13. Dado un grafo G, un *matching* de G es un subconjunto de aristas sin vértices en común. Sean $G = (A \cup B, E)$ un grafo bipartito —donde (A, B) es una bipartición— y $w : E \to \mathbb{N}$ una función que asigna pesos a las aristas de G. El *problema de matching bipartito de peso mínimo* consiste en hallar el matching $M \subseteq E$ de máximo cardinal posible en G que además tenga costo total mínimo.

   a) Modelar el problema de matching bipartito de peso mínimo como un problema de flujo máximo de costo mínimo.

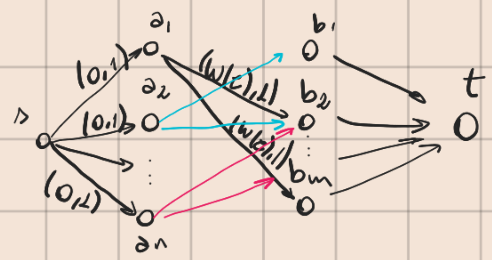
   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo, cada restricción de capacidad y cada costo por unidad de flujo.

   c) Demostrar que el modelo es correcto.

   d) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo del Ejercicio 12.

ⓐ Podemos modelarlo como un problema de matching de flujo con la adición del costo

$\Rightarrow$ Para c/arista tendríamos $(q(e), c(e))$ donde $c(e) = 1 \ \forall e$ y $q(e) = 0$ $\forall e \,/\, e = s \to a \vee e = b \to t$



Modelo

Red $N \,/\, V(N) = \{s, t\} \cup A \cup B$

$E(N) = \{s \to a \,/\, a \in A\} \cup \{b \to t \,/\, b \in B\} \cup \{a \to b \,/\, ab \in E, a \in A, b \in B\}$

$$(q(e), c(e)) = \begin{cases} (0,1) & \text{si } e = s \to a \\ (q(e), 1) & \text{si } e = a \to b \\ (0,1) & \text{si } e = b \to t \end{cases}$$

Unidades de flujo x arista : aristas del matching

Restricción de capacidad : Cuántas veces puedo elegir ese vértice y arista $\to$ por eso es 1.

Peso x unidad de flujo : 0 : ponemos 0 ya que NO son aristas de E y no queremos que influya en el peso de las de E ya que queremos la de peso mínimo en E

$q(e)$: costo de la arista de E

(c) QVQ $\exists$ solución $\leftrightarrow$ $\exists$ un flujo factible

$\rightarrow$) $\exists$ un matching M de máximo cardinal y costo total mínimo

$\rightarrow$ puedo pasar una unidad de flujo a las aristas de M en mi red y como $f(e)=1 \Rightarrow 0 \leq f(e) \leq c(e)$

Además, si $v \to w \in M \Rightarrow f(s \to v) = 1 = f(v \to w) = f(w \to t)$ y $\nexists$ $v \to u \subset M$ xq. es matching $\Rightarrow$ se cumple la ley de conservación de flujo

$\rightarrow \exists$ flujo factible

$\leftarrow$) $\exists$ flujo factible $\rightarrow$ puedo maximizarlo con el algoritmo anterior $\rightarrow$ x correctitud de ese algo encontré el flujo máximo de costo mínimo

$\rightarrow$ como lo modelamos como problema de matching encontramos un matching de costo mínimo

(d) $n = |A| + |B| + 2$

$m = |E| + |A| + |B|$

$F = |B|$

$$\rightarrow O\Big(\underbrace{(|A|+|B|)}_{n}\underbrace{|B|}_{F}\big(\underbrace{|E|+|A|+|B|}_{m} + \underbrace{(|A|+|B|)}_{n}\log \underbrace{(|A|+|B|)}_{n}\big)\Big)$$