# 幂迭代求解最大特征值

## 理论推导

假设矩阵A的个特征值按模的大小排列为，其相应的特征向量为：，并且是线性无关的，于是初始向量可表示为特征向量的线性组合，即

(1)

则

(2)

由于

(3)

根据公式(2)和(3)可知

(4)

那么令

(5)

根据以上公式可知

(6)

可写为

(7)

（1）讨论单根情况

若，因为则必有

(8)

当k充分大时

(9)

同理可得

(10)

(11)

其中为向量中的最大项，并且和对应的j值相同。由此，最大特征值得证。实际计算中，为了避免计算过程中出现绝对值过大的情况，通常在每步迭代时，将向量“归一化”。

归一化：

在实际计算种，用按模最大的分量来除的各个分量，从而得到归一化向量，并令。

因为，实际使用的公式为

(12)

当k充分大时，有

(13)

证明：，

设置初始变量，那么

(14)

由公式(9)可知

(15)

(16)

(17)

故得证。

由公式(14),(15)可知

(18)

(19)

由于进行过归一化，则，因此得证。

(2) 多重根情况

情况(1)只局限于存在单个最大特征值，但往往存在多个模相等的特征值，如，而，由(7)可知

(20)

当k充分大时，幂法仍收敛，但对于不同的初始向量，得到的特征向量是不同的。特别，若，。在这种情况下，由于

(21)

由21知当k趋向于无穷大时，的变化规律存在规律性摆动，通过公式(8)~(11)类似求解过程，解得（和中括号内容相同，若为中括号内容不同无法比较）

(22)

同样的，根据公式(12)进行归一化操作，得到

(23)

由公式(18)可知

(24)

由此可证。

## 算法思想

由于情况(2)比较特殊，因此针对情况(2)设计算法，如此可解决情况(1)和情况(2)两种问题。

设求解大小为的方阵特征值：

Stage 1：定义初始向量，通常设，设定迭代次数。

Stage 2：令，并计算在中最大的项，计算，迭代次数增加一次。

Stage 3：计算，若k>2且，得出最大特征值为，否则跳至stage2。

代码：[click here](main.cpp)

## Demo

输入矩阵

此矩阵特征值为。

