四元数的插值

插值的意义

假设有两个旋转变换 $q0 = [\cos(\theta 0), \sin(\theta 0)\mathbf{u}0]$ 和 $q1 = [\cos(\theta 1), \sin(\theta 1)\mathbf{u}1]$，我们 希望找出一些中间变换 qt，让初始变换 $q0$ 能够平滑地过渡到最终变换 $q1$。

t 的取值可 以是$t \in [0,1]$.当t=0时qt 等同于初始变换$q0$，而t=1时qt 等同于最终变换$q1$

插值

初始Slerp

$$q_t = Slerp(q_0, q_1; t) = (q_1 q_0^*)^t q_0$$

将四元数转换为向量进行插值

由于我们关心的旋转的角度实际上可以从delta q的实部看出，所以我们这里计算实部

$$\begin{aligned}
\Delta q &= q_1 q_0^* \\
&= [\cos(\theta_1),\ \sin(\theta_1)\mathbf{u}_1][\cos(\theta_0),\ -\sin(\theta_0)\mathbf{u}_0] \\
&= [\cos(\theta_0)\cos(\theta_1) - (\sin(\theta_1)\mathbf{u}_1)\cdot(-\sin(\theta_0)\mathbf{u}_0),\ \ldots] \\
&= [\cos(\theta_0)\cos(\theta_1) + (\sin(\theta_1)\mathbf{u}_1)\cdot(\sin(\theta_0)\mathbf{u}_0),\ \ldots]
\end{aligned}$$

如果将q0和q1看作是两个四维向量，则实部的结果正好是这两个**向量点乘的结果q0•q1**

因为q0和q1都是单位四元数，所以点乘的结果是这两个四元数在4D空间中夹脚的余弦值，即$\boldsymbol{q0 \cdot q1 = \cos(\theta)}$

结论就是：**当 $q1$ 与 $q0$ 之间的夹角为 θ 时，旋转的变化量正好是 2θ**

如果我们在圆 上有一个单位四元数 q_t，使得它与 q_0 的夹角为 $t\theta$，与 q_1 的夹角为 $(1-t)\theta$，那么我 们就能保证在 3D 空间中，它相对于 q_0 的旋转变化量为 $2t\theta$，相对于 q_1 的旋转变化 量为 $2(1-t)\theta$.

于是现在就可以套用向量的插值公式对两个四元数进行插值了

Lerp, Nlerp, Slerp

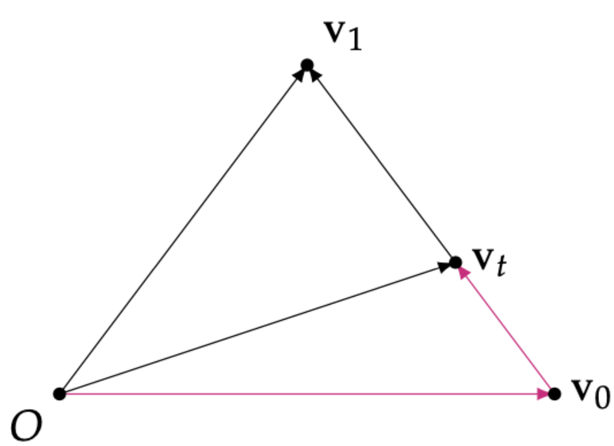
我们都希望将中间向量 $\mathbf{v}_t$ 写为初始向量 $\mathbf{v}_0$ 和最终向量 $\mathbf{v}_1$ 的线性组合

$$\mathbf{v}_t = \alpha\mathbf{v}_0 + \beta\mathbf{v}_1$$

其中，系数 α 与 β 都是 t 的函数，不同的插值方法只是拥有不同的系数而已

Lerp(Linear Interpolation)线性插值

Lerp会沿着一条线进行插值



$$\begin{aligned}\mathbf{v}_t = Lerp(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, t) &= \mathbf{v}_0 + t(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) \\ &= (1-t)\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1\end{aligned}$$

当t=0时，$\mathbf{v}t = (1-0)\mathbf{v}0+0\mathbf{v}1 = \mathbf{v}0$；当$t$=1时，$\mathbf{v}t = (1-1)\mathbf{v}0+1\cdot\mathbf{v}1 = \mathbf{v}1$.

如果将 Lerp 的结果应用到单位四元数上，我们就能得到：

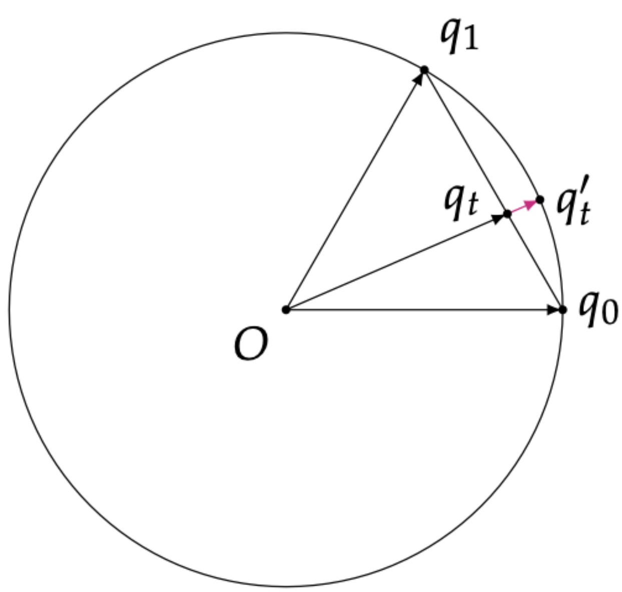
Lerp公式

$$q_t = Lerp(q_0, q_1, t) = (1-t)q_0 + tq_1$$

注意，因为沿着一条线进行插值，所以插值出来的四元数并不是单位四元数

Nlerp(Normalized Linear Interpolation)正规化线性插值

只要将 qt 除以它的模长 $\lVert qt \rVert$ 就能够将其转化为一个单位四元数了



即先对向量进行插值，再进行正规化 (Normalization)

与Lerp不同，Nlerp的两个输入向量必须是单位向量，否则插值出来的结果就不会经过初始和最终向量

Nlerp公式

$$\mathbf{v}_t = Nlerp(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, t) = \frac{(1-t)\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1}{\|(1-t)\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1\|}$$

$$q_t = Nlerp(q_0, q_1, t) = \frac{(1-t)q_0 + tq_1}{\|(1-t)q_0 + tq_1\|}$$

v是向量，q是四元数

问题

当需要插值的弧比较大时，**v***t* 的角速度会有显著的变化

在同等时间内，**v***t* 扫过的角度是不同的.**v***t* 扫过的速度(或者说角 速度)首先会不断地增加，到 t = 0.50 之后会开始减速，所以 Nlerp 插值**不能保证均匀的角速度**.

Slerp(Spherical Linear Interpolation)球面线性插值

对角度进行线性插值

$$\theta_t = (1-t)\cdot 0 + t\theta = t\theta$$

因为对角度线性插值直接是让向量在球面上的一个弧上旋转，所以又称球面线性插值 (Spherical Linear Interpolation)

等价公式

$$q_t = Slerp(q_0, q_1; t) = (q_1 q_0^*)^t q_0$$

推导

由

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_0 \cdot (\alpha \mathbf{v}_0 + \beta \mathbf{v}_1)$$

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_t = \alpha(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0) + \beta(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1)$$

得到

$$\cos(t\theta) = \alpha + \beta \cos(\theta)$$

又由

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_1 \cdot (\alpha \mathbf{v}_0 + \beta \mathbf{v}_1)$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_t = \alpha(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_0) + \beta(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1)$$

得到

$$\cos((1-t)\theta) = \alpha \cos(\theta) + \beta$$

于是可以**联立求解得到**

alpha和belta

$$\beta = \frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}$$

α =

$$= \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin(\theta)}$$

于是最终得到

Slerp公式

$$\mathrm{v}_t = Slerp(\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, t) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin(\theta)}\mathrm{v}_0 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}\mathrm{v}_1$$

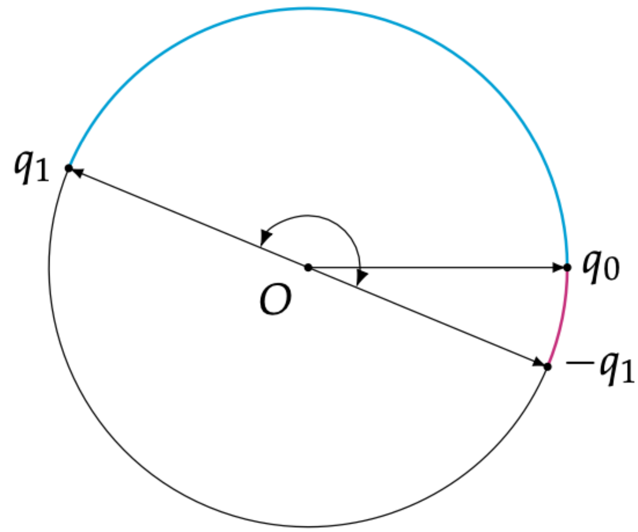
$$q_t = Slerp(q_0, q_1, t) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin(\theta)}q_0 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin(\theta)}q_1$$

问题

1. 比利用幂运算的公式要高效很多，但是涉及到三个三角函数以及一个反三角函数的运算，所以比 Nlerp 要慢
2. 如果单位四元数之间的夹角 θ 非常小，那么 $\sin(\theta)$ 可能会由于浮点数的误差被近似为 0.0，从而导致除以 0 的错误

故在实施 Slerp 之前，需要检查两个四元数的夹角是否过小(或者完全相同). 一旦发现这种问题，我们就必须**改用 Nlerp** 对两个四元数进行插值，这时候 Nlerp的误差非常小所以基本不会与真正的 Slerp 有什么区别.

双倍覆盖带来的问题



虽然我们能够将 $q0$ 向左插值至 $q1$(蓝色的弧)，但这会将 3D 空间中的 向量**旋转接近 360**。，而实际上这两个旋转相差并没有那么多，它**并不是 3D 空间中的 弧面最短路径**(Geodesic).而如果我们将 $q0$ 向右插值至**等价的 $-q1$(红色的弧)**，它的旋转变化量就会比插值到 $q1$ 要小很多，所以 **$q0$ 插值到 $-q1$ 才是插值的最短路径**

解决方法：

先检测 $q0$ 与 $q1$ 之 间是否是钝角，即检测它们**点积的结果 $q0 \cdot q1$** 是否为负数

如果 $q0 \cdot q1 < 0$，那么我们**就反转其中的一个四元数**

多个四元数插值

Slerp的问题

Slerp是对角度进行线性插值，旋转的角速度虽然是**固定**的，但它的值是**与夹角 θ 成正比**的($d\theta t = d\ (t\theta) = \theta$，准确说是角速率)，即夹角越大，角速度越快

如果对**多个四元数**进行插值，角速度会在**切换插值的四元数**时出现断点，或者说在**切换点不可导，角速度突然改变**

Squad(Spherical and quadrangle)球面四边形插值

Squad 仍然是平面上的向量，插值衍生到超球面

Quad

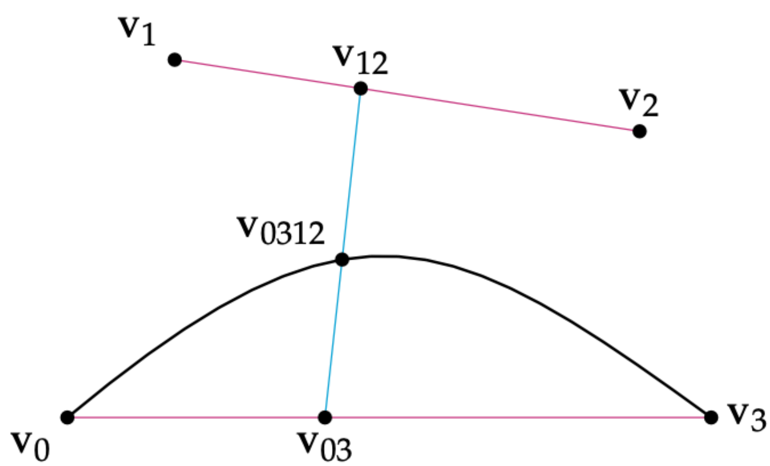
我们首先是分别对 **v**0**v**3 和 **v**1**v**2 进行插值，获得 **v**03 和 **v**12:

v03 = *Lerp*(**v**0, **v**3; *t*)

v12 = *Lerp*(**v**1, **v**2; *t*)

之后，我们使用 2*t*(1 − *t*) 为参数，对 **v**03 和 **v**12 进行二次插值，获得最终的 **v**0312:

v0312 = *Lerp*(**v**03, **v**12; 2*t*(1 − *t*))



递归形式

$$Quad(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3; t) = Lerp(Lerp(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_3; t), Lerp(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; t); 2t(1-t))$$

展开形式

$$\begin{aligned} &Quad(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3; t) \\ =&(2t^2-2t+1)(1-t)\mathbf{v}_0 + 2(1-t)^2 t\mathbf{v}_1 + 2(1-t)t^2\mathbf{v}_2 + t(2t^2-2t+1)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Squad公式

$$Squad(q_0, q_1, q_2, q_3; t) = Slerp(Slerp(q_0, q_3; t), Slerp(q_1, q_2; t); 2t(1-t))$$

$$Squad(q_0, q_1, q_2, q_3; t) = (Slerp(q_1, q_2; t)(Slerp(q_0, q_3; t))^*)^{2t(1-t)} Slerp(q_0, q_3; t)$$

Squad应用

如果我们有一个四元数序列 $q0, q1, . . . , qn$，我们希望对每一对四元数 qi 和 $qi+1$ 都使用 Squad 进行插值，所以我们有：

$$Squad(q_i, s_i, s_{i+1}, q_{i+1}; t) = Slerp(Slerp(q_i, q_{i+1}; t), Slerp(s_i, s_{i+1}; t); 2t(1-t))$$

找出中间的控制点 *si* 和 *si*+1

最基本的理念非常简单:让 Squad 在切换点可导， 从而达到 $C1$ 连续

$$Squad'(q_{i-1}, s_{i-1}, s_i, q_i; 1) = Squad'(q_i, s_i, s_{i+1}, q_{i+1}; 0)$$

可以推导出（省略过程）

$$s_i = q_i \exp\left(-\frac{\log(q_i^* q_{i-1}) + \log(q_i^* q_{i+1})}{4}\right)$$

单位四元数： $q = [cos(\theta), sin(\theta)\vec{v}]$ 对数为:

$$\log q = [0,\ \theta\vec{v}]$$

四元数 $q = [0, \theta\vec{v}], \theta \in R, |v| = 1$, 其指数为:

$$expq = [cos\theta, sin\theta\vec{v}]$$

单位四元数：q , $t \in R$, 其幂为:

$$q^t = exp(t \log q)$$