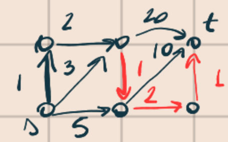
5. Sea G un digrafo con pesos positivos que tiene dos vértices especiales s y t. Decimos que una arista $e \in E(G)$ es *crítica* para s y t cuando $d_G(s,t) < d_{G-e}(s,t)$. Diseñar un algoritmo eficiente que, dado G, determine las aristas de G que son críticas para s y t. **Demostrar** que el algoritmo es correcto. **Ayuda:** pensar en el subgrafo P de G que está formado por las aristas de caminos mínimos de G (el "grafo de caminos mínimos").

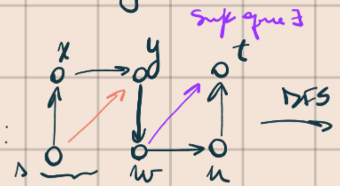
Una arista xy es crítica $\longleftrightarrow$ $d_G(s,t) < d_{G-xy}(s,t)$

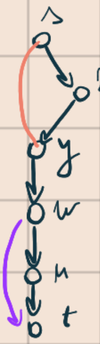
Es decir, si la remuevo estoy removiendo una arista del camino mínimo de s a t tq $\nexists$ otra que conecte los mismos vértices con igual peso. Eso me obliga a considerar un nuevo camino $\oplus$ pesado



$\rightarrow$ las rojas son críticas

digrafo de caminos mínimos





NO son críticas xq $\nexists$! camino para llegar de s a y

Aquellas aristas críticas son las que hacen que se generen $\oplus$ componentes con su remoción en el digrafo de caminos mínimos $\longrightarrow$ son las aristas puente de ese digrafo

Algoritmo

1. Hago Dijkstra desde s en G
2. Armo el digrafo H de caminos mínimos desde s:
3. $vw \in H$ sii $\delta(s,v) + c(vw) = \delta(s,w)$ $\rightarrow$ aristas st-eficientes
4. Calculo las aristas puente de H y me fijo cuáles están en caminos de s a t
5. Devuelvo el conjunto de las aristas puente que están en caminos de s a t

Dem

QVQ que el conjunto de aristas que devuelve mi algoritmo es el conjunto de aristas críticas de G

Aquellas aristas que consideramos críticas son aquellas que una vez removidas aumentan el peso del camino de s a t. Es decir, en $G-e$ $\nexists$ un camino P $s \leadsto t$ / $C_+(P) = \delta_G(s,t)$

Si armo el digrafo de caminos mínimos de G (lo vamos a llamar H) vamos a tener todos los caminos mínimos de s a cualquier vértice, en particular a t. Si yo remuevo una arista e y esa remoción genera dos componentes en H T y T' quiere decir que $\exists!$ camino mínimo entre los vértices de T y de T'. Por lo tanto, si considero $G \setminus e \cup \{vw \in E(G) \setminus E(H) / v \in T$ y $w \in T'\}$ ahora los caminos de T a T' van a ser $\oplus$ pesados que antes (incluso podría ser ∞ si $\nexists vw$) sino esa arista ya hubiera pertenecido a H.

Entonces, las aristas puente de H van a ser las críticas de G.

Basta con buscar las aristas puente que están en caminos de s a t para dar con las que resultan críticas para s y t