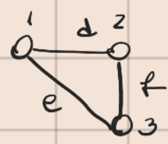
13. Decimos que una matriz cuadrada, simétrica y positiva $M \in \mathbb{N}^2$ es de *Floyd-Warshall (FW)* si existe un grafo G tal que M es el resultado de aplicar FW a G. Describir un algoritmo para decidir si una matriz M es FW. En caso afirmativo, el algoritmo debe retornar un grafo G con la mínima cantidad de aristas posibles tal que el resultado de FW sobre G sea M. En caso negativo, el algoritmo debe retornar alguna evidencia que pruebe que M no es FW.

Todos los resueltos que vi consideran a M como matriz de costos

Como M es sdp $M_{ii} \geq 0$

$$M = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \longrightarrow$$



Que sea cuadrada $\Rightarrow$ representa relaciones entre nodos

simétrica $\Rightarrow$ ir de i a j cuesta lo mismo que volver

$\hookrightarrow$ podemos usar un grafo G

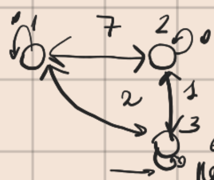
def pos $\Rightarrow M_{ii} \geq 0 \longrightarrow$ NO tiene ciclos de peso negativo

Si M es FW $\Rightarrow \delta(i,j) = \delta(i,k) + \delta(k,j) \wedge \underline{M_{ii} = 0}$

para algún — se codifica acá

NO es FW si $\exists k' \in \{1, \dots, n\} \;/\; M(i,j) > \delta(i,k') + \delta(j,k')$

$\Rightarrow$ Puedo armar G y detectar si M es FW en un mismo algoritmo



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$ puedo usar la propia M para determinar si es FW ya que NO tengo δ

esta M es válida

pero NO es FW

$M(1,2) > M(1,3) + M(3,2)$

$7 > 2 + 1$

$V(G) = \{1, \dots, n\}$ $E(G) = \emptyset$

For $k = 1, \dots, n$

  For $i = 1, \dots, n$

    For $j = 1, \dots, n$

      Si $M(i,j) > M(i,k) + M(k,i)$

        Interrumpir los ciclos y mostrar que $\exists$ otro camino mínimo k-interno

      Si $M(i,i) > 0$

        Retornar que $\exists$ un ciclo de peso positivo que empieza y termina en i y que eso NO es correcto

      Si $M(i,j) = M(i,k) + M(k,j)$

        Agregar (i,k) y (k,j) a $E(G)$ → esto está bien y NO hace cosas raras.

Pensemos en $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $d(1,3) = 2$
$d(1,3) = d(1,2) + d(2,3)$

Nos devuelve este grafo que después FW devuelve esta matriz

Si $k = n = i = j$, es decir, NO cortamos antes devolver G

Funciona bien