13. ⋆El algoritmo de Kruskal (resp. Prim) con orden de selección es una variante del algoritmo de Kruskal (resp. Prim) donde a cada arista e se le asigna una prioridad $q(e)$ además de su peso $p(e)$. Luego, si en alguna iteración del algoritmo de Kruskal (resp. Prim) hay más de una arista posible para ser agregada, entre esas opciones se elige alguna de mínima prioridad.

a) Demostrar que para todo árbol generador mínimo T de G, si las prioridades de asignación están definidas por la función

$$q_T(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \in T \\ 1 & \text{si } e \notin T \end{cases}$$

entonces se obtiene T como resultado del algoritmo de Kruskal (resp. Prim) con orden de selección ejecutado sobre G (resp. cualquiera sea el vértice inicial en el caso de Prim).

ⓐ Vamos a hacer una demostración por invariante y para el algoritmo genérico → total Prim y Kruskal son 2 casos particulares

→ la prioridad $q_T(e)$ nos dice: si estás dudando en cuál agregar xq tenés un empate agregá esta que efectivamente pertenece a un AGM

→ F_i: bosque post-iésima iteración QVQ es un AGM parcial
porque si vale → F_{n-1}: bosque con n-1 aristas → árbol → AGM

Caso base F_0: trivial → puedo extenderlo siempre a AGM

Caso inductivo: QVQ vale para i+1 dado que vale para i

Sea vw la arista agregada a F_i, sea T un AGM que extiende a F_i
que sé que ∃ porque F_i es AGM parcial x lo que puedo extenderlo a AGM
y U la c.c de F_i / $v \in U$

Si $q_T(vw) = 0 \to vw \in E(T) \to$ puedo extender a F_{i+1} a $T \to F_{i+1}$ es AGM parcial

el peso no menor que el de una con prio 0

Si $q_T(vw) = 1 \to vw \notin E(T) \to \exists\, xy \in E(T) /\ x \in U$ e $y \notin U$
Como vw es candidata → es segura y además $c(vw) \leq c(xy)$

Si considero $T' = T \setminus \{xy\} \cup \{vw\}$ → T' es árbol generador y

$c_+(T') \leq c_+(T)$ $\quad$ T' es AGM

$c(vw) \leq c(xy)$

→ puedo extender F_{i+1} a T' → F_{i+1} es un AGM parcial

→ Puedo obtener cualquier AGM T de la ejecución de este algoritmo

(es como ir emparchando T)

b) Usando el inciso anterior, demostrar que si los pesos de G son todos distintos, entonces G tiene un único árbol generador mínimo.

Si los pesos de G son todos distintos en el fondo la prioridad NO importa

Supongo que G no tiene un único AGM

no comparten 1 arista

Sean T y T' AGMs de G / $T' \neq T$ y $\# E(T') \cap E(T) = n-2$

→ $c_+(T) = c_+(T')$ pero $\exists e \in E(T) / e \notin E(T')$ → $\exists e' \in E(T') / e' \notin E(T)$

→ $T' = T \setminus \{e\} \cup \{e'\}$ → $c(T) = c(T) - c(e) + c(e')$

$c(e) = c(e')$ → ¡ABS! G tenía todos pesos de arista distintos

ⓐ Rehecho medio así nomás

Como el cjto $E(T)$ de un AGM es tal que $C_T(T)$ es mínimo, Kruskal al ser un algoritmo Greedy siempre va a elegir las candidatas de menor peso esperando que sea el óptimo global. Por lo tanto, si ponemos una prioridad se van a elegir siempre las candidatas de un AGM T