
$d(f_{nk}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha \ \forall k \in \mathbb{N}$

Sabemos que $f_n \not\rightrightarrows f$, es decir,

$\exists \varepsilon > 0 / \nexists n_0 \in \mathbb{N} / d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in A$

dicho de otra manera, $\exists \varepsilon > 0$ para el cual hay un cierto conjunto de $n \in \mathbb{N}$ que hacen que la definición NO valga con cierto $x \in A$

$\rightarrow \exists \{n_k, n_{k+1}, n_{k+2}, \dots\}$ y $\{a_k, a_{k+1}, \dots\} /$
$d(f_{nk}(a_k), f(a_k)) \geq \varepsilon \ \forall k \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \exists (f_{nk})_{k \geq 1}$ y $(a_k)_{k \geq 1} / d(f_{nk}(a_k), f(a_k)) \geq \varepsilon$

$\rightarrow$ Considero $\alpha = \varepsilon$ ya está

$\Leftarrow$) Sean $\alpha>0$, $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ y $(a_k)_{k\geq 1} \subseteq A$ / $d(f_{n_k}(a_k), f_k(a_k)) \geq \varepsilon$ $\forall k\in\mathbb{N}$ qvq $f_n \not\rightrightarrows f$

Supongamos que $f_n \rightrightarrows f \rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} / d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\ \forall n\geq n_0$ y $\forall x\in A$

$\rightarrow$ Sea $\varepsilon=\alpha \rightarrow \exists n_0 / d(f_n(x), f(x)) \leq \alpha\ \forall n\geq n_0$ y $\forall x\in A \rightarrow$ ABS!

Por hipótesis sabemos que $\exists n_k$ y $a_k / d(f_{n_k}(x_k), f(x_k)) \geq \alpha\ \forall k\in\mathbb{N}$

$\rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$