2. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X. Probar que:

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(b) Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$ y $A \triangle B \in \mathcal{A}$.

(c) $\mathcal{A}$ es cerrada por intersecciones numerables.

ⓐ QVQ $\emptyset \in \mathcal{A}$ con $\mathcal{A}$ σ- álgebra

Como $\mathcal{A}$ es σ-álgebra $\to \exists B \in \mathcal{A} \to B^c \in \mathcal{A} = X \setminus B \in \mathcal{A}$

Si considero $(C_n)_n / C_n = B$ si $n \equiv 0(2)$ y $C_n = B^c$ $n \not\equiv 0(2)$

$\to (C_n)_n \subseteq \mathcal{A} \to \underbrace{\bigcup_{n \geq 1} C_n}_{\underbrace{B \cup X\setminus B}_{X} \cup B \cup X\setminus B \dots} \in \mathcal{A} \to X \in \mathcal{A} \to X^c \in \mathcal{A} \to \emptyset \in \mathcal{A}$

ⓑ QVQ si $A, B \in \mathcal{A} \to A \setminus B$ y $A \triangle B \in \mathcal{A}$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$(B \setminus A) \cup (A \setminus B)$

* QVQ $A \setminus B \in \mathcal{A}$

$A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup \quad)^c$

$\to$ si pruebo que $A^c \cup B \in \mathcal{A} \to (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$

Como $\mathcal{A}$ es σ-álgebra si $(C_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A} \to \bigcup_{n \geq 1} C_n \in \mathcal{A}$

Defino $C_n / C_1 = A^c, C_2 = B, C_n = \emptyset \; \forall n \geq 3 \to$ Como $A^c, B, \emptyset \in \mathcal{A} \to$

$(C_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A} \to \bigcup_{n \geq 1} C_n = A^c \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \dots \in \mathcal{A} \to A^c \cup B \in \mathcal{A}$

$\to (A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A \setminus B \quad \in \mathcal{A}$

$\to$ vale lo mismo para $B \setminus A$

⊗ QVQ $A \Delta B \in \mathcal{A} \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$

Usamos el mismo argumento. Defino $(C_n)_{n \geq 1}$ / $C_1 = A \setminus B$, $C_2 = B \setminus A$, $C_n = \emptyset$ $\forall n \geq 3$

Como $B \setminus A, A \setminus B, \emptyset \in \mathcal{A} \rightarrow (C_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$

$\rightarrow \bigcup_{n \geq 1} C_n \in \mathcal{A} \rightarrow (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots = (B \setminus A) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$

$\rightarrow A \Delta B \in \mathcal{A}$

(c) QVQ $\mathcal{A}$ es cerrado por intersecciones numerables

QVQ dada $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n^c\right)^c \text{ y } \bigcup_{n \geq 1} A_n^c \in \mathcal{A} \rightarrow \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}$$