

## Unión Vs Junta

7. La *unión*  $G \cup H$  de dos grafos  $G$  y  $H$  es el grafo con  $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$  y  $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$ . Es decir,  $G \cup H$  se obtiene uniendo  $G$  con  $H$  sin agregar aristas. Por otra parte, la *junta*  $G + H$  de  $G$  y  $H$  es el grafo que se obtiene de  $G \cup H$  agregando todas las aristas  $vw$  posibles entre un vértice  $v \in V$  y otro vértice  $w \in V(H)$ . Decimos que  $G$  es un *grafo unión* (resp. *junta*) si existen  $G_1$  y  $G_2$  tales que  $G = G_1 \cup G_2$  (resp.  $G = G_1 + G_2$ ).

- Demostrar en forma directa que  $G$  es un grafo unión si y solo si  $G$  es desconexo.
- Demostrar en forma directa que  $G$  es un grafo junta si y sólo si  $\bar{G}$  es un grafo unión.
- Concluir que  $G$  es un grafo junta si y sólo si  $\bar{G}$  es desconexo.

Ⓐ  $G$  es un grafo unión  $\iff G$  es desconexo

$\rightarrow$   $G$  es un grafo unión  $\rightarrow G = G_1 \cup G_2 \rightarrow V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$   
 $y E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$   
 $\rightarrow$  dado  $v_1 \in V(G_1)$  y  $v_2 \in V(G_2)$   $\nexists$  un camino entre  $v_1$  y  $v_2$  ya que cuando unamos  $E(G)$  unimos  $E(G_1)$  y  $E(G_2)$  pero no agregamos aristas entre  $V(G_1)$  y  $V(G_2)$   $\rightarrow G$  es desconexo

$\leftarrow$   $G$  es desconexo  $\rightarrow \exists v, w \in V(G) / \nexists$  camino entre  $v$  y  $w$   
 $\rightarrow$  puedo considerar  $G_1 =$  Componente conexas de  $G$  que tiene a  $v$  (puede ser más de uno)  $\rightarrow$  subgrafo  
 $G_2 = G \setminus G_1$   
 ya que  $v$  y  $w$  pertenecen a dos subgrafos de  $G$  distintos que no están conectados sino existiera un camino entre  $v$  y  $w$

$\rightarrow V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  y  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$

Ⓑ  $G$  es un grafo junta  $\iff \bar{G}$  es un grafo unión

$\rightarrow$   $G$  es un grafo junta  $\rightarrow G$  es conexo  $\rightarrow \bar{G}$  es desconexo  $\rightarrow \bar{G}$  es un grafo unión

$\downarrow$   $\downarrow$   
 no necesariamente vale la nula  $\downarrow$  como  $G$  es junta  $\downarrow$

$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$   
 $\cup$  aristas posibles entre  $G_1$  y  $G_2$   
 $\rightarrow \forall v, w \in G \exists$  un camino

←)  $\bar{G}$  es un grafo unión  $\rightarrow \bar{G} = \bar{G}_1 \cup \bar{G}_2 \rightarrow V(\bar{G}) = V(\bar{G}_1) \cup V(\bar{G}_2)$   
 $y E(\bar{G}) = E(\bar{G}_1) \cup E(\bar{G}_2)$

$\rightarrow V(G) = V(\bar{G})$  y  $E(G) = \{vw / vw \notin E(\bar{G})\} =$   
 $\{vw / vw \in E(G_1) \cup E(G_2)\} \cup \{\text{aísta entre todos } V(G_1) \text{ y } V(G_2)\}$

$\rightarrow G = G_1 + G_2 \rightarrow \text{a junta}$