$E = CT$ $\qquad \dot{E} = P_{inn} - Q_{ut}$

Likevektspunkt: $\bar{x}$ har den egenskapen at hvis systemet starter i dette punktet, så forblir det i dette punktet. Stasjonær verdier er et likevektspunkt. $\dot{x} = 0$

$$\bar{x} = -\frac{bu}{a}$$

Kursvinkel $\dot{\psi} = r \rightarrow$ girhastighet

endrings hastighet $\qquad \dot{r} = -\frac{1}{T} r + \frac{K}{T} \delta$

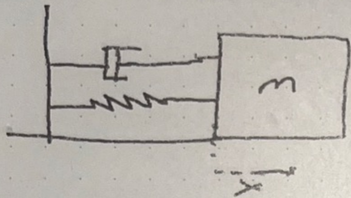
$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

$$r^2 + pr + q = 0 \qquad r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$x(t) = Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t}$$

$$x(t) = Ce^{rt} + Dte^{rt}$$

$$x(t) = e^{at}(C\cos bt + D\sin bt)$$



$F_s = kx$

$F_d = d\dot{x}$

$\sum F = m\ddot{x}$

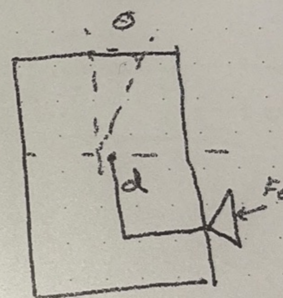
$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Momentbalanse sier at treghetsmomentet J · vinkelakselerasjonen = summen av alle momenter

$$J\ddot{\theta} = \sum M$$

$m\dot{v} = \sum F$ bare for rotasjon istedenfor.

$M_t = dF_t$



$$\ddot{\theta} = \frac{F_t d}{J} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{F_t d}{J}t + C_1$$

$$\theta = \frac{F_t d}{2J}t^2 + C_1 t + C_2$$

Forsterkning: $k = -\frac{b}{a}$, $x_s = ku$

Tidskonstant: $\dot{x} = ax + bu$ $\quad x(0) = 0$

$s(T) = x$

$x(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$ $\quad T = -\frac{1}{a}$

$g(t) = \frac{x_s}{T}t$

$x(t) = (x_0 + \frac{b}{a})e^{at} - \frac{b}{a}$ $\quad a = -\frac{1}{T}$

$\dot{x}(0) = \frac{x_s}{T}$ → tangent i $x(0)$ $\quad x(t) = x_0 e^{at} - \frac{b}{a}(1 - e^{at})$

$x(t) = x_s(1 - e^{at})$

$\dot{x} = \frac{x_s}{T}e^{-\frac{t}{T}} \Leftarrow x(t) = x_s(1 - e^{at})$

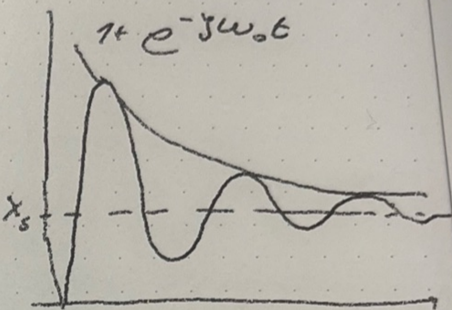
Udempet resonansfrekvens ω_0.
Relativ dempingsfaktor ζ.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Underdempet, $0<\zeta<1$

Kritisk dempet, $\zeta=1$

Overdempet, $\zeta>1$



Frekvens på svingninger

$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

Dempet resonansfrekvens

$\omega = 2\pi f$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(C\cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t) + D\sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t)\right)$$

Relativ oversving $\boxed{\delta = \frac{x_{max}-x_s}{x_s}}$

$$\delta(\zeta) = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$\delta(0)=1 \rightarrow$ Stående svingninger / ingen demping

$\delta(1)=0 \rightarrow$ ingen svingninger / kritisk dempet

$$\zeta(\delta) = \frac{|\ln\delta|}{\sqrt{\pi^2+(\ln\delta)^2}}$$

Tid for maxpunkt

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}}$$

Absolutt dempingsfaktor $\zeta\omega_0$

og tidskonstanten $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_0}$

Innsvingningstid $T_s = k\tau = \frac{k}{\zeta\omega_0}$ $k = 4$ vanlig $= \pm 2\%$ av x_s

Eulers metode $\dot{x} = f(x)$

tangenten i et punkt $x_n = \dot{x} = f(x_n)$

Ettpunktformelen gir $h = t_{n+1} - t_n$

$$x_n = f(x_n)(t - t_n) + b$$

$$x_{n+1} = f(x_n)(t - t_{n+1}) + b$$

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n)(t_{n+1} - t_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + h f(x_n)$$

Skrittlengde: kan bli numerisk ustabil om h er for stor.

For at en numerisk løsning skal være stabil må $x(t)$ være konstant synkende: $|x_{n+1}| \leq |x_n|$

$\dot{x} = \lambda x$

$$x_{n+1} = (1 + h\lambda)x_n$$

$$|(1 + h\lambda)x_n| \leq |1 + h\lambda| \cdot |x_n|$$

$$|1 + h\lambda| \leq 1$$

$$0 < h \leq -\frac{2}{\lambda}$$

Integralvirkning

Tar vekk stasjonæravvik, og øker ordenen på systemet. $\dot{v} = -\frac{k}{m}v + \frac{1}{m}(k_p e + k_i \int_0^t e \, d\tau$

$x_1 = \int_0^t e \, d\tau \qquad \dot{x}_1 = v_r - x_2$

$x_2 = v \qquad \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{m}(k_p(v_r - x_2) + k_i x_1)$

Demping $k_d(\dot{\theta}_r - \dot{\theta})$

Feks $J\ddot{\theta} = F_{td}$ vil få svingninger med P regulator.

hvis man legger til et fysisk dempingsledd $k_d\dot{\theta}$ i modellen får man en vanlig andreordens diff-ligning som kan stabilisere seg. For den har man en relativ dempingsfaktor ζ

Legge til kunstig $k_d(\dot{\theta}_r - \dot{\theta})$

Effekt: Dempe transienter + pådraget reagerer raskere på endring i feilen. Utsatt for måle støy. Særlig for høyfrekvente signaler

$f = \omega_0 \qquad v(t) = a \sin(\omega_0 t)$

$\dot{v}(t) = \omega_0 \sin(\omega_0 t)$

Foroverkobling for målbar forstyrrelse
Konstante forstyrrelse kan motvirkes av integralvirkning.

$\dot{h} = -\frac{k}{\rho A} h + \frac{w_{inn}}{\rho A} - \frac{w_f}{\rho A}$

$u = k_p e + k_i \int e\,dt - w_f$

Tidsforsinkelse: hvis det er transportforsinkelse i pådraget.

$\dot{x}(t) = a x(t) + b u(t - T)$

$\tau = \frac{L}{v} = \frac{AL}{q} = \frac{\rho A L}{w}$

Volumstrøm

$r = 0 \quad y = x$

Valg av regulatorparametere

$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = u$ – PD-reg

$\ddot{x} + \underbrace{(2\zeta\omega_0 - k_d)}_{2\hat{\zeta}\hat{\omega}_0}\dot{x} + \underbrace{(\omega_0^2 - k_p)}_{\hat{\omega}_0^2} x = 0$

$k_p = \omega_0^2 - \hat{\omega}_0^2 \qquad k_d = 2(\zeta\omega_0 - \hat{\zeta}\hat{\omega}_0)$

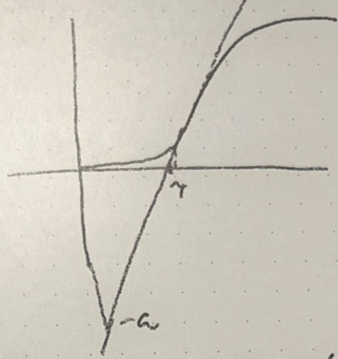
Velge $\hat{\zeta}$ til 1 feks.

Ziegler-Nichols metode:

$k_i = \frac{k_p}{T_i} \qquad k_d = k_p T_d$

I åpen sløyfe: Dvs ingen tilbakekobling eller reg

sprang i pådrag



$\boxed{\text{Stabilitet}}$

kan alltids skyves til origo

$\dot{x} = f(x)$ likevektspunkt $\bar{x} = 0$

$y = x - \bar{x}$

Likevekt, hvis en prosess starter i $\bar{x}$, vil den forbli i dette punktet.

Det er stabilt i dette punktet dersom etter forstyrrelser eller forsyvninger, vil den være tilbøyelig til å gå tilbake til likevekten.

Ustabilitet til $\bar{x}$ at hvis den går ut av $\bar{x}$, vil den gå lenger vekk fra likevektspunktet.

$\dot{y} = \dot{x}$ $\quad \dot{y} = f(x) = f(y + \bar{x}) \triangleq g(y)$ der $g(0) = 0$

Definisjon

Stabilt hvis for hver $\varepsilon > 0$ finnes en

$$\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{slik at} \quad \|x(0)\| < \delta$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

asymtotisk stabil hvis δ kan velges

så $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

Hvis man starter nært likevekts punktet

vil man forbli nært likevektspunktet.

$\dot{x} = ax, \quad a < 0 \qquad x(t) = x_0 e^{at}$

$|x_0| < \delta \qquad |x(t)| = x_0 e^{at} \leq |x_0| \cdot |e^{at}|$

Siden $a < 0$ vil $e^{at} < 1$ og dermed

$$|x(t)| \leq |x_0| < \delta = \varepsilon$$

Stabilt med $\delta = \varepsilon$

Siden $x_0 e^{at} \to 0$ når $t \to \infty$ er det asymptotisk stabilt.

2. ordens udempa dus svingninger:

x_1 som tilstander: faseplott som

x_2 harmonisk oscillator

marginalt stabilt

Underdempa → asymptotisk stabilt

Siden det svinger seg inn mot likevektspunktet.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}$$

hvis $0<\zeta<1$ $\quad x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(C\cos(\underbrace{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d}\, t) + D\sin\omega_d t\right)$

Siden $\zeta\cdot\omega_0 > 0$ så er $x(t)\to 0$ når $t\to\infty$

så asymptotisk stabil.

Udempet og så stabilt $\quad \zeta = 0 \quad x(t) = C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t$

$\zeta > 1 \quad \omega_0 > 0$

$$x(t) = Ce^{(-\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t} + De^{(-\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t}$$

Siden begge røttene er negative er det asymptotisk stabilt.

Samme med $x(t) = Ce^{-\omega_0 t} + Dte^{-\omega_0 t}$ $\quad \zeta = 1$

Så hvis $p>0$ og $q>0$ → asymptotisk stabilt.

$f(\bar{x})$ $\quad \bar{x}$ lokalt stabilt hvis $\lambda = f'(\bar{x}) < 0$

$x = \bar{x} + z$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{x}+z) = f(\bar{x}+z) \Rightarrow \frac{d}{dt} = f(\bar{x}+z)$$

z er liten så: $\quad L(\bar{x}+z) = \underset{\downarrow 0}{f(\bar{x})} + zf'(\bar{x}) = \lambda z$

$$\dot{z} = \lambda z$$

stabil hvis $\lambda < 0$

Eks: $\dot{N} = 2N\left(1 - \frac{N}{100}\right)$ $\quad f(x) = 2N\left(1-\frac{N}{100}\right) = 0$

$\bar{x}_1 = 0$

$f'(x) = 2 - \frac{2N}{50}$ $\quad \bar{x}_2 = 100$

$f'(\bar{x}_1) = 2 > 0$ dvs ustabilt

$f'(\bar{x}_2) = -2 < 0$ dvs stabilt

Stabilisere

$\dot{x} = ax$ med $a > 0$ er et ustabil

men hvis vi legger til en negativ tilbakekobling

$u = -Kx \quad K > 0$

i lukket sløyfe $\quad \dot{x} = ax - kx = (a-k)x$

$x(t) = x_0 e^{(a-k)t}$ $\quad$ så stabil for $k > a$