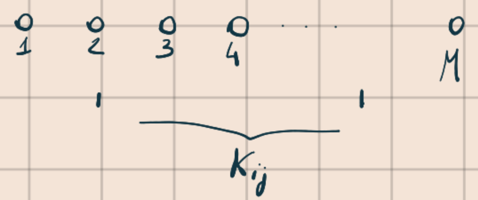
10. Tenemos a n clientes de un supermercado $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ y queremos asignarle a cada uno, una caja para hacer fila. Las cajas están ordenadas en una línea y numeradas de izquierda a derecha de la 1 a la M y se encuentran separadas por pasillos. Durante el proceso de asignación algunos clientes se pelean entre sí y son separados por seguridad. Si dos clientes c_i y c_j pelean, los guardias les dicen que tienen que ponerse en filas distintas que se encuentren separadas por $K_{ij} > 0$ pasillos intermedios, para que no se vuelvan a pelear. Notar que cuando seguridad separa una pelea naturalmente hay un cliente que queda más a la izquierda (cerca de la caja 1) y el otro más a la derecha (cerca de la caja M). Con la restricción de no volver a acercarse, ese orden ya no puede cambiar. A su vez hay pares de clientes c_k y c_m que son amigos y no queremos que haya más que $L_{km} = L_{mk} \geq 0$ pasillos intermedios entre las filas de c_k y c_m. ¿será posible asignarlos a todos?

a. Modelar el problema utilizando un sistema de resticciones de diferencias (no olviden justificar).

b. Proponer un algoritmo polinomial que lo resuelva.

c. ¿Qué complejidad tiene el algoritmo propuesto? Para la respuesta, tener en cuenta la cantidades m_1 y m_2 de amistades y peleas, respectivamente.

Nota: K_{ij} de alguna manera captura la intensidad de la pelea y L_{ij} captura (inversamente) la intensidad de la amistad. Es posible que dos amigos se peleen y en ese caso hay que cumplir las dos condiciones. Si eso pasa solo puede haber soluciones si $K_{ij} \leq L_{ij}$. Para todo par de clientes sabemos si son amigos o si se pelearon, la intensidad de cada relación. Además, para aquellos clientes que se pelearon, conocemos cuál cliente quedó a la izquierda y cuál a la derecha.
Ayuda: Si tenemos n variables x_i en un SRD y queremos acotarlas entre A y B ($x_i \in [A, B]$) podemos agregar una variable auxiliar z, sumar restricciones del tipo $A \leq x_i - z \leq B$ y luego correr la solución para que z sea 0.



Tenemos n clientes → sabemos si: son amigos
: se pelearon y quién quedó a izq y quién a der

→ si c_i y c_j se pelean queremos $dist(c_i, c_j) = K_{ij}$

→ si c_i queda + cerca del 1 y c_j + cerca de M → $c_j \geq K_{ij} + c_i$
→ $c_j - c_i \geq K_{ij}$

→ $c_i - c_j \leq -K_{ij}$

→ si c_i y c_j son amigos si c_i está más cerca del 1 → $c_j - c_i \leq L_{ij}$

→ si son amigos y se pelean $K_{ij} \leq c_j - c_i \leq L_{ij}$

Armemos un SRD

* Sabemos quiénes se pelearon y quienes quedaron a izq y a derecha
* Quienes son amigos
* Todos van a estar entre 1 y M

→ Suponiendo que C_i siempre representan quienes estan + cerca de 1 y C_j de M

$$\rightarrow \begin{cases} z - c_i \leq 1 \\ c_i - z \leq M \\ c_j - c_i \leq L_{ij} & \text{si son amigos} \\ c_i - c_j \leq -K_{ij} & \text{si estan peleados} \end{cases}$$

y vemos que formar 1 ciclo :

→ Vértices $= \{ c_i \,/\, 1 \leq i \leq n \} \cup c_0$

Aristas $= \underbrace{\{\text{restricciones de posición}\}}_{2n = n} \cup \underbrace{\{\text{peleas}\}}_{m_1} \cup \underbrace{\{\text{amistades}\}}_{m_2} \cup \underbrace{\{\text{las de } c_0 \text{ a c/}c_i\}}_{n} = O(n + m_1 + m_2)$

→ Bellman-Ford resuelve en $O(|V||E|) = O(n(n + m_1 + m_2)) = O(n^2 + m_1 n + m_2 n)$