
Propagation des ondes acoustiques dans les cristaux phononiques: exploration des bandes interdites

Dan Calamia 21111315

Augustin Carteron 21111466

CMI-MÉCA-L3

Stage en laboratoire

Encadrants : Rémi Cornaggia et Benoit Tallon

Octobre-Janvier 2023



Remerciements

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de notre stage et qui nous ont aidés lors de la rédaction de ce rapport.

Nous voudrions remercier tout d'abord nos coordinateurs de stage, Rémi Cornaggia, enseignant à Sorbonne Université et chercheur à l'Institut Jean le Rond d'Alembert, qui nous a suivis principalement sur l'aspect théorique, et Benoit Tallon, maître de conférences à Sorbonne Université et chercheur à l'Institut Jean le Rond d'Alembert, qui nous a accompagnés lors des expériences et qui a nous a suivis sur l'aspect expérimental.

Nous tenons aussi à remercier Régis Marchiano, enseignant à Sorbonne Université et chercheur à l'Institut Jean le Rond d'Alembert au sein de l'équipe MPIA, qui nous a pris le temps à nous expliquer et clarifier des notions concernant ce travail.

De même, nous remercions notre camarade et ami Erdi Çan pour son aide sur la partie résolution numérique.

Nous remercions aussi toute l'équipe de la Licence Mécanique qui nous ont permis d'effectuer ce stage en laboratoire, en particulier Jean-Camille Chassaing, directeur de la licence Mécanique et chercheur à l'Institut Jean le Rond d'Alembert au sein de l'équipe MPIA.

Préface

Pour notre troisième année de licence au *CMI* (Cursus Master en Ingénierie), nous avons eu l'opportunité de travailler au près d'enseignants chercheurs travaillant à Sorbonne Université. Il s'agit d'un stage, effectué dans le laboratoire *∂'Alembert* (Institut Jean Le Rond d'Alembert). Parmi un vaste choix de sujet, nous avons décidé de travailler ensemble sur le seul sujet traitant directement du domaine de l'acoustique. Le but primitif de ce stage est de découvrir à la fois le travail de recherche, mais aussi de nous introduire au domaine de l'acoustique et notamment au futur master.

Résumé

Ce rapport de stage met en évidence expérimentalement l'existence de bande interdite dans un cristal photonique à maille carrée. Nous avons travaillé avec des forêts de tiges d'acier immergées dans l'eau. Nous mettons en lumière notamment l'aspect traitement du signal pour nos expériences. La superposition de ces résultats avec ceux obtenus numériquement, grâce à la théorie de Bloch, nous permet d'observer les minima de transmission acoustique du cristal, évaluant les bandes interdites de ce dernier.

Summary

Waves propagating in phononic crystals would experience attenuation at certain frequencies. This occurs when scattering waves create destructive interference. In this context, this study aims to highlight the existence of band gaps for acoustic waves. We will be working with square matrices composed of steel cylinders immersed in water. We have shed light on our work related to signal processing. By comparing our results with predictions made by the Bloch theorem, we are able to evaluate the crystal's band gaps by observing the minima of the acoustic transmission through the crystal.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Le cristal phononique	6
3	Solution de l'équation des ondes dans le cristal	7
3.1	Solution de l'équation des ondes	7
3.2	Les ondes de Bloch	8
3.3	Résolution du problème avec <i>FreeFEM</i>	9
4	Étude expérimentale du cristal	11
4.1	Principe de mesure	11
4.2	Dispositif expérimental	12
4.2.1	Les capteurs	12
4.2.2	Le cristal	12
4.2.3	Protocole	13
4.2.4	Signal généré	13
4.2.5	Signal mesuré	14
4.3	Résultats et interprétations	15
4.3.1	Variation d'angle	16
4.4	Les sources d'erreurs	19
5	Introduction à une résolution numérique	20
6	Conclusion	23
7	Annexe	24

Chapitre 1

Introduction

À la fondation *Juan March* à Madrid, se trouve une sculpture faite par Eusebio Sempere (sculpture espagnole du 20^e siècle). Inspirée par le mouvement minimalisme des années 50, Eusebio Sempere décide de créer une oeuvre d'art, composée de différentes tailles de cylindres, et tous espacés périodiquement selon une forme carrée. Alors qu'elle est exposée dans les jardins de la fondation, un phénomène très étrange survient lorsque vous écoutez une personne parler à travers de la sculpture.

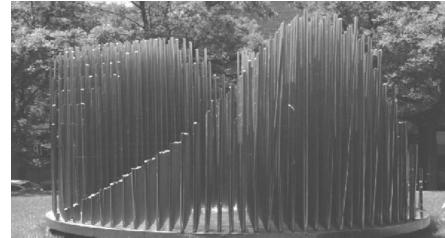


FIGURE 1.1 – Sculpture de Eusebio Sempere[1]

C'est le sujet d'introduction pour de nombreuses publications scientifiques exposant les phénomènes de *band gaps* (bandes interdites en anglais). Des études comme celle menée par des chercheurs de l'Université de Valence[2] montrent que la sculpture atténue les fréquences autour de 1.67KHz (de l'ordre de -15dB). Dans le travail d'Arpan Gupta[3] (professeur d'acoustique à l'institut indien de technologie de Delhi), il affirme que pour pouvoir atténuer des fréquences dans le domaine de l'audible, il faut que la longueur d'onde soit comprise entre $[0.017m; 17m]$. De même, dans le livre *Solid State Physics*[4], les auteurs démontrent que la distance entre les cylindres doit être de l'ordre de la longueur d'onde pour pouvoir obtenir le phénomène de bande interdite. L'étude de ce domaine évolue également en parallèle avec la science, notamment dans la recherche des métamatériaux.[5] Ainsi, les domaines d'application des bandes interdites sont nombreux : le filtrage, le guidage et l'isolation acoustiques en sont des exemples.

La sculpture de Sempere peut être assimilée à un "cristal" dit "phononique". C'est une création humaine où des cylindres (très souvent en métal) sont espacés périodiquement. On appelle bande interdite une région pour laquelle certaines fréquences sont fortement atténuées.

L'étude des bandes interdites offre même intérêt à Sorbonne Université[6], où des travaux théoriques menés par des étudiants en master d'acoustique montrent l'existence de ces *bands gaps* numériquement pour une maille carrée. Ainsi, en travaillant sur le même cristal, notre recherche permettra de mettre en évidence ces bandes interdites.

De cette façon, l'objectif primordial de ce travail est d'évaluer expérimentalement le phénomène de bande interdite pour un cristal présentant une maille carrée. Ainsi, nous aborderons dans un premier temps les cristaux phononiques. Dans un second temps, nous traiterons l'aspect théorique pour comprendre la notion de bande interdite. En troisième lieu, nous présenterons nos résultats expérimentaux. Enfin, nous conclurons ce rapport avec une proposition de résolution numérique. De même, à la fin, une annexe vous proposera des graphiques et exposera en détail les différentes étapes des calculs.

Chapitre 2

Le cristal phononique

Un cristal phononique est une structure périodique artificielle (qu'on notera Ω) dans laquelle se propagent des ondes acoustiques. On appelle réseau de *Bravais* la distribution des ces cylindres dans l'ensemble Ω , qui représente la périodicité du cristal. Ce réseau est caractérisé par deux vecteurs élémentaires \mathbf{e}_i avec $i = 1, 2$ (dans le cas de deux dimensions).

On définit de la zone de *Brillouin* comme la cellule primitive dans l'espace réciproque (la base dual de la base décrite par les vecteurs \mathbf{e}_i), rendant compte de la symétrie élémentaire de la maille du système étudiée.^[7] Cette espace est définie par des vecteurs réciproques $\tilde{\mathbf{e}}_i$ avec $i = 1, 2$, vérifiant la condition :

$$\mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \quad (2.1)$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker, qui vaut 1 lorsque $i = j$, et 0 sinon.

Au cours de ce stage, nous allons travailler avec un cristal présentant une maille carrée. Ainsi, comme le suggère la figure (2.1), on pose a comme la distance qui sépare nos cylindres de rayon r . La base formée par les deux vecteurs \mathbf{e}_i est orthogonale, avec une norme $\|\mathbf{e}_i\| = a$. En introduisant la base réciproque à notre ensemble : pour satisfaire (2.1), on doit avoir $\|\tilde{\mathbf{e}}_j\| = \frac{1}{a}$. Cette nouvelle base obtenue est exposée sur la figure (2.2). Dans la littérature, on introduit les coordonnées Γ, X, M et Y pour fixer un repère. Enfin, on introduit la zone de Brillouin *irréductible* (en noir sur la figure (2.2)) pour pouvoir reconstruire le réseau réciproque par symétrie. La maille étant carrée, il suffit d'étudier la cellule primitive entre 0° et 45° pour évaluer intégralement le comportement du cristal.

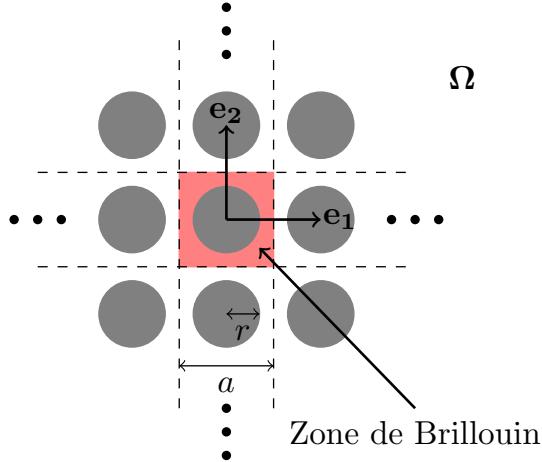


FIGURE 2.1 – Mise en évidence de la zone de Brillouin avec une maille carrée

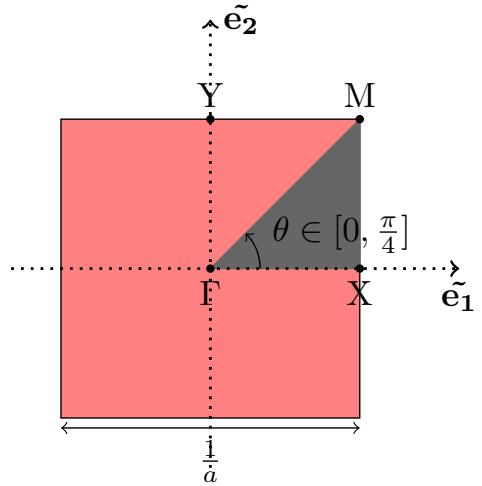


FIGURE 2.2 – La zone de Brillouin avec la zone de Brillouin *irréductible*

Chapitre 3

Solution de l'équation des ondes dans le cristal et le diagramme de Bloch

Une onde acoustique est une perturbation d'un milieu qui se propage dans l'espace au cours du temps. Lors de son passage, elle entraîne notamment un changement local de pression. On pose u le champ de pression engendré par l'onde. Dans le cas de notre étude, l'évolution de u dépend de la géométrie du milieu (les conditions aux limites). Pour décrire le comportement de l'onde dans le cristal, on utilise l'équation de ∂' Alembert (ou équation des ondes) en deux dimensions :

$$\boxed{\partial_{tt}u - c_0^2 [\partial_{xx}u + \partial_{yy}u] = 0} \quad (3.1)$$

avec x, y les variables cartésiennes de l'espace, t celle du temps et c_0 la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans le milieu étudié.

3.1 Solution de l'équation des ondes

Dans le cas où le champ de pression est étudié en une seule dimension de l'espace, l'équation des ondes devient :

$$\partial_{tt}u - c_0^2 \partial_{xx}u = 0 \quad (3.2)$$

La solution générale de cette équation peut alors s'écrire sous la forme :

$$u(x, t) = F(x - c_0t) + G(x + c_0t) \quad (3.3)$$

avec F et G des fonctions scalaires qui dépendent des conditions initiales.

D'un point de vue physique, on a F qui est une onde progressive (onde se décalant vers les x positifs), et G une onde rétrograde (onde se décalant vers les x négatifs). En s'intéressant seulement à l'onde progressive et en notant $x = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_x$, avec \mathbf{e}_x le vecteur unitaire suivant l'axe x , et \mathbf{x} la position du point considéré projeté suivant l'axe x , on a :

$$u(x, t) = F(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_x - c_0t)$$

Dans le cas où nous allons nous focaliser sur l'étude en deux dimensions, on peut noter \mathbf{e}_i la direction de propagation de l'onde et \mathbf{x} la position du point M dans l'espace \mathbb{R}^2 . Ainsi, on a :

$$u(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i - c_0t) \quad (3.4)$$

Le théorème de réciprocité de la transformée de Fourier affirme que la fonction F peut être décrite par une somme de fonctions sinusoïdales en temps.[8] Ainsi, à partir du tableau (7.1) (voir annexe p.24), on peut construire une nouvelle fonction :

$$u(\mathbf{x}, t) = \iint \tilde{u}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{xk} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega \quad (3.5)$$

En utilisant l'onde plane progressive harmonique obtenue avec (3.5) et en injectant cette solution dans l'équation de ∂ 'Alembert (3.1), on obtient la relation de dispersion :

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0}} \quad (3.6)$$

Cette relation lie la pulsation ω et le nombre d'onde k . On introduit \mathbf{k} le vecteur d'onde comme $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_i$. Sa norme est donnée par k , et sa direction est donnée par les vecteurs \mathbf{e}_i . Le nombre d'onde est proportionnel à l'inverse de la longueur d'onde (sa dimension est $[k] = L^{-1}$). Ainsi, on peut alors réécrire l'équation (3.4) avec le résultat obtenu avec (3.5) pour obtenir l'expression des ondes planes harmoniques :

$$\boxed{u(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} [u_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}]} \quad (3.7)$$

3.2 Les ondes de Bloch

Jusqu'à présent, nous nous sommes focalisés sur l'étude de la propagation des ondes dans un milieu sans obstacle. L'absence de cette condition nous donnait tout simplement l'équation (3.1) à résoudre. Cependant, l'onde se propageant dans le cristal doit vérifier une condition de non pénétration à la frontière des cylindres. Ainsi, le système d'équation devient :

$$\begin{cases} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial_n \tilde{\Omega} \\ \partial_{tt} u(\mathbf{x}, t) - c_0^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (3.8)$$

avec \mathbf{v} la vitesse des particules dans l'eau entraînées par l'onde acoustique, \mathbf{n} la normale sortante des cylindres qui composent notre cristal, et $\partial_n \tilde{\Omega}$ la frontière des cylindres.

A partir de l'équation d'Euler linéarisée, nous pouvons trouver une relation entre la vitesse parti-culaire et le champ de pression :

$$\begin{aligned} \rho_0 \partial_t \mathbf{v} + \nabla u(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ \text{Mais } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \Rightarrow \partial_t \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0 \Rightarrow \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

avec ρ_0 la masse volumique du milieu supposée invariante au cours du temps.

Ainsi, en exploitant l'équation d'Euler linéarisée, nous pouvons récrire notre système comme :

$$\boxed{\begin{cases} \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial_n \tilde{\Omega} \\ \partial_{tt} u(\mathbf{x}, t) - c_0^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases}} \quad (3.9)$$

La solution de ce problème est maintenant plus complexe que celle trouvée par l'onde progressive harmonique (3.7), à cause cette condition de non-pénétration.

De cette façon, on introduit la fonction de Bloch, solution du système (3.9) :

$$\boxed{\begin{cases} u(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)} \\ \text{avec } U \text{ } \mathcal{B}\text{-périodique dans } \Omega \end{cases}} \quad (3.10)$$

On dit que $U(\mathbf{x})$ est la solution propre des obstacles dans la cellule unité (qu'on note \mathcal{B}), invariant dans l'ensemble Ω , et que la fonction $u(\mathbf{x}, t)$ est modulée par une onde plane décrite par $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)}$. Cette fonction peut uniquement être appliquée dans un milieu périodique.[9] On peut donc restreindre l'étude à la zone de Brillouin en raison de la périodicité de l'ensemble Ω .[10] Ainsi, toutes les ondes traversant le cristal s'expriment sous la forme d'une fonction de Bloch. Notons toutefois qu'il existe des régions fréquentielles où la fonction de Bloch n'admet pas de solution. On obtient alors le problème de Bloch réduit (voir annexe p.24 pour le détail des calculs) :

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \nabla_{\mathbf{k}} U(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial_n \tilde{\Omega} \\ A_k U(\mathbf{x}) = \lambda(k) U(\mathbf{x}) & \text{dans } \mathcal{B} \end{cases}} \quad (3.11)$$

avec $\lambda(k) = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2$ les valeurs propres et en notant $A_k U(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{k}} \cdot [\nabla_{\mathbf{k}} U(\mathbf{x})]$ avec $\nabla_{\mathbf{k}} = (\nabla + i\mathbf{k})$.

Le problème maintenant obtenu est un problème aux valeurs propres : il faut trouver les couples (ω, \mathbf{k}, U) tel que le système (3.11) soit vérifié. Pour pouvoir le résoudre, on peut fixer le vecteur d'onde \mathbf{k} (c'est à dire fixer le nombre k et sa direction \mathbf{e}_i dans $\nabla_{\mathbf{k}}$) pour chercher les solutions sous la forme d'une relation de dispersion (comme dans (3.6)). On obtient donc certaines fréquences $f_n(k)$ solutions de l'équation :

$$\boxed{\omega_n(k) = c_0 \sqrt{\lambda_n(k)} \Rightarrow f_n(k) = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\lambda_n(k)}} \quad (3.12)$$

3.3 Résolution du problème avec *FreeFEM*

FreeFEM est un langage de programmation qui permet de résoudre des équations différentielles. Ce langage utilise du C++ et des résolveurs connus comme *HPDDM* et *PETSc* dans son propre langage pour résoudre des problèmes très rapidement. Il a été conçu à Sorbonne Université par Frédéric Hecht en 1992[11]. Comme son nom l'indique, *FreeFEM* utilise la méthode des éléments finis (*MEF*) pour résoudre numériquement des problèmes différentiels comme (3.11) (*FEM* pour *finite element method* en anglais). Avec des conditions aux limites définies par $\nabla_{\mathbf{k}} U(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial_n \tilde{\Omega}$ (des conditions dites de Neumann), on peut utiliser la *MEF* pour résoudre $A_k U(\mathbf{x}) = \lambda(k) U(\mathbf{x})$ de manière discrète.[12]

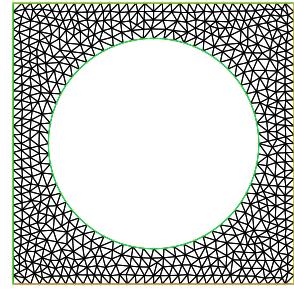


FIGURE 3.1 – Le calcul par la *MEF* est effectué sur une cellule unité, avec l'application de conditions aux limites périodiques

Grâce à la périodicité du cristal, il suffit toujours de s'intéresser seulement à ce qui se passe dans la cellule unité pour pouvoir déterminer ce qui se passe dans l'ensemble Ω . Car notre cristal est périodique, on impose des conditions de périodicité sur les frontières de \mathcal{B} .

On dit qu'on obtient des branches continues lorsqu'on trouve des solutions du problème aux valeurs propres. De manière similaire, on appelle bande interdite les zones où aucune valeur du nombre d'onde ne permet l'existence de la solution.

Dans le cas où nous fixons toujours \mathbf{k} mais on change l'angle incident des ondes sur le cristal (qu'on pose θ , variant dans le plan $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ (voir figure (2.2))), on remarque que les bandes interdites se rétrécissent et voir même disparaissent (voir annexe p.25). De même, les branches semblent se rejoindre à des points communs (par exemple vers $1.1MHz$). On remarque de même que certaines bandes interdites restent sur tous les graphiques. On peut donc affirmer que l'angle incident de l'onde influence le comportement du cristal. Ainsi, voici le graphique qui met en évidence les bandes interdites pour le problème (3.11) avec le vecteur d'onde \mathbf{k} fixé.

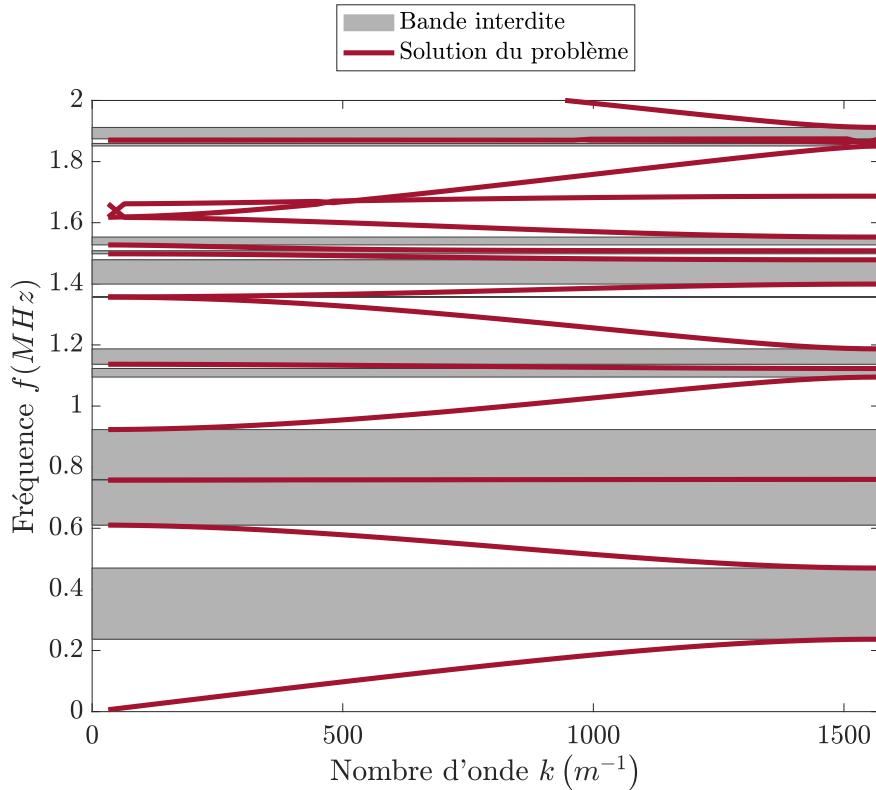


FIGURE 3.2 – Exemple de diagramme de Bloch pour $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_x$

La solution obtenue est pour une maille carrée de côté $a = 2mm$ avec le rayon de nos cylindres faisant $r = 0.75mm$. On remarque que les bandes interdites les plus importantes se situent entre $[0; 1Mhz]$. Nous allons alors déterminer expérimentalement les bandes interdites dans cette intervalle pour ce même cristal.

Chapitre 4

Étude expérimentale du cristal

4.1 Principe de mesure

Les bandes interdites d'un cristal sont repérées par des minima de transmission acoustique. Pour pouvoir évaluer expérimentalement son comportement, un signal électrique (S_E) est envoyé à un émetteur (e), qui génère une onde acoustique (S_A), et qui est reçu par un récepteur (r), converti en signal électrique (S_R) après avoir traversé le cristal (c). Une expérience sans le cristal est d'abord réalisée pour obtenir la bande passante des transducteurs (e et r). Une deuxième est donc réalisé avec le cristal pour pouvoir déterminer ses fréquences interdites.

Sans le cristal

Mathématiquement, le signal acoustique émis (S_A) est le produit de convolution entre le signal électrique S_E et la réponse impulsionnelle de l'émetteur h_e . Le même raisonnement peut s'appliquer pour déterminer le signal électrique reçu de référence S_{R_r} :

$$\begin{cases} S_a &= S_E \circledast h_e \\ S_{R_r} &= S_a \circledast h_r = S_E \circledast h_e \circledast h_r \end{cases}$$

En effectuant la transformée de Fourier, on obtient :

$$\mathcal{F}[S_{R_r}] = \tilde{S}_{R_r} = \tilde{S}_E \cdot \tilde{h}_e \cdot \tilde{h}_r \quad (4.1)$$



FIGURE 4.1 – Expérience sans le cristal

Avec le cristal

On note S_{R_c} le signal électrique réçu avec la présence du cristal. En notant S_t l'onde acoustique transmises à travers celui-ci, on peut appliquer le même raisonnement :

$$\begin{cases} S_a &= S_E \circledast h_e \\ S_t &= S_a \circledast h_c \\ S_{R_c} &= S_t \circledast h_r = S_a \circledast h_c \circledast h_r \\ &= S_E \circledast h_e \circledast h_r \circledast h_c \end{cases}$$

Ainsi, en effectuant la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}[S_{R_c}] = \tilde{S}_{R_c} = \tilde{S}_E \cdot \tilde{h}_e \cdot \tilde{h}_c \cdot \tilde{h}_r \quad (4.2)$$

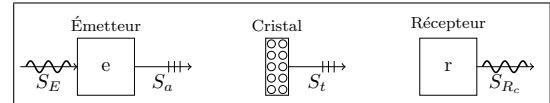


FIGURE 4.2 – Expérience avec le cristal

En effectuant le rapport (4.2) sur (4.1), on obtient la fonction de transfert de notre cristal :

$$|\tilde{h}_c| = \frac{|\tilde{S}_{R_c}|}{|\tilde{S}_{R_r}|} \quad (4.3)$$

On obtient alors le module de la fonction de transfert du signal, qui représente le coefficient de transmission de notre cristal : les fréquences interdites seront repérées par des minima de $|\tilde{h}_c|$. Ainsi en pratique, nous effectuerons les transformées de Fourier des signaux récus par le récepteur (avec et sans cristal) en post-traitement sur *Matlab* et nous effectuerons le rapport des deux derniers.

4.2 Dispositif expérimental

4.2.1 Les capteurs

Dans les laboratoires de ∂'Alembert, les chercheurs travaillent en immersion dans de l'eau pour évaluer expérimentalement les bandes interdites. Ils sont équipés d'un bassin dans lequel se trouvent deux transducteurs, connectés à l'ordinateur du laboratoire, et le cristal évalué.

Par définition, un transducteur est un instrument permettant de transformer une grandeur physique en une autre. Dans notre cas, les transducteurs convertissent l'énergie des vibrations acoustiques en tension électrique (le matériau se polarise électriquement lorsqu'il est soumis à une contrainte mécanique). Le processus inverse est également appliqué pour émettre une onde acoustique. En ce qui concerne leur composition, ils sont entourés d'un matériau absorbant, appelé *backing*, de lames d'impédance et d'une couche piézoélectrique permettant la génération de l'onde. Le *backing* sert à piloter les bandes passantes du transducteur tandis que les lames apportent une meilleure transmission dans le milieu visé.

Le champ acoustique émis par le transducteur résulte d'une onde plane qui interfère avec les ondes diffractées par les bords de l'émetteur. Pour pouvoir comparer nos résultats avec la théorie, il faut une répartition spatiale homogène du champ de pression. Ainsi, on trouve dans la littérature[13][14] que la distance d (appelée distance de champ lointain) à laquelle on a plus d'interférences est de l'ordre :

$$d \approx \frac{r^2}{\lambda} \approx \frac{r^2 f_0}{c_0} \quad (4.4)$$

avec r le rayon du transducteur et λ la longueur d'onde définie par la fréquence centrale f_0

Pour pouvoir vérifier notre modèle théorique, il faut tout d'abord connaître dans quel plage de fréquence nos capteurs fonctionnent. Nous avons vu théoriquement avec le diagramme de Bloch que les bandes interdites se situent entre $[0; 2MHz]$. De cette façon, nous avons utilisé d'abord un capteur de fréquence centrale $f_0 = 500KHz$ pour pouvoir observer les plus larges bandes interdites.

4.2.2 Le cristal

La création du cristal suit un protocole très simple. Le maillage de celui-ci est conçu numériquement en *C* afin d'être converti en fichier *.eps* (image vectoriel) avec *Python*. Le laboratoire est équipé d'un découpeur laser, pouvant percer des trous dans un plexiglas avec une précision de l'ordre du micromètre. Ainsi, deux bases sont créées où nos cylindres seront insérés. Sur le côté de notre base, nous avons deux encoches permettant de fixer les bases sur un même ensemble, garantissant la stabilité de notre cristal. Une fois que les bases sont créées, des cylindres en acier faisant $0.75mm$ de rayon sont insérés dans les trous à la main pour former le cristal. Voici un exemple de base utilisé pour un maillage carré, avec chaque trou espacé de $2mm$:

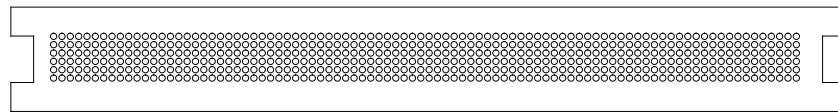


FIGURE 4.3 – Image vectoriel de la base

4.2.3 Protocole

Pour évaluer les bandes interdites du cristal, il faut d'abord évaluer le bon fonctionnement de l'émetteur et obtenir le signal S_{R_r} . Ainsi, une première évaluation de référence est effectuée sans le cristal dans l'eau. Sachant que les capteurs à dispositions font 1.25cm de rayon, nous avons d'après l'équation (4.4) une distance d'environ 6cm entre les transducteurs et le cristal respectivement (avec $c_0 = 1500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

Une deuxième manipulation maintenant est effectuée avec le cristal dans le bassin afin d'obtenir le signal S_{E_r} avec les mêmes distances conservées.

Les signaux obtenus par le récepteur sont ensuite envoyés dans l'ordinateur du laboratoire où un code *Python* permet d'échantillonner le signal et d'extraire les données. Nous avons enfin travaillé dans *Matlab* pour le traitement du signal et l'affichage des graphiques. Enfin, le rapport des transformées de Fourier des deux signaux obtenus permet d'obtenir le coefficient de transmission de notre cristal comme obtenu dans (4.3). Des images illustrant notre cristal et notre dispositif sont disponibles [p.26](#).

Le traitement du signal est indispensable pour pouvoir analyser nos données. Il permet de limiter les bruits, supprimer les échos et notamment lisser nos courbes.

4.2.4 Signal généré

Dans le cas où nous voudrions envoyer toutes les fréquences pour pouvoir observer le phénomène des bandes interdites, il faudrait envoyer un Dirac. Malheureusement, l'envoi d'un tel signal est impossible expérimentalement. Cependant, il existe des méthodes alternatives pour envoyer un intervalle de fréquence bien défini en modulant notre signal par une fonction gaussienne. Dans notre cas, nous modulions une fonction sinusoïdale à la fréquence centrale souhaitée (solution de l'équation de ∂' Alembert (3.1)) par une fonction gausienne. L'avantage de cette fonction réside dans le fait que, dans le domaine fréquentiel, la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne. Dans le cas général, on note la fonction gaussienne comme :

$$f(x) = A \exp\left(-\frac{(x - t_0)^2}{T^2}\right)$$

avec A l'amplitude, t_0 le décalage temporel, et T la taille de la fenêtre temporelle.

Il est important de noter que, plus la taille T est grande, plus son spectre est petit (voir annexe [p.27](#) avec en rouge la fonction gaussienne). Ainsi, en fonction des capteurs utilisés expérimentalement, il faudrait régler la taille de la fenêtre T pour pouvoir couvrir entièrement leurs bandes passantes. Ainsi, on a le signal envoyé :

$$s(t) = A \sin(2\pi f_0(t - t_0)) \cdot \exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{T^2}\right)$$

(4.5)

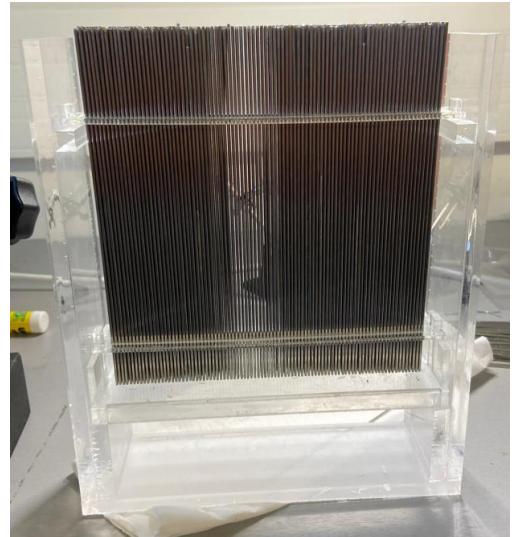


FIGURE 4.4 – Photographie du cristal réalisé

4.2.5 Signal mesuré

Dans le montage expérimental, nos deux transducteurs sont placés parallèlement en face. Cependant, nous travaillons dans une bassine d'eau où des ondes acoustiques réfléchies sur les parois des échos, qui sont présents dans le signal obtenu (deuxième signal reçu sur la figure (4.5)). Ces échos entraînent des fuites spectrales lors de la transformée de Fourier à cause de la périodicité du signal.

Ainsi pour résoudre ce problème d'écho, il faut fenêtrer le signal reçu par le récepteur. Il existe plusieurs types de fenêtre, mais le *tukey window* est utilisé car il permet de limiter les effets de lobes secondaires obtenus avec une fenêtre porte classique : le *tukey window* présente une courbe lisse contrairement à la fonction porte, son spectre fréquentiel est donc vite atténué. L'avantage du *tukey window* c'est qu'on peut jouer sur un paramètre (qu'on note ici r) qui détermine un certain intervalle où certaines valeurs du domaine L valent 1, et le reste décroît avec un facteur d'un cosinus (voir annexe p.28).

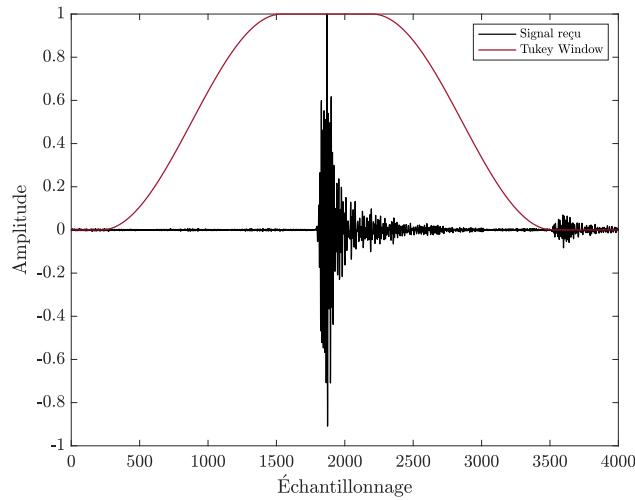


FIGURE 4.5 – Superposition du signal reçu et de la *tukey window*

Ci-dessous, nous exposons différents résultats obtenus expérimentalement après traitement du signal avec plusieurs valeurs de r . Nous traçons les résultats en dB pour pouvoir bien observer les fréquences interdites. Ainsi, on observe que les courbes sont plus lissées lorsque la *tukey window* est plus lisse, étant donné que les lobes secondaires sont atténués.

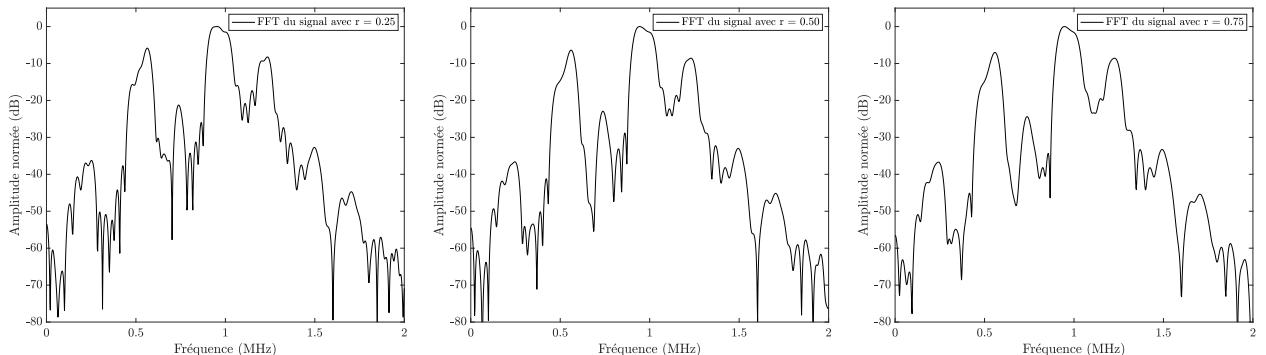


FIGURE 4.6 – FFT du signal reçu en fonction de la valeur r de la *tukey window*

4.3 Résultats et interprétations

Ayant expliqué la démarche pour évaluer les bandes interdites d'un cristal, nous pouvons désormais se pencher sur nos résultats en observant le coefficient de transmission. Ce dernier est toujours compris entre 0 et 1. On rappelle que ce coefficient quantifie les ondes transmises qui passent au travers du cristal. Ainsi, en l'absence de bandes interdites, ce coefficient devrait être grand par rapport à 0. Dans le cas où nous travaillons en dB , le cristal ne transmet pas d'énergie lorsque l'amplitude tend vers $-\infty$.

Pour valider nos expériences, nous pouvons d'abord nous appuyer sur les résultats obtenus théoriquement. Nous avons vu que pour une maille carrée, présentant un espace $a = 2mm$ avec un rayon $r = 0.75mm$, le cristal avait trois bandes interdites dans l'intervalle $[0; 1MHz]$. De même, d'après le travail effectué par des anciens étudiants à Sorbonne Université[6], ils obtiennent numériquement les mêmes bandes pour le même cristal. Ainsi, avec ces deux références, voici le coefficient de transmission de notre cristal obtenu expérimentalement :

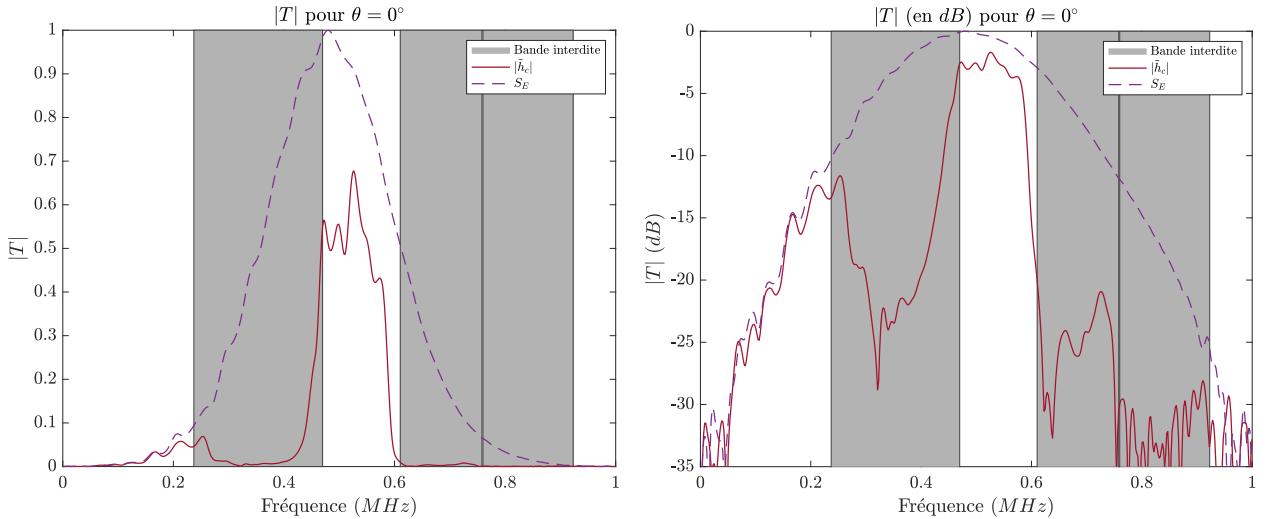


FIGURE 4.7 – Le coefficient de transmission pour une bande passante $[0; 1MHz]$ obtenu pour un cristal de maille carrée ($a = 2mm$ et $r = 0.75mm$)

Sur les graphiques sont superposées les bandes interdites obtenues théoriquement et la fonction de transfert du cristal. On observe premièrement que les résultats obtenus sont cohérents avec le modèle théorique. Le coefficient de transmission (noté $|T|$) est bien supérieur à 0 lorsqu'on n'est pas dans une bande interdite. On remarque toutefois que le coefficient n'est pas égal à 1. Comme remarqué par les anciens étudiants de Sorbonne Université dans leur rapport, ils trouvent numériquement une valeur de $|T|$ proche de 0.7 entre les deux bandes interdites $[0.5; 0.6MHz]$ pour 15 rangées. Sachant que nous avons seulement 6 rangées de cylindres comme l'illustre la figure (4.3), cela confirme aussi leur calcul sur l'influence du nombre de rangées, où la valeur de $|T|$ ne varie pas considérablement. Notons toutefois que nous n'arrivons pas à bien observer la bande interdite $[0.8; 0.9MHz]$ à cause de la bande passante de nos capteurs. De ce fait, nous avons décidé d'effectuer une deuxième expérience pour pouvoir à la fois déterminer cette bande interdite, mais aussi observer les autres bandes entre $[1; 2MHz]$.

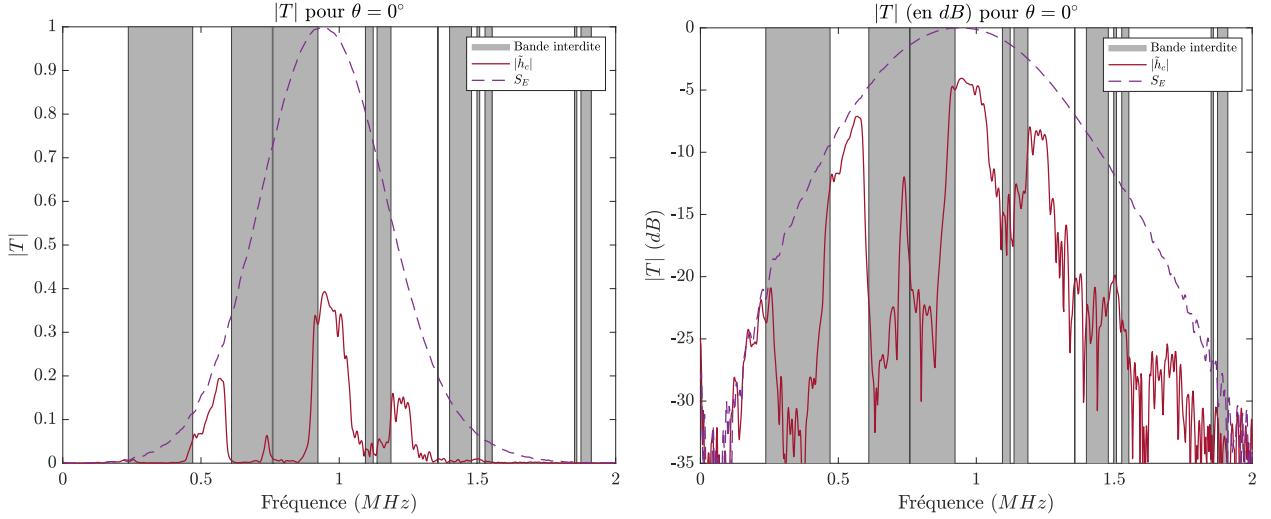


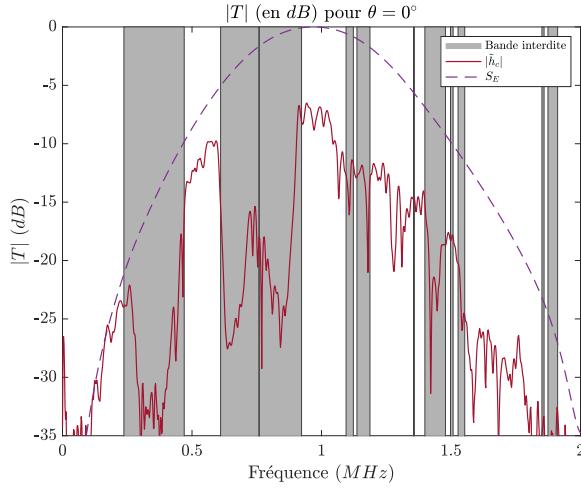
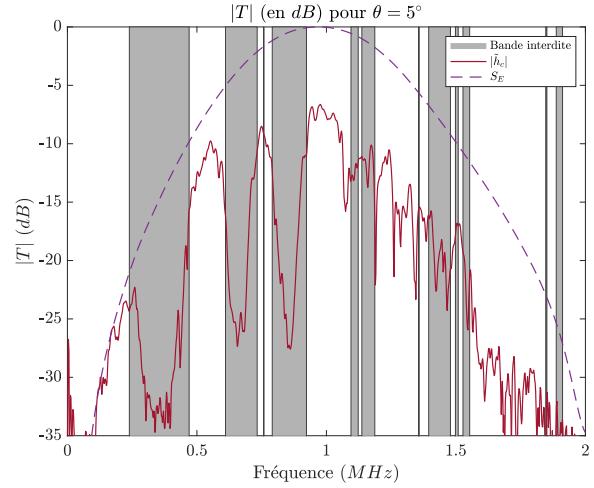
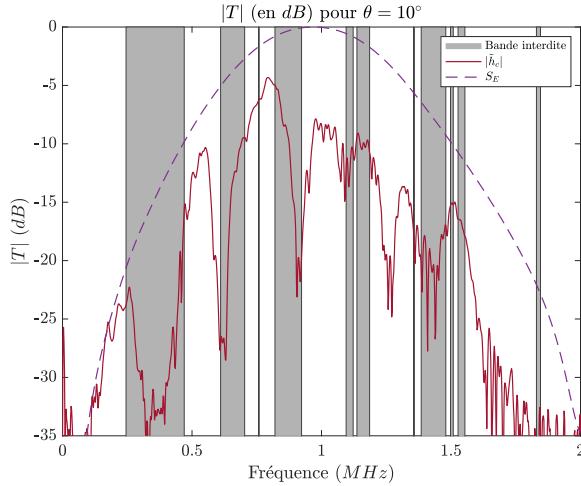
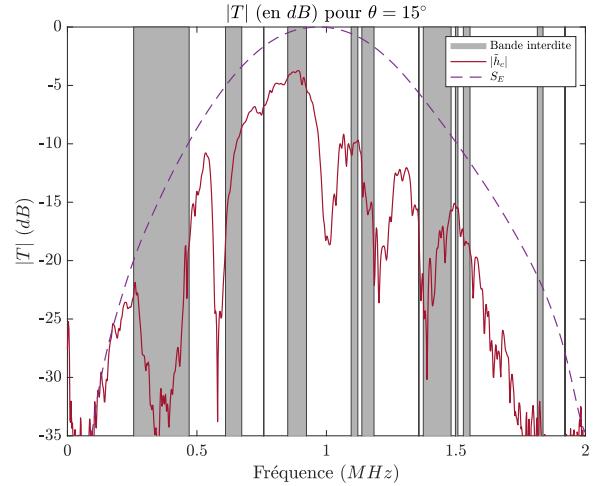
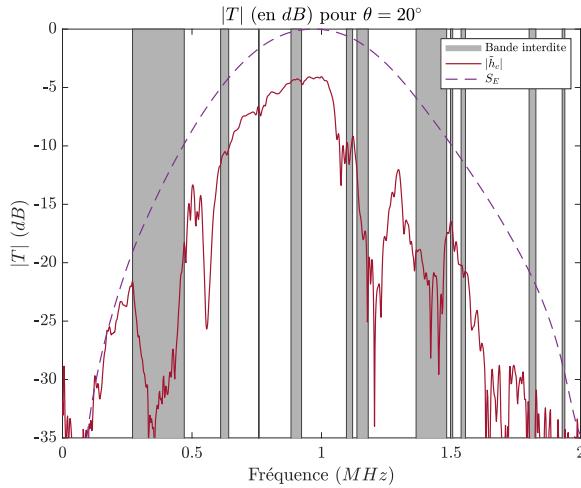
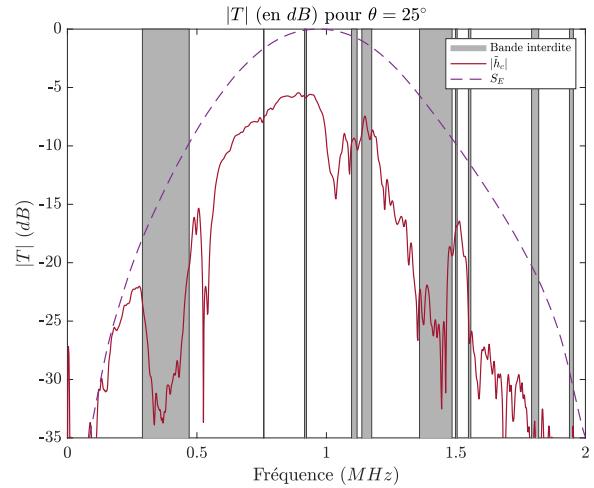
FIGURE 4.8 – Le coefficient de transmission pour une bande passante $[0; 2MHz]$ obtenu pour un cristal de maille carrée ($a = 2mm$ et $r = 0.75mm$)

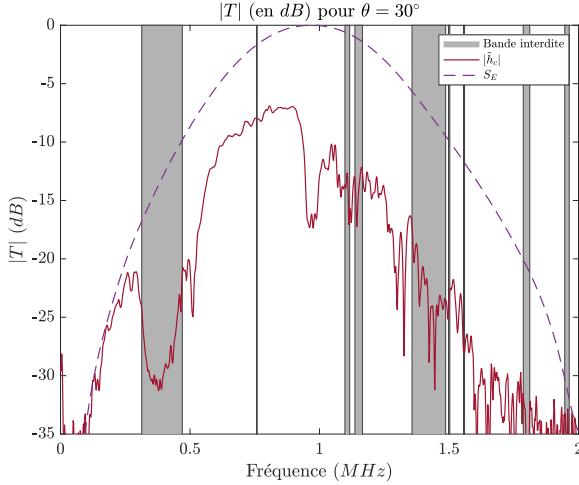
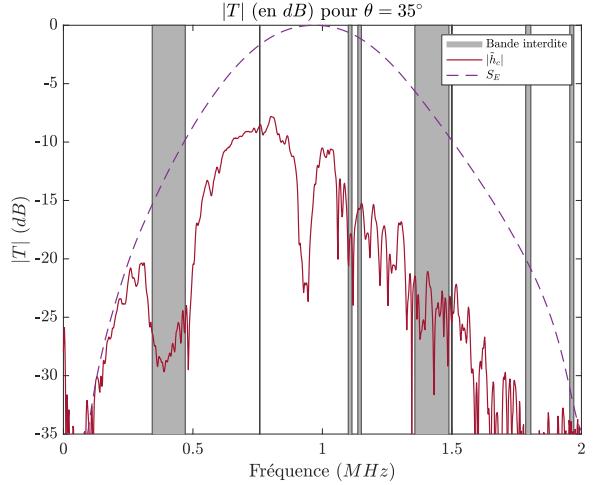
De nouveau, nous observons bien les fréquences interdites du cristal sur l'intervalle d'étude. Nous pouvons maintenant bien confirmer la présence de la bande interdite entre $[0.8; 0.9MHz]$. Étonnamment, nous parvenons même à distinguer les deux bandes interdites dans cet intervalle grâce au pic de $|T|$ à $0.7MHz$. On remarque avec cet exemple que le graphique en dB nous permet d'être plus précis sur la compréhension du comportement du cristal. Notons enfin que $|T|$ est nul entre les deux dernières bandes interdites (entre $[1.5; 1.8MHz]$). Cela confirme l'affirmation faite auparavant sur la bande passante de nos capteurs. Le signal reçu par le récepteur étant probablement trop faible, il se mélange avec le bruit : en effectuant le rapport des signaux, ce dernier s'annule. Cela souligne bien l'importance sur le choix de la bande passante des capteurs. Nous ne pouvons rien confirmer sur le comportement du cristal dans cet intervalle, cependant dans l'ensemble $[0; 2MHz]$, les résultats obtenus sont bien cohérents avec ceux obtenus théoriquement.

4.3.1 Variation d'angle

Nous avons déduit dans le chapitre 3 que les bandes interdites dépendaient de l'orientation du cristal. Comme vu dans le chapitre 2 avec la figure (2.2), il suffit de faire varier l'angle entre $[0; 45^\circ]$ pour pouvoir exploiter l'entièreté du comportement du cristal.

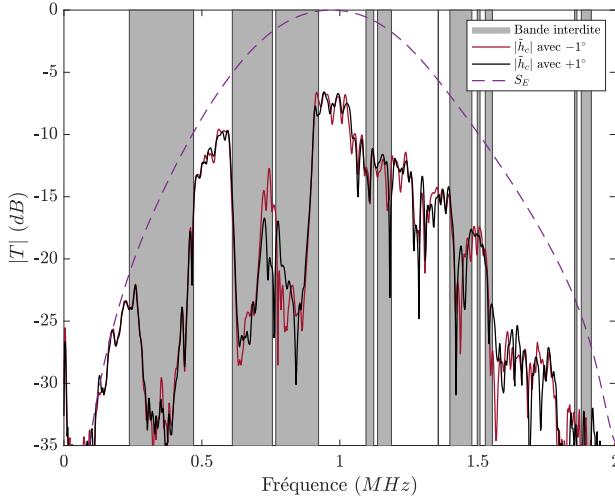
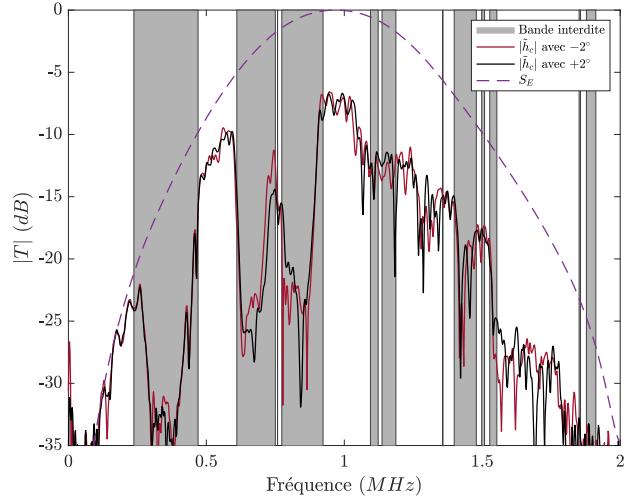
Dans l'attente d'une pièce mécanique pour pouvoir faire pivoter notre cristal avec précision, nous avons restreint l'étude entre $[0; 35^\circ]$ avec une grande incertitude sur l'angle. Le dispositif expérimental consiste à positionner sous le cristal une pièce permettant de manipuler manuellement l'orientation du cristal. Nous avons alors fait varier l'angle θ dans l'intervalle d'étude avec un pas de 5° . Avec les bandes interdites calculées théoriquement sur *FreeFem*, nous pouvons comparer nos résultats comme dans la section précédente.

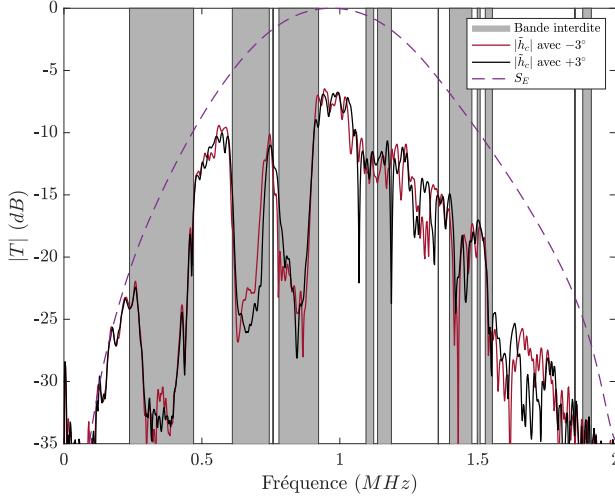
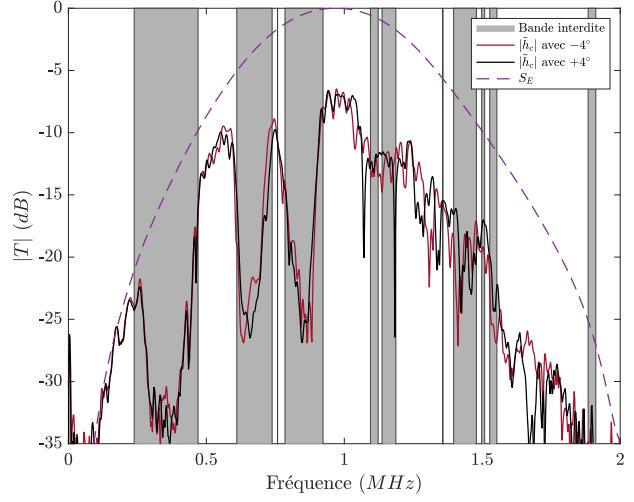
FIGURE 4.9 – Angle $\theta = 0.0^\circ$ FIGURE 4.10 – Angle $\theta = 5.0^\circ$ FIGURE 4.11 – Angle $\theta = 10.0^\circ$ FIGURE 4.12 – Angle $\theta = 15.0^\circ$ FIGURE 4.13 – Angle $\theta = 20.0^\circ$ FIGURE 4.14 – Angle $\theta = 25.0^\circ$

FIGURE 4.15 – Angle $\theta = 30.0^\circ$ FIGURE 4.16 – Angle $\theta = 35.0^\circ$

On remarque que la première bande interdite reste toujours bien positionnée, alors que les suivantes semblent se décaler de la théorie. Cela est notamment dû à des sources d'erreurs importantes, évoquées dans la page suivante. Cependant, nous pouvons toutefois observer la restriction des bandes interdites entre les angles $[0; 20^\circ]$, nous permettant de valider l'ouverture des bandes lorsque l'angle incident change.

De même, nous nous sommes aussi penchés sur les petites variations d'angles. Nous avons balayé l'intervalle $[-5; 5^\circ]$ avec un pas d'un degré. En effectuant le même protocole que les parties précédentes, cette étude nous permettra aussi de confirmer l'hypothèse émise au chapitre 2 sur la symétrie de la cellule unité : on devrait observer les mêmes bandes interdites pour les angles de signes opposés (par exemple -3° et 3°).

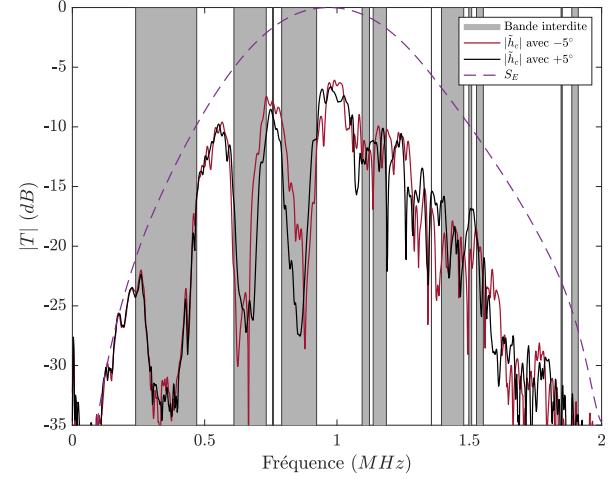
FIGURE 4.17 – Angle $\theta = \pm 1.0^\circ$ FIGURE 4.18 – Angle $\theta = \pm 2.0^\circ$

FIGURE 4.19 – Angle $\theta = \pm 3.0^\circ$ FIGURE 4.20 – Angle $\theta = \pm 4.0^\circ$

On peut conclure qu'on obtient les mêmes bandes interdites en raison de la symétrie de la cellule unité grâce à la superposition des courbes. Cependant, il faudrait balayer l'intervalle $[-45; 45^\circ]$ pour pouvoir conclure sur l'entièreté de la symétrie.

4.4 Les sources d'erreurs

Dans cette partie, nous avons mis en évidence expérimentalement le phénomène de bande interdite pour un cristal ayant une maille carrée. Cependant, nous avons pu remarqué graphiquement grâce à la superposition des résultats théoriques et expérimentaux que les bandes interdites n'étaient pas totalement correspondantes.

FIGURE 4.21 – Angle $\theta = \pm 5.0^\circ$

Une des erreurs principales est lors des mesures de l'angle : nous avions dû lire l'angle d'orientation du cristal à travers l'eau, ce qui a pu réduire notre précision de lecture. Nous avons aussi assimilé notre cristal expérimental à un milieu infini pour pouvoir effectuer la comparaison. Deuxièmement, notre cristal n'est pas parfait. Les cylindres métalliques ne sont pas parfaitement rigides. De même, ils absorbent l'énergie ce qui n'est pas pris en compte dans nos calculs théoriques. Aussi, entraîné par la perturbation du milieu, ils oscillent, faussant les résultats. De plus, ceux-ci étant échogènes, la présence de bulle d'air entre les cylindres entraîne une réflexion totale des ondes acoustiques, favorisant encore une fois une source d'erreur majeure.

Chapitre 5

Introduction à une résolution numérique

Pour compléter ce travail, nous avons voulu aussi aborder la résolution numérique de notre étude. Nous avons vu cette année la méthodes des différences finies[15], permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. Malheureusement, l'ajout de la condition de non-pénétration exposée au chapitre 3 dans l'équation (3.9) est compliqué à mettre en oeuvre. Nous avons cependant décidé d'introduire la résolution numérique en exposant le principe, où l'implémentation des conditions de non-pénétration pourrait être abordée dans un travail complémentaire. Enfin, les simulations numériques ont été effectuées dans *Matlab*.

La méthode des différences finies consiste simplement à discréteriser le problème et à utiliser les développements limités de Taylor, centrés d'ordre 2, pour chaque dérivé partiel du champ de pression u . Ainsi, en posant U le champ de pression étudié numériquement, et respectivement t la variable en temps, x et y les variables en espace suivant les directions x et y , on a les développements de Taylor suivants de l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_{tt}U = \frac{U_{t+1,x,y} + U_{t-1,x,y} - 2U_{t,x,y}}{\Delta t^2} \\ \partial_{xx}U = \frac{U_{t,x+1,y} + U_{t,x-1,y} - 2U_{t,x,y}}{\Delta x^2} \\ \partial_{yy}U = \frac{U_{t,x,y+1} + U_{t,x,y-1} - 2U_{t,x,y}}{\Delta y^2} \end{cases}$$

Pour simplifier les calculs et l'approximation de la simulation numérique, on admet que $\Delta x = \Delta y$, ce qui nous permet d'obtenir l'équation approchée suivante :

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u &= c_0^2 (\partial_{xx}u + \partial_{yy}u) \\ \Rightarrow U_{t+1,x,y} + U_{t-1,x,y} - 2U_{t,x,y} &= \left(\frac{c_0\Delta t}{\Delta x}\right)^2 [U_{t,x+1,y} + U_{t,x-1,y} + U_{t,x,y+1} + U_{t,x,y-1} - 4U_{t,x,y}] \\ \Rightarrow U_{t+1,x,y} &= 2U_{t,x,y} - U_{t-1,x,y} + \eta [U_{t,x+1,y} + U_{t,x-1,y} + U_{t,x,y+1} + U_{t,x,y-1} - 4U_{t,x,y}] \quad (5.1) \end{aligned}$$

avec le rapport $\left(\frac{c_0\Delta t}{\Delta x}\right)^2 = \eta$

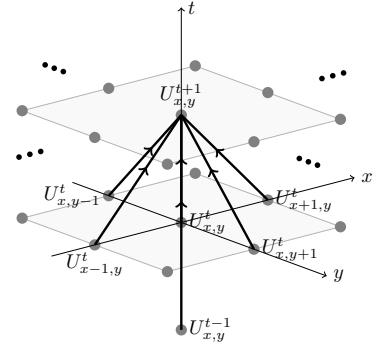


FIGURE 5.1 – Schéma de la résolution numérique

En résolution numérique, la condition de non-pénétration est décrite par une condition de Neumann $n \cdot \nabla U = \partial_n U$, où la vitesse au niveau des bords des cylindres est nulle. La difficulté de cette implémentation est que la normale \mathbf{n} sur le bord circulaire est variable. Ainsi, sur chaque point du maillage proche de cette frontière, il faut modifier les valeurs Δx et Δy . Pour cela, il est plus simple d'étudier le problème général en éléments finis, mais malheureusement nous n'avons pas ces notions.

Cependant, pour pouvoir avoir une simulation, nous avons imposé des conditions de Dirichlet homogènes sur les frontières de nos cylindres : $U|_{\partial\Omega} = 0$. Cela implique que le champ de pression sur ces frontières est toujours nul. Cette approximation, étant fausse pour l'étude des bandes interdites, peut être justifiée par le fait que l'onde entraîne une petite perturbation locale de pression. De même, cette condition de Dirichlet impose une réflexion totale de l'onde, sans absorption d'énergie, ce qui est une des hypothèses émises dans ce travail. Enfin, pour les frontières de notre bassin, nous avons utilisé les conditions de Mur pour pouvoir absorber les ondes[16].

Une simulation numérique pour un cristal de maille carrée (avec les mêmes configurations que celle étudié dans ce travail) avec une fréquence d'émission $f = 1MHz$ est proposé **p.29** et sur ce **LIEN**. Notons que cette fréquence ne se trouve pas dans une bande interdite. Les ondes acoustiques (planes) se propagent de la gauche vers la droite, et on observe bien que ces ondes sont transmises à travers le cristal, et qu'une partie est réfléchie. De même, on remarque que le champ de pression est plus faible après transmission, une conclusion déduite aussi expérimentalement. Cette simulation semble fonctionner pour $f = 1MHz$, mais les résultats ne sont pas cohérents pour d'autres fréquences d'étude. En voici des exemples :

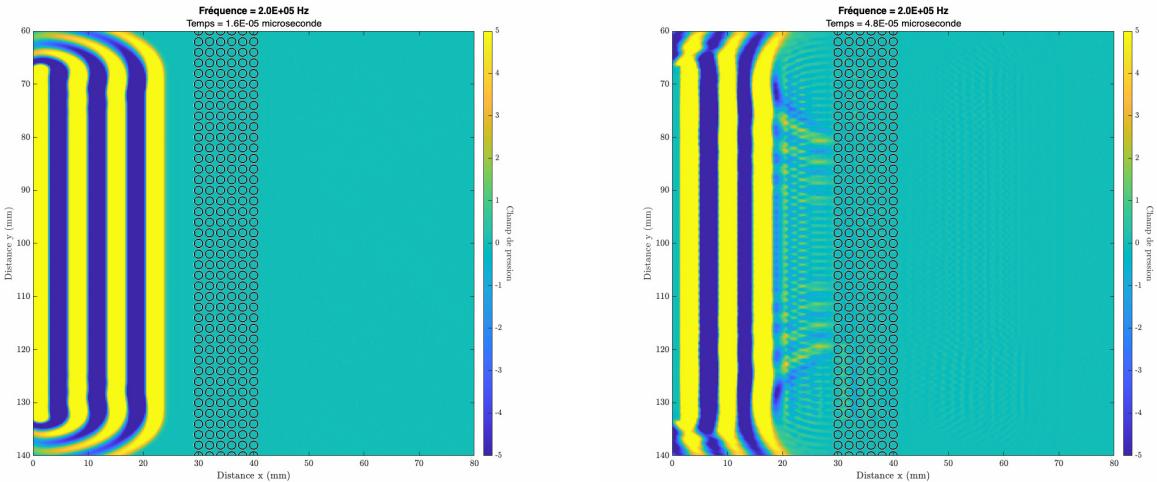


FIGURE 5.2 – Simulation avec une fréquence d'émission $f = 200KHz$

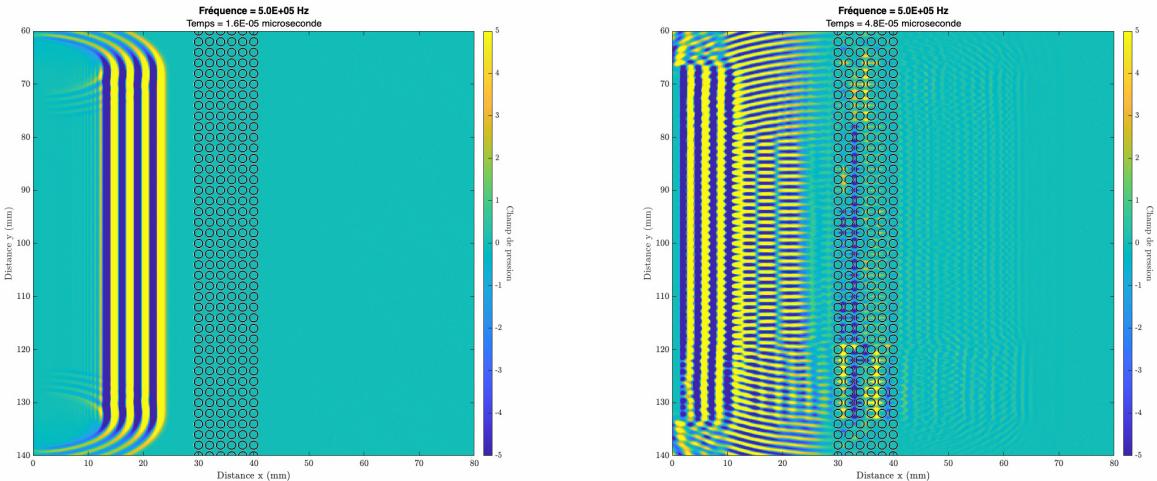
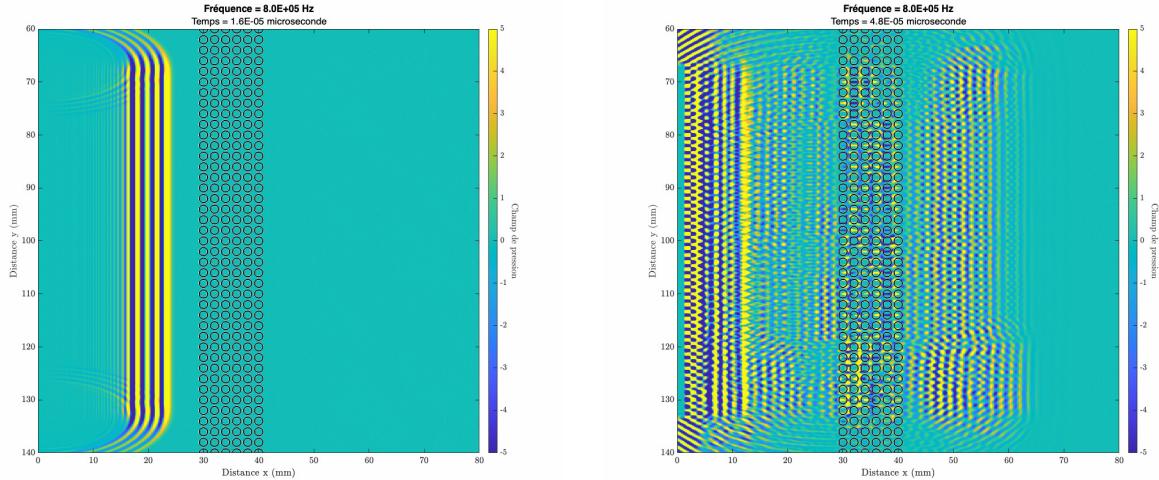
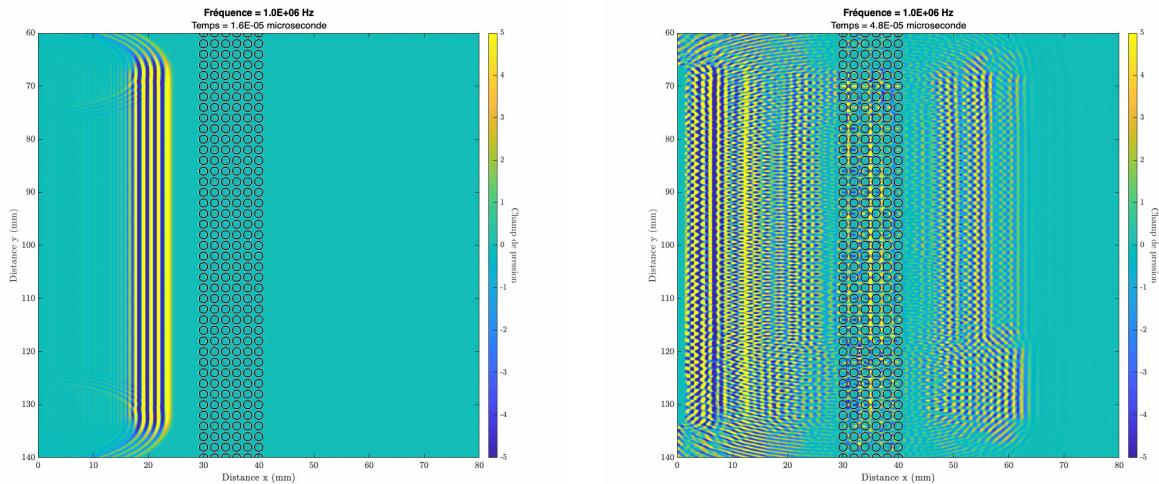


FIGURE 5.3 – Simulation avec une fréquence d'émission $f = 500KHz$

FIGURE 5.4 – Simulation avec une fréquence d'émission $f = 800KHz$ FIGURE 5.5 – Simulation avec une fréquence d'émission $f = 1MHz$

On constate premièrement que, pour une fréquence à l'extérieur d'une bande interdite comme $f = 200KHz$ (figure (5.2)), aucune onde est transmise. De même, pour $f = 500KHz$ (figure (5.3)), on devrait avoir des ondes avec une amplitude plus importante après le cristal. Enfin, pour une fréquence présente dans une bande interdite comme pour $f = 800KHz$ (figure (5.4)), on a des ondes qui sont transmises.

On en conclut que les simulations numériques proposées ne sont pas valables dans notre étude. Cette erreur de calcul provient de la condition de Neumann qui n'a pas pu être implémentée dans la simulation. Ainsi, l'approximation faite avec une condition de Dirichlet homogène est bien fausse. Cette partie ne permet pas nécessairement de conclure ce travail de manière positive. Au contraire, elle met en évidence une section qui pourrait être approfondie et améliorée, afin de créer une simulation numérique valide pour l'étude des cristaux phononiques.

Chapitre 6

Conclusion

Ce stage nous a permis d'étudier de manière approfondie l'apparition de bandes interdites en particulier au travers d'une maille carrée. Nous avons pu réaliser de nombreuses expériences visant à faire apparaître les bandes interdites en jouant sur l'orientation du cristal. Nous avions pu en conclure que pour chaque angle, un spectre différent était trouvé jusqu'à une certaine redondance des spectres dû à la symétrie du cristal.

La partie théorique a été essentielle pour observer les bandes interdites et comprendre leur fonctionnement. Pour pouvoir vous montrer ces graphiques, nous avons dû réaliser du traitement de signal en utilisant la transformée de Fourier (en lien avec notre cours de ce semestre de Signal et Système asservis) ou encore la fonction *tuckey window*.

Nous avons aussi pu introduire des simulations numériques permettant de visualiser les expériences (en lien avec notre cours de mathématique de ce semestre).

Notre stage se basant sur l'étude des ondes acoustiques dans des cristaux phononiques, il nous a permis de nous introduire au domaine de l'acoustique mais aussi à de nombreux autres domaines comme cités auparavant.

En globalité, nos expériences ont été d'une bonne précision car nous avons pu observer des bandes interdites de l'ordre du 10 kHz sur une bande de fréquence allant de 0 à 2 MHz. Cela signifie que nos paramètres avaient été bien choisis et que nos résultats théoriques sont cohérents. Cependant, il ne faut pas négliger les quelques sources d'erreurs citées qui peuvent être minimisées.

De même, ce stage peut être le commencement de nombreux futurs stage au sein du laboratoire d'Alembert sur la propagation d'ondes acoustiques dans des cristaux phononiques. En voici quelques pistes de travaux : des études sur des mailles hexagonales ou triangulaires, l'étude accentuée sur le guidage d'ondes, mais encore continuer nos travaux sur l'orientation du cristal en réduisant les sources d'erreurs, ou en améliorant la partie simulation.

Enfin, il est conseillé pour ceux qui souhaitent s'intéresser au sujet de consulter la bibliographie. Nous avons exploité un vaste spectre de sources pour enrichir ce rapport.

Chapitre 7

Annexe

Tableau avec les FFT et FFT inverses

	\mathcal{F}	\mathcal{F}^{-1}
En fonction du temps	$\tilde{u}(t) = \int u(t)e^{-i\omega t} dt$	$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{u}(t)e^{i\omega t} d\omega$
En fonction de l'espace	$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x}$	$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}$

TABLE 7.1 – Les transformées de Fourier et les inverses pour des fonctions décrites en temps et en espace

(RETOUR)

Calcul du problème de Bloch réduit

Calculons d'abord le gradient et la divergence du gradient de $u(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned} \nabla u(\mathbf{x}, t) &= \nabla \left[u(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)} \right] = \nabla(u(\mathbf{x}))e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)} + \nabla \left(e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)} \right) u(\mathbf{x}) \\ &= (\nabla + i\mathbf{k}) u(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)} \\ &= \nabla_{\mathbf{k}} u(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)} \end{aligned}$$

en posant $\nabla_{\mathbf{k}} = (\nabla + i\mathbf{k})$.

De même, on sait que $\operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u}$ (par l'utilisation de la convention d'Einstein) :

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} = (\Delta u)$$

Donc on a :

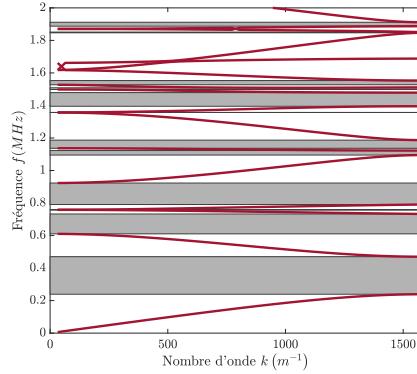
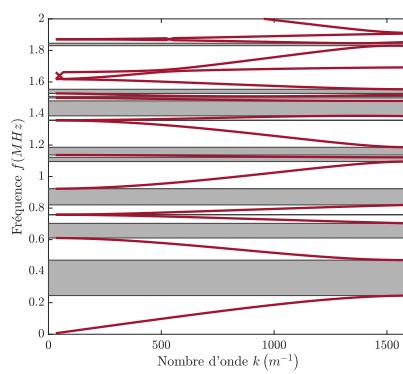
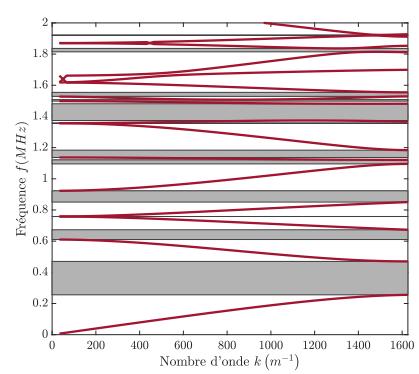
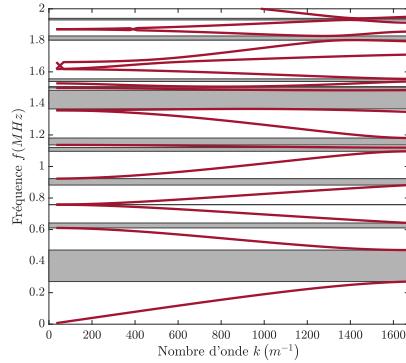
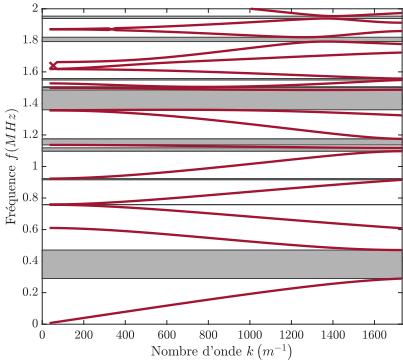
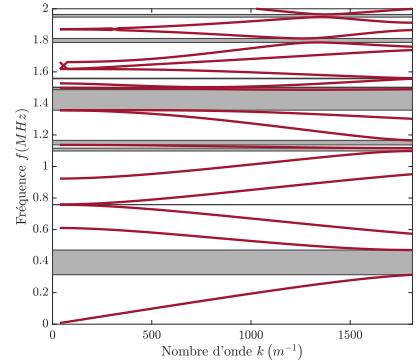
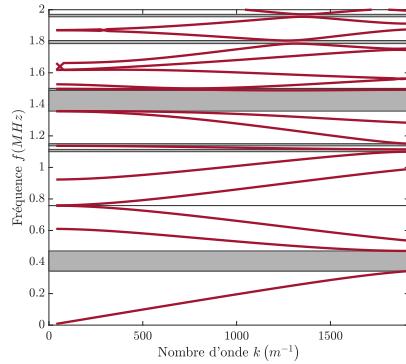
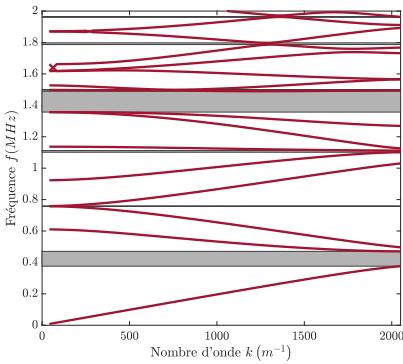
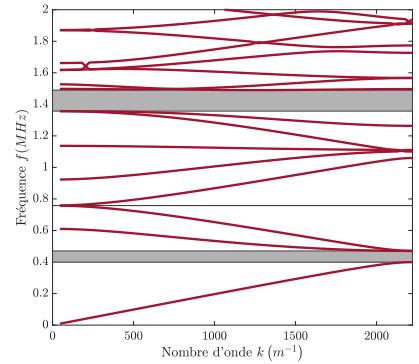
$$\nabla [\nabla u(\mathbf{x}, t)] = \nabla_{\mathbf{k}} [\nabla_{\mathbf{k}} U(\mathbf{x})] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)}$$

Ainsi, en injectant la fonction de Bloch (3.10) dans notre système d'équation (3.9) on a :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{k}} U(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\tilde{\Omega}_n \\ -\nabla_{\mathbf{k}} [\nabla_{\mathbf{k}} U(\mathbf{x})] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)} - \frac{\omega^2}{c_0^2} U(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)} = 0 & \text{dans } \mathcal{B} \end{cases}$$

(RETOUR)

Variation d'angle

FIGURE 7.1 – Angle $\theta = 5^\circ$ FIGURE 7.2 – Angle $\theta = 10^\circ$ FIGURE 7.3 – Angle $\theta = 15^\circ$ FIGURE 7.4 – Angle $\theta = 20^\circ$ FIGURE 7.5 – Angle $\theta = 25^\circ$ FIGURE 7.6 – Angle $\theta = 30^\circ$ FIGURE 7.7 – Angle $\theta = 35^\circ$ FIGURE 7.8 – Angle $\theta = 40^\circ$ FIGURE 7.9 – Angle $\theta = 45^\circ$

(RETOUR)

Images de notre cristal

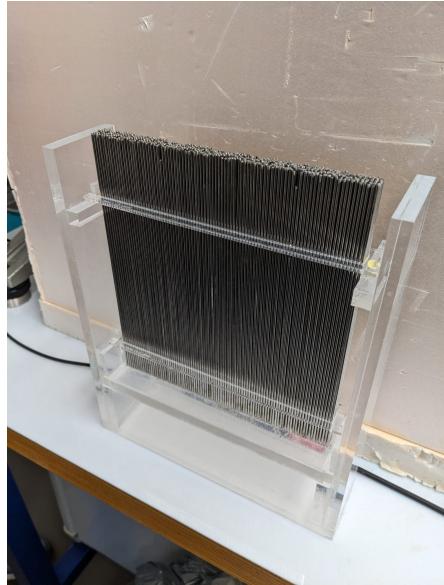


FIGURE 7.10 – Photographie du cristal réalisé



FIGURE 7.11 – Photographie du dispositif expérimental

(RETOUR)

Signal envoyé

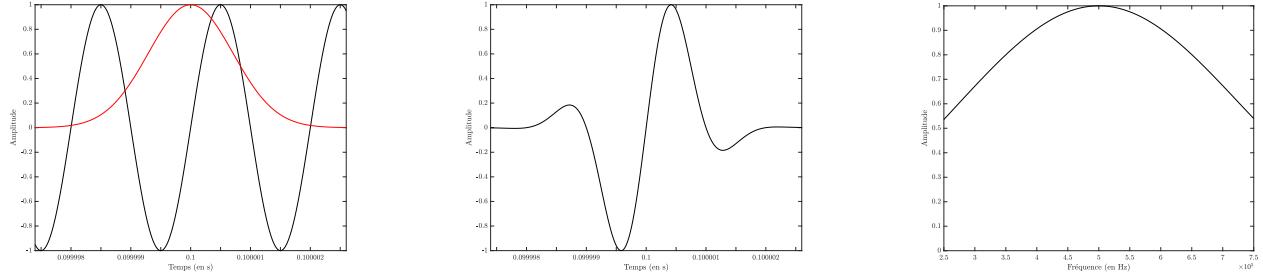


FIGURE 7.12 – Signal envoyé et sa FFT avec la fenêtre de la gaussienne $T = \frac{1}{2f_0}$

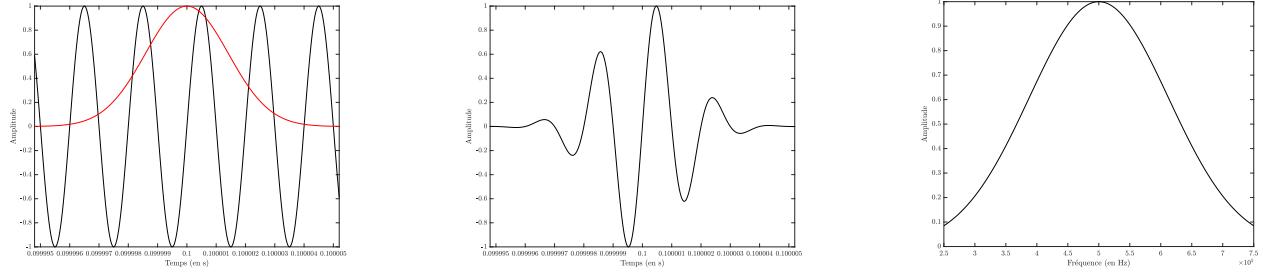


FIGURE 7.13 – Signal envoyé et sa FFT avec la fenêtre de la gaussienne $T = \frac{1}{f_0}$

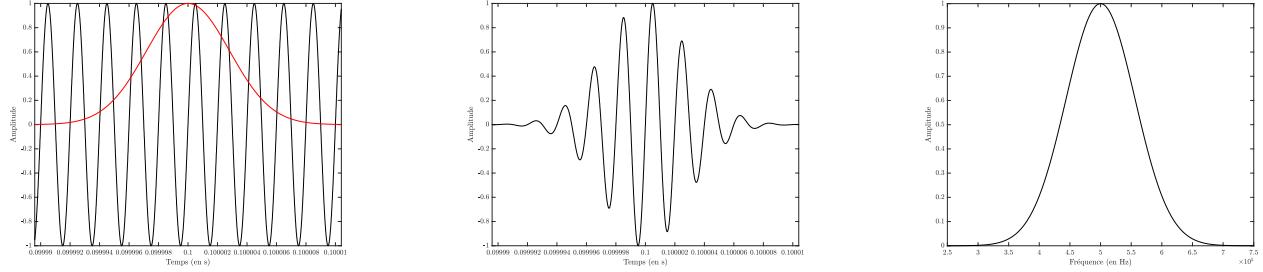


FIGURE 7.14 – Signal envoyé et sa FFT avec la fenêtre de la gaussienne $T = \frac{2}{f_0}$

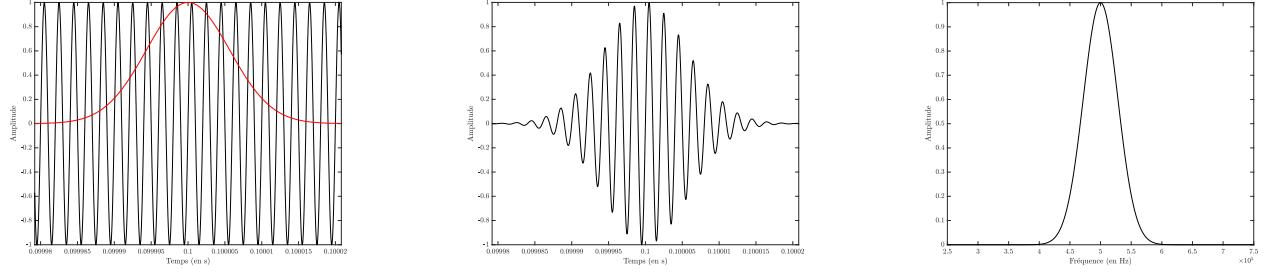


FIGURE 7.15 – Signal envoyé et sa FFT avec la fenêtre de la gaussienne $T = \frac{4}{f_0}$

(RETOUR)

Tukey Window

On définit le tukey window comme :

$$w(x) = \begin{cases} w(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{r}[x - \frac{r}{2}]\right)], & x \in [0; \frac{r}{2}[\\ w(x) = 1, & x \in [\frac{r}{2}; L - \frac{r}{2}[\\ w(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{r}[x - 1 + \frac{r}{2}]\right)], & x \in [L - \frac{r}{2}; L] \end{cases}$$

La transformée de Fourier d'un *tukey window* est un sinus cardinal. On remarque que, plus le paramètre r est proche de 1, plus les fréquences de sa transformée sont vite atténuées. Voici la transformée de Fourier pour le cas où $r = 0$:

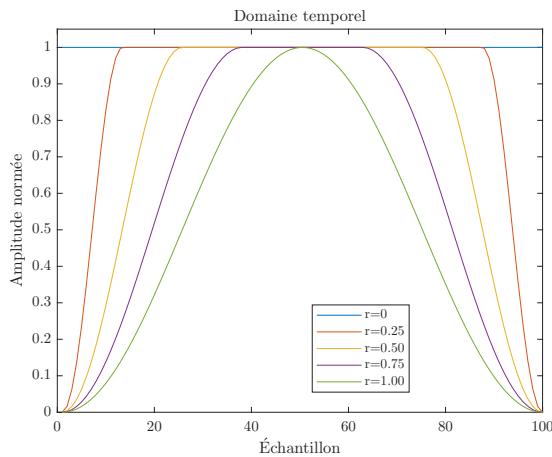


FIGURE 7.16 – La *tukey window* pour différentes valeurs de r

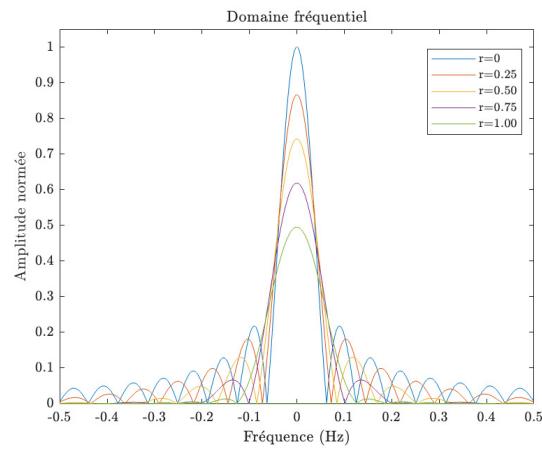


FIGURE 7.17 – Domaine fréquentiel des *tukey windows*

(RETOUR)

Simulation numérique

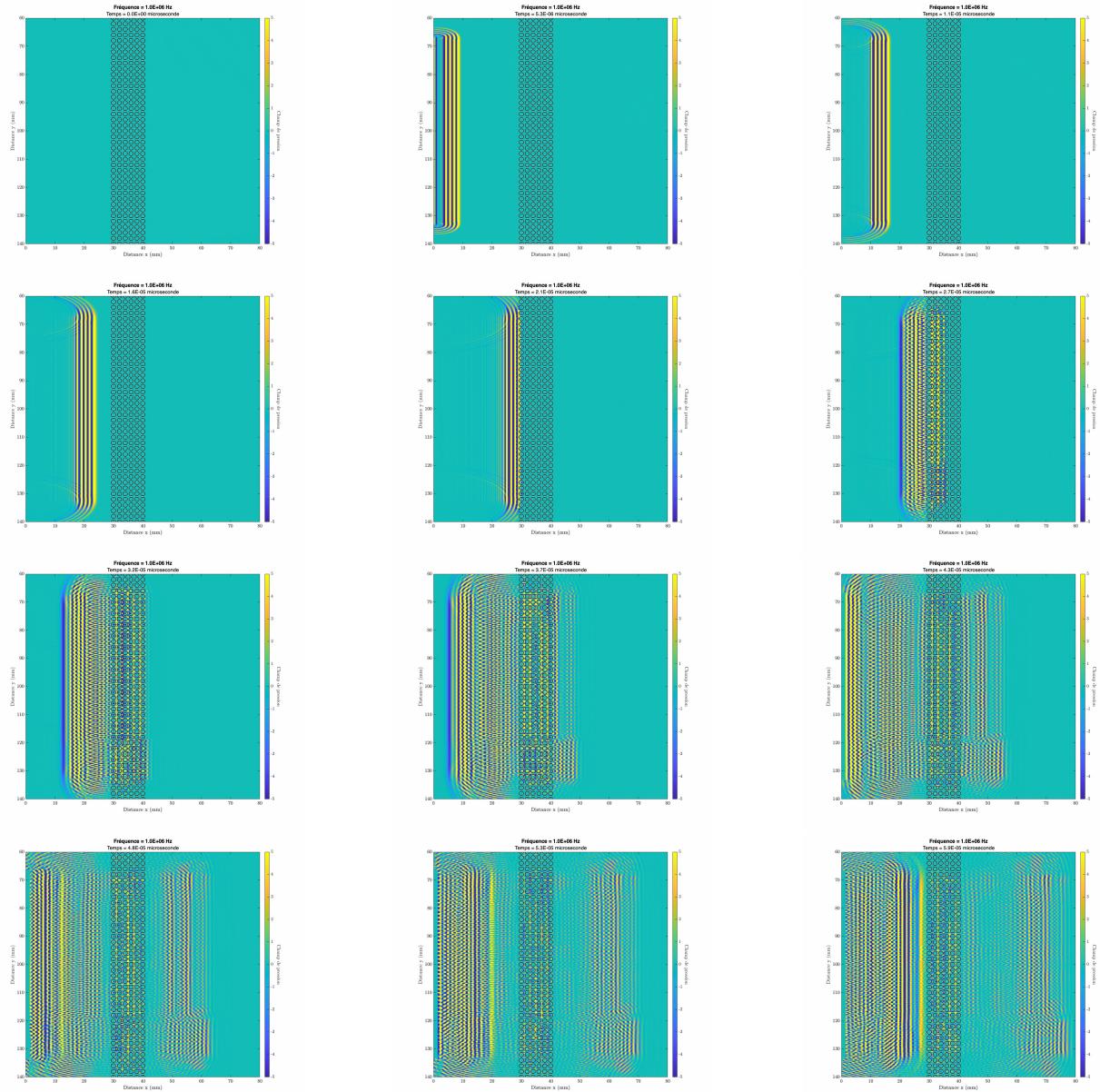


FIGURE 7.18 – Simulation numérique pour un cristal de maille carrée avec une fréquence d'émission $f = 1 MHz$

(RETOUR)

Bibliographie

- [1] M. KUSHWAHA, “The phononic crystals : An unending quest for tailoring acoustics,” *Modern Physics Letters B*, t. 30, p. 1630004, juill. 2016. DOI : 10.1142/S0217984916300040. (visité le 13/10/2023).
- [2] R. MARTÍNEZ-SALA, J. SANCHO, J. V. SÁNCHEZ, V. GÓMEZ, J. LLINARES et F. MESEGUR, “Sound attenuation by sculpture,” *Nature*, t. 378, n° 6554, p. 241-241, 1995. DOI : 10.1038/378241a0. adresse : <https://doi.org/10.1038/378241a0> (visité le 16/11/2023).
- [3] A. GUPTA, “A Review on Sonic Crystal, Its Applications and Numerical Analysis Techniques,” *Acoustical Physics*, t. 60, p. 223-234, mars 2014. DOI : 10.1134/S1063771014020080. (visité le 20/10/2023).
- [4] G. GROSSO et G. PARRAVICINI, *Solid state physics*. Academic press, 2013. (visité le 29/11/2023).
- [5] P. CELLI et S. GONELLA, “Manipulating waves with LEGO® bricks : A versatile experimental platform for metamaterial architectures,” *Applied Physics Letters*, t. 107, n° 8, 2015. (visité le 28/11/2023).
- [6] C. COHEN et Y. GIRO, “Étude de la propagation d’ondes acoustiques dans un cristal phononique,” *Sorbonne Université*, avr. 2020.
- [7] S. BENCHABANE, “Guidage et filtrage des ondes dans les cristaux phononiques,” Theses, Université de Franche-Comté, déc. 2006. adresse : <https://theses.hal.science/tel-00140347>.
- [8] R. MARCHIANO, *Ondes mécaniques - Support de Cours*. Sorbonne Université, déc. 2022. (visité le 29/11/2023).
- [9] G. ALLAIRE et C. CONCA, “Bloch wave homogenization and spectral asymptotic analysis,” *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. 77, n° 2, p. 153-208, 1998.
- [10] B. TIAN, B. TIE et D. AUBRY, “Théorie des Ondes Bloch Appliquée à la Modélisation de la Propagation d’Ondes Elastiques dans des Milieux Périodiques,” in *10e colloque national en calcul des structures*, 2011.
- [11] F. HECHT, “New development in FreeFem++,” *J. Numer. Math.*, t. 20, n° 3-4, p. 251-265, 2012, ISSN : 1570-2820. adresse : <https://freefem.org/> (visité le 22/11/2023).
- [12] J. MONNIER, “Finite Element Methods & Model Reductions,” thèse de doct., INSA, 2023.
- [13] E. MANGA, “Application de la réfraction négative à l’imagerie acoustique à l’aide de cristaux phononiques bidimensionnels,” 2012TOUR4003, thèse de doct., 2012. adresse : <http://www.theses.fr/2012TOUR4003/document>.
- [14] T. VALIER-BRASIER et D. ROYER, *Elastic Waves in Solids, Volume 2 : Radiation, Scattering, Generation*. Wiley, 2022, ISBN : 9781786308153. adresse : <https://books.google.fr/books?id=MGF6EAAAQBAJ>.
- [15] C. WEISMAN et D. BALTEAN-CARLES, *Méthodes numériques et mathématiques pour la mécanique II : Equations aux dérivées partielles (EDP) 1*. Sorbonne Université, déc. 2023. (visité le 29/11/2023).

- [16] G. ZHENG, A. KISHK, A. W. GLISSON et A. YAKOVLEV, "Implementation of Mur's absorbing boundaries with periodic structures to speed up the design process using finite-difference time-domain method," *Progress In Electromagnetics Research*, t. 58, p. 101-114, 2006.
- [17] T. M. INC., *MATLAB version : 23.2.0.2428915 (R2023b)*, Natick, Massachusetts, United States, 2023. adresse : <https://www.mathworks.com>.
- [18] P. ALEXANDRE FERREIRA, "Etude numerique de quelques problemes de diffraction d'ondes par des reseaux periodiques en dimension 2," 1998EPXX0041, thèse de doct., 1998, 186 P. adresse : <http://www.theses.fr/1998EPXX0041>.
- [19] J. MONNIER, *Transformée de Fourier*. Sorbonne Université, déc. 2022. (visité le 20/11/2023).
- [20] S. SAMARAKOON, "Fabrication and experimental characterization of eccentrically layered scatterers in 2-D Phononic materials," thèse de doct., Kansas State University, 2010.
- [21] E. D. MANGA, "Application de la réfraction négative à l'imagerie acoustique à l'aide de cristaux phononiques bidimensionnels," thèse de doct., Université François Rabelais-Tours, 2012.
- [22] C. LAULHÉ, *L3 Physique et Applications - Structure de la matière*. Université Paris-Saclay. (visité le 28/11/2023).
- [23] A. DUCLOS, "Diffusion multiple en fluide visco-thermique, cas du cristal phononique à deux dimensions," thèse de doct., Université du Maine, 2007.
- [24] M. GORISSE, "Réalisation de filtres RF à base de cristaux phononiques," thèse de doct., Grenoble, 2011.
- [25] A.-C. H.-H. SARAH BENCHABANE, "Cristaux phononiques et métamatériaux acoustiques," *Techniques de l'ingénieur*, 2020. (visité le 14/11/2023).
- [26] J. V. SÁNCHEZ-PÉREZ, D. CABALLERO, R. MÁRTINEZ-SALA et al., "Sound attenuation by a two-dimensional array of rigid cylinders," *Physical Review Letters*, t. 80, n° 24, p. 5325, 1998. (visité le 16/11/2023).
- [27] B. LOMBARD et J. PIRAUT, "Numerical treatment of two-dimensional interfaces for acoustic and elastic waves," *Journal of Computational Physics*, t. 195, p. 90-116, mars 2004. DOI : [10.1016/j.jcp.2003.09.024](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.09.024).
- [28] N. CÔTÉ, J. VASSEUR, Q. SOURON et A.-C. HLADKY-HENNION, "Transformation du son par un cristal phononique," in *12ème Congrès Français d'Acoustique, CFA 2014*, 2014, Session-APUS1.