DadosSuma

12. Se arrojan simultáneamente n dados, cada uno con k caras numeradas de 1 a k. Queremos calcular todas las maneras posibles de conseguir la suma total $s \in \mathbb{N}$ con una sola tirada. Tomamos dos variantes de este problema.

(A) Consideramos que los dados son **distinguibles**, es decir que si $n = 3$ y $k = 4$, entonces existen 10 posibilidades que suman $s = 6$:

1) 4 posibilidades en las que el primer dado vale 1
2) 3 posibilidades en las que el primer dado vale 2
3) 2 posibilidades en las que el primer dado vale 3
4) Una posibilidad en la que el primer dado vale 4

(B) Consideramos que los dados son **indistinguibles**, es decir que si $n = 3$ y $k = 4$, entonces existen 3 posibilidades que suman $s = 6$:

1) Un dado vale 4, los otros dos valen 1
2) Un dado vale 3, otro 2 y otro 1
3) Todos los dados valen 2

a) Definir en forma recursiva la función $f \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tal que $f(n, s)$ devuelve la respuesta para el escenario (A) (fijado k).

b) Definir en forma recursiva la función $g \colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ tal que $f(n, s, k)$ devuelve la respuesta para el escenario (B).

c) Demostrar que f y g poseen la propiedad de superposición de subproblemas.

d) Definir algoritmos *top-down* para calcular $f(n, s)$ y $g(n, s, k)$ indicando claramente las estructuras de datos utilizadas y la complejidad resultante.

e) Escribir el (pseudo-)código de los algoritmos top-down resultantes.

Nota: Una solución correcta de este ejercicio debería indicar cómo se computa tanto $f(n, s)$ como $g(n, s, k)$ en tiempo $O(nk \min\{s, nk\})$.

a)   0 $n=0$ y $s=0$ → no tengo + dados y nada para sumar

$f(n,s) =$

Tiro el dado 1 ¿cuántos valores puede tomar? De 1 hasta i donde $i = \min\{k, \max_j \{s-j = n-1\}\}$
→ caso A) → puede tomar 4 valores.

Tiro el dado 2 ¿cuántos valores puede tomar? Depende del 1 $\underset{\sim}{s-j} = 1$

Si sale 1 en el 1 → 2 puede ser 1,2,3,4   → $2 = \min\{k, \max_j \{s-j-1 = n-1\}\}$

2 en el 1 → 2 " " 1,2,3   → $2 = \min\{k, \max_j \{s-j-2 = n-1\}\}$ $4-j=1$

3 en el 1 → 2 " " 1,2 $2 = \min\{k, s-3\}$

4 en el 1 → 2 " " 1 $2 = \min\{k, s-4\}$

Tiro D3 depende de 2 y 1

$$f(n,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=s=0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\min\{k,\max_j\{s-j=n-1\}\}} f(n-1,s-i)+1 & \text{c.c} \end{cases}$$

$$\overset{k=4}{f(3,6)} \;1+\sum_{i=1}^{4} f(2,6-i)+1 = \overset{4\text{op}}{f(2,5)}\cancel{+1} + \overset{3\text{op}}{f(2,4)}\cancel{+1} + \overset{2}{f(2,3)}\cancel{+1} + \overset{1}{f(2,2)}\cancel{+1} + 1 \qquad 4\text{op} + 3\text{op} + 2 + 1 = 10$$

$$1+\sum_{i=1}^{4} f(2,5-i) = \underbrace{\underbrace{f(1,4)}_{+4}}_{+1}\cancel{+1} + \underbrace{\underbrace{f(1,3)}_{+3}}_{+1}\cancel{+1} + \underbrace{\underbrace{f(1,2)}_{+2}}_{+1}\cancel{+1} + \underbrace{\underbrace{f(1,1)}_{+1}}_{+1}\cancel{+1} = \cancel{14}\ ¡!$$

¡tengo que sumar 1 acá!

$$f(n,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s=n=0 \lor n=1 \text{ y } s\geq k \\ 1 & \text{si } n=1 \text{ y } s\leq k \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\min\{k,\max_j\{s-j=n-1\}\}} f(n-1,s-i) & \text{c.c} \end{cases}$$

$g(n,s,k)$ = de cuántas formas puedo sumar 6 con 3 dados que toman valores entre 1 y 4 y no me importa el orden en el que salieron

↳ los valores los determina k → 1 dado vale 4 $= k=4$, $n=3$, $s=6$

1 dado vale 3 $= k=3$

1 dado vale 2 $= k=2$

$$g(n, s, k)$$

$$\sum_{i=1} g(n-i,\ s-k,\ \underbrace{k-1}_{\text{se achica de 1 en 1}})$$

$$g(3, 6, 4) = g(2, 2, 3) + g(1, 2, 3)$$