Investigación Operativa

Segundo Cuatrimestre 2023

Práctica 2 (parte II): Dualidad y Branch & Bound

Ejercicio 1. Formular el dual de los siguientes problemas lineales:

a)

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & z = x_1 + 4x_2 + x_3 & & \\
s.a: & 2x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 4 \\
 & x_1 - x_3 & = & 1 \\
 & x_2, x_3 & \geq & 0 \\
 & x_1 & \text{libre} &
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & z = -3x_1 - 9x_2 + x_3 - x_5 & & \\
s.a: & -5x_1 + 2x_2 - x_4 & \leq & 12 \\
 & -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 & \leq & 7 \\
 & x_1 - 3x_4 + x_5 & \geq & -4 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\
 & x_4, x_5 & \leq & 0
\end{array}
$$

Ejercicio 2. Probar que el problema dual del problema dual es el problema primal.

Ejercicio 3. Encuentre un problema no factible cuyo dual tampoco sea factible.

Ejercicio 4. Dado el siguiente problema:

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 + 2x_6 + x_7 & & \\
s.a: & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 32x_4 + 3x_5 + 20x_6 + 11x_7 & \geq & 1 \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Hallar el valor óptimo de la función objetivo.

b) Hallar el punto donde se alcanza a partir de la resolución del problema dual.

Ejercicio 5. Resolver cada uno de los siguientes problemas a partir del planteo y resolución de su correspondiente problema dual:

a)

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & z = -5x_1 - 7x_2 - 12x_3 + x_4 & & \\
s.a: & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 38 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 & \leq & 55 \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 & & \\
s.a: & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 20 \\
 & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 & \leq & 30 \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
$$

Ejercicio 6. Para cada uno de los siguientes modelos, decidir si x^* es una solución óptima utilizando el problema dual.

1.

$$x^* = (0, 0, 8, 3)$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & & \\
s.a: & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & \leq & -2 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 5 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & \leq & 10 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

2.

$$x^* = (0, 2, 0, 7, 0)$$

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\max & 8x_1 & - & 9x_2 & + & 12x_3 & + & 4x_4 & + & 11x_5 & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & \leq & 22 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Ejercicio 7. Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rrcl}
\max & z = c_1x_1 + c_2x_2 & & \\
s.a: & 2x_1 + 3x_2 & \leq & b_1 \\
 & x_1 - x_2 & \leq & b_2 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

con $c_1 = 1,\ c_2 = 3,\ b_1 = 6$ y $b_2 = 2$.

a) Aplique el algoritmo Simplex para encontrar el óptimo.

b) ¿En qué intervalo puede moverse c_1 y que el óptimo siga siendo el mismo?

c) ¿En qué intervalo puede moverse b_1 y que el óptimo siga siendo el mismo?

d) Formule el problema dual del problema original y encuentre el óptimo del dual utilizando el Teorema de Holgura Complementaria.

e) Suponga que b_1 aumenta de 6 a 6.5, ¿en cuánto mejora la función objetivo?

f) Suponga que b_2 aumenta de 2 a 3, ¿en cuánto mejora la función objetivo?

Ejercicio 8. Sea $\theta \in \mathbb{R}$, considere el problema:

$$\begin{array}{rrcl}
\max & z = (10 - 4\theta)x_1 + (4 - \theta)x_2 + (7 + \theta)x_3 & & \\
s.a: & 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 7 \\
 & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 5 \\
 & x & \geq & 0
\end{array}$$

a) Aplique el algoritmo Simplex para encontrar el óptimo con $\theta = 0$.

b) Determine el intervalo de valores de θ para que la solución básica factible obtenida en el ítem anterior siga siendo óptima.

c) Sea θ perteneciente al intervalo hallado en el ítem anterior, encuentre el intervalo de valores de b_1 tales que la base factible óptima siga siendo la misma. Repetir el procedimiento para b_2.

d) Analice el caso en el que b_1 y b_2 se mueven a la vez.

e) Formule el dual del problema original.

f) Para $\theta = 0$, hallar el óptimo del problema dual utilizando el Teorema de Holgura Complementaria.

Ejercicio 9. Resuelva utilizando Branch & Bound los siguientes problemas:

a)

$$\begin{array}{rrcl} \max & z = 2x_1 + x_2 & & \\ s.a: & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 19 \\ & 7x_1 + 3x_2 & \leq & 43 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrcl} \min & z = -10x_1 - 15x_2 & & \\ s.a: & 8x_1 + 4x_2 & \leq & 40 \\ & 15x_1 + 30x_2 & \leq & 20 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrcl} \min & z = -4x_1 + 5x_2 & & \\ s.a: & 5x_1 - 2x_2 & \geq & -2 \\ & 2x_1 - 4x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & \leq & 5 \\ & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

Ejercicio 10. Para los ejemplos del ejercicio anterior, supongamos que por restricciones de tiempo, no podemos expandir el árbol más allá del segundo nivel. Elija la mejor solución al problema en ese caso y dé una medida de la calidad de la solución encontrada.