5. Sea $\mathbb{R}_n[t]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en $\mathbb{R}$. Consideremos para $p \in \mathbb{R}_n[t]$ las normas

$$\|p\|_\infty = \max_{0 \le t \le 1} |p(t)| \quad \text{y} \qquad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)|\, dt.$$

(a) ¿Son $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_1)$ espacios de Banach? ¿Por qué?

(b) Justificar por qué ambas normas resultan equivalentes en $\mathbb{R}_n[t]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Si $\mathbb{R}[t]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, probar que ahí las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes. ¿Hay alguna contradicción con el ítem anterior, que afirma que las normas son equivalentes para polinomios de grado hasta n para todo $n \in \mathbb{N}$?

(a) Son espacios de Banach

Al tener dim finita son homeomorfos con $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

$\to$ son de Banach

(b)

Tengo que $(\mathbb{R}_n[t), \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}_n(t), \|\cdot\|_1)$ son de Banach y ambos e.n estar definidos sobre el mismo e.v las distancias son equivalentes

Como tiene dim finita las normas son equivalentes.

(c) Si $\mathbb{R}[t]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, probar que ahí las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes. ¿Hay alguna contradicción con el ítem anterior, que afirma que las normas son equivalentes para polinomios de grado hasta n para todo $n \in \mathbb{N}$?

Tenemos que probar que cuando la dim es infinita las distancias dejan de ser equivalentes

* Si 2 normas son equivalentes
    * Tienen los mismos abiertos y los mismos cerrados
    * Si una sucesión es de Cauchy con una lo es con la otra
    * Si una sucesión converge con una a un límite l, debe converger con la otra al mismo límite

$$\|\ \|_1 = \int_0^1 |p(t)|\,dt \quad \text{y} \quad \|\cdot\|_\infty = \max_{0 \le t \le 1} |p(t)|$$

Supongamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes.

Sea $(x_n)_{n \ge 1} = x^n \subseteq \mathbb{R}[x]$ entonces veamos que si $x_n \longrightarrow x$ con $\|\cdot\|_1$ también con $\|\cdot\|_\infty$

¿Quién va a ser mi candidato a límite?

· $x = 0$

Chequeemos que $(x_n)_{n \ge 1} = x^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ con $\|\cdot\|_1$

Sea $\varepsilon > 0$ qvq $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \|x^n - 0\|_1 < \varepsilon \ \forall\, n \ge n_0$

Dado $\varepsilon > 0$, $\|x^n\|_1 = \int_0^1 |x^n|\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{\overbrace{x^{n+1}}^{\le 1}}{n+1} \le \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

Como $\|\cdot\|_\infty$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$ entonces $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ con $\|\cdot\|_\infty$

Dado $\varepsilon > 0$, $\|x^n - 0\|_\infty = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |x^n| = 1^n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$x^n \not\to 0$ con $\|\cdot\|_\infty$

No son equivalentes