7. Sean $r_1, \dots, r_m$ y $c_1, \dots, c_n$ números naturales. Se quiere asignar los valores de las celdas de una matriz de $m \times n$ con números naturales de forma tal que la i-ésima fila sume r_i y la i-ésima columna sume c_i.

   a) Modelar el problema de asignación como un problema de flujo.

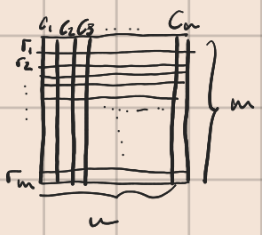
   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

   c) Demostrar que el modelo es correcto.

   d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

Tengo $r_1, \dots, r_m$ y $c_1, \dots, c_n$ números naturales

Quiero asignar en una matriz números naturales / la i-ésima fila sume r_i y la i-ésima columna c_i



x cada valor que ponga en r_i tengo que restar ese valor a $c_1, c_2, \dots, c_n$

Puedo pensar que poner un valor en r_i es como mandar flujo a través de una red y que ese valor de flujo va a las columnas.

Si $\exists$ solución $\Longleftrightarrow$ puedo sumar siempre las filas y las columnas como corresponde $\Longleftrightarrow$ ¡puedo definir un flujo!

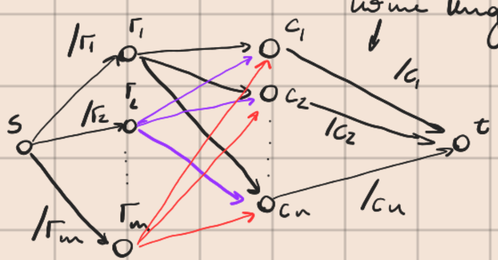
Modelo posible

No sé cuánto se va a mandar así que lo defino en ∞ total

? va a ser válido

∞

no me tengo que pasar de la suma de columnas



Red N / $V(N) = \{r_1, \dots, r_m\} \cup \{c_1, \dots, c_n\} \cup \{s, t\}$

$E(N) = \{s \to r_i / 1 \leq i \leq m\} \cup \{c_i \to t / 1 \leq i \leq n\} \cup \{r_i \to c_j / 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$

$$c(e) = \begin{cases} r_i & \text{si } e = s \to r_i \\ \infty & \text{si } e = r_i \to c_j \\ c_i & \text{si } e = c_j \to t \end{cases}$$

(b) Interpretación a unidades de flujo y capacidad:

Capacidad: $/r_i$ NO puedo sumar ⊕ de lo que me permite esa fila

$/c_i$ ídem que $/r_i$ pero para las columnas

$/\infty$ NO puedo restringir las aristas intermedias porque desconozco de cuantas formas puedo sumar c_i

Flujo: al aumentar el flujo de una arista en n quiere decir que para esa fila/columna agregué un valor n.

(c) Elegimos modelar por filas y columnas porque por posición sería complejo verificar que NO hayamos sumado de más.

QVQ $\exists$ solución $\longleftrightarrow$ $\exists$ flujo factible

$\rightarrow$) $\exists$ solución $\rightarrow \exists$ una forma de asignar valores a filas y columnas tq se cumplen las restricciones

$\rightarrow$ si $\exists$ esa asignación $\rightarrow \exists$ un flujo factible que podemos definir dada la interpretación que le damos al flujo

$\leftarrow$) Supongamos que $\nexists$ flujo factible que podamos definir sobre N

$\rightarrow$ ningún flujo cumple la restricción de capacidad o la ley de conservación (o ambas).

Si NO se cumple la restricción de capacidad entonces

- Me paso de las posibles sumas para filas o para columnas

$\rightarrow \nexists$ solución que permita sumar lo correcto para filas y columnas en simultáneo

Si NO se cumple la ley de conservación

- Entra más flujo que del que sale. Eso solo puede pasar para las columnas → $\nexists$ suma para las filas / se cumplan las sumas de columnas → $\nexists$ solución

- Sale más del que entra: solo puede pasar para las filas lo que quiere decir que las sumas de las filas no alcanzan para las columnas → $\nexists$ solución

(d) $n = m + n + 2 \rightarrow O(n+m)$

$m = m + n + mn \rightarrow O(mn)$

$F = n \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i$ puedo acotar el flujo así porque a lo sumo entran n aristas con la suma de sus flujos que están acotados por sus capacidades

$O(\min\{(n+m)(mn)^2, (mn)\, n \sum_{i=1}^{n} c_i\})$