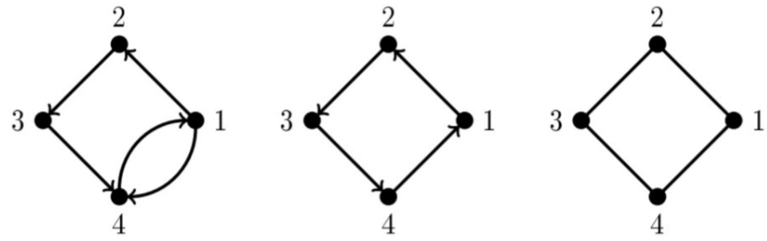
3. ⋆Un *grafo orientado* (ver Figura 1) es un digrafo D tal que al menos uno de $v \to w$ y $w \to v$ no es una arista de D, para todo $v, w \in V(D)$. En otras palabras, un grafo orientado se obtiene a partir de un grafo no orientado dando una dirección a cada arista. Demostrar en forma constructiva que para cada n existe un único grafo orientado cuyos vértices tienen todos grados de salida distintos. **Ayuda:** aprovechar el ejercicio anterior y observar que el absurdo no se produce para un único grafo orientado.

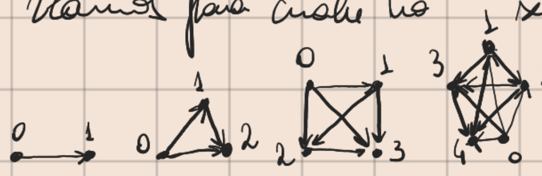


(a) (b) (c)

FIGURA 1. *(a) Un digrafo que no es grafo orientado porque tanto $1 \to 4$ como $4 \to 1$ son aristas; (b) un grafo orientado que se puede obtener dando orientaciones a las aristas del grafo (c).*

QVQ para $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists!$ grafo orientado / sus vértices tienen todos grados de salida distintos

Sabemos que $\forall$ G: grafo NO trivial, G tiene al menos dos vértices del mismo grado → Veamos para cuáles no se cumple el ¡ABS!



→ los G subyacentes son G completos

Pasa que si tengo un grafo completo lo puedo orientar de la siguiente forma:
Sup que $V(G)=\{v_0,\dots,v_{n-1}\}$ sin pérdida de generalidad. Como G es completo $N[v_i]=V(G)$ $\forall\, 0\le i\le n-1$ entonces dado un v_i siempre tengo $n-1$ aristas que me llevan a otro vértice. Por lo tanto si para i para cada v_i oriento $(n-1)-i$ aristas que salen de él y llegan a otro $v_j / j>i$ todos mis vértices tienen distinto grado de llegada. En particular $d^{in}(v_i)=i$.

Sea $n \in \mathbb{N} \rightarrow \exists!$ grafo orientado / $\#V(G) = n$ y donde los vértices tienen todos grados de salida distintos

Dado $n \in \mathbb{N}$, $\exists!$ grafo completo G de n vértices $\longrightarrow$ lo puedo orientar como arriba. Llamo D a esta orientación

Sup que $V(G) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ sin pérdida de generalidad. Como G es completo $N[v_i] = V(G)$ $\forall\, 0 \leq i \leq n-1$ entonces dado un v_i siempre tengo aristas que me llevan a otro vértice. Por lo tanto si para cada oriento $(n-1) - i$ aristas que salen de él y llegan a otro $v_j / j > i$ todos mis vértices tienen distinto grado de llegada. En particular $d^{in}(v_i) = i$ y $d^{out}(v_i) = (n-1) - i - 1$

Falta ver que esta orientación es única.

Sup que $\exists$ otra orientación D' no isomorfa que cumple lo mismo

$\longrightarrow$ Como es NO isomorfo $\rightarrow$ no puede ocurrir que sus vértices tengan una # de aristas distintas que salen de c/u $\rightarrow$ sale la misma # de aristas de al menos 2 vértices $\rightarrow \exists\, v_i, v_j \in V(D) / d^{in}(v_i) = d^{in}(v_j)$

$\rightarrow$ ABS!