12. Dado un grafo G con capacidades en sus aristas, el *ancho de banda* $\mathrm{bwd}_G(C)$ de un camino C es la mínimo de entre las capacidad de las aristas del camino (Figura 2). El *ancho de banda* $\mathrm{bwd}_G(v, w)$ entre dos vértices v y w es el máximo entre los anchos de banda de los caminos que unen a v y w (Figura 2). Un árbol generador T de G es *maximin* cuando $\mathrm{bwd}_T(v, w) = \mathrm{bwd}_G(v, w)$ para todo $v, w \in V(G)$. Demostrar que T es un árbol maximin de G si y solo si T es un árbol generador máximo de G. Concluir que todo grafo conexo G tiene un árbol maximin que puede ser computado con cualquier algoritmo para computar árboles generadores máximos. **Ayuda:** para la ida, tomar el AGM T' que tenga más aristas en común con T y suponer, para obtener una contradicción, que T' tiene una arista e' que no está en T. Luego, buscar una arista e en T que no este en T' tal que $(T' - e') + e$ sea también AGM para obtener la contradicción. Para la vuelta, tomar v y w en el AGM T' y considerar la arista xy de peso mínimo en el único camino de T' que los une. Luego, mostrar que xy tiene un peso al menos tan grande como cualquier otra arista que une las componentes conexas de $T' \setminus \{xy\}$ que contienen a v y w.

Sea T un árbol generador QVQ

todo camino de T es maximin $\longleftrightarrow$ T es AGMax

$\rightarrow$) Sea T un árbol generador de G / todo camino de T es maximin en G
QVQ T es AGMax

Sea T' un AGMax / $\#(E(T') \cap E(T))$ es el máximo posible

Sup que $T \neq T'$

$\rightarrow \exists$ al menos 1 $e \in E(T) / e \notin E(T') \rightarrow$ Sean e_1 y $e_2 \in V(G) / (e_1, e_2) = e \rightarrow$
$\exists P_{T'}\ e_1 \rightsquigarrow e_2 / e \notin P_{T'} \rightarrow \exists e' \in E(T') / e' \in P_{T'}\ e_1 \rightsquigarrow e_2$ y $e' \notin E(T)$
Como e es maximin $C(e) \geq C(P_T) \rightarrow C(e) \geq C(e')$
min
a priori no se si los caminos de T son maximin así que vale

Si considero $T'' = T' - e' \cup e \rightarrow T''$ es AGMax $\rightarrow$

Es árbol ya que va a ser conexo y $\#E(T'') = n-1$, es generador
$V(T'') = V(G)$ y $E(T'') \subseteq E(G)$ y $C_T(T'') \geq C_T(T')$
tanto T y T' eran generadores
$C_T(T') - C(e') + C(e) \geq C_T(T')$
$C(e) \geq C(e')$

$\longrightarrow T''$ es un AGMax / $\#(E(T'') \cap E(T)) = 1 + \#(E(T) \cap E(T'))$

$\rightarrow$ ¡ABS! T' era AGMax / $\#(E(T) \cap E(T'))$ era mare
$T' = T$

$\longleftarrow$) Sea T un AGMax QVQ todo camino de T es maximin en G

Vamos a querer ver que el hecho de haber maximizado la suma de los costos de las aristas hace que el costo min de cualquier camino de T sea mayor o igual que el de cualquier camino que tomemos de G

Sea P_T $v_1 \rightsquigarrow v_2$ / $v_1, v_2 \in E(T) \rightarrow C_{min}(P_T) = C(e)$ $e \in E(T)$

Si consideramos $T \setminus \{e\} \rightarrow$ Ahora $T = V \dot\cup W$ con V, W componentes
Es decir, si quitamos e nuestro grafo deja de ser conexo y tenemos 2 componentes V, W / e incidía en $v \in V$ y $w \in W$

$\rightarrow$ Como G es conexo $\exists xy$, $x \in V$ e $y \in W$ y pertenece a un camino P $v_1 \rightsquigarrow v_2$ en G

$\rightarrow$ si considero $T' = T - \{e\} \cup \{xy\}$ tengo un árbol generador /

$C(T') \leq C(T)$

$C(xy) \leq C(e)$
$\downarrow$
T es AGMax

$\rightarrow$ Luego si vale eso para cualquier $e_1 e_2 \in E(G)$ / $e_1 \in V$ y $e_2 \in W$
$\rightarrow$ si P es un camino entre v y w en G

$$C_{min}(P) \leq C(xy) \leq C(e) = C_{min}(P_T)$$

$\longrightarrow$ Todo camino de T es maximin