9. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible, no negativa e integrable. Probar que si $A \in \mathcal{M}$, entonces

$$\int_A f(x+y)\, d\mu(x) = \int_{A+y} f(x)\, d\mu(x)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $A + y \subseteq E$.

Veamos que vale para funciones simples.

Sea $\varphi : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ simple e integrable QVQ $\int_A \varphi(x+y)\, d\mu = \int_{A+y} \varphi(x)\, d\mu$ $\forall y \in \mathbb{R} / A+y \subseteq E$

Definimos $\chi_A(x+y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x+y \in A \\ 0 & \text{si } x+y \notin A \end{cases}$ y $\chi_{A+y}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A+y \\ 0 & \text{si } x \notin A+y \end{cases}$

Sup $\varphi = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_A(x+y)$ QVQ $\int_A \varphi(x+y)\, d\mu = \int_{A+y} \varphi(x)\, d\mu$

$\rightarrow \int_A \varphi(x+y)\, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A)$

$\int_{A+y} \varphi(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \underbrace{\mu(A+y)}_{\substack{\text{la medida de} \\ \text{Lebesgue es inv por} \\ \text{traslación}}} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A) = \int_A \varphi(x+y)\, d\mu$

Ahora que lo vimos para simples veamos para medibles

Sea f medible y positiva $\rightarrow \exists\, \tilde{\varphi}_n / 0 \leq \tilde{\varphi}_n \leq \tilde{\varphi}_{n+1}$ y $\lim_{n \to +\infty} \tilde{\varphi}_n = f$ con $\tilde{\varphi}_n$ simple y medible

$\xrightarrow[\text{Monótona}]{\text{Conv}}$ $\int_A f(x+y)\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_A \tilde{\varphi}_n(x+y)\,d\mu$

Ahora, $\int_A \tilde{\varphi}_n(x+y)\,d\mu = \int_{A+y} \tilde{\varphi}_n(x)\,d\mu$

Conv Monótona

$\to \int_A f(x+y)\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_A \tilde{\varphi}(x+y)\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{A+y} \tilde{\varphi}_n(x)\,d\mu = \int_{A+y} \lim_{n\to+\infty} \tilde{\varphi}_n\,d\mu = \int_{A+y} f$

Ahora $\tilde{\varphi}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$