

Unicidad de Grados

8. Sean $G_2 = K_2$ y $G_{n+1} = \overline{G_n} \cup K_1$ para todo $n \geq 2$. Demostrar por inducción que G_n tiene un único par de vértices de igual grado.

Sean $G_2 = K_2$ y $G_{n+1} = \overline{G_n} \cup K_1 \quad \forall n \geq 2$

$n=2$

$n=3$

$n=4$

$n=5$

$n=6$



Sea $p(n)$: G_n tiene un único par de vértices de igual grado

QVQ vale $\forall n \geq 2$

Caso base $i=2 \rightarrow G_2 = K_2 \rightarrow$ trivial

Caso inductivo: supongamos que vale para $p(n-1)$ veamos que vale para $p(n)$

$G_n = \overline{G_{n-1}} \cup K_1$, $p(n)$: G_n tiene un único par de vértices de igual grado

$G_n = \overline{G_{n-1}} \cup K_1 \rightarrow G_{n-1}$ tiene un único par de vértices de igual grado

$\rightarrow \overline{G_{n-1}}$ tiene un único par de vértices del mismo grado ya que al complementar a G_{n-1} , $E(\overline{G_{n-1}}) = \{vw / vw \notin E(G_{n-1})\}$

$$\rightarrow d_{\overline{G_{n-1}}}(v) = \underline{n} - d_{G_{n-1}}(v)$$

es la máxima # de aristas que pueden salir de un nodo

→ sup que $v, w' \in V(G)$ non la misma / $d_G(v) = d_G(w')$

$$\rightarrow d_{\overline{G_{n-1}}}(v) = n - d_{G_{n-1}}(v) = n - d_{G_{n-1}}(w') = d_{\overline{G_{n-1}}}(w')$$

$$\rightarrow d_{\overline{G_{n-1}}}(v) = d_{\overline{G_{n-1}}}(w')$$

Vamos que son únicas

$$\rightarrow \forall k, j / k \in V(G_{n-1}), j \in V(G_{n-1}) \text{ y } d_{G_{n-1}}(j) \neq d_{G_{n-1}}(k) \rightarrow d_{\overline{G_{n-1}}}(k) \neq d_{\overline{G_{n-1}}}(j)$$

$$\text{Donde } \sup d_{\overline{G_{n-1}}}(k) = d_{\overline{G_{n-1}}}(j) \rightarrow n - d_{G_{n-1}}(k) = n - d_{G_{n-1}}(j) \\ \rightarrow d_{G_{n-1}}(k) = d_{G_{n-1}}(j)$$

→ $\overline{G_{n-1}}$ tiene un único par de vértices de igual grado

→ $G_{n-1} \cup K_1 \rightarrow$ tiene un único par de vértices de igual grado porque no agregamos ninguna arista

→ $G_{n-1} \cup K_1 \rightarrow$ tiene un único par de vértices porque como a todo nodo se le va a agregar una arista voy a sumar 1 a todos los grados
→ se van a mantener las desigualdades y la igualdad

→ G_n tiene un único par de nodos del mismo grado