11. ⋆Una empresa de comunicaciones modela su red usando un grafo G donde cada arista tiene una capacidad positiva que representa su *ancho de banda*. El *ancho de banda* de la red es el máximo k tal que G_k es conexo, donde G_k es el subgrafo generador de G que se obtiene de eliminar las aristas de peso menor a k (Figura 2).

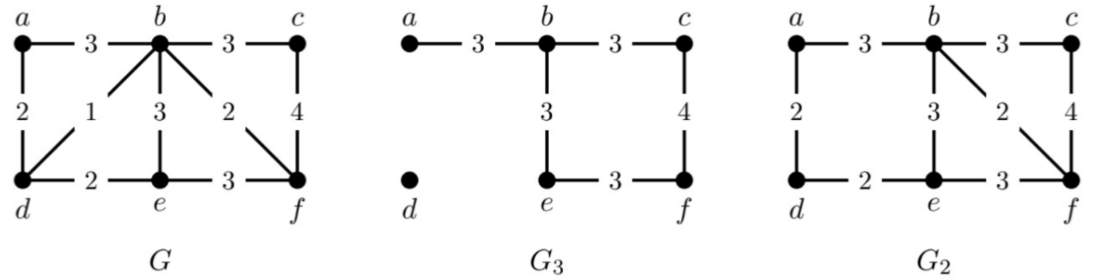

FIGURA 2. *El grafo G tiene ancho de banda 2 porque G_2 es conexo y G_3 no. Por otra parte, el ancho de banda del camino c, b, d es 1 mientras que el ancho de banda del camino c, b, e, d es 2. En general,* $\text{bwd}(c, d) = 2$ *mientras que* $\text{bwd}(a, e) = \text{bwd}(b, f) = 3$.

a) Proponer un algoritmo eficiente para determinar el ancho de banda de una red dada.

La empresa está dispuesta a hacer una inversión que consiste en actualizar algunos enlaces (aristas) a un ancho de banda que, para la tecnología existente, es virtualmente infinito. Antes de decidir la inversión, quieren determinar cuál es el ancho de banda que se podría obtener si se reemplazan i aristas para todo $0 \leq i < n$.

b) Proponer un algoritmo que dado G determine el vector $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tal que a_i es el ancho de banda máximo que se puede obtener si se reemplazan i aristas de G.

a) Tengo un grafo G / $c(vw) > 0$ y $c(vw)$ representa el ancho de banda de un arista.

Ancho de banda red: $\max\{k \in \{c(vw) / vw \in V(G)\} / G_k$ es conexo$\}$

Donde G_k es el subgrafo generador que se obtiene de eliminar las aristas de peso menor a k

Para resolverlo debería buscar el camino maximin entre todos los pares de vértices, ver cuál es el $\min\{c(P) / P$ es maximin $v \to w\}$ y ya está encontré k

Si necesito todos los maximin entre todos los pares de vértices $\to$ árbol generador máximo me los devuelve

T es AG max de (G, c) $\longleftrightarrow$ T es AGM de $(G, -c)$

T es maximin de (G, c) $\longleftrightarrow$ T es minimax de $(G, -c)$

como $\forall vw$ $c(vw) > 0$ no tendremos casos donde haya 0s y val positivos y negativos en simultaneo

1ro Modifico el grafo con el que voy a trabajar

Considero (H, f) / $H = (V(G), E(G))$ y $f: E(G) \to \mathbb{R}$ / $vw \to -c(vw)$

2do Algoritmo

1. Obtengo el AGM de H $O(\min\{n^2, m \log n\})$
2. Busco la arista de H de valor max $O(|E(H)|) = O(n)$ árbol de n vértices
3. Devuelvo c(arista)

Como todos mis costos son negativos, cuando los vuelva a multiplicar por -1 aquellos valores mínimos de H serán máximos de G

(b) El nuevo ancho de banda va a depender de qué aristas se reemplacen
Si en G no reemplazamos todas las de 2 el ancho de banda va a seguir siendo 2
Puedo hacer un diccionario que dado un costo devuelva la cant de aristas con ese costo $\to$ no vamos a hacerlo sobre todos los costos vamos a hacerlo sobre los costos del AGM

$m \geq n-1$ porque G es conexo

Algoritmo $O(\min\{n^2, m \log n\})$

1. Obtengo el AGM de H $\quad O(\min\{n^2, m \log n\})$
2. Busco todos los costos distintos de las aristas de H y armo una cola V multiplicando a c/valor por -1 para obtener los costos de G. $O(n)$ → puedo usar heapify
3. Armo un diccionario d / $d[c(v w)]$ = # de aristas con ese costo.
   Lo armo de tal manera que min{claves de d} = min{V} $\quad O(n+m)$
4. Inicializo el vector res y res[0] = min V $\quad O(1)$
5. Para $i = 1, \dots, n$ $\quad O(n \cdot \log n)$ operaciones sobre una cola de $O(n)$ como T es árbol $E(T) = n-1$ → a lo sumo $n-1$ costos distintos

   Reemplazo una arista. Me fijo si el costo de la que reemplace estaba definido en d.

   Si no estaba res[i] = res[i-1]

   Si estaba decremento en 1 su significado

      Si su significado $-1 \neq 0$ res[i] = res[i-1]

      Si su significado $-1 = 0$

         si costo arista reemplazada = min V

            eliminar min V

         Si cola ≠ vacío → res[i] = min V

         Si no res[i] = +∞

         Si no

            res[i] = res[i-1]