Ejercicio 8. Sea $\theta \in \mathbb{R}$, considere el problema:

$$\begin{array}{rrcl} \max & z = (10-4\theta)x_1 + (4-\theta)x_2 + (7+\theta)x_3 & & \\ s.a: & 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 7 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 5 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

a) Aplique el algoritmo Simplex para encontrar el óptimo con $\theta = 0$.

b) Determine el intervalo de valores de θ para que la solución básica factible obtenida en el ítem anterior siga siendo óptima.

c) Sea θ perteneciente al intervalo hallado en el ítem anterior, encuentre el intervalo de valores de b_1 tales que la base factible óptima siga siendo la misma. Repetir el procedimiento para b_2.

d) Analice el caso en el que b_1 y b_2 se mueven a la vez.

e) Formule el dual del problema original.

f) Para $\theta = 0$, hallar el óptimo del problema dual utilizando el Teorema de Holgura Complementaria.

Estandarización

$$\begin{array}{llllll} \max & z = (10-4\theta)x_1 + (4-\theta)x_2 + (7+\theta)x_3 & & & & \\ s.a.: & 3x_1 + & x_2 + & 2x_3 + w_1 & & = 7 \\ & 2x_1 + & x_2 + & 3x_3 & + w_2 & = 5 \\ & & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

ⓐ Si bien si planteamos el dual podemos resolverlo gráficamente, usemos el algoritmo como se nos pide

Mi SBFI va a ser $w_1 = 7, w_2 = 5, x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Armo el dicc

$w_1 = 7 - 3x_1 - x_2 - 2x_3$ $\quad \to w_1 \geq 0 \leftrightarrow x_1 \leq 7/3$

$w_2 = 5 - 2x_1 - x_2 - 3x_3$ $\quad \to w_2 \geq 0 \leftrightarrow x_1 \leq 5/2$

$z = 10x_1 + 4x_2 + 7x_3$

$x_1 = 7/3 - 1/3\, x_2 - 2/3\, x_3 - 1/3\, w_1$ $\quad x_1 \geq 0 \leftrightarrow x_2 \leq 7$

$w_2 = 1/3 - 1/3\, x_2 - 5/3\, x_3 + 2/3\, w_1$ $\quad w_2 \geq 0 \leftrightarrow x_2 \leq 1$

$z = 70/3 + 2/3\, x_2 + 1/3\, x_3 - 10/3\, w_1$

$x_1 = 2 + x_3 - w_1 + w_2$

$x_2 = 1 - 5x_3 + 2w_1 - 3w_2$

$z = 24 - 3x_3 - 2w_1 - 2w_2$

$\rightarrow$ óptimo : $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, w_1^*, w_2^*) = (2, 1, 0, 0, 0)$ y valor f.o : 24

(b) Usemos el método matricial $\rightarrow$ x def costes reducidos de var básicas = 0

↳ tenemos que analizar los de las NO básicas

$C_B^t = (10 - 4\theta, 4 - \theta)$

$C_R^t = (7+\theta, 0, 0)$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1}R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$(7+\theta, 0, 0) - (10-4\theta, 4-\theta)\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$(7+\theta, 0, 0) - (10-\theta, 2-2\theta, 2+\theta)$

$(-3+2\theta, -2+2\theta, -2-\theta) = \bar{C}_R$

$\rightarrow$ Como es un problema de maximización para que la base siga siendo óptima

$\bar{c}_i \leq 0 \; \forall i \rightarrow \begin{cases} -3+2\theta \leq 0 \rightarrow \theta \leq 3/2 \\ -2+2\theta \leq 0 \rightarrow \theta \leq 1 \\ -2-\theta \leq 0 \rightarrow \theta \geq -2 \end{cases}$

$\rightarrow \theta \in [-2, 1]$ para que mi sol siga siendo óptima

(c) Veamoslo matricialmente $\rightarrow B^{-1}b \geq 0$

Si varío b_1

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - 5 \\ -2b_1 + 15 \end{pmatrix}$ $\rightarrow b_1 - 5 \geq 0 \rightarrow b_1 \geq 5$; $-2b_1 + 15 \geq 0 \rightarrow b_1 \leq 15/2$ $\;$ y $b_1 \in [5, 15/2]$

Si vario b_2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-b_2 \\ -14+3b_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 7-b_2 \geq 0 \to b_2 \leq 7 \\ \to -14+3b_2 \geq 0 \to b_2 \geq 14/3 \end{matrix} \Bigg\} \; b_2 \in [14/3, 7]$$

Si vario los 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - b_2 \\ -2b_1+3b_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to b_1 - b_2 \geq 0 \to b_1 \geq b_2 \\ \to -2b_1+3b_2 \geq 0 \to -2b_1 \geq -3b_2 \to b_1 \leq \frac{3}{2} b_2 \end{matrix}$$

$$\to b_2 \leq b_1 \leq 3/2\, b_2$$

(e) D: min $7y_1 + 5y_2$

$$3y_1 + 2y_2 \geq 10 - 4\theta$$
$$y_1 + y_2 \geq 4 - \theta$$
$$2y_1 + 3y_2 \geq 7 + \theta$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

(f)

$$\begin{matrix} x_1^* > 0 \to 3y_1 + 2y_2 = 10 \\ x_2^* > 0 \to y_1 + y_2 = 4 \end{matrix} \Bigg\} \to y_1 = 2, y_2 = 2$$

Como las restricciones de P valen $x =$ ningún $y_i = 0$