5. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}.$$

Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(f'_n)_{n\geq 1}$.

f_n

Mi candidato a límite es $f(x) = 1$

Veamos convergencia puntual

QVQ $\forall x \in [0,1], \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon, x) \ / \ |f_n(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Sea $\varepsilon > 0$ qvq $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ |f_n(x) - 1| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

si $x \neq 0$

$$\left|\frac{nx^2}{1+nx^2} - 1\right| \leq \left|\frac{nx^2 - 1 - nx^2}{1+nx^2}\right| = \left|\frac{-1}{1+nx^2}\right| < \frac{1}{nx^2} < \varepsilon \Leftrightarrow nx^2 > \varepsilon$$

$$n > \varepsilon / x^2$$

Si considero $n_0 = \frac{\varepsilon}{x^2} + 1$ ya está

Si $x = 0$

$$\left|\frac{nx^2}{1+nx^2} - 1\right| = |1| < \varepsilon \to \text{mi candidato a límite no sirve si } x = 0$$

Reformulando, mi candidato a límite es $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Entonces qué pasa si $x = 0$

Sea $\varepsilon > 0$ qvq $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ |f_n(x) - 0| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

$|f_n(0)| = |0| < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$

→ Como vale $\forall n \in \mathbb{N}$ puedo elegir el n_0 anterior, hito encontrar n_0

Como n_0 no depende de x → la convergencia no es uniforme

Mal!

Veamos por qué la convergencia NO es uniforme:

Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$

Como f_n es continua $\forall n \in \mathbb{N}$ → f es continua

¡ABS! f NO es continua

$\underline{\underline{f_n'}}$

$$f_n' = \frac{2nx(1+nx^2) - nx^2 2nx}{(1+nx^2)^2} = \frac{2nx}{(1+nx^2)^2}$$

Mi candidato a límite es $f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

No sé ¡¡ → fijo $x = 1 \to \frac{2n}{(1+n)^2} \to 0$

$x = 1/2 \quad \frac{\frac{1}{2}n}{(1+\frac{1}{4}n)^2} \longrightarrow 0$

El procedimiento va a ser este: fijo x y veo que sucede la suc

Mi candidato a límite va a ser $f(x) = 0$

Dado $\varepsilon > 0$ qvq $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |f_n(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

$$\left|\frac{2nx}{(1+nx^2)^2}\right| \underset{x\neq 0}{\leq} \left|\frac{2nx}{(nx^2)^2}\right| = \left|\frac{2}{nx^2}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{nx^2} < \frac{\varepsilon}{2} \iff$$

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon x^2}{2} \iff$$

$$\frac{2}{\varepsilon x^2} < n$$

Si elijo $n_0 = [2/\varepsilon x^2] + 1$ vale

Si $x = 0$ es trivial y se da $\forall n \in \mathbb{N}$

→ si considero $n_0 = [2/\varepsilon x^2] + 1$ ya encontramos n_0

→ como n_0 depende de x → NO es uniforme

¡MAL!

Veamos por qué la convergencia NO es uniforme

Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$, como ambas son continuas

$$\longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{¡ABS!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$