4. Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$. Probar que:

(a) Si f es medible entonces $\{x \in E : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

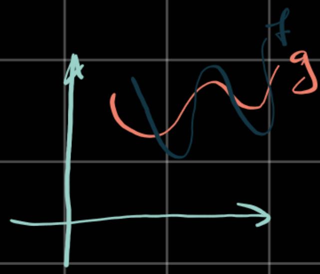
(b) Si f y g son medibles entonces $\{x \in E : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{M}$.

(a)

Sea f medible QVQ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x \in E / f(x) = a\} \in \mathcal{M}$

Sea $a \in \mathbb{R}$, $\{f = a\} = \underbrace{\{f \leq a\}}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{\{f \geq a\}}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$

$\downarrow$ f medible



(b) Sean f y g medible QVQ $\{f \leq g\} \in \mathcal{M}$

$\{f \leq g\} = \{g - f \geq 0\} \in \mathcal{M}$

c.l de medible es medible $\to \{g - f \geq a\}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\to$ en particular $a = 0$ } ¡NO!

Corrección

Vamos a ver que $\{f > g\} \in \mathcal{M}$ ya que entonces $\{f > g\}^c \in \mathcal{M}$

$\{x \in X / f(x) > g(x)\}$

Si $x \in X$ es tq $f(x) > g(x)$ $\to \exists\, q_n \in \mathbb{Q} \,/\, f > q_n > g$

$$\to \{f > g\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Q}}^{\infty} \{f > q_n > g\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Q}}^{\infty} (\{f > q_n\} \cap \{q_n > g\})$$

$$\bigcup_{n}^{\infty} \left(\underbrace{\{f > q_n\}}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{\{q_n \geq g\}}_{\in \mathcal{M}} \right) \in \mathcal{M}$$