16. Un grafo G es *threshold* si para cada par de vértices $u, v \in V(G)$ tales que $d(u) \leq d(v)$ ocurre que $N(u) \subseteq N(v)$ o $N[u] \subseteq N[v]$.

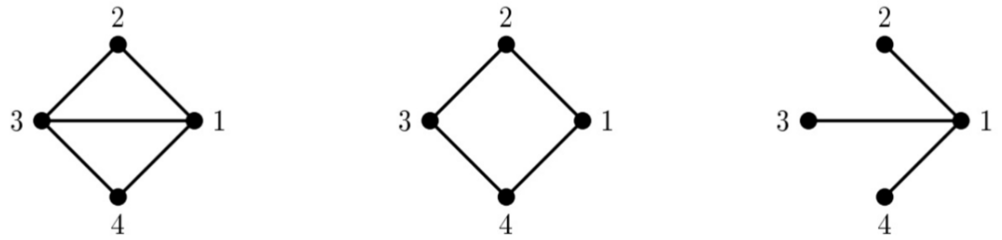

FIGURA 2. *El grafo diamante (izquierda), el grafo C_4 (centro) y el grafo garra (derecha). Los vértices 1 y 3 son mellizos en el diamante porque $N[1] = N[3] = \{1, 2, 3, 4\}$ mientras que 2 y 4 son gemelos porque $N(2) = N(4) = \{1, 3\}$. En la garra, $N(2) = N(3) = N(4) = \{1\}$ y, por lo tanto, 2, 3 y 4 son gemelos, mientras que en C_4 la partición en gemelos es $\{2, 4\}$ y $\{1, 3\}$. El diamante tiene 2 triángulos $\{1, 2, 3\}$ y $\{1, 3, 4\}$ mientras que C_4 y la garra no tienen triángulos. Notar que el diamante es threshold porque $N(2) = N(4)$ y $N[2] \subseteq N[1] = N[3]$; ciertamente $(2, 4, 1, 3)$ es una descomposición threshold del diamante. En cambio, C_4 no es threshold porque tanto $N(1)$ y $N(2)$ como $N[1]$ y $N[2]$ son incomparables por inclusión. Finalmente, la garra es threshold (por qué?).*

a) Demostrar que si G es un grafo threshold, entonces los vértices de grado k son todos mellizos entre sí, o todos gemelos entre sí, para todo $0 \leq k \leq n - 1$.

Sea G un grafo threshold QVQ los vertice de grado k son todos mellizos o gemelos entre sí $\forall\, 0 \leq k \leq n-1$

Si G es threshold $\rightarrow$ para c/par de vértices $u, v \in V(G)$ se tiene que si $d(u) \leq d(v)$ entonces $N[u] \subseteq N[v]$ o si $d(v) \leq d(u)$ entonces $N[v] \subseteq N[u]$

Sea $k / 0 \leq k \leq n-1$ entonces $\forall\, v, w \in V(G) / d(v) = d(w) = k$ se tiene que como G es threshold y $d(v) = d(w)$ es equivalente a decir que $d(w) \leq d(v) \leq d(w)$
$\rightarrow N[w] \subseteq N[v]$ y $N[v] \subseteq N[w] \rightarrow N[v] = N[w] \rightarrow$ son mellizos

Para gemelos considerar $N()$ y listo

b) Demostrar que si G es un grafo threshold, entonces tiene algún vértice de grado 0 o alguno de grado $n-1$.

Sea G threshold QVQ $\exists v \in V(G) / d(v) = 0$ o $\exists w \in V(G) / d(w) = n-1$

Sup que $\nexists v \in V(G) / d(v) = 0 \rightarrow$ no tiene vértice aislado $\rightarrow$ es conexo

Como G es threshold $\rightarrow \forall u, w \in V(G) / d(u) \leq d(w) \rightarrow N[u] \subseteq N[w]$

$\rightarrow$ Tengo un G conexo y threshold $\rightarrow$ Como para $u, w \in V(G) / d(u) \leq d(w) \rightarrow N[u] \subseteq N[w]$