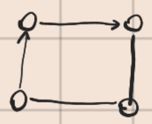
9. Un *grafo mixto* es una tripla $G = (V, E, A)$ tal que (V, E) es un grafo, (V, A) es un grafo orientado y E y A no tienen aristas en común. (En otras palabras, G se obtiene del grafo $(G, E \cup A)$ orientando las aristas de A.) El grafo mixto G es *euleriano* si se pueden orientar las aristas de E a fin de que el grafo orientado resultante tenga un circuito que pase por todas sus aristas exactamente una vez. Es sabido que un digrafo es euleriano si y sólo si el digrafo es conexo y $d^+(v) = d^-(v)$ para todo $v \in V(G)$.

   a) Modelar el problema de decidir si un grafo mixto es euleriano como un problema de flujo.

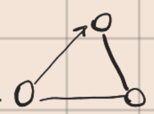
   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

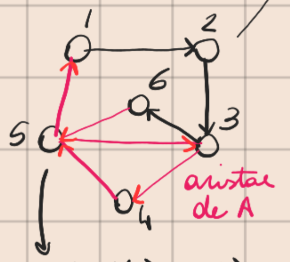
   c) Demostrar que el modelo es correcto.

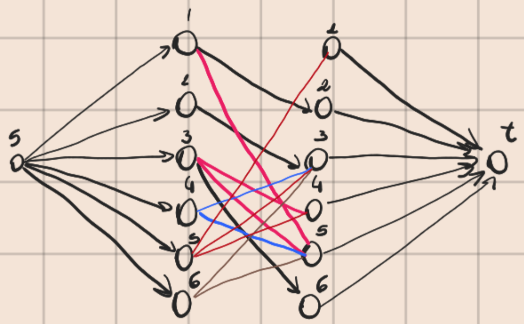
   d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.



→ Es euleriano ←







si d $d(v) \equiv 0\,(2)$

Podría llegar a ∃ una forma de hacer que $d^+(v) = d^-(v)$. Si NO, no

Ahora esto debe pasar para todo vértice

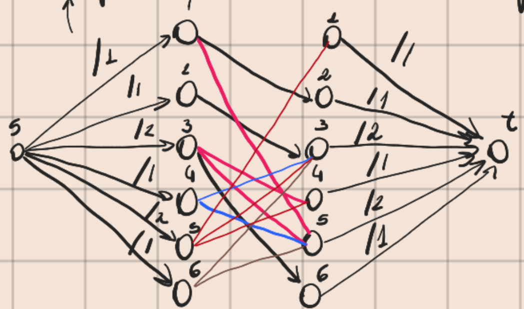
→ Si alguno no cumple ya está :(

En este caso veamos capacidades. Teniendo en cuenta lo de recién, $\forall\, v \in V(G)$

si $d(v) \equiv 0\,(2) \Rightarrow d^+(v) = d(v)/2 = d^-(v)$.

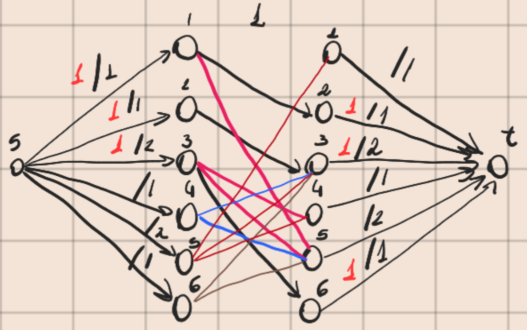
Cuánto puede salir

Cuánto puede entrar

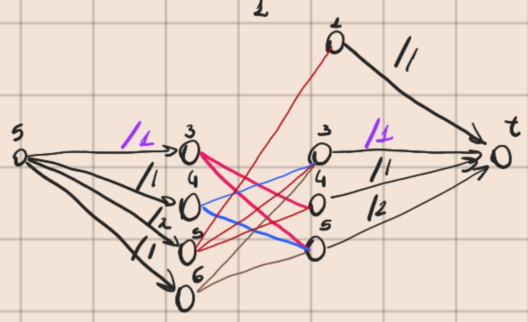


que arista conecta v_i, v_j

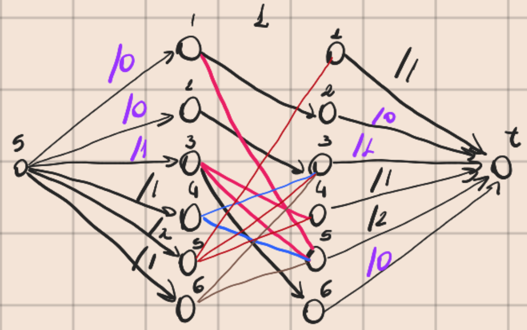
Ahora, podemos aprovechar que tenemos las aristas orientadas de A y asignar valores de flujo a donde corresponda



Podríamos simplificar y quitar aristas de A y actualizar las capacidades según su $d^+(v)$ y $d^-(v)$

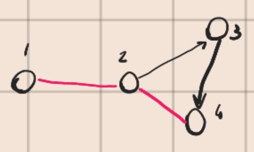


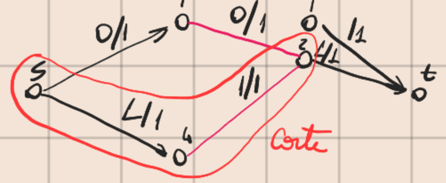
Podríamos dejar algo así ↑ o así ↓



Me parece que tiene + sentido el 1ro o el que consideraba todo completo

Veamos un caso de grafo NO euleriano





→ No puede pasar que el corte mínimo NO sea s o que de s salgan aristas con flujo 0 y a t lleguen con flujo 0

ⓐ Definamos el modelo

es decir vértices / podamos orientar aristas para que sea Euleriano

Red N : $V(N) = \{ \text{vértice} / d^+(v) \neq \underbrace{d(v)/2}_{A} \neq d^-(v) \} \cup \{ \overbrace{\text{el mismo conjunto duplicado}}^{A'} \} \cup \{s,t\}$

$E(N) = \{ s \to v_i / v_i \in A \} \cup \{ v_j \to t / v_j \in A' \} \cup \{ v_i \to v_j / v_i v_j \in E, v_i \in A, v_j \in A' \}$

$$c(e) = \begin{cases} d(v)/2 - d^+_{(V,A)}(v) & \text{si } e = s \to v_i \\ 1 & \text{si } e = v_i \to v_j \\ d(v)/2 - d^-_{(V,A)}(v) & \text{si } e = v_j \to t \end{cases}$$

restamos si ya ∃ a ∈ A / sale de él o entra a él

Las capacidades van a representar

* $d(v)/2 - d^+_{(V,A)}(v)$: cuántas aristas deben salir o entrar de ese vértice / $d^+(v) = d^-(v) = d(v)/2$

* 1 : la orientación de la arista de E

El flujo va a representar cuántas aristas vamos a necesitar para que $d^+(v) = d^-(v)$ y cuáles serán

La solución ∃ ⟷ el corte mínimo = S

→) ∃ solución → es Euleriano → $d^+(v) = d^-(v)$ $\forall v \in V(G)$ y es conexo ($d^-(v) \neq 0$, $d^+(v) \neq 0$)

→ si asigno flujos de acuerdo a los grados correspondientes del Euleriano → corte mín

Termina siendo s XQ las aristas $s \to v_i$ se saturan y en la red residual si hago BFS desde s $\nexists$ otro vértice alcanzable

$\leftarrow$) Supongamos que el corte mínimo no es $s \to$ $\exists$ una arista $s \to v_i$ / no queda saturada $\to$ $d^+(v) \neq d^-(v)$ o $d^+(v) = d^-(v) = 0$ $\Rightarrow$ no es Euleriano $\to$ $\nexists$ solución

Complejidad : $n = O(n)$

$m = \#E + 2n$

$F = n \sum \underset{E}{\underset{\shortparallel}{d^-(v)}} = nE$

$n|E|^2 + 2n^2|E|$

$O(\min\{n(|E|+2n)^2, (|E|+2n)(n|E|)\}) = n|E|^2 + 2n^2|E|$

$n(|E|^2 + 4n^2 + 2n|E|$

$n|E|^2 + 4\underbrace{n^3} + 2n^2|E|$

* si esto n chico queda igual
* si es grande conviene la otra