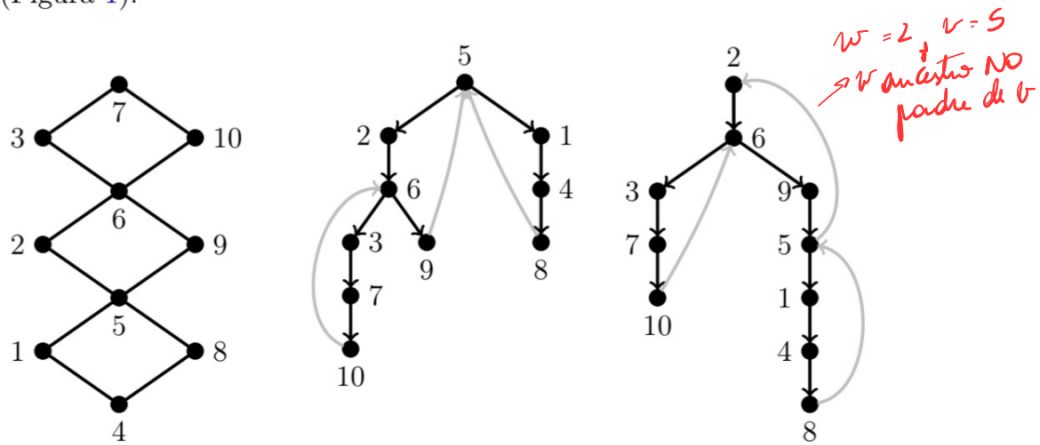


3. Una orientación de un grafo  $G$  es un grafo orientado  $D$  cuyo grafo subyacente es  $G$ . (En otras palabras,  $D$  es una orientación de  $G$  cuando  $D$  se obtiene dando una orientación a cada arista de  $G$ ). Para todo árbol DFS  $T$  de un grafo conexo  $G$  se define  $D(T)$  como la orientación de  $G$  tal que  $v \rightarrow w$  es una arista de  $D(T)$  cuando:  $v$  es el padre de  $w$  en  $T$  o  $w$  es un ancestro no padre de  $v$  en  $T$  (Figura 1).



**FIGURA 1.** En el centro y la derecha se ven dos árboles DFS  $T_1$  y  $T_2$  del grafo  $G$  de la izquierda marcados en negro, junto con las aristas grises que completan  $D(T_1)$  y  $D(T_2)$ .

- a) Observar que  $D(T)$  está bien definido por el Ejercicio 2b).

$\Sigma v, w \in E(G) \setminus E(T) \rightarrow v$  es ancestro de  $w$  en  $T$  o viceversa

- b) Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- I)  $G$  admite una orientación que es fuertemente conexa.
- II)  $G$  no tiene puentes.
- III) para todo árbol DFS de  $T$  ocurre que  $D(T)$  es fuertemente conexo.
- IV) existe un árbol DFS de  $T$  tal que  $D(T)$  es fuertemente conexo.

**Ayuda:** para II)  $\Rightarrow$  III) observar que alcanza con mostrar que la raíz de  $D(T)$  es alcanzable desde cualquier vértice  $v$ . Demuestre este hecho haciendo inducción en el nivel de  $v$ , aprovechando los resultados del Ejercicio 2.

I)  $\rightarrow$  II) Esto es xq  $G$  no a tener un ciclo

- c) Dar un algoritmo lineal para encontrar una orientación fuertemente conexa de un grafo  $G$  cuando dicha orientación exista.

1. Paso de lista de aristas a adyacencias  $O(n+m)$
2. Me fijo si  $G$  tiene puentes con el algoritmo de arista  $O(n+m)$
3. Si tiene devuelvo que no dicha orientación
4. Si no tiene como DFS y me queda con el árbol  $T$   $O(n+m)$
5. Recorro el árbol para quedarme con los hijos de los nodos  $O(n)$   
 $\hookrightarrow$  array de  $n$  pos donde en i pos guardo el hijo

5. Para  $c/vw \in E(T)$  oriento  $v \rightarrow w$  en  $G$   $O(m)$   
 $\forall v \in V(T) / v$  padre de  $w$

6. Para  $c/vw \in E(G) \setminus E(T)$  oriento  $v \rightarrow w$   $\forall w$  que es ancestro  
no padre de  $v$ . Para esto me fijo el nivel de  $w < v$  en mi  
array  $O(m)$