Resumen INVOP 2do P

Vamos a querer entender cómo resolver

* PL: $\min\ c^t x$
  s.a.: $Ax \leq b$
  $x \geq 0$

* PLE: $\min\ c^t x$
  s.a.: $Ax \leq b$
  $x \geq 0$
  $x \in \mathbb{Z}$

Para esto vamos a

* Clasificar las posibles soluciones
* Aprender a ver la solución gráficamente
* Entender la resolución matricial
* Aprender la resolución mediante diccionarios
* Caracterizar las soluciones utilizando diccionarios
* Despejar una SBFI
* Ver dualidad y el significado económico de las variables duales
* Hacer análisis de sensibilidad
* Entender Branch 2 Bound

Tipos de Soluciones de un Problema Lineal

(Podemos extenderlas a PLE considerando que podemos tener un único óptimo o más de 1)

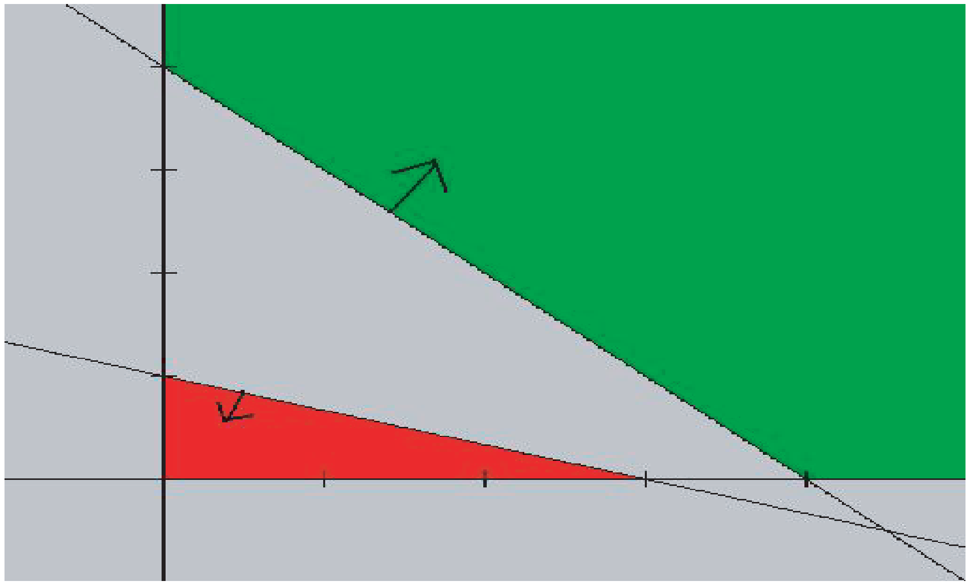
1. **Problema Infactible:**

Obs: si la relajación lineal es infactible => PLE también

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lccccc} \text{s.a.} & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

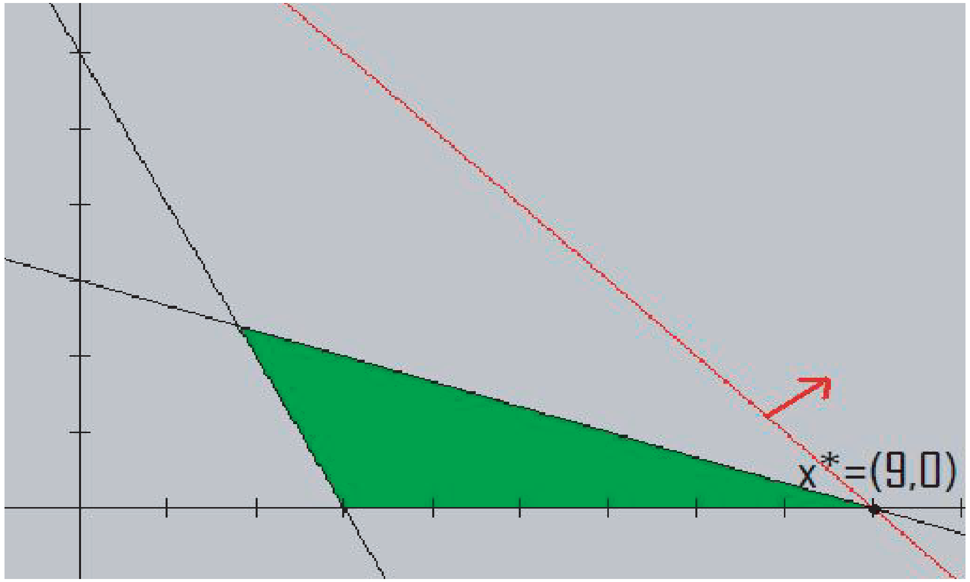


Tipos de Soluciones de un Problema Lineal

2. **Problema con Solución Óptima Única:**

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{s.a.} & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

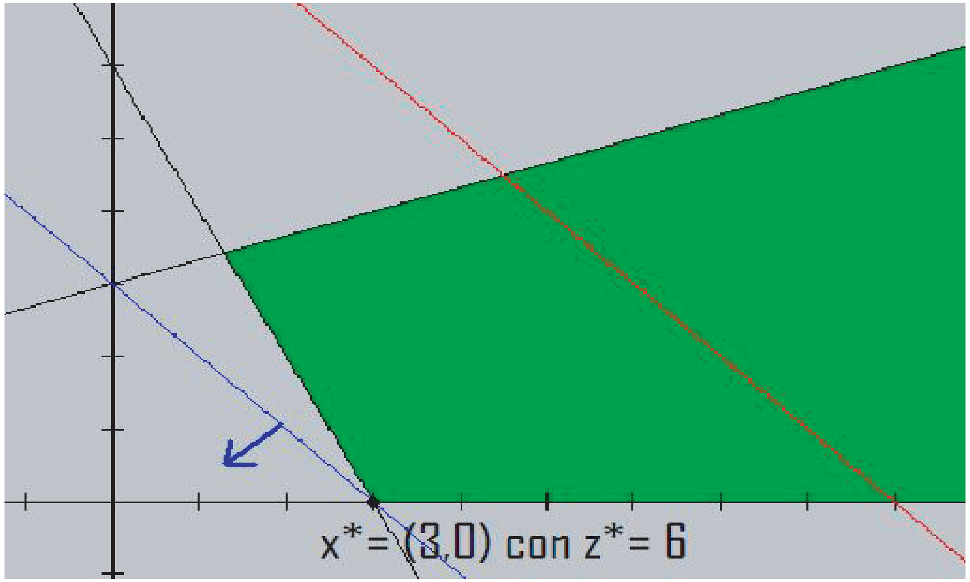


Tipos de Soluciones de un Problema Lineal

3. **Conjunto Factible No Acotado:**

   a) **Solución Óptima Finita:**

$$
\begin{array}{lrcrcr}
 & \multicolumn{5}{c}{\min z = 2x_1 + 2x_2} \\
\text{s.a.} & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\
 & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$



Si la F.O. buscará maximizar, la función crece indefinidamente.

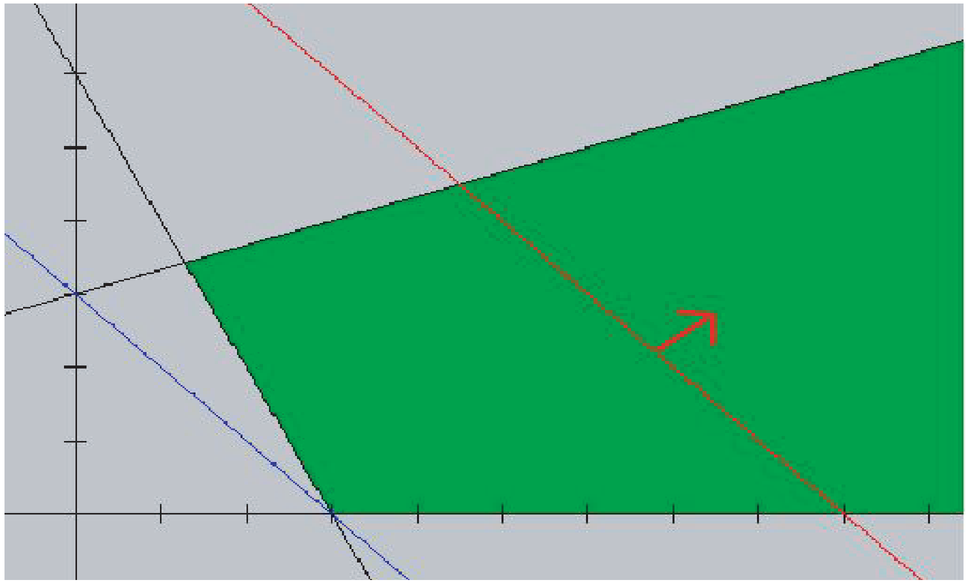
Tipos de Soluciones de un Problema Lineal

b) **Problema No Acotado:**

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{s.a.} & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



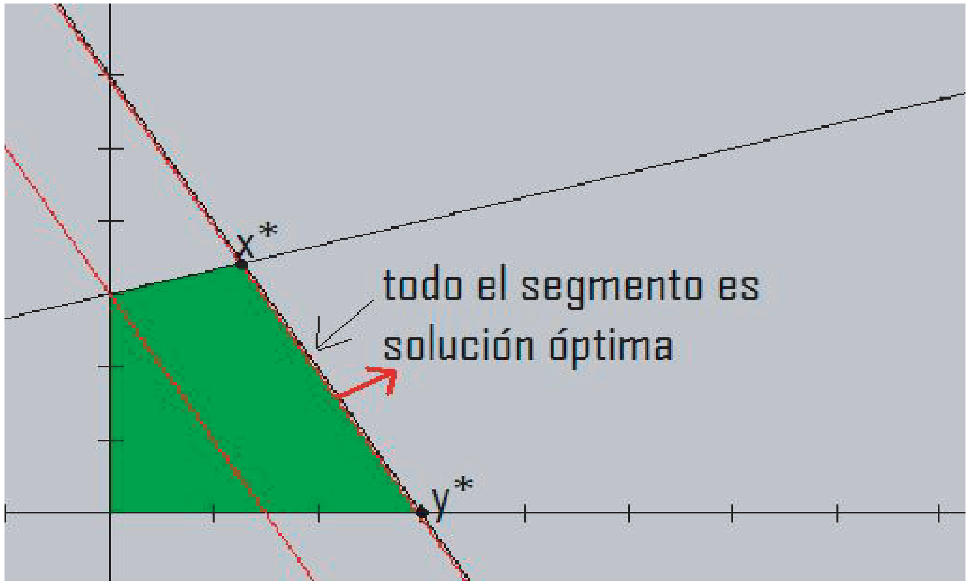
Tipos de Soluciones de un Problema Lineal

En PLE si el poliedro factible
K está acotado
→ tendremos finitas soluciones pero podemos tener ⊕ de un óptimo

4. Problema con Infinitas Soluciones Óptimas:

$$\text{máx}\, z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{s.a.} & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$



Resolución gráfica de un problema lineal 2-dimensional

Pasos de la resolución gráfica:

graficando cjto de restricciones

- Graficar la región de soluciones factibles
- Calcular la curva de nivel $f = 0$ y ∇f → $-\nabla f$ si minimizamos
- "Trasladar" la curva de nivel según corresponda a ∇f y al objetivo para determinar el vértice correspondiente al óptimo. → Si maximizamos $\nabla f = t$ con $t \to +\infty$, minimizamos $\nabla f = t$ con $t \to -\infty$ ó $-\nabla f = t$ con $t \to +\infty$
- Hallar los valores de x_1 y x_2 correspondientes al máximo (mínimo) calculando la intersección de las correspondientes restricciones.

↳ En las intersecciones esas restricciones valen por igualdad

Algoritmo Simplex

Diseñado por Dantzig en la década del 40 para resolver problemas lineales.

Es el algoritmo más famoso para este tipo de problemas.

Dado que el óptimo del problema se puede encontrar en un punto extremo, lo que hace el algoritmo es moverse de extremo a extremo siempre que mejore la función objetivo.

El criterio de detención será verificar las condiciones de KKT o encontrar una dirección extrema que muestre que el problema no es acotado.

Forma Estándar de un (PL) → antes de resolver ya sea x diccionarios o matricialmente HAY que estandarizar

$$\begin{aligned} \text{(PL)}\ \text{mín}\quad & z = c^T x \\ \text{s.a.}\quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Pasar a forma estándar

Antes de aplicar cualquiera de los métodos para resolver un modelo de PL con SIMPLEX, debemos pasarlo a forma estándar con objetivo de maximizar o minimizar. Debemos asegurarnos que el problema lineal quede planteado de alguna de las siguientes maneras: → nos va a ser indistinto, la gracia es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ s.a: \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

todas las restricciones por igualdad y todas las variables positivas

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x \\ s.a: \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Con $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y con $b \in \mathbb{R}^m$ un vector tal que $b_i \geq 0 \; \forall i = 1, \ldots, m$.

Pasar a forma estándar

- Si una variable x_j es negativa, introducimos la variable no negativa $\tilde{x}_j$ al modelo, y reemplazamos cada ocurrencia de x_j por $-\tilde{x}_j$
- Si una variable x_j es libre (es decir, $x_j \in (-\infty, +\infty)$) agregamos dos variables no negativas x_j^+ y x_j^- y reemplazamos cada ocurrencia de x_j por $x_j^+ - x_j^-$
- Si debemos cambiar el objetivo, basta con cambiarle el signo a la función objetivo:

$$\text{máx } c^T x \leftrightarrow \text{mín } -c^T x$$

Pasar a forma estándar

- Si algún b_i es negativo, multiplicamos ambos lados de la igualdad/desigualdad por -1:

$$\text{si } b_i < 0: \quad \begin{aligned} \sum_j a_{ij}x_j \leq b_i &\rightarrow -\sum_j a_{ij}x_j \geq -b_i \\ \sum_j a_{ij}x_j \geq b_i &\rightarrow -\sum_j a_{ij}x_j \leq -b_i \end{aligned}$$

- Agregamos variables *slack* w_i para transformar las desigualdades en igualdades:

$$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i \rightarrow \sum_j a_{ij}x_j + w_i = b_i$$

$$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i \rightarrow \sum_j a_{ij}x_j - w_i = b_i$$

Se agregan también las restricciones:

$$w_i \geq 0 \ \forall i$$

Introducimos forma matricial

Soluciones Básicas Factibles

Recordemos que si un (PL) admite solución óptima, entonces existe algún punto extremo que es óptimo.

Luego, resolver el (PL) es equivalente a determinar el punto extremo de mejor valor.

Introducimos ahora el concepto de solución básica factible y mostramos como caracterizar los puntos extremos del poliedro factible en términos de estas soluciones básicas factibles.

Veamos:

Sea el sistema $Ax = b, x \geq 0$ con $A \in R^{m \times n}$, $x \in R^n$ y $b \in R^m$. Se asume $rg(A) = m$ $\leq n$
(si $rg(A) < m$ elimino las filas redundantes).
Denotemos:
$A_{\cdot j} \longrightarrow$ La columna j de la matriz.
$A_{i \cdot} \longrightarrow$ La fila i de la matriz.
$a_{ij} \longrightarrow$ Coeficiente de la fila i, columna j de A.
$Ax = b \longrightarrow A_{\cdot 1}x_1 + \cdots + A_{\cdot n}x_n = b$, $x_j \geq 0$.

Soluciones Básicas Factibles

$rg(A) = m \Rightarrow$ hay m columnas linealmente independientes.

Sea B la submatriz de A formada por estas m columnas.

Reordenemos las columnas de A de modo que $A' = [B|R]$, R matriz residual formada por las $n - m$ columnas que no están en B.

Reordenemos también el vector x que se transforma en $x' = [x_B|x_R]^T$. Entonces:

$$Ax = b \Leftrightarrow [B|R][x_B|x_R]^T = b$$

$$\Rightarrow Bx_B + Rx_R = b$$

Como las columnas de B son l.i. $\Rightarrow B$ es invertible.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{B^{-1}B}_{I} \quad x_B + \quad \underbrace{B^{-1}R}_{\overline{R}} \quad x_R = \quad \underbrace{B^{-1}b}_{\overline{b}}$$

$$Ix_B + \overline{R}x_R = \overline{b}$$

Soluciones Básicas Factibles

La solución es $x = [x_B, x_R]$, con:

$x_B = \bar{b} = B^{-1}b$

$x_R = 0$

Esta solución se denomina **solución básica** (está asociada a una base de los vectores columna de la matriz A).

Si además $x_b \geq 0 \Rightarrow x_b$ es **solución básica factible** puesto que satisface todas las restricciones del (P.L.) ($Ax = b$, $x \geq 0$).

Componentes de $x_B \longrightarrow$ variables básicas.

Componentes de $x_R \longrightarrow$ variables no básicas.

Para que una solución básica sea factible se necesita que $\bar{b} \geq 0$.

Una matriz básica B tal que $B^{-1}b$ es no negativo, se dice **matriz primal factible**.

Generación de Puntos Extremos

Llamamos entonces $\overline{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R$ (vector de costos reducidos no básicos).

Definimos al vector de multiplicadores del simplex como $\pi = c_B^T B^{-1} \Rightarrow \overline{c}_R^T = c_R^T - \pi R$.

Observación: Los costos reducidos de las variables básicas son nulos (por definición: $\overline{c}_B^T = c_B^T - \pi B$).

Con este desarrollo nos queda la siguiente forma del (PL) asociada a una base B (forma canónica):

$$\begin{aligned} \min z = c_B^T \overline{b} + \overline{c}_R^T x_R \\ \text{s.a.} \quad I x_B + \overline{R} x_R = \overline{b} \\ x_B, x_R \geq 0 \end{aligned}$$

De esta forma si

$\overline{c}^t_R > 0$ → Estamos en el óptimo

$\overline{c}^t_{R\,i} < 0$ para algún i → puedo seguir iterando

$\overline{c}^t_{Ri} = 0$ para algún i → x_{Ri} puede crecer (hasta algún valor) → ∞ soluciones óptimas pero si incluyen x_{Ri} → No basicas

Donde $\overline{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R$

$\overline{b} = B^{-1} b$

$\overline{R} = B^{-1} R$

Lo + importante de la forma matricial es que nos facilita el análisis de sensibilidad y la verificación de condiciones ya dado el óptimo

Método de Diccionarios

Recapitulando, el procedimiento para aplicar SIMPLEX con el método de diccionarios para un problema con objetivo maximizar (minimizar):

1. Estandarizar el problema lineal
2. Hallar solución factible inicial (*)
3. Escribir el diccionario dejando del lado izquierdo a las variables básicas.
4. Mientras hayan coeficientes de la f.o. (z) positivos (negativos):
   4.1 Elegir qué variable no básica aumentar, es decir, qué variable entra a la base (siempre alguna con coeficiente positivo (negativo) en z)
   4.2 Calcular cuánto puede aumentar dicha variable y cuál es la variable que sale de la base (*Pivote*)
   4.3 Escribir el nuevo diccionario con las variables básicas en función de las no básicas. (*Pivotear*)

Si en la i-ésima restricción signo(x_s) > 0 → $x_s \leq \infty$ siendo x_s candidata

signo(x_s) < 0 → $x_s \leq a_{is}/b_i$

Infinitas soluciones óptimas

Hay problemas lineales que tienen infinitas soluciones óptimas, lo cual queda en evidencia una vez que los resolvemos con SIMPLEX. Por ejemplo, el siguiente diccionario:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w_1 & = & 3 & + & x_2 & - & 2w_2 & + & 7x_3 \\ x_1 & = & 1 & - & 5x_2 & + & 6w_2 & - & 8x_3 \\ w_3 & = & 4 & + & 9x_2 & + & 2w_2 & - & x_3 \\ \hline z & = & 8 & & & - & w_2 & - & x_3 \end{array} \Rightarrow (\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{0}_{x_2}, \underbrace{0}_{x_3}, \underbrace{3}_{w_1}, \underbrace{0}_{w_2}, \underbrace{4}_{w_3}) \text{ es una solución óptima.}$$

Observar que si aumentamos el valor de x_2, la función objetivo no disminuye. Toda solución óptima debe cumplir que $x_3 = w_2 = 0$ (pero no necesariamente $x_2 = 0$). Para tales soluciones, el diccionario implica que:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} w_1 & = & 3 & + & x_2 \\ x_1 & = & 1 & - & 5x_2 \\ w_3 & = & 4 & + & 9x_2 \end{array}\right\}$$

x_2 puede anularlas pero NO hacerlas negativas

Luego, cada solución óptima se obtiene asignando valores a x_2 tales que:

$$\begin{array}{rrcr} - & x_2 & \leq & 3 \\ & 5x_2 & \leq & 1 \\ - & 9x_2 & \leq & 4 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Es decir, podemos asignar cualquier valor a x_2 siempre y cuando $w_1, x_1, w_3 \geq 0$ y vamos a obtener otra solución óptima. Por ejemplo, si tomamos $x_2 = \frac{1}{6}$ (que cumple con todas las desigualdades) obtenemos otra solución óptima: $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{19}{6}, 0, \frac{33}{6})$ [que claramente $\boxed{\text{NO es solución básica}}$] → es un cjto ld

Problemas no acotados

Recordar que la variable que sale de la base es la variable básica cuya no-negatividad impone la cota superior más restrictiva al incremento de la variable que va a entrar en la base.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_2 & = & 5 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 3x_1 \\ x_5 & = & 7 & & & - & 3x_4 & - & 4x_1 \\ \hline z & = & 5 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_1 \end{array}$$

La variable que va a entrar a la base es x_3, pero ninguna de las variables básicas x_2 ni x_5 imponen alguna restricción sobre cuánto puede aumentar $x_3 \Rightarrow$ el problema no está acotado: puedo aumentar x_3 tanto como yo quiera (por lo tanto, z puede aumentar tanto como yo quiera).

En general, **si no existen candidatos para dejar la base, el problema es no acotado.**

Soluciones degeneradas

Se dice que **una solución básica es degenerada si una o más de sus variables básicas valen cero**.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_3 & = & 0{,}5 & & & - & 0{,}5x_4 & & \\
x_5 & = & & - & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_4 \\
x_6 & = & & & x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_4 \\
\hline
z & = & 4 & + & 2x_1 & - & x_2 & - & 4x_4
\end{array}$$

Solución actual: $(0, 0, \frac{1}{2}, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$

Es un problema porque NO sabemos si ∃ el óptimo o no

x_1 entrará a la base, pero observemos qué ocurre en la segunda ecuación:

$$0 \leq x_5 = -2x_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq 0$$

$\Rightarrow$ el crecimiento de x_1 está limitado a 0 $\Rightarrow$ ni el valor de x_1 ni el de las otras variables va a cambiar, y el valor de z sigue siendo el mismo.

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

Regla de Bland:

ignoro cuál es la de coeficiente que me conviene y meto la de menor índice

1. La variable entrante será la variable no básica **de menor índice** con coeficiente positivo en la f.o.
2. La variable que sale se elige como siempre. Si hay empates entre variables, sale la que tenga menor índice.

Se puede demostrar que, utilizando la regla de Bland, SIMPLEX no cicla. [Demo: *Linear Programming*, Chvátal, 1983, p. 37]

Obs: no es necesario utilizar la regla de Bland en cada iteración. Podríamos comenzar a emplearla, por ejemplo, luego de algunas iteraciones degeneradas y descartarla cuando se produzca una iteración no degenerada.

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

En síntesis:

- en general es útil **el criterio usual** para decidir qué variable entra a la base. En el caso de maximizar "Entra a la base la variable con mayor coeficiente positivo en la f.o."(análogo para minimizar)
- si se viene dando una **seguidilla de iteraciones degeneradas, usar la Regla de Bland**.

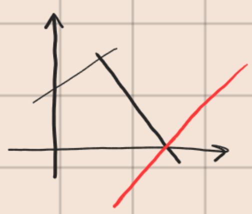
Analicemos que es lo que pasa gráficamente con las soluciones degeneradas

Ejercicio 10. Halle todos los valores del parámetro α tales que las regiones definidas por las siguientes restricciones presenten vértices degenerados:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 6x_1 + x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leq \alpha \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Que $\exists$ vértice degenerado $\rightarrow$ puedo escribir a 1 punto del poliedro con + de 1 base

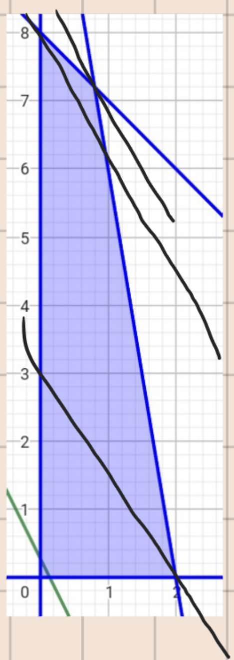
$\rightarrow$ para un vértice tengo restricciones que "sobran"



$\rightarrow$ NO hacía falta, está demas

En los vértices las restricciones se cumplen x igualdad. Si tengo restricciones que pasen x un mismo vértice sin aportar información => + de una variable debería ser 0

porque entonces en ese vértice van a haber 1 o + variables que deban valer 0 $\rightarrow \nexists$ forma de evitarlo



$\rightarrow$ ¿para qué α la recta pasa por los puntos?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ (0,0) \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow 6x_1 + x_2 + x_4 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0 = x_5 \rightarrow$ como la base debe tener 3 elementos ya va a ser degenerada

Si pasa por $(2,0)$ o $(0,8)$ me cambia la región y ya NO hay info redundante

Pero para $x_1 + x_2 = 8 \cap 6x_1 + x_2 = 12 \rightarrow$ NO cambia la región y hay info redundante

$x_2 = 8 - x_1 \cap x_2 = 12 - 6x_1 \rightarrow x_1 = 4/5, \ x_2 = 36/5$

$\rightarrow \quad x_2 = d - 2x_1 \quad \rightarrow$ para que pare x ahí:

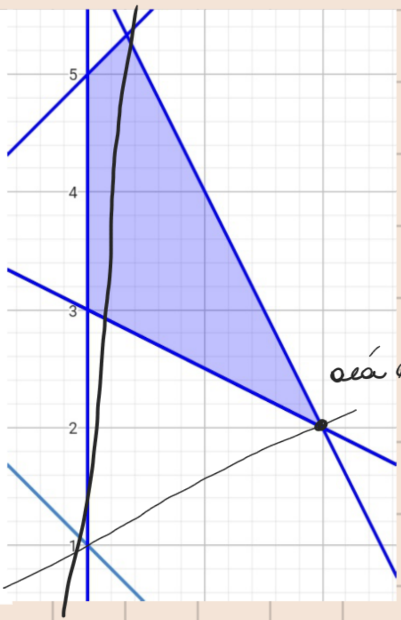
$$\frac{36}{5} = d - \frac{8}{5}$$

$\rightarrow d = 44/5$

$$\begin{array}{llllll} x_1 + x_2 + x_3 & & & = 8 & \rightarrow & x_1 = 4/5,\ x_2 = 36/5,\ x_3 = 0 \\ \rightarrow 6x_1 + x_2 & + x_4 & & = 12 & \rightarrow & \text{''} \quad \text{''} \quad x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 & & + x_5 & = 44/5 & \rightarrow & \text{''} \quad \text{''} \quad x_5 = 0 \end{array}$$

→ Siempre va a ∃ un elemento básico igual a 0

$$
\begin{aligned}
\alpha x_1 + x_2 &\geq 1\\
2x_1 + x_2 &\leq 6\\
-x_1 + x_2 &\leq 5\\
x_1 + 2x_2 &\geq 6\\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$



acá es redundante

Como ahora α es la pendiente, la recta queda fija en el $(0,1)$

→ El ! punto donde agrega info es $2x_1+x_2=6 \cap -x_1-2x_2=-6$

$x_2 = 6-2x_1$ $\quad x_2 = 3-\frac{1}{2}x_1$

$6-2x_1 = 3-\frac{1}{2}x_1$

$3 = \frac{3}{2}x_1$

$2 = x_1$

→ El punto es $(2,2)$ => $2 = 1 - \alpha 2 \rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$

Para escribir el vértice $x_1 = x_2 = 2$ y las slacks deben ser 0 → degenerado de yapa nos da una SBFI

Hay dos otras maneras (más metódicas) de chequear si un PL tiene alguna solución factible y, de ser así, hallar una solución básica factible inicial para correr el algoritmo.

Método de dos fases: se plantea un problema auxiliar (Fase I) que, al resolverlo, otorga una solución básica factible. La Fase II consiste en resolver el problema original utilizando la solución hallada, como vimos en clases anteriores.

Método Big-M: se plantea un problema auxiliar introduciendo variables artificiales que permiten obtener un solución factible básica para el problema auxiliar. Se resuelve y, si en el óptimo las variables auxiliares son nulas, se obtiene el óptimo del problema original.

Método de dos fases

Para utilizar este método, se estandariza el problema original de la siguiente manera:

- **Objetivo de maximizar**
- Los b_i deben ser no negativos
- Se suman variables slack para transformar a los $\leq$ en =
- Se restan variables slack para transformar los $\geq$ en =
- Se suman **variables artificiales** a_i para las desigualdades $\geq$ y para las igualdades
- Todas las variables deben ser no negativas

Método de dos fases - Resumen

1. Escribir el problema original estandarizado según los lineamientos de la diapo 6
2. Plantear el problema auxiliar que tiene las mismas restricciones que el original estandarizado pero su objetivo es max $-\sum a_i$.
3. Hallar el óptimo del problema auxiliar.
4. *if* en el óptimo del problema auxiliar las variables artificiales son todas nulas:
   - Pasar a Fase II (elaborar el diccionario inicial con las igualdades del diccionario óptimo de Fase I ignorando los términos de las variables artificiales). Hallar el óptimo.

   else:
   - El problema original no tiene soluciones factibles. No hay nada más que hacer.

Método Big-M

El **método Big-M** (o método M) en el fondo es similar al método de dos fases de SIMPLEX, salvo que, de existir soluciones factibles, resuelve el problema directamente, sin necesidad de plantear problemas auxiliares.

Método Big-M:

1. Plantear el problema auxiliar como se indica en la diapo 14
2. Confeccionar el diccionario inicial tomando como variables básicas a las variables artificiales (de las restricciones $\geq$ e =) y a las variables slack (de las restricciones $\leq$)
3. Hallar el óptimo del problema auxiliar:
   - *if* en el óptimo del problema auxiliar las variables artificiales son no básicas:

     Del óptimo del problema auxiliar se deduce el óptimo del problema original
   - *else*:

     el problema original es infactible

Dualidad

Como el problema primal tiene como objetivo maximizar, nos interesa la mejor cota superior para z, entonces, el problema dual se plantea como:

$$\begin{array}{rrl} \text{mín} & 5y_1 + 18y_2 + 4y_3 & \\ \text{s.a:} & y_1 + 6y_2 + y_3 \geq & 3 \\ & 3y_1 - y_2 + 2y_3 \geq & 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq & 0 \end{array}$$

Observación 1:
\# Variables del primal = # Restricciones del dual
\# Restricciones del primal = # Variables del dual

En general, las formulaciones del problema primal y del problema dual se relacionan de la siguiente manera:

Primal	Dual
Obj: Minimizar	Obj: Maximizar
$\imath$-ésima restricción $\leq$	$\imath$-ésima variable ≤ 0
$\imath$-ésima restricción $\geq$	$\imath$-ésima variable ≥ 0
$\imath$-ésima restricción $=$	$\imath$-ésima variable libre
$\jmath$-ésima variable ≥ 0	$\jmath$-ésima restricción $\leq$
$\jmath$-ésima variable ≤ 0	$\jmath$-ésima restricción $\geq$
$\jmath$-ésima variable libre	$\jmath$-ésima restricción $=$

Primal	Dual
Obj: Maximizar	Obj: Minimizar
$\imath$-ésima restricción $\leq$	$\imath$-ésima variable ≥ 0
$\imath$-ésima restricción $\geq$	$\imath$-ésima variable ≤ 0
$\imath$-ésima restricción $=$	$\imath$-ésima variable libre
$\jmath$-ésima variable ≥ 0	$\jmath$-ésima restricción $\geq$
$\jmath$-ésima variable ≤ 0	$\jmath$-ésima restricción $\leq$
$\jmath$-ésima variable libre	$\jmath$-ésima restricción $=$

Ejercicio: hallar el dual asociado al siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\
\text{s.a:} \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3 \\
& x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 5 \\
& 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 2 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_4 \leq 0 \\
& x_2, x_3 \quad \text{libres}
\end{aligned}
$$

Teorema débil de dualidad

Para un problema con objetivo de maximizar, sean $(x_1, \cdots, x_n)$ solución factible del primal e $(y_1, \cdots, y_m)$ solución factible del dual, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Obs: si el objetivo del primal es minimizar, la desigualdad se invierte.

Teorema fundamental de dualidad

Si el problema primal tiene solución óptima $(x_1^*, \cdots, x_n^*)$, entonces el dual tiene solución óptima $(y_1^*, \cdots, y_m^*)$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Los teoremas de dualidad nos permiten observar otra relación muy importante entre el problema primal y el problema dual:

		Dual		
		Óptimo	Infactible	No acotado
Primal	Óptimo	✓	✗	✗
	Infactible	✗	✓	✓
	No acotado	✗	✓	✗

✓: puede ocurrir ✗: no puede ocurrir

¿Por qué se llama así? Los coefs de las slacks en el Primal son los valores del óptimo del Dual

slacks = # restricciones = # vars en el dual → slack 0 → $\sum ax = b$, slack $\neq 0$ → $\sum ax < b$

Teorema de Holgura Complementaria

Sean $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ solución óptima del primal e $y^* = (y_1^*, \cdots, y_m^*)$ solución óptima del dual, las siguientes son condiciones necesarias y suficientes para la optimalidad simultánea de x^* e y^*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \quad \text{o} \quad x_j^* = 0 \quad \text{(o ambos)} \quad \forall j = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^* = b_i \quad \text{o} \quad y_i^* = 0 \quad \text{(o ambos)} \quad \forall i = 1, \cdots, m$$

Cuando despejamos hay que rechequear que valga todo → quizás (+) cómodo usar el otro enunciado

Dualidad

Teorema

Una solución factible $x_1^*, \cdots, x_n^*$ de

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{máx} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{s.a:} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq & b_i & \forall i = 1, \cdots, m \\ & x_j \geq & 0 & \forall j = 1, \cdots, n \end{array}$$

es óptima si y sólo si existen $y_1^*, \cdots, y_m^*$ tales que:

$$\begin{array}{rclll} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* & = & c_j & \text{cuando} & x_j^* > 0 \\ y_i^* & = & 0 & \text{cuando} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \end{array}$$

→ Si es 0 esa restricción NO va

→ nos reduce el sistema

y tales que:

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* & \geq & c_j & \forall j = 1, \cdots, n \\ y_i^* & \geq & 0 & \forall i = 1, \cdots, m \end{array}$$

Significado Económico de las Variables Duales

Si x_1 = ganancia x silla → y_1 = $ por cada unidad de madera

Lo que se espera es que cada variable dual y_i mida el valor unitario en $ del recurso i.

El siguiente teorema (demo en la práctica) valida esta idea.

Teorema: estandarizado ⚠ → Si el estandarizado tiene listo!

Si el problema primal (P) tiene al menos una solución óptima básica no degenerada, entonces existe $\varepsilon > 0$ con la siguiente propiedad:
Si $|t_i| \leq \varepsilon \quad \forall i = 1, \ldots, m$, entonces el problema

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + t_i & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Tiene solución óptima y su valor óptimo es

$$z^* \quad + \quad \sum_{i=1}^{m} t_i y_i^*$$

valor óptimo de (P) — solución óptima del dual de (P)

Nota: La unicidad de $y_1^*, \ldots, y_m^*$ está garantizada por la observación anterior.

Significado Económico de las Variables Duales

Lo que el Teorema dice es que con cada unidad extra de recursos i, el beneficio de la firma aumenta y_i^* pesos.

$$y_i^* \longrightarrow \text{ valor marginal del recurso } i$$

O sea que si tuvieramos que pagar cierta cantidad de dinero por una unidad extra de recurso i, sabemos que nos conviene pagar hasta y_i^* pesos.

Otro ejemplo:
Se desea diseñar un plan de producción de máximo benficio para dos posibles productos que se fabrican utilizando 3 insumos.
Cada insumo tiene disponibilidad máxima.
El modelo lineal es el siguiente:

$$\begin{array}{llll}
\max z = & x_1 & +1,5x_2 & \\
\text{s.a.} & 2x_1 & +2x_2 & \leq 160 \\
 & x_1 & +2x_2 & \leq 120 \\
 & 4x_1 & +2x_2 & \leq 280 \\
 & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

Análisis de Sensibilidad

- **Objetivos:** Identificar los parámetros para los cuales la solución óptima es más sensible, es decir aquellos que al sufrir una pequeña variación en su valor implican un mayor impacto en la solución óptima.

- Los parámetros del modelo (c_j, b_i, a_{ij}) se los asume como constantes conocidas, pero en la práctica estos valores suelen ser estimaciones por lo que es interesante analizar el efecto que tienen sobre la solución posibles errores en los parámetros.

- Buscaremos intervalos o rangos de variación de los valores del lado derecho (b_i) y de los coeficientes de la función objetivo (c_j) que permiten que la base óptima obtenida siga siendo óptima (también puede hacerse para los coeficientes a_{ij})

Análisis de Sensibilidad

Se tiene el problema:

$$\begin{aligned}(\text{PL})\ \text{mín} \quad & z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0\end{aligned}$$

Se hace sobre el PROBLEMA ESTANDARIZADO

Podemos hacer toda la cuenta y luego ver coordenada a coordenada

1. **Variación de los coeficientes de la Función Objetivo** (c_j)
   Recordemos que en el análisis gráfico variar este parámetro afectaba la pendiente o inclinación del hiperplano correspondiente a cada curva de nivel de la función objetivo.

   Mientras $\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j$, la base B^* seguirá siendo óptima.

   Supongamos que c_k es el coeficiente que se ha de analizar. Se debe analizar por separado los casos de si la variable correspondiente es o no básica.

   a) **Variable x_k es no básica**
   Recordemos que:

   → Si lo hacemos + general como dije arriba esperamos que haya una única condición

$$\bar{c}_k = c_k - c_{B^*}^T B^{*-1} A_{\cdot k} \quad (\bar{c}_j = 0,\ \forall j \text{ básica})$$

Análisis de Sensibilidad

Así, modificar c_k para un x_k no básico solo afecta a $\overline{c}_k$.
Luego, la base B^* se mantendrá óptima si $\overline{c}_k$ sigue siendo ≥ 0, o sea, si

$$c_k \geq c_{B^*}^T B^{*-1} A_{.k}$$

b) **Variable x_k es básica**
En este caso, el valor de c_k influye en el valor de todos los costos reducidos, puesto que c_k es un elemento de c_{B^*}.
Por construcción, $\overline{c}_j = 0$, $\forall j$ básico. Luego sólo debemos revisar la condición de optimalidad para los costos reducidos de las variables no básicas.
Sea $L = \{l/x_l \text{ es básica}\}$

$$\begin{aligned}\overline{c}_j &= c_j - c_{B^*}^T \overline{A}_{.j} \\ &= c_j - \textstyle\sum_{l \in L} c_l \overline{a}_{lj} \quad \forall j \text{ tal que } x_j \text{ es no básica}\end{aligned}$$

Así queremos que

$$c_j - \sum_{l \in L} c_l \overline{a}_{lj} \geq 0$$

Análisis de Sensibilidad

$$c_j - \sum_{l \in L, l \neq k} c_l \bar{a}_{lj} - c_k \bar{a}_{kj} \geq 0 \quad \forall j \text{ no básico}$$

Finalmente

- Si $\bar{a}_{kj} > 0$

$$c_k \leq \frac{1}{\bar{a}_{kj}} \left[c_j - \sum_{l \in L, l \neq k} c_l \bar{a}_{lj} \right] \qquad j \text{ no básico}$$

- Si $\bar{a}_{kj} < 0$

$$c_k \geq \frac{1}{\bar{a}_{kj}} \left[c_j - \sum_{l \in L, l \neq k} c_l \bar{a}_{lj} \right] \qquad j \text{ no básico}$$

Luego en este rango es donde la base sigue siendo óptima.
Notar que si $\bar{a}_{kj} = 0$ entonces c_k puede moverse sin restricciones.

Al cambiar coeficientes de la f.o. la base B^* podría dejar de ser óptima

→ Si $C_i \in$ {región donde se mantiene el óptimo} → NO se altera la región de soluciones factibles, B^* y z^* se mantienen

Análisis de Sensibilidad

Se hace sobre el PROBLEMA ESTANDARIZADO

2. **Vriación del Vector del Lado Derecho** (b_i)
   Variaciones en el valor de un b_i puede afectar la factibilidad de la solución.

   Para establecer el rango de valores donde la modificación de un b_i no afecta la solución, se debe verificar la condición de factibilidad primal, o sea $\bar{b} = B^{*-1}b \geq 0$.

   B^* sigue siendo óptima pero cambian z^* y x_{Bi}

   Cambian los valores de las variables básicas pero las variables básicas siguen siendo las mismas

Método diccionario
Variación c_i

$$\begin{array}{rrll} \text{máx} & (2+\delta)x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & (Ganancia) \\ \text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18 & (1) \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 & (2) \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 & \end{array}$$

$$\text{De (1): } x_2 = 18 - 2x_1 - \frac{1}{2}x_3 - w_1 \qquad (a)$$

Despejando a x_1 en (2):

$$x_1 = 15 - 2x_2 - 3x_3 - w_2 = 15 - 2\left(18 - 2x_1 - \frac{1}{2}x_3 - w_1\right) - 3x_3 - w_2 =$$

$$= -21 + 4x_1 - 2x_3 + 2w_1 - w_2 \Rightarrow x_1 = 7 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2$$

Volviendo a (a) para reemplazar a x_1:

$$x_2 = 18 - 2x_1 - \frac{1}{2}x_3 - w_1 = 18 - 2\left(7 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2\right) - \frac{1}{2}x_3 - w_1 =$$

$$= 4 - \frac{11}{6}x_3 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2$$

Reemplazando a x_1, x_2 en z:

$$z = (2+\delta)x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 =$$

$$= (2+\delta)\left(7 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2\right) + 2\left(4 - \frac{11}{6}x_3 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2\right) + \frac{3}{2}x_3 =$$

$$= 22 + 7\delta + \left(-\frac{5}{6} + \frac{2\delta}{3}\right)x_3 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{2\delta}{3}\right)w_1 + \left(-\frac{2}{3} + \frac{\delta}{3}\right)w_2$$

Análisis de Sensibilidad - Coeficientes de la f.o.

Método matricial: estandarizando el problema y sabiendo que $(7,4,0)$ es solución óptima del problema, tenemos que:

$$\begin{array}{rrll}
\text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & (Ganancia) \\
\text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18 & (1) \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 & (2) \\
 & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 &
\end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (2,2) \qquad c_R^T = (\frac{3}{2}, 0, 0)$$

Modificando el coeficiente de una variable no básica:

$$\begin{aligned}
\textbf{máx} \quad & 2x_1 + 2x_2 + \left(\tfrac{3}{2} + \delta\right) x_3 \\
\text{s.a:} \quad & 2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 + w_1 = 18 \quad (1) \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = 15 \quad (2) \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (2, 2) \qquad c_R^T = (\frac{3}{2} + \delta, 0, 0)$$

Sólo hay que chequear para qué valores de δ el costo reducido de x_3 siga siendo no positivo:

$$\bar{c}_{R_1}^T = c_{R_1}^T - c_B^T B^{-1} R_{.1} = -\frac{5}{6} + \delta$$

Luego, esta base sigue siendo óptima si $\delta \leq \frac{5}{6}$

Análisis de Sensibilidad - Términos independientes

Método de diccionarios: supongamos ahora que, sabiendo que $(7, 4, 0)$ es el óptimo del problema original, queremos ver cuánto puede variar uno de los recursos disponibles de manera tal que la base óptima no cambie.

$$
\begin{array}{rrll}
\text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 = & 18 + \delta & (1) \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = & 15 & (2) \\
 & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq & 0 &
\end{array}
$$

Una vez más, haciendo cuentas, tenemos que:

$$
\begin{array}{rl}
x_1 = & 7 + \frac{2}{3}\delta + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2 \\
x_2 = & 4 - \frac{1}{3}\delta - \frac{11}{6}x_3 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2 \\
\hline
z = & 14 + 6\delta - \frac{5}{6}x_3 - \frac{2}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2
\end{array}
$$

Para que la base óptima siga siendo factible, necesitamos que:

Análisis de Sensibilidad - Términos independientes

Obs: con los mismos procedimientos también se puede ver qué ocurre si varían todos los términos independientes al mismo tiempo:

$$\begin{array}{rrcll}
\text{máx} & 2x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + w_1 & = & 18 + \delta_1 & (1) \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 & = & 15 + \delta_2 & (2) \\
 & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

En este caso, nos va a quedar que la base sigue siendo óptima si y sólo si:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\delta_1 - \frac{1}{3}\delta_2 \geq -7 \\ -\frac{1}{3}\delta_1 + \frac{2}{3}\delta_2 \geq -4 \end{cases}$$

Ejercicio: chequearlo.

Branch & Bound

Vamos a querer resolver el PLE

↪ las variable de decisión $\in \mathbb{N}_0$ o son binarias

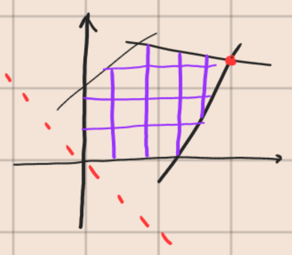
Para resolverlo vamos a plantear la relajación lineal, es decir, el PL asociado

Si la relajación lineal es infactible $\Rightarrow$ PLE infactible

tiene sol entera $\Rightarrow$ Encontré el óptimo del PLE

tiene solución no entera : ¿?

Si tiene sol no entera → vamos a particionar el cjto factible de la relajación y resolver los subproblemas

Ejemplo 

La grilla violeta sería el PLE. La idea es dado (x_1^*, x_2^*) óptimo elegir alguna no entera y armar 2 subproblemas con las siguientes restricciones $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$ y $x_i \geq \lceil x_i^* \rceil$. Para ambos problemas resolver la relajación lineal y luego volver a particionar

Esto nos arma un árbol de decisiones el cuál podemos dejar de bifurcar si

- Encontramos el óptimo $\in \mathbb{Z}$
- El problema es infactible
- Encontramos una rama donde el valor de la f.o. es menor que una solución entera previamente despejada

Ramificación y Acotamiento (Branch & Bound)

$$\begin{array}{rll} \text{(PE)}\ \min & z = c^T x & \\ \text{s.a.} & Ax \leq b & \\ & x_i \in IN_0 & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Definición:
El problema lineal continuo que se obtiene del problema (PE) al omitir las restricciones de integralidad de las variables se denomina **relajación lineal** de (PE).

Observación: Si la solución óptima de la relajación lineal de (PE) es entera, entonces esta solución es óptima para (PE).

La estrategia de enumerar todas las soluciones factibles de un problema entero (y elegir la mejor) se denomina **enumeración explícita**. En muchas ocasiones esto es impracticable.

La idea es enumerar de forma "inteligente" de modo que no sea necesario pasar por aquellas que sabemos que no son óptimas.

Ramificación y Acotamiento

B&B tiene ese objetivo: intentar una enumeración parcial que asegure pasar por una solución óptima. Se denomina **enumeración implícita**.

La idea de este algoritmo consiste en particionar el conjunto factible de la relajación del problema en cuestión y resolver los subproblemas resultantes de esta partición (ramificación).

A partir del análisis de las soluciones obtenidas para los subproblemas y de sus respectivos valores óptimos (o de cotas para los valores óptimos) se puede establecer si es posible obtener mejores soluciones dividiendo nuevamente algún subproblema (proceso de acotamiento).

Si se concluye que determinado subproblema no puede mejorar la solución actual, no se le ramifica. En caso contrario, será uno de los candidatos a ser ramificado.

Algoritmo "Branch & Bound"

L: Lista de problemas candidatos a ser ramificados.

0. $L = \{(\mathrm{P}_0)\}$; $\overline{z} = +\infty$.

1. Escoger un problema (nodo) de la lista L.
   Sea (P) el problema seleccionado.
   Si $L = \phi$, TERMINAR con las siguientes conclusiones:
   - Si $\overline{z} = +\infty$, (PE) es infactible.
   - En caso contrario, la solución óptima de (PE) es $(\overline{x}, \overline{z})$.

2. Resolver el problema (P).
   Si (P) es infactible, eliminarlo de L (podar la rama que nace de (P)). Ir a (1).

3. Si (P) es factible, sea z' el valor óptimo y x' una solución óptima.
   Si $z' \geq \overline{z}$ eliminar (P) de L e ir a (1).

4. Si $z' < \overline{z}$ y x' cumple la condición de integralidad, entonces actualizar los valores $\overline{z} \longleftarrow z'$ y $\overline{x} \longleftarrow x'$, eliminar (P) de L e ir a (1).

Algoritmo "Branch & Bound"

5. En caso contrario, sea $k \in I$ tal que x'_k no pertenece a IN_0. Ramificar el problema (P) creando dos nuevos problemas: (P$^+$) y (P$^-$).
   (P$^-$) se construye agregando la restricción $x_k \leq \lfloor x'_k \rfloor$.
   (P$^+$) se construye agregando la restricción $x_k \geq \lfloor x'_k \rfloor + 1$
   Por último se actualiza $L \longleftarrow L \bigcup \{P^-, P^+\}$ y se va al paso (1).

Ej:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(PE)}\ \text{mín} & z = -5x_1 - 8x_2 & \\
\text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 6 & \\
 & 5x_1 + 9x_2 \leq 45 & \\
 & x_1, x_2 \geq 0, & \quad enteros
\end{array}
$$

Hacemos $\overline{z} = +\infty$.
(P$_0$): Relajación lineal

$$
\begin{array}{rl}
\text{mín}\, z = & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

- Para elegir la variable a ramificar podemos elegir la de menor/mayor c_j en la f.o. o aquella que permita movernos cerca de (x_1^*, x_2^*)

- Para desarrollar el árbol vamos a querer hacer un DFS porque nos permite encontrar una cota rápidamente

- O SO que se pisen restricciones y caer en una contradicción

- Para resolver sirve plantear un árbol

$$\begin{tikzcd}
 & x_i \geq \lceil x_i^* \rceil \quad \begin{matrix} Z \\ (x_1^*, x_2^*) \\ \bar{Z} \end{matrix} \\
\begin{matrix} Z = \dots \\ (x_1^*, x_2^*) \\ \bar{Z} = +\infty \end{matrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor \quad \begin{matrix} Z \\ (x_1^*, x_2^*) \\ \bar{Z} \end{matrix}
\end{tikzcd}$$

Programación Entera Binaria

Supongamos ahora que las variables pueden tomar sólo valores 0 ó 1.

Ahora no se tienen que agregar restricciones adicionales a los subproblemas sino determinar que una variable toma valor 0 o toma valor 1.

El número máximo de problemas a examinar es $O(2^n)$, para un problema con n variables binarias (profundidad n).

La relajación lineal se obtiene reemplazando cada restricción de binariedad por $0 \leq x_j \leq 1$ para cada variable.

Veamos un ejemplo:

$$
\begin{array}{rll}
(\mathrm{PE})\ \text{máx}\, z = & 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \\
\text{s.a.} & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 3 \\
 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq 3 \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq 4 \\
 & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} &
\end{array}
$$

Programación Entera Binaria

Sea (P_0) la relajación lineal.

La solución óptima viene dada por:

$$x_1^* = 1 \quad x_2^* = 0 \quad x_3^* = \frac{1}{2} \quad z_0 = 3$$

Ramificamos en x_3 (única posibilidad):

En (P_1), agregamos $x_3 = 0$.

En (P_2), agregamos $x_3 = 1$.

Luego de resolver el problema por B&B el árbol queda:

Programación Entera Binaria