Ejercicio 9. El intendente de una ciudad del interior de Argentina ha decidido relocalizar todos los colegios de modo de hacer más cómoda la movilidad de los alumnos. La ciudad se puede dividir en I distritos, y cada uno contiene p_i alumnos. Análisis preliminares (estudios de terrenos, factores políticos, etc.) han establecido que las escuelas sólo pueden ser ubicadas en J sitios predeterminados dentro de la ciudad.

Sea $d_{ij} \geq 0$ la distancia desde el centro del distrito i hasta el sitio j. Se deben seleccionar los sitios en los cuales construir un colegio (en un sitio cabe a lo sumo uno) y además se debe asignar un colegio a cada distrito. Es decir, cada distrito de la ciudad debe tener uno (y sólo un) colegio asociado. En cambio, cada colegio puede tener hasta dos distritos asociados. Además, si un colegio fue construido, al menos un distrito tiene que serle asignado.

Construir un colegio en el sitio j tiene un costo fijo asociado igual a c_j. Existe también un costo variable que es linealmente proporcional (la constante de proporcionalidad es F) a la cantidad total de alumnos a que debe servir el colegio. O sea, si se construye un colegio en el sitio j, entonces el costo asociado es $c_j + Fs_j$, donde s_j es la población total a que debe servir el colegio ubicado en j (cuidado que s_j no es un dato previo sino que es la suma de las poblaciones de los distritos asociados a ese colegio).

La capacidad de alumnos que soporta un colegio construido en el sitio j es un dato conocido (T_j). El presupuesto total destinado para construir los colegios es igual a B y no debe ser sobrepasado. Además, la Dirección de Educación de la ciudad ha determinado que los distritos u y v deben ser atendidos por 2 colegios distintos. Formular un problema de programación lineal mixto, que, respetando las condiciones planteadas, determine dónde construir los colegios y qué colegio atiende a qué distrito. El objetivo es minimizar la distancia máxima entre el centro de un distrito y su respectivo colegio.

objetivo: * minimizar la distancia máxima entre el centro de un distrito y su respectivo colegio

↳ objetivos secundarios: * dónde construir los colegios

* qué colegio a qué distrito

f.o.: min max{distancia entre el centro de un distrito y su colegio}

↓ min max$\{d_{1c_1}, \dots, d_{Ic_I}\}$

↓ min w

↘ vamos a tener que agregar restricciones luego

Datos:

Ciudad → I distritos → p_i alumnos

↳ J sitios para escuelas → 1 sitio

1 escuela asociada

distritos u y v atendidos x 2 escuelas distintas

pueden asociarse a ⊕ de un distrito

a calcular

* costo $c_j + s_j F$

* Capacidad T_j

presupuesto B

Variables:

$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se construyó un colegio en } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$y_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si el colegio en el sitio } j \text{ fue asignado a } i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$z_{ij} : \begin{cases} 1 & \text{si el distrito } i \text{ está asociado al colegio en } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Asignación de colegio a distrito → queriendo minimizar d_{ij}
↳ la va a dar f.o.

s.a: $x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J$
$y_{ji} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J \; \forall i \in I$
$z_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \; \forall j \in J$
} variable

* Si se construyó en j → debe tener 2 distritos asignados como mucho

$$\sum_{i \in I} y_{ji} \leq M x_j \qquad \forall j \in J \quad M = 2$$

* Si asigné un colegio en j a i, i debe estar asignado a j

$$y_{ji} = z_{ij} \qquad \forall i \in I \; \forall j \in J$$

* Si mi distrito i fue asignado a un colegio j → hay un colegio en j
Ahora, NO vale la vuelta

$$z_{ij} \leq x_j \qquad \forall i \in I \; \forall j \in J$$

* $\sum_{j \in J} z_{ij} = 1$ → c/distrito 1 colegio

* El colegio en j debe soportar T_j alumnos

$$\sum_{i \in I} y_{ji} \, p_i \leq T_j \quad \forall j \in J$$

* Presupuesto total

$$\sum_{j \in J} x_j c_j + F\left(\sum_{i \in I} y_{ji} \, p_i\right) \leq B$$

* Distritos u y v distintos colegios

$$z_{uj} + z_{vj} = 1 \quad \forall j \in J$$

f.o: $\min \max \{ d_{ij} \cdot x_j \ \forall j \in J \ \forall i \in I \}$

f.o: $\min w_i$

s.a: $w_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ \forall i \in I$

$$w_i \geq d_{ij} x_j \ \forall j \in J$$