8. Un *sistema de restricciones de diferencias (SRD)* es un sistema $\mathcal{S}$ que tiene m inecuaciones y n incógnitas $x_1, \dots, x_n$. Cada inecuación es de la forma $x_i - x_j \le c_{ij}$ para una constante $c_{ij} \in \mathbb{R}$; por cada par i, j existe a lo sumo una inecuación (por qué?). Para cada SRD $\mathcal{S}$ se puede definir un digrafo pesado $D(\mathcal{S})$ que tiene un vértice v_i por cada incógnita x_i de forma tal que $v_j \to v_i$ es una arista de peso c_{ij} cuando $x_i - x_j \le c_{ij}$ es una inecuación de $\mathcal{S}$. Asimismo, $\mathcal{S}$ tiene un vértice v_0 y una arista $v_0 \to v_i$ de peso 0 para todo $1 \le i \le n$. → por si llega a haber un vértice NO alcanzable

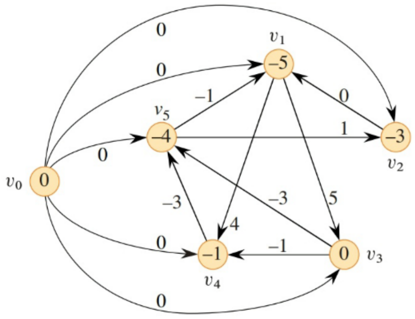
a. Demostrar que si $D(\mathcal{S})$ tiene un ciclo de peso negativo, entonces $\mathcal{S}$ no tiene solución.

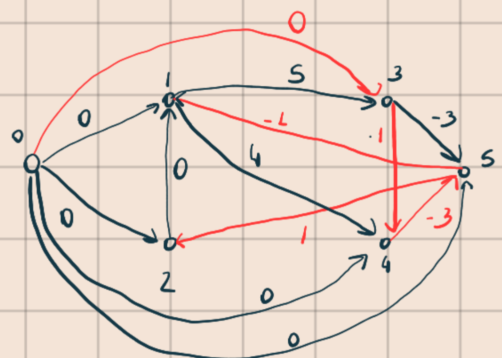
b. Demostrar que si $D(\mathcal{S})$ no tiene ciclos de peso negativo, entonces $\{x_i = d(v_0, v_i) \mid 1 \le i \le n\}$ es una solución de $D(\mathcal{S})$. Acá $d(v_0, v_i)$ es la distancia desde v_0 a v_i en $D(\mathcal{S})$.

c. A partir de los incisos anteriores, proponer un algoritmo que permita resolver cualquier SRD. En caso de no existir solución, el algoritmo debe mostrar un conjunto de inecuaciones contradictorias entre sí.

∃ a lo sumo una inecuación para c/par i,j ya que si tenemos l inecuaciones $x_i - x_j \le k_1, x_i - x_j \le k_2, \dots, x_i - x_j \le k_l$ basta con tomar $x_i - x_j \le \min\{k_1, \dots, k_l\}$

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\le 0,\\
x_1 - x_5 &\le -1,\\
x_2 - x_5 &\le 1,\\
x_3 - x_1 &\le 5,\\
x_4 - x_1 &\le 4,\\
x_4 - x_3 &\le -1,\\
x_5 - x_3 &\le -3,\\
x_5 - x_4 &\le -3.
\end{aligned}$$





¿Por qué se relaciona un SRD con este grafo que tenemos que armar?

Queremos resolver $x_i - x_j \le c_{ij} \equiv x_i \le c_{ij} + x_j$. Vamos a necesitar 2 números para que la desigualdad valga: puede ser positivo o negativo y nos interesan los mínimos que resuelven esto y las demás ecuaciones. Si pienso x_i y x_j respecto de su distancia al 0 quiero los que menos se me alejen para que se puedan cumplir todas las restricciones. Es decir, supongamos que tengo k ecuaciones que involucran a x_i. Voy a obtener + de un valor posible. Va a haber uno tq satisface todas las ecuaciones y que si se es + grande en módulo que él, la inecuación que lo involucra deja de valer. Ese va a ser el más cercano en módulo al 0.
Para resolver el sistema, linkeamos todos los x_i a 0 y calculamos en el grafo que definen las inecuaciones su camino mínimo desde el 0.

ⓐ QVQ si $D(S)$ tiene ciclo de peso negativo $\rightarrow$ S no tiene solución

$$\begin{array}{r} \cancel{x_1}-\cancel{x_2}\leq -2 \\ +\ \cancel{x_3}-\cancel{x_1}\leq -1 \\ \cancel{x_2}-\cancel{x_3}\leq 1 \\ \hline 0 \leq -2 \end{array}$$

$\longrightarrow$ esto es lo que pasa si hay ciclo de peso negativo NO se pueden cumplir a simultáneo

Sea $v_i \dots v_j v_i$ un ciclo de S de peso negativo $\longrightarrow$ $c_+(v_i \dots v_j v_i) < 0$ ahora $c_+(v_i \dots v_j v_i) = \sum c(v_r \to v_l)$ $\longrightarrow$ sumar las cotas de cada inecuación es lo mismo que sumar todas las inecuaciones tanto variable como cotas, lo que define una nueva inecuación $\sum v_r - v_l \leq \sum c(v_r \to v_l)$

$\downarrow$

es una telescópica

$\downarrow$

$0 \leq \sum c(v_r \to v_l) < 0$ $\rightarrow$ $\nexists$ solución para esta inecuación, en particular es un absurdo. Como nuestro sistema era lineal al hacer esto debería haber quedado definida una inecuación valida

ⓑ QVQ si $D(S)$ no tiene ciclos de peso negativo $\longrightarrow$ $\{x_i = d(v_0, v_i) / 1 \leq i \leq n\}$ es una solución de $D(S)$

Tomemos una arista cualquiera $v_j \to v_i \in E(D(S))$. Esta arista representa la inecuación $x_i - x_j \leq c(v_j \to v_i) = c_{ij}$. Si reemplazamos por $\delta(0, v_i)$

$$\delta(v_0, v_i) - \delta(v_0, v_j) \leq c(v_j \to v_i)$$

$$\delta(v_0, v_i) \leq \delta(v_0, v_j) + c(v_j \to v_i)$$

Como $\delta(v_0, v_i)$ es la distancia del camino mínimo de v_0 a v_i siempre va a ser menor o igual que cualquier otro camino mínimo de v_0 a otro vértice v_j + $c(v_j \to v_i)$ ya que es el camino mínimo de v_0 a v_i

$\rightarrow$ vale siempre