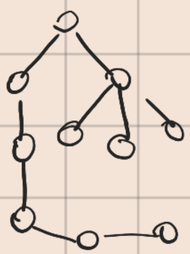
2. ⋆Una arista de un grafo G es *puente* si su remoción aumenta la cantidad de componentes conexas de G. Sea T un árbol DFS de un grafo conexo G.

a) Demostrar que vw es un puente de G si y solo si vw no pertenece a ningún ciclo de G.

QVQ vw es un puente de $G \longleftrightarrow vw$ no pertenece a ningún ciclo de G



$\longleftarrow$) Si vw no pertenece a un ciclo de $G \to \exists!$ camino de v a w y de v a los hijos de w (si los tiene)
porque no hay otras aristas que me permitan conectarlos (si no estaríamos en un ciclo).
$\longrightarrow$ si remuevo vw aumentarían mis componentes conexas
$\longrightarrow$ es puente

$\longrightarrow$) Sup que vw pertenece a un ciclo $C = v\, u_1 u_2 \cdots u_k\, w\, v$
$\longrightarrow \exists$ P y Q caminos distintos de v a w donde $P = vw$
y $Q = v u_1 u_2 \cdots u_k w$
$\longrightarrow$ si remuevo vw de $G \longrightarrow$ sigo teniendo un camino de v a w
$\longrightarrow vw$ no es puente $\longrightarrow$ ABS!

b) Demostrar que si $vw \in E(G) \setminus E(T)$, entonces v es un ancestro de w en T o viceversa.

DFS garantiza que esto NO pase (cross edges)

Sea T un árbol DFS de un grafo conexo G
QVQ si $vw \in E(G) \setminus E(T) \longrightarrow v$ es un ancestro de w en T o viceversa

Si $vw \notin E(T) \longrightarrow \exists$ camino P de v a w en T / su longitud es mayor a 1
$\to$ sup nivel v < nivel w, como en un árbol DFS no hay cross edges
$\to P \subseteq P_w$ siendo P_w el camino de w a $r = w\, u_1 u_2 \cdots u_k\, r$
$\longrightarrow v \in P_w \to v$ es un ancestro de w con $k \geq 2$
Si sup nivel w < nivel de v podemos ver lo análogo

c) Sea $vw \in E(G)$ una arista tal que el nivel de v en T es menor o igual al nivel de w en T. Demostrar que vw es puente si y solo si v es el padre de w en T y ninguna arista de $G \setminus \{vw\}$ une a un descendiente de w (o a w) con un ancestro de v (o con v).

Sea $vw \in E(G)$ / nivel $v \leq$ nivel w en T

QVQ vw es puente $\longleftrightarrow$ v es el padre de w en T y ninguna arista de $G \setminus \{vw\}$ une a un descendiente de w (o a w) con un ancestro de v (o con v)

$\rightarrow$) vw es puente $\rightarrow$ no pertenece a ningún ciclo de G

$\rightarrow \nexists$ e arista / $e \in E(G) \setminus E(T)$ y que una a un descendiente de w (o a w) con un ancestro de v (o con v) (si existiera tendríamos un ciclo)

$\rightarrow \exists!$ camino de v a w en G $\rightarrow$ $vw \in E(T)$ $\rightarrow$ v es padre de w ya que nivel $v \leq$ nivel w

$\leftarrow$) Si v es el padre de w en T y $\nexists$ arista de $G \setminus \{vw\}$ que una a un descendiente de w (o a w) con un ancestro de v (o con v)

$\rightarrow$ vw no pertenece a ningún ciclo de G $\rightarrow$ vw es puente

$\rightarrow$ Esto nos dice que una arista es puente si no la puedo evitar con una backedge

$\rightarrow$ si yo calculo x c/vértice cuántas backedges me permiten puentearlo es decir, cuántas lo cubren puedo saber si su arista es puente o no

$\rightarrow$ clase práctica