18. Decimos que un digrafo (con *loops*) tiene forma de ρ cuando todos sus vértices tienen grado de salida igual a 1 (Figura 3).

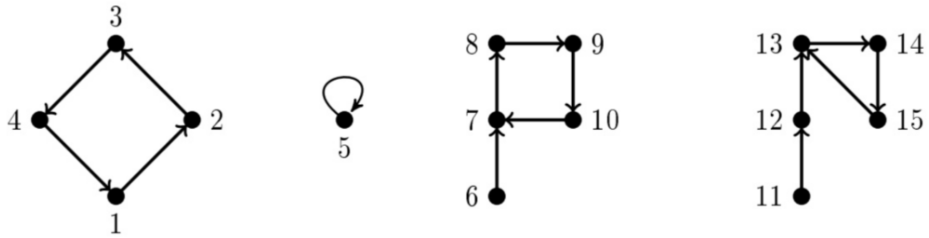

Figura 3. *Un digrafo disconexo con forma de ρ; cada componente conexa tiene forma de ρ.* ***Ayuda:*** *notar que si se sacan los vértices con grado de entrada 0 en forma iterativa, entonces cada componente es un ciclo dirigido.*

a) Demostrar en forma constructiva que si un digrafo es conexo y tiene forma de ρ entonces tiene un único ciclo dirigido. Notar que si $v \to v$ es un *loop*, entonces v, v es un ciclo. Recordar que un digrafo es conexo cuando su grafo subyacente es conexo.

Sea D un digrafo conexo con forma de ρ (todos sus vértices tienen grado de salida igual a 1) QVQ tiene un único ciclo dirigido

Como D es conexo $\rightarrow$ no tiene vértices aislados.
Además, como $\forall v \in V(D)$ $d^{out}(v) = 1$ $\rightarrow$ puedo siempre partir de un vértice y llegar a otro infinitas veces. No obstante $\#V(D)$ es finita $\rightarrow$ D debe tener un ciclo. Ahora como $\forall v \in V(D)$ $d^{out}(v) = 1$ $\rightarrow$ sólo nos podemos mover a un único vértice $\rightarrow$ No podríamos tener otro ciclo del que ya tenemos porque eso implicaría que $\exists$ al menos un $w \in V(D)$ / $d^{out}(w) = 2$. Porque nos debería llevar al ciclo original y al nuevo

b) Diseñar un algoritmo para encontrar todos los ciclos de un digrafo con forma de ρ (no necesariamente conexo). **Ayuda:** notar que los vértices con grado de entrada 0 no están en ciclos; luego, se pueden sacar iterativamente. Demostrar que todos los vértices tienen grado de entrada 1 en el grafo resultante y, por lo tanto, todos los vértices pertenecen a un ciclo.

Si el digrafo no es conexo $\rightarrow$ tiene + de una componente conexa
Como tiene forma de ρ $\rightarrow$ que en c/componente los vértices tienen grado de salida igual a 1

$\rightarrow$ c/componente tiene forma de ρ $\rightarrow$ c/una tiene un único ciclo dirigido.

Podría marcar las distintas componentes de mi grafo y en c/una buscar el ciclo → se puede hacer menos costoso → no hace falta DF

→ Como c/componente tiene un único ciclo podría eliminar los vértices que no corresponden a ningún ciclo → si un vértice no corresponde a un ciclo $d^{in}(v) = 0$.

Algoritmo

O(m+n) 1. Paso de listas de aristas a lista de adyacencias. Necesito N^+ y N^-

O(m+n) 2. Hago DFS para obtener un vector con todos los vértices y las componentes a las que pertenece. Las marcas coinciden con el 1er vértice que agarré de la componente
→ marcas $\in [1, n]$

O(n) 3. Ordeno el vector en función de las marcas. Aprovecho que las marcas están acotadas → bucket sort

O(n) 4. Para c/vértice de c/componente me fijo si su grado de entrada es 0.
Si no es 0 me lo guardo para devolver
Si es 0 no lo guardo.

5. Devuelvo los vértices marcados

Consideremos un período de tiempo circular $[0, T]$ tal que llegado el momento T se vuelve a contabilizar el tiempo 0 (e.g., un día, una semana, etc). Dentro del tiempo $[0, T]$ se encuentran definidas n actividades, la i-ésima de las cuales se desarrolla empezando en el instante s_i y terminando en el instante t_i (si $s_i > t_i$, entonces la actividad contiene el instante $0 = T$). Actividad rara

#actividades / #períodos completos

No hay corte acá

En el problema de selección de actividades periódicas se busca determinar la máxima cantidad de actividades que un agente puede realizar rutinariamente, suponiendo que el agente es capaz de realizar una única actividad en cada instante. Formalmente, el objetivo es determinar la máxima razón x/y para una secuencia circular de actividades $A_1, \ldots, A_x$ que se realiza en y períodos completos cuando A_{i+1} se inicia lo antes posible una vez terminado A_i, para todo $1 \leq i \leq x$ (con $A_{x+1} = A_1$). Considere la siguiente estrategia golosa para decidir qué actividad j conviene elegir si se elige la actividad i: tomar j como una actividad cuyo tiempo de finalización es el primero desde t_i cuando j se empieza después de terminar la actividad i, en un recorrido del tiempo en el sentido de las agujas del reloj.

Definir el digrafo de actividades D que tiene un vértice i por cada actividad y que tiene un arco (arista) $i \to j$ cuando j es la elección golosa que se toma si se elige i.

c) Observar que D es un digrafo con forma de ρ.