CicloCompartido

5. ⋆Sean P y Q dos caminos distintos de un grafo G que unen un vértice v con otro w. Demostrar en forma directa que G tiene un ciclo cuyas aristas pertenecen a P o Q. **Ayuda:** denotar $P = v_0, \ldots, v_p$ y $Q = w_0, \ldots, w_q$ con $v_0 = w_0 = v$ y $v_p = w_q = w$. Definir explícitamente cuáles son los subcaminos de P y Q cuya unión forman un ciclo.

QVQ G tiene un ciclo cuyas aristas pertenecen a P o Q.

Como P y Q son caminos $\longrightarrow$ no tienen vértices repetidos

Podemos escribir a P y a Q como $P = v_0, \ldots, v_p$ y $Q = w_0, \ldots, w_p$ con $v_0 = w_0 = v$ y $v_p = w_p = w$

Como son caminos distintos $\rightarrow \exists\, i', 0 \leq i' < p \,/\, v_{i'} = w_{i'}$ pero $v_{i'+1} \neq w_{i'+1} \rightarrow$ es decir, en algún momento, a pesar de ambos haber comenzado en v, se "separan".

$\rightarrow$ No obstante, ambos caminos terminan en el mismo vertice

$\rightarrow \exists\, j', i' < j' \leq p \,/\, w_{j'} = v_{j'}$. Es decir pueden volver a juntarse en w o antes.

$\rightarrow \exists$ una familia I de índices $I = \{i'+d \,/\, d \in \mathbb{N}$ y $i'+d < j'\} \,/\, \forall k \in I\; v_k \neq w_k$

$\rightarrow$ A partir de un i', P y Q tienen 2 subcaminos distintos que se reencuentran en j'

$\therefore$ si defino $C = v_{i'}, v_{i'+1}, \ldots v_{j'} \cup w_{j'-1}, w_{j'-2}, \ldots, w_{i'}$ tengo un ciclo ya que $v_{i'} = w_{i'}$