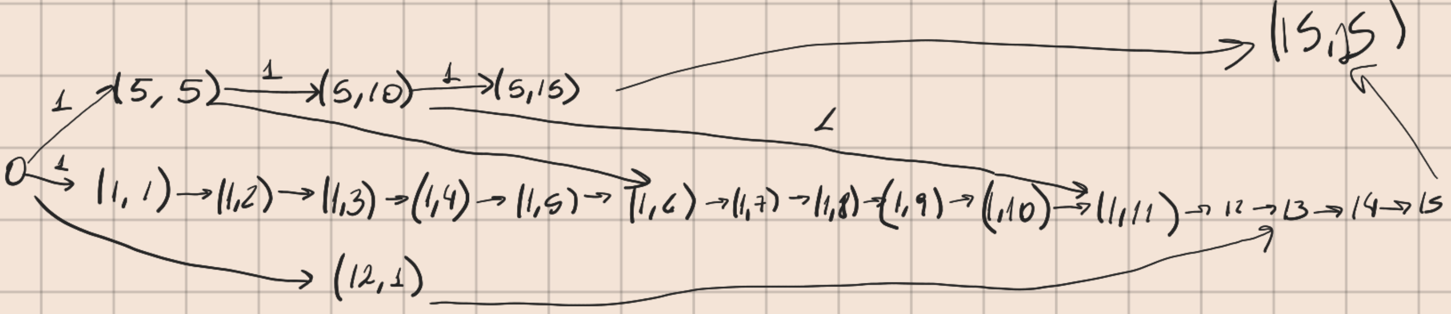
17. En el *problema del vuelto* tenemos una cantidad ilimitada de monedas de distintos valores $w_1, \ldots, w_k$ y queremos dar un vuelto v utilizando la menor cantidad de monedas posibles (ver Teórica 2). Por ejemplo, si los valores son $w_1 = 1$, $w_2 = 5$, y $w_3 = 12$ y el vuelto es $v = 15$, entonces el resultado es 3 ya que alcanza con dar 3 monedas de \$5. Modelar este problema como un problema de camino mínimo e indicar un algoritmo eficiente para resolverlo. El algoritmo sobre el modelo debe tener complejidad $O(vk)$. **Opcional:** discutir cómo se relaciona este modelo con el algoritmo de programación dinámica correspondiente.

Queremos minimizar la # de monedas



Así, podría hacerse BFS

Función PD → $m(K,i) \begin{cases} 0 & K=0 \\ \infty & K\neq 0 \\ \min\{m(K-M[i], i+1)+1,\ m(K, i+1)\} \end{cases}$

contabiliza de a 1 si agrega

Tengo 2 dificultades → minimizar # monedas y NO pasarme del vuelto

Vamos a usar mi modelo y además vamos a resolver el problema para un conjunto M de monedas / sea posible dar el vuelto exacto

Digrafo G

$V(G) = \{ (\overbrace{w_i}^{\text{valor}}, \overbrace{\sum_{i=1}^{j} w_i}^{\text{suma vuelto}}) / 1 \leq j \leq v \} \cup \{(0,0), (5,0)\}$

$E(G) = \{ (v\,u) / v.\text{valor} + u.\text{valor} = u.\text{sumaVuelto} \} \cup \{ (v\,u) / v = (0,0) \}$
$\cup \{ vu / v \neq (0,0) \wedge v.\text{sumaVuelto} = 15,\ u = (15,15) \}$

$C: E(G) \longrightarrow \mathbb{R}$, $C(e) = 1 \ \forall e \in E(G)$

$\# V(G) = O(v k) = \# E(G)$

¿Por qué? Sup que nos dan $v = \varepsilon$, si tuviéramos $w_i = 1$ entonces tendríamos ε vértices $(1, \Sigma)$ y $\varepsilon + 3$ aristas. Como los valores $w_j \geq 1$ y son enteros la # de vértices con $(w_j, \Sigma) \leq \varepsilon$ mismo sus aristas $\leq \varepsilon + 3$. Por lo tanto puedo acotar $\# V(G)$ y $\# E(G)$ por $O(k . \varepsilon)$

Va a ser un DAG porque si tuviéramos ciclos serían de peso positivo y nos pasaríamos de v. Entonces como eso no pasa NO va a haber ciclo.

$\Rightarrow$ Con este modelo simplemente BFS resuelve en $O(v k)$