Ejercicio 5 *(PotenciaSum)* ★

Suponga que se tiene un método *potencia* que, dada un matriz cuadrada A de orden 4×4 y un número n, computa la matriz A^n. Dada una matriz cuadrada A de orden 4×4 y un número natural n que es potencia de 2 (i.e., $n = 2^k$ para algun $k \geq 1$), desarrollar, utilizando la técnica de dividir y conquistar y el método *potencia*, un algoritmo que permita calcular

$$A^1 + A^2 + A^3 + \ldots + A^n.$$

Procure que el algoritmo propuesto aplique el método *potencia*, sume y haga productos de matrices una cantidad estrictamente menor que $O(n)$ veces.

$k=1 \to A^1 + A^2 = A(I+A)$

$k=n \to A^1 + A^2 + A^3 + A^4 + \cdots + A^n \to$ calcular esto en tiempo $< n$

$A(I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1})$

$A(I + A(I + A + A^2 + \cdots + A^{n-2})$

$A(I + A(I + A(I + A + \cdots + A^{n-3}) \to$ sigue siendo $O(n)$

Quiero dividir a mi problema en subinstancias + chicas y resolverlas

$\to$ problema: $\sum_{i=1}^{n} A^i = A^1 + A^2 + A^3 + A^4 + \cdots + A^n = (A^2 + A^4 + \cdots + A^n) + (A^1 + A^3 + A^5 + \cdots +) =$

$(A^2 + A^4 + \cdots + A^n) + A^1 + A^1(A^2 + A^4 + A^6 + \cdots + A^{n-1})$

$\to 2(A^2 + A^4 + \cdots A^{n-2})$

$n=4 \to A^1 + A^2 + A^3 + A^4 \to 2$ pasos

$n=2 \to A^1 + A^2$

$n=1 \to A^1 \to$ caso base

$\to$ si quiero t log $\to 2^{do}$ caso TM con $b=k$ $a=1$ $\forall k \geq 2$

$\to$ Caso $n=4 \to$ método de la potencia 2 veces $\approx \to A^1 + A^2 + A^3 + A^4$

Como $n = O(k) \to$ voy a dividir n por 2 $\to$ divide

Caso base $n=1 \to A$ $\to$ conquer

¿Combine? $\to O(1)$ o $\log n$

$A^1 + A^2 + A^3 + A^4 = A^1(A^1 + A^2 + A^3) + A^1 = A^2 + A^4 + A^1(A^2) + A^1$

$A^1 + \quad + A^3 \quad = A^1 + A^1A^2$

$A^2 \quad + A^4 \quad = A^2 + A^4$

$A^1+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7+A^8$

$A^2+A^4+A^6+A^8+A_1(A^2+A^4+A^6)+A_1$

$A^8+A^4+A^2+A^1 \rightarrow$ debería recrear los otros valores similarmente

$n=8$ $\quad n=4 \;\; A^1+A^2+A^3+A^4 \quad n=2 \;\; A^1+A^2 \quad n=1 \;\; A_1$

$$\sum_{i=1}^{8} A^i = \sum_{i=1}^{4} A^i + A^4\sum_{i=1}^{4} A^i = \sum_{i=1}^{2} A^i + A^2\sum_{i=1}^{2} A^i + A^4\sum_{i=1}^{2} A^i + \underbrace{A^4A^2}_{A^6}\sum_{i=1}^{2} A^i$$

$$\sum_{i=1}^{4} A^i = \sum_{i=1}^{2} A^i + A^2\sum_{i=1}^{2} A^i \quad \Big| \quad \sum_{i=1}^{2} A^i(1+A^2+A^4+A^6)$$

$$(A^1+A^2)(1+A^2+A^4+A^6)$$

$$\sum_{i=1}^{4} A^i(1+A^4)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{2} A^i(1+A^2)\right)(1+A^4)$$

$$(A^1(1+A^1))(1+A^2)(1+A^4)$$

$$A^1\underbrace{(1+A^1)(1+A^2)}(1+A^4) = \sum_{i=1}^{8} A^i$$

vamos a hacer un algo de DEC con esto

```
PS(A, n)
  res <- 1
  if n = 1 then
    return A
  else
    res <- res * (1 + potencia(A, n/2)) * PS(A, n/2)
  return res
```

$$T(n) = \begin{cases} T(n/2) + \Theta(1) & \text{si } n \neq 1 \\ \Theta(1) & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Como las matrices tienen un tamaño acotado potenciarlas y multiplicarlas es $\Theta(1)$ → pues nos decían que era de 4x4

$\rightarrow$ x 2º caso TM: $T(n) = \Theta(\log n)$