**12.** Consideremos $E = [0, +\infty)$. Sea $f_n : E \to \mathbb{R}$ dada por $f_n = (-1/n)\chi_{[0,n]}$. Probar que la sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente a la función nula en $E$. Probar que, sin embargo $\int_E f_n \, d\mu = -1$, de manera que

$$\underline{\lim} \int_E f_n \, d\mu = -1 < 0 = \int_E \underline{\lim} f_n \, d\mu.$$

Deducir que el Lema de Fatou no vale si las funciones $f_n$ no son no negativas, aún cuando converjan uniformemente.

① Veamos que $f_n \rightrightarrows 0$

Dado $\varepsilon > 0$ qvq $\exists n_0 \in \mathbb{N} / |f_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \ \forall x$

Sea $\varepsilon > 0$

$\rightarrow \left| -1/n \, \chi_{[0,n]} \right| \underset{¿}{\leq} 1/n < \varepsilon \rightarrow$ si $n = \varepsilon + 1$ /

$\chi_{[0,n]}$ podría ser $0$

Hallamos $n(\varepsilon)$ pero que NO depende de $x$ /

② QVQ $\int_E f_n \, d\mu = -1$

$$\int_E f_n d\mu = \int_E \frac{-1}{n} \chi_{[0,n]} d\mu = \int_{[0,n]} \frac{-1}{n} \chi_{[0,n]} + \underbrace{\int_{E \setminus [0,n]} \frac{-1}{n} \chi_{[0,n]} \, d\mu}_{= 0} =$$

$$\underset{\text{integral Riemann}}{=} \frac{-1}{n} x \Big|_0^n = -1$$

$\rightarrow$ Como $\exists \lim f_n \rightarrow \underline{\lim} f_n = \lim f_n = 0$

$$\underline{\lim} \int_E f_n \, d\mu = -1 < \int \underline{\lim} f_n = 0$$

Fatou me dice

$$\int \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int f_n$$