四元数与三维旋转阅读笔记

复数

复数在一些层面上的表现与四元数很相像

复数相乘

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= ac - bd + \\
&(bc + ad)i \\
&= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

复数相乘的运算与矩阵所代表的变换是等价的，

于是在矩阵的形式下，复数相乘可以表示为矩阵的乘积

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

且这个运算满足**交换律**

特殊复数的矩阵形式

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \qquad (a = 1, b = 0)$$

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (a = 0, b = 1)$$

$$i^2 = i \cdot i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I = -1$$

复数的模长与共轭

$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\bar{z} = a - bi$$

一个复数的模长可以通过乘积的方式来计算

$$\|z\| = \sqrt{z\bar{z}}$$

复数相乘与2D旋转

复数相乘其实是旋转与缩放变换的复合

z与任何一个复数c相乘都会将c逆时针旋转$\theta = \text{atan2}(b, a)$度，并将其缩放z的模长倍

三种2D旋转公式

1.

Theorem 1: 2D 旋转公式（矩阵型）

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

2.

Theorem 2: 2D 旋转公式（复数积型）

$$\begin{aligned} v' &= zv \\ &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))v \end{aligned}$$

3. 极坐标形

根据欧拉公式

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$$

可以得到

$$z = re^{i\theta}$$

其中r为z的模长

于是有2D旋转形式

Theorem 3: 2D 旋转公式（指数型）

$$v' = e^{i\theta}v$$

旋转的复合

当我们对两个2D旋转进行复合时，所得到的变换仍是一个旋转

这个等效变换的旋转角是**z1与z2的旋转角之和**

三维空间中的旋转

轴角式旋转

关于欧拉角旋转

虽然使用欧拉角的旋转很常用，但是欧拉角的表示方法会导致以下问题：

1. Gimbal Lock
2. 依赖于三个坐标轴的选定

使用四元数正是为了解决这个问题

轴角式的规定

在轴角的表示方法中，一个旋转的定义需要使用到4个变量：旋转轴u的x, y, z坐标以及一个旋转角θ，*也就是一共有四个自由度*

为了消除u模长这个多余的自由度，可以规定u的模长为1，也就是u为一个单位向量，这将为后面的推导带来很多便利

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

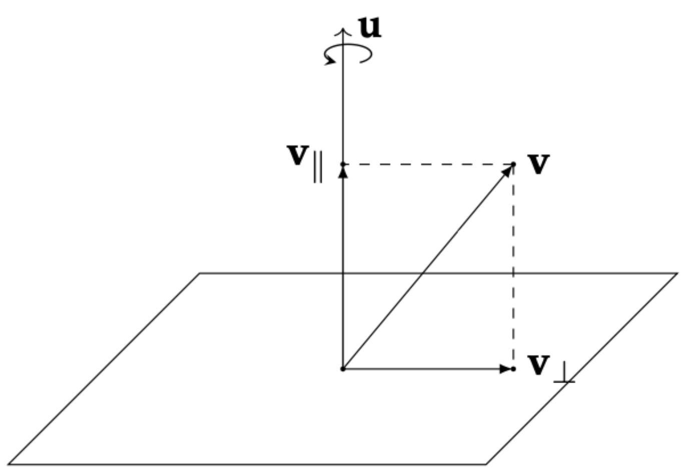
旋转的分解

将要旋转的向量v分解为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|} + \mathbf{v}_{\perp}$$

于是我们可以分别旋转这两个向量，然后再将旋转的结果相加

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_{\|} + \mathbf{v}'_{\perp}$$



v平行其实就是v在u上的正交投影

有v平行

$$= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$$

于是也有v垂直

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|}$$

$$= \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$$

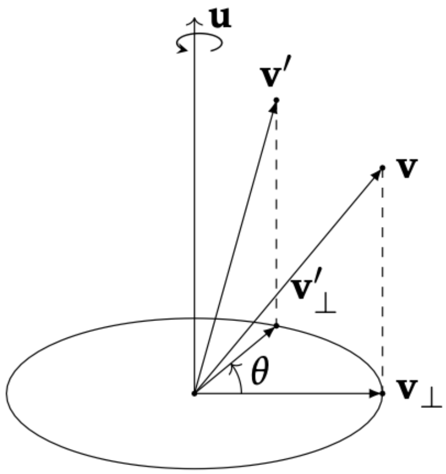
v平行的旋转

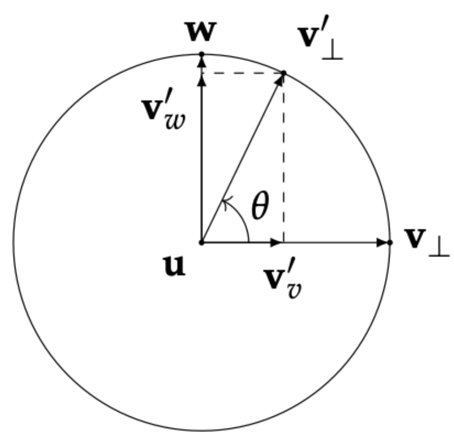
$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|}$$

$$= \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$$

v垂直的旋转

1. 因为u和v垂直两个向量是正交的，所以这个旋转可以看做是平面内的一个旋转。
2. 因为旋转不改变v垂直的长度，所以路径是一个圆





但是只有一个向量v垂直来表示旋转是不够的，我们用叉乘构造一个向量w

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}\| &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp\| \\ &= \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}_\perp\| \cdot \sin(\pi/2) \qquad (\pi/2 \text{ 是 } \mathbf{u} \text{ 与 } \mathbf{v}_\perp \text{ 的夹角}) \\ &= \|\mathbf{v}_\perp\|\end{aligned}$$

w和v垂直的模长是一样的，于是我们可以进行旋转

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_\perp &= \mathbf{v}'_v + \mathbf{v}'_w \\ &= \cos(\theta)\mathbf{v}_\perp + \sin(\theta)\mathbf{w} \\ &= \cos(\theta)\mathbf{v}_\perp + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp)\end{aligned}$$

得到：

Theorem 5: 3D 旋转公式（向量型，正交情况）

当 $\mathbf{v}_\perp$ 正交于旋转轴 $\mathbf{u}$ 时，旋转 θ 角度之后的 $\mathbf{v}'_\perp$ 为：

$$\mathbf{v}'_\perp = \cos(\theta)\mathbf{v}_\perp + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp)$$

v的旋转

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{v}'_{\perp}$$

因为叉乘遵守分配律，于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp} &= \mathbf{u} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}) \\
&= \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\parallel} \\
&= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \qquad\qquad (\mathbf{u} \text{ 平行于 } \mathbf{v}_{\parallel}\text{，所以 } \mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{0})
\end{aligned}$$

最后代入v的两个分向量的值

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}' &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \cos(\theta)(\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}) + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
&= \cos(\theta)\mathbf{v} + (1 - \cos(\theta))(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v})
\end{aligned}$$

一般形式的旋转公式：

Theorem 6: 3D 旋转公式（向量型，一般情况，也叫做「Rodrigues' Rotation Formula」）

3D 空间中任意一个 $\mathbf{v}$ 沿着单位向量 $\mathbf{u}$ 旋转 θ 角度之后的 $\mathbf{v}'$ 为:

$$\mathbf{v}' = \cos(\theta)\mathbf{v} + (1 - \cos(\theta))(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

四元数

定义

$$q = a + bi + cj + dk \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

其中

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

四元数其实就是对于基{1, i, j, k}的线性组合，于是四元数也可以写成向量的形式

$$q = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

也可以将四元数的实部和虚部分开，用一个三维的向量来表示虚部，表示为变量和向量的有序对形式：

$$q = [s, \mathbf{v}] \quad \left(\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, s, x, y, z \in \mathbb{R}\right)$$

性质

模长（norm）

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

或

$$\begin{aligned} \|q\| &= \sqrt{s^2 + \|\mathbf{v}\|^2} \\ &= \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \qquad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2) \end{aligned}$$

四元数乘法及运算

四元数的加减和数乘不赘述，具有一下特殊的运算性质：

1. 不遵守交换律，也就有了左乘和右乘的区别
2. 结合律和分配律是成立的
3. I, j, k满足以下关系
    a. jk = i
    b. ij = k
    c. kj = -i

可以得到三者之间的运算表格

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

矩阵形式

由于四元数相乘后的结果也是一个线性组合，故可以将其写为矩阵形式

$$q_1q_2 = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

$$q_2q_1 = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

注意左乘和右乘是有区别的

Graßmann 积

整理乘积项，得到

$$q_1 q_2 = (ae - (bf + cg + dh)) +$$

$$(be + af + ch - dg)i$$

$$(ce + ag + df - bh)j$$

$$(de + ah + bg - cf)k$$

令

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix},$$

有

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = bf + cg + dh$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b & c & d \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

$$= (ch - dg)\mathbf{i} - (bh - df)\mathbf{j} + (bg - cf)\mathbf{k}$$

注意**v** × **u** 的结果是一个向量，这里的 **i**、**j**、**k** 是向量的基

Theorem 7: Graßmann 积

对任意四元数 $q_1 = [s, \mathbf{v}]$，$q_2 = [t, \mathbf{u}]$，$q_1 q_2$ 的结果是

$$q_1 q_2 = [st - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},\ s\mathbf{u} + t\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}]$$

纯四元数

仅有虚部的四元数，即纯四元数，可以写成v = [0,**v**]

纯四元数与向量

因为出四元数仅由虚部的3D向量决定，所以我们可以将任意的向量转换为纯四元数

纯四元数的乘法

如果有两个纯四元数 v = [0, **v**], u = [0, **u**]，那么

$$vu = [0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, 0 + \mathbf{v} \times \mathbf{u}]$$

$$= [-\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{u}]$$

可以看到结果并不复杂

逆和共轭

将乘法的逆运算定义为 *pq*−1 或者 *q*−1 *p*，其中，*q*−1 是 *q* 的逆(Inverse)

qq−1 =*q*−1*q*=1(*q* != 0)

我们定义，一个四元数*q* = *a*+*bi*+*ck*+*dj*的共轭为

q* = a−bi−cj−dk(*q** 读作 「q star」)

如果用标量向量有序对的形式来定义的话，*q* = [*s*, **v**] 的共轭为 *q** = [*s*, −**v**]

共轭四元数的一个非常有用的性质就是

$$\begin{aligned} qq^* &= [s, \mathbf{v}] \cdot [s, -\mathbf{v}] \\ &= [s^2 - \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{v}), s(-\mathbf{v}) + s\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (-\mathbf{v})] \\ &= [s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{0}] \qquad (\mathbf{v} \text{ 平行于 } -\mathbf{v}，\text{所以 } \mathbf{v} \times (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} qq^* &= [s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{0}] \\ &= s^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ &= \|q\|^2 \end{aligned}$$

除此之外，可以证明

$$
\begin{aligned}
q^*q &= (q^*)(q^*)^* \\
&= \|q^*\|^2 \\
&= s^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\
&= \|q\|^2 \\
&= qq^*
\end{aligned}
$$

即这个特殊的乘法是遵守交换律的

于是我们有

$$
\begin{aligned}
qq^{-1} &= 1 \\
q^*qq^{-1} &= q^* && \text{(等式两边同时左乘以 } q^*\text{)} \\
(q^*q)q^{-1} &= q^* \\
\|q\|^2 \cdot q^{-1} &= q^* && (q^*q = \|q\|^2) \\
q^{-1} &= \frac{q^*}{\|q\|^2}
\end{aligned}
$$

我们只需要将一个四元数的虚部改 变符号，除以它模长的平方就能获得这个四元数的逆了

四元数与 3D 旋转

首先将要处理的向量定义为纯四元数

$$
\begin{aligned}
v &= [0, \mathbf{v}] & v' &= [0, \mathbf{v}'] \\
v_\perp &= [0, \mathbf{v}_\perp] & v'_\perp &= [0, \mathbf{v}'_\perp] \\
v_\parallel &= [0, \mathbf{v}_\parallel] & v'_\parallel &= [0, \mathbf{v}'_\parallel] \\
u &= [0, \mathbf{u}]
\end{aligned}
$$

满足

$$
v = v_\parallel + v_\perp \qquad v' = v'_\parallel + v'_\perp
$$

垂直方向的旋转

之前的推导

$$
\mathbf{v}'_\perp = \cos(\theta)\mathbf{v}_\perp + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp)
$$

由于

$$uv_{\perp} = [-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp}]$$

而这两个向量正交，乘积为0

所以

$$\begin{aligned} uv_{\perp} &= [0, \ \mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp}] \\ &= \mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp} \end{aligned}$$

于是可以代入上式，得到

$$v'_{\perp} = \cos(\theta) v_{\perp} + \sin(\theta)(uv_{\perp})$$

运用乘法分配律

$$\begin{aligned} v'_{\perp} &= \cos(\theta) v_{\perp} + \sin(\theta)(uv_{\perp}) \\ &= (\cos(\theta) + \sin(\theta) u) v_{\perp} \end{aligned}$$

如果我们将cos(θ) + sin(θ)u看作是一个四元数，就能将旋转写成四元数的乘积了

令q = cos(θ) + sin(θ)u，*有*

$$v'_{\perp} = qv_{\perp}$$

构造q如下

$$
\begin{aligned}
q &= \cos(\theta) + \sin(\theta)u \\
&= [\cos(\theta),\ \mathbf{0}] + [0,\ \sin(\theta)\mathbf{u}] \\
&= [\cos(\theta),\ \sin(\theta)\mathbf{u}]
\end{aligned}
$$

得到如下定理

Theorem 8: 3D 旋转公式（四元数型，正交情况）

当 $\mathbf{v}_\perp$ 正交于旋转轴 $\mathbf{u}$ 时，旋转 θ 角度之后的 $\mathbf{v}'_\perp$ 可以使用四元数乘法来获得. 令 $v_\perp = [0,\ \mathbf{v}_\perp]$，$q = [\cos(\theta),\ \sin(\theta)\mathbf{u}]$，那么：

$$v'_\perp = qv_\perp$$

而q还有如下性质

$$
\begin{aligned}
\|q\| &= \sqrt{\cos^2(\theta) + (\sin(\theta)\mathbf{u} \cdot \sin(\theta)\mathbf{u})} \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})} \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)(\|\mathbf{u}\|^2)} \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

平行方向的旋转

Theorem 9: 3D 旋转公式（四元数型，平行情况）

当 $\mathbf{v}_{\|}$ 平行于旋转轴 $\mathbf{u}$ 时，旋转 θ 角度之后的 $\mathbf{v}'_{\|}$ 用四元数可以写为:

$$v'_{\|} = v_{\|}$$

合旋转

$$
\begin{aligned}
v' &= v'_{\|} + v'_{\perp} \\
&= v_{\|} + qv_{\perp} \qquad \qquad (\text{其中 } q = [\cos(\theta), \sin(\theta)\mathbf{u}])
\end{aligned}
$$

引理

1.

Lemma 1

如果 $q=[\cos(\theta), \sin(\theta)\mathbf{u}]$, 而且 $\mathbf{u}$ 为单位向量, 那么 $q^2=qq=[\cos(2\theta), \sin(2\theta)\mathbf{u}]$.

2.

Lemma 2

假设 $v_{\parallel}=[0, \mathbf{v}_{\parallel}]$ 是一个纯四元数，而 $q=[\alpha, \beta\mathbf{u}]$，其中 $\mathbf{u}$ 是一个单位向量，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$．在这种条件下，如果 $\mathbf{v}_{\parallel}$ 平行于 $\mathbf{u}$，那么 $qv_{\parallel}=v_{\parallel}q$

3.

Lemma 3

假设 $v_{\perp}=[0, \mathbf{v}_{\perp}]$ 是一个纯四元数，而 $q=[\alpha, \beta\mathbf{u}]$，其中 $\mathbf{u}$ 是一个单位向量，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$．在这种条件下，如果 $\mathbf{v}_{\perp}$ 正交于 $\mathbf{u}$，那么 $qv_{\perp}=v_{\perp}q^*$

注意，单位四元数q满足以下性质

1.

$$qq^{-1}=1$$

2.

$$p^{-1}=p^*$$

合旋转的化简

$$
\begin{aligned}
v' &= v_{\|} + q v_{\perp} && (q = [\cos(\theta),\ \sin(\theta)\mathbf{u}]) \\
&= 1 \cdot v_{\|} + q v_{\perp} \\
&= p p^{-1} v_{\|} + p p v_{\perp} && \left(令\ q = p^2，则\ p = \left[\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right),\ \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\mathbf{u}\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v' &= p p^{-1} v_{\|} + p p v_{\perp} \\
&= p p^* v_{\|} + p p v_{\perp}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v' &= p p^* v_{\|} + p p v_{\perp} \\
&= p v_{\|} p^* + p v_{\perp} p^* \\
&= p(v_{\|} + v_{\perp}) p^*
\end{aligned}
$$

合旋转的一般性公式

Theorem 10: 3D 旋转公式（四元数型，一般情况）

任意向量 $\mathbf{v}$ 沿着以单位向量定义的旋转轴 $\mathbf{u}$ 旋转 θ 度之后的 $\mathbf{v}'$ 可以使用四元数乘法来获得．令 $v = [0,\ \mathbf{v}]$，$q = \left[\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right),\ \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\mathbf{u}\right]$，那么：

$$v' = q v q^* = q v q^{-1}$$

3D旋转的矩阵形式

$qvq^* = L(q)R(q^*)v$ （或者 $R(q^*)L(q)v$，它们是等价的）

$$= \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} v \qquad （注意\ R(q^*) = R(q)^T）$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & ab-ab-cd+cd & ac+bd-ac-bd & ad-bc+bc-ad \\ ab-ab+cd-cd & b^2+a^2-d^2-c^2 & bc-ad-ad+bc & bd+ac+bd+ac \\ ac-bd-ac+bd & bc+ad+ad+bc & c^2-d^2+a^2-b^2 & cd+cd-ab-ab \\ ad+bc-bc-ad & bd-ac+bd-ac & cd+cd+ab+ab & d^2-c^2-b^2+a^2 \end{bmatrix} v$$

因为 $a2$ +$b2$ +$c2$ +$d2$ = 1，这个式子能化简为

$$qvq^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2c^2-2d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 0 & 2bc+2ad & 1-2b^2-2d^2 & 2cd-2ab \\ 0 & 2bd-2ac & 2ab+2cd & 1-2b^2-2c^2 \end{bmatrix} v$$

除去掉外围的一圈1和0，再将v改为向量，我们得到

Theorem 11: 3D 旋转公式（矩阵型）

任意向量 $\mathbf{v}$ 沿着以单位向量定义的旋转轴 $\mathbf{u}$ 旋转 θ 角度之后的 $\mathbf{v}'$ 可以使用矩阵乘法来获得. 令 $a = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$，$b = \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)u_x$，$c = \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)u_y$，$d = \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)u_z$，那么:

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} 1-2c^2-2d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 2bc+2ad & 1-2b^2-2d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & 1-2b^2-2c^2 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

q2R_Python代码

```
import numpy as np
import math as mt
# 将角度蕴涵在q[0], q[1:3]是绕的旋转轴
def q2R(q):
    a=mt.cos(q[0]*0.5)
    b=mt.sin(0.5*q[0])*q[1]
    c=mt.sin(0.5*q[0])*q[2]
    d=mt.sin(0.5*q[0])*q[3]
    R = np.array([[1-2*mt.pow(c,2)-2*mt.pow(d,2),2*b*c-2*a*d,2*a
                  [2*b*c+2*a*d,1-2*mt.pow(b,2)-2*mt.pow(d,2),2*c
                  [2*b*d-2*a*c,2*a*b+2*c*d,1-2*mt.pow(b,2)-2*mt.
    return R
k=mt.sqrt(3)/3
r=mt.pi*0.5
q=[r,1,0,0]
print(q2R(q))
```

q2R

R2q