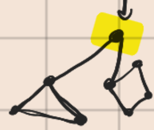
4. Un vértice v de un grafo G es un *punto de articulación* si $G - v$ tiene más componentes conexas que G. Por otro lado, un grafo es *biconexo* si es conexo y no tiene puntos de articulación.

   a) ⋆Demostrar, usando inducción en la cantidad de vértices, que todo grafo de n vértices que tiene más de $(n-1)(n-2)/2$ aristas es conexo. Opcionalmente, puede demostrar la misma propiedad usando otras técnicas de demostración.

Veamos un ejemplo de punto de articulación



grafo de 5 vértices con más de $\frac{(5-1)(5-2)}{2}$ aristas

Veamos lo que es un grafo biconexo

si sacamos un vértice cualquiera la # de componentes sigue siendo 1

(a) Queremos probar por inducción en n que todo grafo de n vértices que tiene más de $(n-1)(n-2)/2$ aristas es conexo

$p(i)$: Sea G, grafo de i vértices que tiene más de $(i-1)(i-2)/2$ aristas $\rightarrow$ G es conexo

Caso base: $p(1)$: Sea G, grafo de $\underbrace{\text{1 vértice que tiene más de 0 aristas}}_{F \rightarrow V/F \equiv V}$ $\rightarrow$ G es conexo

$\rightarrow$ es trivial

Supongamos que vale para n, veamos que vale para n+1.

$p(n+1)$: Sea G un grafo de n+1 vértices que tiene más de $(n)(n-1)/2$ aristas $\rightarrow$ G es conexo

Voy a querer sacar estratégicamente un vértice para usar mi HI

¿Qué tengo? Un grafo G de n+1 vértices con más de $\frac{(n)(n-1)}{2}$ aristas

¿Qué quiero? Probar que es conexo

¿Cómo? Sacando un vértice y viendo que tengo un grafo de n vértices conexo y que si le agrego otro vértice es conexo

↳ puedo estar sacando o no un punto de articulación

No voy a tener XQ me exigen $m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Tenemos 2 casos:

ⓐ Estoy sacando un punto de articulación

ⓑ No estoy sacando un punto de articulación

ⓐ Si v es un punto de articulación → G es un grafo formado por 2 o ① componentes conexas vinculadas a través de v

---

Tengo un grafo G.

Le saco un vértice v cualquiera. Ahora voy a tener un grafo G' con n vértices y $\#E(G)-d(v)$ aristas. Veamos que G' es conexo

$$\rightarrow \#E(G') > \frac{(n)(n-1)}{2} - d(v) \rightarrow \#E(G') > \frac{n^2-n-2d(v)}{\cancel{2}} \overset{?}{>} \frac{(n-1)(n-2)}{\cancel{2}}$$

$$\cancel{n^2} - n - 2d(v) > \cancel{n^2} - 3n + 2$$

$$2n > 2 + 2d(v)$$

$$n > 1 + d(v)$$