Problemas de modelado I: caminos disjuntos en un grafo

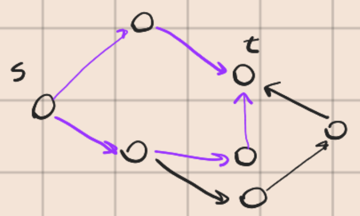
5. Sea G un digrafo con dos vértices s y t.

   a) Proponer un modelo de flujo para determinar la máxima cantidad de caminos disjuntos en aristas que van de s a t.

   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

   c) Demostrar que el modelo es correcto.

   d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.



$\exists$ 2 caminos disjuntos para este grafo

Voy a querer un conjunto de aristas / no haya 2 aristas que incidan en un mismo vértice $\longrightarrow$ podemos pensarlo como matching

Modelado:

Red $N = (V(G), E(G))$

f de capacidad: $c(e) = 1 \quad \forall e \in G$

* Le asignamos capacidad 1 a todas las aristas para que en el caso de que $\exists$ 2 o más aristas incidentes a un mismo nodo el flujo termine "seleccionando" 1. Es decir, el flujo solo va poder pasar por 1.
* Las unidades de flujo van a indicar si la arista pertenece o no a un camino disjunto y el valor de flujo máximo la # de caminos disjuntos

¿El modelo es correcto?

Demostremoslo.

Supongamos que tenemos nuestra red N con sus capacidades tal como modelamos.

Supongamos que $\exists$ P y Q caminos de s a t / que comparten 1 arista $v \to w$

No van a ser disjuntos.

Pero por como modelamos, si a v entra 1 unidad de flujo entonces x ley de conservacion del flujo solo puede salir 1 unidad. Por lo tanto, va a pasar por o $w \to p \in P$ o $w \to q \in Q$. Pero NO por las 2 a la vez.
$\Rightarrow$ va a contabilizar solo 1 de los 2
Podemos pensar y extender el argumento para + aristas y + de 2 caminos.

(d) $F = \sum_{In(t)} f(t) - \sum_{out(t)} f(t) = \sum_{In(t)} f(t) \leq n \cdot 1$ xq es la suma entrar n aristas de valor de flujo 1

$\Rightarrow$ Complejidad $O(\min\{nm^2, mF\}) = O(mn)$