Práctica 6: Flujo en redes

Compilado: 28 de junio de 2024

Propiedades de los flujos en redes

1. Para cada una de las siguientes sentencias sobre el problema de flujo máximo en una red N: demostrar que es verdadera o dar un contraejemplo.

   a) Si la capacidad de cada arista de N es par, entonces el valor del flujo máximo es par.

   b) Si la capacidad de cada arista de N es par, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es par.

   c) Si la capacidad de cada arista de N es impar, entonces el valor del flujo máximo es impar.

   d) Si la capacidad de cada arista de N es impar, entonces existe un flujo máximo en el cual el flujo sobre cada arista de N es impar.

   e) Si todas las aristas de N tienen capacidades racionales, entonces el flujo máximo es racional.

2. Para todo $F \in \mathbb{N}$, construir una red con 4 vértices y 5 aristas en la que el método de *Ford y Fulkerson* necesite F iteraciones en peor caso para obtener el flujo de valor máximo (partiendo de un flujo inicial con valor 0).

3. Determinar la complejidad del algoritmo de Edmonds y Karp para encontrar el flujo máximo de una red N cuando:

   a) no hay información acerca de las capacidades de las aristas de N.

   b) todas las aristas de N tienen capacidad a lo sumo $q \ll n$.

   c) el flujo máximo de N tiene un valor $F \ll mn$.

4. Proponer un algoritmo lineal que dada una red N y un flujo de valor máximo, encuentre un corte de capacidad mínima de N.

Problemas de modelado I: caminos disjuntos en un grafo

5. Sea G un digrafo con dos vértices s y t.

   a) Proponer un modelo de flujo para determinar la máxima cantidad de caminos disjuntos en aristas que van de s a t.

   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

   c) Demostrar que el modelo es correcto.

   d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

Problemas de modelado II: asignación

6. En el pueblo de *Asignasonia* las fiestas de casamiento son muy peculiares y extrañamente frecuentes. Las invitaciones a la fiesta nunca son personales sino familiares: cada persona invitada asiste siempre con todes sus familiares solteres, a quienes se les reservan mesas especiales de solteres. Además, hay una regla no escrita que establece un límite c_{ij} a la cantidad de solteres de la familia i que pueden sentarse en la mesa j. Esta forma de festejar es la que, aparentemente, aumenta la cantidad de casamientos futuros. Desafortunadamente, el esfuerzo que implica mantener viva esta tradición está llevando a que varias parejas eviten el compromiso marital. Es por esto que la intendencia de Asignasonia requiere un algoritmo que resuelva el problema de asignación de les solteres a sus mesas.

   a) Proponer un modelo de flujo que dados los conjuntos $F = \{f_1, \ldots, f_{|F|}\}$, $M = \{m_1, \ldots, m_{|M|}\}$ y $C = \{c_{ij} \mid 1 \le i \le |F|, 1 \le j \le |M|\}$ determine una asignación que respete las tradiciones sabiendo que:
      - la familia i esta formada por f_i personas solteres,
      - la mesa j tiene m_j lugares disponibles para solteres, y
      - en la mesa j solo pueden sentarse c_{ij} solteres de la familia i.

   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

   c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

7. Sean $r_1, \ldots, r_m$ y $c_1, \ldots, c_n$ números naturales. Se quiere asignar los valores de las celdas de una matriz de $m \times n$ con números naturales de forma tal que la i-ésima fila sume r_i y la i-ésima columna sume c_i.

   a) Modelar el problema de asignación como un problema de flujo.

   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

   c) Demostrar que el modelo es correcto.

   d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

8. Dado un ordenamiento $v_1, \ldots, v_n$ de los vértices de un digrafo D, se define la *secuencia digráfica* de D como $(d^-(v_1), d^+(v_1)), \ldots, (d^-(v_n), d^+(v_n))$. Dada una secuencia de pares d, el problema de realización de d consiste en encontrar un digrafo D cuya secuencia digráfica sea d.

   a) Modelar el problema de realización como un problema de flujo.

   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

   c) Demostrar que el modelo es correcto.

   d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp. La cota debe estar expresada en función de n y debe ser lo suficientemente ajustada.

9. Un *grafo mixto* es una tripla $G = (V, E, A)$ tal que (V, E) es un grafo, (V, A) es un grafo orientado y E y A no tienen aristas en común. (En otras palabras, G se obtiene del grafo $(G, E \cup A)$ orientando las aristas de A.) El grafo mixto G es *euleriano* si se pueden orientar las aristas de E a fin de que el grafo orientado resultante tenga un circuito que pase por todas sus aristas

exactamente una vez. Es sabido que un digrafo es euleriano si y sólo si el digrafo es conexo y $d^+(v) = d^-(v)$ para todo $v \in V(G)$.

a) Modelar el problema de decidir si un grafo mixto es euleriano como un problema de flujo.
b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.
c) Demostrar que el modelo es correcto.
d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

Problemas de modelado III: transporte de objetos

10. En la próxima cumbre internacional de cuestiones importantes se recibirán periodistas de todo el mundo en un hotel que antaño era moderno pero hoy es simplemente lujoso y antiguo. Como antes no se usaban muchos artefactos eléctricos, solo algunos tomacorrientes de cada tipo fueron instalados en la sala de la cumbre. El tiempo pasó y los artefactos eléctricos se empezaron a utilizar mucho más, además de que surgieron nuevos tipos de tomacorrientes. Antes de que comience la cumbre, se recolectó la información de los dispositivos que van a traer les periodistas a fin de adquirir los adaptadores necesarios, los cuales se comprarán en un fabricante particular. Cada adaptador de este fabricante tiene una forma de entrada y una forma de salida. Estos adaptadores se pueden encadenar tanto como se quiera, lo cual es bueno porque la fábrica no vende todos los tipos de adaptadores existentes. Por suerte, sí tienen la posibilidad de fabricar una cantidad ilimitada de los adaptadores que venden.

    a) Proponer un modelo de flujo para minimizar la cantidad de dispositivos que se quedan sin corriente eléctrica sabiendo:
    - que les periodistas traerán d_i dispositivos que usan un tomacorrientes de cada tipo i,
    - que la sala principal tiene t_i tomacorrientes de cada tipo i,
    - cuáles son los pares ij de entradas y salida de los adaptadores vendidos por la fábrica.

    Preguntar complejidad y capacidad ∞

    b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.
    c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

11. Una de las aficiones de Carle en su juventud fue la colección de figuritas en el colegio. Junto a sus compañeres compraban paquetes de figuritas de "Italia 90" para conocer a las estrellas del momento. Cada paquete traía cuatro figuritas a priori desconocidas, razón por la cual Carle y sus compañeres tenían figuritas repetidas después de algunas compras. Para completar el álbum más rápidamente, Carle y sus compañeres intercambiaban figuritas a través del protocolo "late-nola". Este protocolo consiste en que cada una de dos personas intercambian una figurita que elles tienen repetida por una que no poseen aún. Siendo tan inteligente, Carle pronto se dio cuenta que le podía convenir intercambiar algunas de sus figuritas por otras que ya tenía, a fin de intercambiar estas últimas. De esta forma, si Carle ya tenía copias de una figurita, igualmente podía conseguir copias adicionales para intercambiar con otres compañeres que no tuvieran la figurita.

    a) Proponer un modelo de flujo máximo para maximizar la cantidad de figuritas no repetidas que Carle puede obtener a través del intercambio con compañeres, teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

- Carle conoce todas las figuritas repetidas (y la cantidad de repeticiones) de cada compañere.
- Todes les compañeres intercambian primero con Carle, antes de intercambiar entre elles.
- Todes les compañeres utilizan el protocolo "late-nola" para intercambiar con Carle, mientras que Carle ya sabe que le podría convenir obtener figuritas que ya tiene.

b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

Flujo máximo de costo mínimo

12. Una *red con costos* es una red en la que cada arista e tiene una capacidad $c(e)$ y un costo $q(e) \geq 0$. Dada una red con costos N, el *problema de flujo máximo con costo mínimo* consiste en encontrar el flujo máximo f que minimice $\sum_{e \in E(N)} f(e) * q(e)$. Demostrar que el algoritmo de Ford y Fulkerson, en el que el camino de aumento elegido tiene costo mínimo, encuentra un flujo máximo de costo mínimo. Determinar qué algortimo se utilizar para elegir el camino de aumento y calcular la complejidad del algoritmo resultante (tener en cuenta que el algoritmo requiere a lo sumo $O(nU)$ iteraciones, donde $U = \text{máx}_{e \in E(N)} c(e)$).

13. Dado un grafo G, un *matching* de G es un subconjunto de aristas sin vértices en común. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito —donde (A, B) es una bipartición— y $w : E \to \mathbb{N}$ una función que asigna pesos a las aristas de G. El *problema de matching bipartito de peso mínimo* consiste en hallar el matching $M \subseteq E$ de máximo cardinal posible en G que además tenga costo total mínimo.

    a) Modelar el problema de matching bipartito de peso mínimo como un problema de flujo máximo de costo mínimo.

    b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo, cada restricción de capacidad y cada costo por unidad de flujo.

    c) Demostrar que el modelo es correcto.

    d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo del Ejercicio 12.

14. Dado un digrafo completo y pesado D el *problema de viajante de comercio* (TSP por sus siglas en inglés: *traveling salesman problem*) consiste en encontrar un ciclo que recorra todos los vértices de D y tenga costo mínimo. Queremos resolver el caso particular de TSP en el cual $|V(D)| = 2n$ y sabemos en qué orden deben recorrerse los nodos "pares". Es decir, además de D, el input contiene una secuencia $w_2, w_4, \ldots, w_{2n}$ de vértices; el output debe ser un ciclo $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$ tal que $v_{2i} = w_{2i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

    a) Modelar el TSP como un problema de matching bipartito de peso mínimo en grafo G.

    b) Dar una interpretación a cada matching de G como representante de un ciclo de D.

    c) Demostrar que el modelo es correcto.

    d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo del Ejercicio 13.

Ejercicios adicionales y opcionales

15. Una *red con demandas* es una red en la que cada arista e tiene una capacidad $c(e)$ y una demanda $0 \leq d(e) \leq c(e)$. Dada una red con demandas, el problema de flujo asociado consiste en encontrar un flujo válido f tal que $d(e) \leq f(e) \leq c(e)$ para todo arco e. Para resolver el problema de flujo en una red N con demandas se puede resolver un problema de flujo en una red N' sin demandas. La red N' se obtiene agregando una nueva fuente s' y un nuevo sumidero t' a N, una arista $t' \to s'$, y las aristas $s \to v$ y $v \to t$ para todo $v \in V(N)$. La función de capacidad c' de N' es tal que:

    I. $c'(s' \to v) = \sum_{u \in V} d(u \to v)$ para todo $v \in V(N)$,

    II. $c'(v \to t') = \sum_{w \in V} d(v \to w)$ para todo $v \in V(N)$,

    III. $c'(u \to v) = c(u \to v) - d(u \to v)$ para todo arco $e \in E(N)$,

    IV. $c'(t \to s) = \infty$.

    Demostrar que N tiene un flujo factible si y sólo si el flujo máximo de N' satura todas las aristas que salen de s' (y todas las que entran a t'). **Sugerencia:** muestre cómo se puede obtener un flujo factible de N a partir de un flujo máximo de N' y viceversa.