11. Consideremos en $C([0,1])$ la norma infinito. Fijada $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, sea $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ dada por

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy.$$

[redacted]

Probar que K es lineal y continua. Acotar su norma.

Pedimos que $k(x,y)$ sea continua para poder integrarla

Veamos que $K(f(x)) = \int_0^1 k(x,y) \cdot f(y)\, dy$ es lineal para eso se debe cumplir

ⓐ $K(f(x) + g(x)) = K(f(x)) + K(g(x))$

ⓑ $K(\lambda f(x)) = \lambda K(f(x))$

ⓐ $K(f(x)+g(x)) = \int_0^1 k(x,y)\,(f(y)+g(y))\,dy = \int k(x,y) f(y) + k(x,y) g(y)\, dy$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{linealidad} \\ \text{integral}}}{=} \int k(x,y) f(y)\,dy + \int k(x,y)\, g(y)\, dy = Kf(x) + Kg(x)$

ⓑ $K(\lambda f(x)) = \int k(x,y)\, \lambda f(y)\,dy \overset{\text{linealidad integral}}{=} \lambda \int k(x,y) f(y)\,dy = \lambda K f(x)$

Resta probar que es continua, podemos usar cualquier método, tratemos acotando

QVQ $\|Kf(x)\|_\infty \leq C \cdot \|f(x)\|_\infty$

$\max_{x\in[0,1]} |Kf(x)| \leq C \cdot \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$

Sabemos que $\left|\int f(t)dt\right| \leq \int |f(t)|dt \longrightarrow$ } esto NO hacía falta ~~tho~~

$\sup \left|\int f(t)dt\right| \leq \sup \underbrace{\int |f(t)|dt}_{\geq 0} =$

$\longrightarrow \max_{y\in[0,1]} \left|\int_0^1 k(x,y)f(y)dy\right| \leq \max \int |k(x,y)f(y)|dy =$

$\max \int_0^1 |k(x,y)||f(y)|dy \leq \max \int_0^1 M|f(y)|dy = \max M \int_0^1 |f(y)|dy$

$\underbrace{\qquad}_{>0}$

Como $k(x,y)$ ha sido evaluada en x ahora solo depende de y y sabemos además que las funciones continuas y que llegan en $\mathbb{R}$ definidas sobre compactos alcanzan máximos y mínimos

en este $\longrightarrow$ están acotadas

además como k solo depende de y

$k:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$

$\max M \int_0^1 |f(y)|dy \leq M\int_0^1 \|f\|_\infty = M\|f\|_\infty$

$\longrightarrow \|Kf x\|_\infty \leq M\|f\|_\infty \longrightarrow Kf(x)$ está acotado $\longrightarrow$ es continuo

$\longrightarrow$ de esto se desprende que $\max \dfrac{\|Kf(x)\|}{\|f(x)\|_\infty} \leq M$

$\longrightarrow \|Kf(x)\| \leq M$

Veamos por definición QVQ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / \|f-g\|_\infty < \delta \to \|Kf - Kg\|_\infty < \varepsilon$