7. Consideremos el espacio normado

$$E = \{a \in \ell^\infty : \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq n_0\},$$

dentro del cual consideramos el subespacio

$$S = \left\{ a \in E : \sum_{n \geq 1} a_n = 0 \right\}.$$

Probar que S es denso en E.

QVQ $\overline{S} = E$, $\forall e \in E \ \exists (S_n)_{n \geq 1} \subseteq S \ / \ S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$

* Sabemos que $\cdot\ E \subset l_\infty \to S \subset l_\infty$

$\cdot\ S = \{a \in E \ / \ \sum a_n = 0\}$

$\cdot\ E = \{a \in l_\infty \ / \ a_n = 0 \ \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}\}$

$a \in E \to (\underbrace{*, \dots, *}_{\text{finitos lugares y encima acotados.}}, 0, \dots, 0) \to \sum a < M$

$S_n \subseteq S$ va a ser una sucesión de sucesiones

Sea $a \in E \setminus S$ QVQ $\exists (S_n)_{n \geq 1} \subseteq S / S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

Si $a \in E \setminus S \to a = (\underbrace{*, \dots, *}, \underset{n_0}{0}, 0, \dots, 0, \dots) \to \sum_{i=1}^{n_0 - 1} a_i \neq 0$

Si $a \in E$ y $a \in S$ ya está

Si considero $(s_n^N)_{n \geq 1} \subseteq S \;/\; s_i^N = 0 \;\; \forall i \geq n_0$; de arriba tengo parte de la convergencia. Tengo que ver qué hago con el resto de las posiciones

$$
\begin{array}{ll}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad n_0 \\
s_n^N = & (s_1^1, s_2^1, \dots, 0, \dots 0, \dots) \\
 & (s_1^2, s_2^2, \dots, 0, \dots 0, \dots) \\
 & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\;\; \vdots \qquad\; \vdots \\
 & (s_1^N, s_2^N, \dots, 0, \dots, 0, \dots)
\end{array}
$$

$$a = (*, *, \dots, 0, \dots, 0, \dots)$$

plan.

Esto justamente NO había que hacer

7. Consideremos el espacio normado

$$E = \{a \in \ell^\infty : \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq n_0\},$$

dentro del cual consideramos el subespacio

$$S = \left\{ a \in E : \sum_{n \geq 1} a_n = 0 \right\}.$$

Probar que S es denso en E.

Para probar que es denso podríamos armar una funcional lineal cuyo núcleo sea S y como el núcleo de un operador es un hiperplano ver que NO es cerrado

Propongo $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$a_n \longmapsto \sum_{n \geq 1} a_n \quad \longrightarrow \quad Nu(\phi) = \{x / \phi(x) = 0\}$$

$$Nu(\phi) = \{a_n \subseteq E / \sum a_n = 0\} = S$$

Bien tengo una aplicación que cumpliría lo que pido, veamos que es lineal (acá va a servir la linealidad de la suma)

Para que ϕ sea una t.l debe cumplir con

ⓐ $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$

ⓑ $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$ linealidad suma arriba

ⓐ $\phi(x+y) = \sum x_n + y_n \overset{!}{=} \sum x_n + \sum y_n = \phi(x) + \phi(y)$

ⓑ $\phi(\lambda x) = \sum \lambda x_n = \lambda \sum x_n = \lambda \phi(x)$

$\longrightarrow$ ϕ es un funcional lineal :), veamos que S NO es cerrado

S NO es cerrado $\longleftrightarrow$ $\exists (S_n^N)_{n\geq 1} \subseteq S$ y $l \in E \setminus S$ / $S_n^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} l$

Supongamos que S es cerrado $\to$ $\forall (S_n)_{n\geq 1} \subseteq S, \exists l \in S$ / $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

Veamos la clásica suc de 1 y 0s

$$S_n^N = \begin{matrix} (1,-1,1,-1,\dots,1,-1,0,\dots) \\ (1,-1,1,-1,\dots,0,0,0,\dots) \\ \vdots \\ (1,-1,0,0,\dots,0,\dots) \end{matrix}$$

Esta suc está mal planteada, tengo que asegurarme que cada columna pertenezca a S, NO las filas

$S_n^N \subseteq S$ ya que $\forall N \in \mathbb{N}$ $\sum a_n^N = 0$

$$S_n^N = \begin{matrix} (1,-1,1,-1,1,-1,\dots,1,-1,0,\dots) \\ (-1,1,-1,1,-1,1,\dots,-1,1,0,\dots) \\ (1,-1,1,-1,1,-1,\dots,1,0,0,\dots) \\ (-1,1,-1,1,-1,1,\dots,-1,0,0,\dots) \\ (1,-1,1,-1,1,-1,\dots,0,0,0,\dots) \\ \vdots \\ (1,0,0,\dots,0,0,0,\dots) \end{matrix}$$

$S_n^N \subseteq S$ ya que $\sum_{N\geq 1} S_i^N = 0$

Esta sucesión converge a $\underbrace{(1,0,\dots,0,\dots)}_{l}$ pero $l \in E \setminus S$

$\to$ ¡ABS!

$\to$ S es denso

Cuando tomo una sucesión de sucesiones estoy tomando suc de mi espacio ⟶ las filas deben pertenecer pero la convergencia tiene que darse en las columnas

Si considero

$$S_N = \begin{array}{l}(1,-1,0,\dots,0\dots)\\(1,-1,1,-1,0,\dots,0\dots)\\(1,-1,1,-1,\dots-1,0\dots)\end{array}$$

Vemos que cada fila es del espacio y que las columnas convergen a $(1,-1,1,-1,\dots,-1) \notin E$

entonces $\notin S$ ⟶ no puede ser cerrado

CORRECCIÓN

La sucesión no servía, consideramos la sucesión

La idea de hacer tender a $(1,0,\dots,0,\dots)$ estaba perfecta.

$$S_N = (1,0,\dots,0,\dots)$$
$$(1,-1/2,-1/2,0,\dots,0,\dots)$$
$$(1,-1/3,-1/3,-1/3,0,\dots,0,\dots)$$
$$\vdots$$
$$(1,-1/n,-1/n,-1/n,\dots,-1/n,0,\dots,0,\dots)$$

Esta sucesión converge a $(1,0,0,\dots,0,\dots) \in E\setminus S \to \exists (x_n)_{n\geq 1} \subseteq S \,/$ $\exists\, l \notin S \,/\, x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ NO es cerrado

$\longrightarrow$ es ¡denso!