Ejercicio 7. Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lrcl} \max & z = c_1x_1 + c_2x_2 & & \\ s.a: & 2x_1 + 3x_2 & \leq & b_1 \\ & x_1 - x_2 & \leq & b_2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

con $c_1 = 1,\ c_2 = 3,\ b_1 = 6$ y $b_2 = 2$.

a) Aplique el algoritmo Simplex para encontrar el óptimo.

b) ¿En qué intervalo puede moverse c_1 y que el óptimo siga siendo el mismo?

c) ¿En qué intervalo puede moverse b_1 y que el óptimo siga siendo el mismo?

d) Formule el problema dual del problema original y encuentre el óptimo del dual utilizando el Teorema de Holgura Complementaria.

e) Suponga que b_1 aumenta de 6 a 6.5, ¿en cuánto mejora la función objetivo?

f) Suponga que b_2 aumenta de 2 a 3, ¿en cuánto mejora la función objetivo?

ⓐ Podríamos resolverlo gráficamente pero como piden algoritmo vamos a hacerlo algorítmicamente

$\rightarrow$ max $z = x_1 + 3x_2$

s.a: $2x_1 + 3x_2 \leq 6$

$x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\xrightarrow{\text{Estandarizamos}}$

max $z = 1x_1 + 3x_2$

s.a.: $2x_1 + 3x_2 + w_1 = 6$

$x_1 - x_2 + w_2 = 2$

$x_1, x_2, w_1, w_2 \geq 0$

Planteo como SBFI $w_1 = 6,\ w_2 = 2,\ x_1 = x_2 = 0$ y armo el dicc

$w_1 = 6 - 2x_1 - 3x_2 \rightarrow w_1 \geq 0 \leftrightarrow x_2 \leq 2 \rightarrow$ sale w_1

$\underline{w_2 = 2 - x_1 + x_2} \rightarrow w_2 \geq 0 \leftrightarrow x_2 \geq 0$

$z = x_1 + 3x_2$

$x_2 = 2 - 2/3\, x_1 - 1/3\, w_1$

$\underline{w_2 = 4 - 5/3\, x_1 - 1/3\, w_1}$ $\rightsquigarrow$ óptimo: $(x_1^*, x_2^*) = (0, 2)$ f.o.: 6

$z = 6 - x_1 - w_1$

② Queremos mover C_1

→ forma matricial: $C_R^t - C_B^t B^{-1} R \leq 0$

→ $C_R^t = (C_1, 0) \Rightarrow x_1$ y w_1

$C_B^t = (3, 0) \Rightarrow x_2$ y w_2

$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(C_1, 0) - (3,0) B^{-1} R = (C_1, 0) - (3, 0) \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (C_1, 0) - (2, 1) = (C_1 - 2, -1)$$

→ Para que el óptimo siga siendo óptimo $C_1 - 2 \leq 0 \to C_1 \leq 2$

→ diccionario

$w_1 = 6 - 2x_1 - 3x_2$

$w_2 = 2 - x_1 + x_2$

$z = C_1 x_1 + 3x_2$

$x_2 = 2 - 2/3\, x_1 - 1/3\, w_1$

$w_2 = 4 - 5/3\, x_1 - 1/3\, w_1$

$z = 6 + (C_1 - 2) x_1 - w_1$

(c) Queremos mover b_1

forma matricial $\rightarrow B^{-1}b \geq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 b_1 \\ 1/3 b_1 + 2 \end{pmatrix} \geq 0$

$\rightarrow b_1 \geq 0$ y $b_1 \geq -6 \rightarrow b_1 \geq 0$

(d) $\min\ y = 6y_1 + 2y_2$

$2y_1 + y_2 \geq 1$

$3y_1 - y_2 \geq 3$

$y_1, y_2 \geq 0$

$\rightarrow$ TH C $\rightarrow x_1^* = 0 \rightarrow$ Nada sobre (1)

$\rightarrow x_2^* > 0 \rightarrow 3y_1 - y_2 = 3$

$\rightarrow$ Como (1) de P vale $=$ pero (2) NO $\rightarrow y_2^* = 0$

$\rightarrow 3y_1 = 3 \rightarrow y_1 = 1$

$\rightarrow$ óptimo D: 6 y $(y_1^*, y_2^*) = (1, 0)$

(e) Lo que hacemos es max $z = x_1 + 3x_2$

s.a: $2x_1 + 3x_2 \leq 6 + 0{,}5$

$x_1 - x_2 \leq 2$

Como tenemos una sol óptima NO degenerada puedo usar Teo

$\rightarrow$ nuevo óptimo $= 6 + 1/2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 7$

$\hookrightarrow$ mejora en 1

$\rightarrow$ Si b_2 pasa de 2 a 3 no mejora