

Beregning av gravitasjonskonstanten G ved Cavendishforsøket

M. Aarsten, A. Arnstad

Institutt for fysikk, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, N-7491 Trondheim, Norway.

Sammendrag

Vi målte gravitasjonskonstanten G ved hjelp av Cavendish-metoden og kom frem til følgende resultat: $G = (6,20 \pm 0,17) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$. Dette er ganske nært den oppgitte tabellverdien for G . Avviket fra standardverdien med 7,1% for G stammer fra systematiske og tilfeldige feil som antagelser om vinkelutslag $\theta \approx 0$ og feil ved oppsett av apparatur.

1. Innledning

Blant de fundamentale kreftene i naturen finner vi gravitasjon. Gravitasjon er en tiltrekkende kraft som virker mellom alle legemer med masse. Således legger gravitasjonen, sammen med Newtons lover for bevegelse, grunnlaget for klassisk fysikk, og i et større bilde, vår forståelse av verden. Isaac Newton utledet gravitasjonsloven for gravitasjon mellom to legemer i sin bok *Principia* [1].

Det er Newtons gravitasjonslov som legger grunnlaget for beregning av gravitasjonskonstanten G selv om Newton ikke fant denne selv. Det gjorde derimot Henry Cavendish på slutten av 1700-tallet [2], og vi har forsøkt å gjenskape hans metode. Han brukte en torsjonsvekt og fant kraften som virket mellom to legemer med kjent masse, med en kjent avstand, under tilpassede forhold. Slik kom han frem til en meget nøyaktig verdi av G , til tross for forholdene han arbeidet under, for drøyt 200 år siden.

I denne rapporten skal vi føre vår gjennomføring av eksperimentet, beregne en egen verdi av G og drøfte denne verdien opp mot den fastslåtte med hensyn til systematiske og tilfeldige feil.

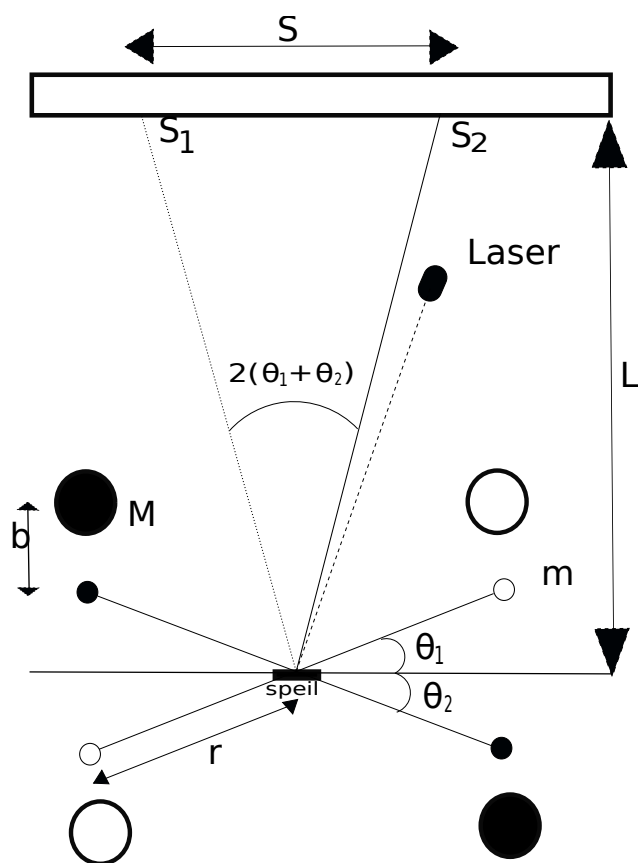
2. Teori og metode

Oppsett av apparatur er illustrert i figur 1. Denne vil bli brukt som basis for teorien. Newtons gravitasjonslov gir at kraften F som virker mellom to legemer med masser M og m er

$$F = G \frac{Mm}{b^2}, \quad (1)$$

der G er gravitasjonskonstanten og b er innbyrdes avstand mellom massene.

Med utgangspunkt i figur 1, vil torsjonsvinkelen til en tråd



Figur 1: Skisse av apparaturen. Den består av to mindre blykuler med lik masse, m , og avstand mellom dem er $2r$. Punktet S_1 er refleksjonen fra laseren, med avstand L , på meterstokken i posisjon 1, illustrert med hvite kuler. Tilsvarende er posisjon 2 illustrert med svarte kuler og refleksjonen til laseren med likevektspunktet S_2 . b er avstanden fra massesenteret til M til nærmeste m . Torsjonsvekten henger i en torsjonstråd i retning ut av papiret.

utsatt for et ytre dreiemoment τ , være

$$\theta = \frac{\tau}{D} \quad (2)$$

hvor D er torsjonstivheten. Dreiemomentet τ kommer av at kraften F påføres fra en arm r , slik at $\tau = Fr$ som medfører at

$$F = \frac{D}{r} \cdot \theta. \quad (3)$$

Stangen til torsjonsvekten påvirkes av gravitasjonskraften F mellom blykulene og pendelmassene, samt dreiemomentet fra torsjonstråden stangen henger i. Totalt dreiemoment kan derfor uttrykkes som

$$\tau = 2Fr - D\theta. \quad (4)$$

Ved likevekt vil $\tau = 0$ og vi får dermed at

$$2Fr = D\theta. \quad (5)$$

Vinkelen θ vil være avhengig av kraften F og ved å flytte kulene fra posisjon 1 til posisjon 2, får vi to ulike vinkler θ_1 og θ_2 . Vinklene skal i teorien være motsatt rettet med samme størrelse. Vi kan da addere de, og få $2\theta_0$, slik at

$$F = \frac{D}{4r} \cdot (\theta_1 + \theta_2). \quad (6)$$

Rotasjonsvinkelen man får fra svingningen, som kommer fra dreiemomentet, vil være halvparten av vinkelen man får fra laseren ved rotasjon. Det fører til at den reflekterte lysstrålen streifer over 2θ når armen r streifer over vinkelen θ , se figur 1. Dersom vinkelen $\theta_1 + \theta_2$ er liten nok og torsjonsvekten ikke er for følsom, kan vi gjøre følgende tilnærming

$$\frac{S}{L} \approx 2(\theta_1 + \theta_2) \quad (7)$$

S tilsvarer differansen til likevektsposisjonene, altså $|S_1 - S_2|$, hvor S_1 og S_2 er lysets posisjon i de to ulike målingene ved likevektsvinkler θ_1 og θ_2 . Vi setter inn i ligning (6) slik at

$$F = \frac{D}{8r} \cdot \frac{S}{L}. \quad (8)$$

Når det oppstår endring i dreiemomentet τ , får vinkelen en vinkelakselerasjon α . Denne endringen oppnås ved å flytte de store blykulene, slik at det oppstår en ny likevektsposisjon. Newtons 2. lov for rotasjon vil gi at

$$\tau = I\alpha \quad (9)$$

der torsjonspendelens treghetsmoment uttrykkes ved $I = 2mr^2$

Anta så at systemet ikke påvirkes av ytre faktorer, slik at man fra ligning (3) og ligning (9) kan komme frem til

$$I\ddot{\theta} = 2Fr - D\theta. \quad (10)$$

Videre antas det at svingningene er passende små, slik at dreiemomentet fra gravitasjonen, $2Fr$, kan sies å være konstant gjennom bevegelsen. Da vil vinkelutslaget fra likevektsposisjonen defineres til å være $\theta_c = \theta - \theta_0$. Man kan da sette sammen ligning (4) og ligning (10) og få følgende for ligning (11)

$$I\ddot{\theta}_c = -D\theta_c. \quad (11)$$

Ligning (11) beskriver en udempet harmonisk svingning med løsning på formen

$$\theta_c(t) \propto \sin(\omega_0 t) \quad (12)$$

Hvor ω_0 er vinkelfrekvensen og hvor $\omega_0^2 = D/I$. Tidligere har det blitt nevnt at torsjonsvekten ikke må være for følsom. Dette fordi man da kan anta at D er konstant, som gjør bevegelsen til en harmonisk svingning. Da overskrider ikke spenningen i torsjonstråden elastisitetsgrensen, fordi vridningen er passende liten. Er dette tilfellet vil D kunne uttrykkes av svingeperioden T , gitt ved $T = 2\pi/\omega_0$, slik

$$D = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \quad (13)$$

Ved å kombinere ligningene (1), (8) og (13), vil man ha funnet et grovt estimat av G er gitt ved

$$G = \pi^2 \frac{Sb^2 r}{T^2 LM}. \quad (14)$$

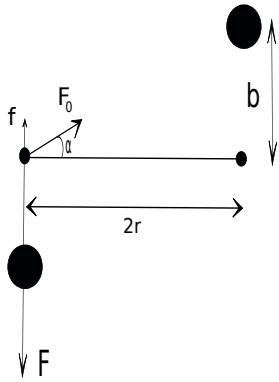
Der b , r , L og M er størrelser vi kan måle på laboratoriet. Ved bruk av regresjonsanalyse kan S og T uttrykkes basert på resultatmålingene vi fikk i den praktiske utføringen av forsøket. Her er det antatt at ytre masser ikke påvirker systemet, og at alle størrelser er tilfredsstillende for å gjennomføre utregning.

Ligning (14) tar kun høyde for gravitasjonen mellom en stor kule og en liten kule, ikke fra begge de store på hver enkelt liten kule. Ved å studere ligning (1) og figur 2, vil det vises at F_0 fra den motsatte store kulen med masse M på den lille med masse m , kan uttrykkes

$$F_0 = G \frac{mM}{b^2 + 4r^2}. \quad (15)$$

Fra figuren legger man også merke til at komponenten f fra F vil virke på dreiemomentet til pendelen. Den vil da uttrykkes slik

$$f = F_0 \sin \alpha = G \frac{mM}{b^2 + 4r^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4r^2}} = F\beta. \quad (16)$$



Figur 2: Skisse av vekselvirkningene mellom en av de små kulene og de to store. F er gravitasjonskraften mellom nærmeste store kule og liten kule. F_0 er kraften mellom liten kule og den store kule lengst unna. f er en beskrivelse av vertikalkomponenten av F_0 .

hvor

$$\beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (17)$$

der f og F er krefter som virker på dreiemomentet. Forholdet mellom de blir da β . Videre vil det komme frem at totalkraften som gir pendelen dreiemoment kan skrives

$$F' = F - f = F(1 - \beta) \quad (18)$$

Tar med F' videre og setter inn i ligningene (4), (5), (6), (8) og (10), slik at det ender opp i et mer presist uttrykk for gravitasjonskonstanten G ,

$$G = \frac{\pi^2}{1 - \beta} \cdot \frac{Sb^2r}{T^2LM}. \quad (19)$$

For å fastslå usikkerheten brukes Gauss' feilforplantningslov, gitt ved

$$(\Delta q) = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial c} \Delta c\right)^2 + \dots} \quad (20)$$

der vi antar at

$$\Delta G_1 \simeq \Delta G_2. \quad (21)$$

Der ΔG_1 er usikkerheten målt fra forenklingen i ligning (14) og ΔG_2 er usikkerheten i ligning (19)

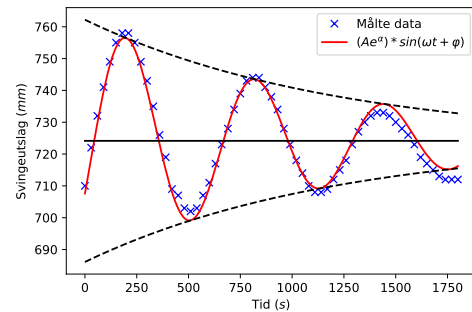
Den praktiske utførelsen av forsøket blir gjort på følgende måte: Det blir brukt en torsjonsvekt med den hensikt om å måle gravitasjonskraften, F , mellom de store og små kulene. Dette ble gjort ved å peke en laser mot et speil festet på midtpunktet til torsjonsvekten. Laserstrålen ble videre reflektert mot en festet meterstav med en avstand

L fra torsjonsvekten. Vi startet med å plassere de store blykulene så nært kammeret som mulig uten å berøre det. Deretter ventet vi i 5 minutter slik at torsjonsvekten skulle komme i harmonisk svingning om likevektspunktet S_1 . Videre målte vi strålens posisjon på meterstaven hvert 30. sekund i 30 minutter ved å fokusere på ytre høyre punkt av laserpunktet på meterstaven, med den hensikt om å minimere feilmarginen. Deretter ble det gjort tilsvarende i posisjon 2 med likevektspunkt S_2 .

3. Resultat

Resultatene av den praktiske delen av forsøket er presentert i figur 3 og figur 4, som en dempet sinuskurve av tiden. Med utgangspunkt i disse ble svingeperiodene T_1 og T_2 funnet og gjennomsnittet av disse to blir T som benyttes i utregningene. Videre gir sinusfunksjonene likevektslinjen S_1 og S_2 . Ved regresjonsanalyse fant vi $S_1 = 724.1074$ mm og $S_2 = 773.6875$ mm. Videre ble $T_1 = 623.3467$ s og $T_2 = 628.7027$ s. Resterende resultater er presentert med usikkerhet i tabell 1. Ved bruk av ligning (19), (17) og verdiene fra tabell 1 gir dette:

$$G = (6, 20 \pm 0, 17) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \quad (22)$$

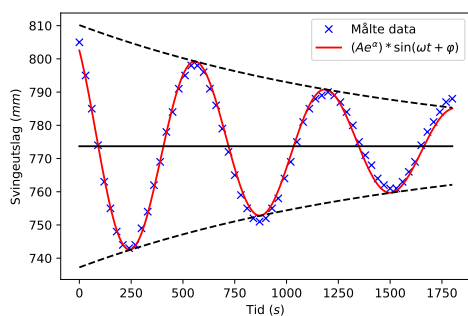


Figur 3: Måledata for S_1 . De blå kryssene representerer de faktiske målingene som ble gjort med tidsintervall på 30 sekunder. Heltrukken linje illustrerer likevektslinja. Den røde kurven er basert på regresjonsanalyse av alle målingene. Stiplede linjer er omhyllingskurver.

4. Diskusjon

Vår G avviker fra den anbefalte verdien gitt av labheftet [2], $G = (6, 67428 \pm 0, 00067) \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ med 7,1%. Verdien vi får med usikkerhet, vil heller ikke overlappe med den anbefalte verdien. Dette skyldes i hovedsak systematiske feil fra teorien og fremgangsmåten.

Når vi tok i bruk Gauss' feilforplantningslov fikk vi en relativ usikkerhet for alle størrelser. Derfra utledet vi at verdiene b og T bidrar til sammen med 91% av usikkerheten. Det er derfor naturlig å anta at det er her de største



Figur 4: Tilsvarende måledata for S_2 . Forklaring under figur 3.

Tabell 1: Tabell av alle avmålte parametre med absolutt og relativ usikkerhet, samt enhet og verdi for de avmålte størrelsene. S differansen mellom likevektsposisjonene S_1 og S_2 , T er gjennomsnittlig periode under oscillasjonen, M er snittet til de store kulenes masse, r er halvparten av torsjonsvektens lengde, L er avstanden fra meterstaven til torsjonsvekten og b er avstanden mellom massesentrene til stor og liten kule.

størrelse	verdi	usikkerhet	rel. usikkerhet
$M(\text{kg})$	1505.15	2.65	$1.76 \cdot 10^{-3}$
$S(\text{mm})$	49.58	0.287	$7.90 \cdot 10^{-3}$
$T(\text{s})$	626.0247	2.678	$4.28 \cdot 10^{-3}$
$L(\text{mm})$	2093	0.5	$2.38 \cdot 10^{-4}$
$r(\text{mm})$	50.00	0.05	$1.00 \cdot 10^{-3}$
$b(\text{mm})$	53	1	$1.89 \cdot 10^{-2}$

feilene forekommer. Ser man på størrelsesordenen i den relative usikkerheten, fremkommer det at en liten feil i b tilsvarer en meget stor feil i de andre målte størrelsene. Derfor kan det konkluderes med at feilmåling av b vil påvirke resultatet i høyest grad og det er derfor naturlig å diskutere denne variabelen mest.

Når b ble beregnet, var det forutsatt at vinkelutslaget $\theta \approx 0$, for å forenkle beregningene. Det virker fornuftig å anta at de små kulene ikke befant seg i sentrum av kammeret, samt i nøyaktig samme plan som de ytre store kulene. Dette vil føre til feil i målingen og tilføre en vertikal kraftkomponent som virker på de små kulene, men ikke torsjonsvekten. Det kan slutes av dette at vår verdi for G vil være lavere som følge av disse feilene.

En annen feilfaktor som har innvirkning på b , er at de store kulene aldri ble plassert helt inntil kammeret, og apparaturen de tilhørte ikke var helt symmetrisk. Vi foretok målingen av b ved å halvere kammerets gitte lengde, og legge den sammen med den store kulens radius. Vi så bort fra asymmetri og antok en avstand mellom den store kule og kammeret ved øyemål. Vi målte kun på den ene siden, så det kan ikke med sikkerhet fastslås at b var lik på begge sider.

Det bør nevnes at oscillasjonen vil bli påvirket av luftmotstand, som en dempende kraft i kammeret. Dette vil øke perioden og T vil i realiteten være annerledes enn den vi regnet med. Samtidig vil det at b på begge sidene ikke nødvendigvis er nøyaktig lik, føre til at gravitasjonskreftene blir ulike, og også påvirker oscillasjonen. Dette kan også påvirke S i den forstand at den kan ha blitt forskjøvet og økt eller minnet i størrelse.

Det gir grunn til å tro at dersom størrelsene b og T hadde vært annerledes ved utregning, ville dette påvirket vår verdi av G . Særsilt fordi b blir en viktig faktor i uttrykket for G .

I tillegg til disse kildene, antar vi samtidig at snoren stangen henger i, og stangen mellom de små kulene er masseløs. Hadde vi inkludert massen, ville F blitt større, og følgelig G blitt større. Dette kunne dermed ha hjulpet vårt resultat, ettersom vi ligger under standardverdien. Treghetsmomentet, I ville også økt da dette direkte avhenger av massen. Noe som ville fulgt uttrykket i ligning (14), og gjort verdien for G enda større

Tilfeldige feil vil være mindre, og skyldes i de fleste tilfeller målefeil. Et fremtredende eksempel på dette vil være måleusikkerhetene δS og δT som ble satt ved øyemål.

Usikkerheten i T vil være vanskelig å gjøre noe med. Derfor går vi ikke så mye inn på det, utenom at man ved flere måleserier kunne fått en mer presis verdi for T og fått et bedre bilde av hvor symmetrisk oppsettet var.

5. Konklusjon

Vi fikk ved utregning av gravitasjonskonstanten med Cavendish-metoden at $G = (6, 20 \pm 0, 17) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$. Som nevnt tidligere er dette 92,9% av standardverdien. Denne feilmarginen kommer av systematiske feil, som forekommer som følge av antagelser og unøyaktighet. I all hovedsak da fra verdiene for b og T men også mindre systematiske og tilfeldige feil. Noen av disse feilene vil være vanskelig å unngå, grunnet begrensede ressurser, og at vi ikke innehar kunnskap til å regne mer komplisert på det. Selv om verdien vår ikke ble helt presis, ser vi at aviket ikke er stort tatt i betraktning at vår G og tabellverdien for gravitasjonskonstanten er svært små tall.

Referanser

- [1] Newton, Sir Isaac. (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Publisert av Isaac Newton, London, 1867. Informasjon hentet fra Stanford Encyclopedia of Philosophy den 10. oktober 2019, <https://plato.stanford.edu/entries/newton-principia/>

- [2] E. V. Herland, I. B. Sperstad, K. Gjerden, M. H. Farstad, T. A. Bojesen, A. G. Gjendem og T. B. Melø. *Laboratorium i emnene TFY4145 Mekanisk fysikk, FY1001 Mekanisk fysikk, NTNU* (sist oppdatert høsten 2018).