6. Sea X un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\geq 1}, (g_n)_{n\geq 1} : X \to \mathbb{R}$ dos sucesiones de funciones que convergen uniformemente a funciones $f, g : X \to \mathbb{R}$, respectivamente. Probar que:

(a) La sucesión $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$.

Dadas $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ y $f, g : X \to \mathbb{R}$ / $f_n \rightrightarrows f$ y $g_n \rightrightarrows g$ QVQ $(f_n + g_n)_n \rightrightarrows f+g$

Dado $\varepsilon > 0$ qvq $\exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / |(f_n+g_n)-(f+g)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X$

$|(f_n - f) - (g_n - g)| \leq |f_n - f| + |g_n - g|$

Sabemos que dado $\varepsilon>0$ $\exists\, \tilde{n}_0 \in \mathbb{N} / |f_n - f| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in X$

$\exists\, \hat{n}_0 \in \mathbb{N} / |g_n - g| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in X$

Sea $n_0 = \max(\tilde{n}_0, \hat{n}_0) \to |f_n - f| + |g_n - g| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall x \in$

$\to n_0 = \max(\tilde{n}_0, \hat{n}_0) \to f_n + g_n \rightrightarrows f + g$

(b) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a fg.

Sean $f_n \rightrightarrows f$ y $g_n \rightrightarrows g$ y además $|f_n(x)| \leq \tilde{M} \; \forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in X$ y $|g_n(x)| \leq \hat{M} \; \forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in X$ QVQ $(f_n g_n)_{n\geq 1} \rightrightarrows fg$

Dado $\varepsilon > 0$ qvq $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} / |f_n g_n - fg| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in X$

Sabemos que $\forall \varepsilon > 0\; \exists\, \tilde{n}_0 \in \mathbb{N} / |f_n - f| < \varepsilon / 2\hat{M} \quad \forall n \geq \tilde{n}_0, \forall x \in X$

$\forall \varepsilon > 0\; \exists\, \hat{n}_0 \in \mathbb{N} / |g_n - g| < \varepsilon / 2\tilde{M} \; \forall n \geq \hat{n}_0 \; \forall x \in X$

Entonces

$$|f_n g_n - f\cdot g| \leq |f_n g_n - f g_n| + |f g_n - f g| \leq |g_n (f_n - f)| + |f (g_n - g)| \leq$$

$$|g_n| |f_n - f| + |f| |g_n - g| \leq \dot{M} \frac{\varepsilon}{2\dot{M}} + \tilde{M} \frac{\varepsilon}{2\tilde{M}} = \varepsilon$$

¡también va a estar acotada!