工程师学院数学分析笔记
Notes d'Analyse de l'Ecole d'Ingénieur de Chimie Pékin

版本0.1.11(持续更新中)

Augustin

2023 年 4 月 10 日

前言

这本东西起源于我自己的各种杂七杂八的笔记，我想把它们整理起来，系统化并且数字化，于是在大三上学期有了一个基本的雏形。后来我想，为什么不干脆再扩充一些，搞个讲义出来呢？这样还可以给别人看，多棒。于是大三寒假我开始慢慢扩充这本讲义，也许会一直写下去，直到哪天我没了兴趣。

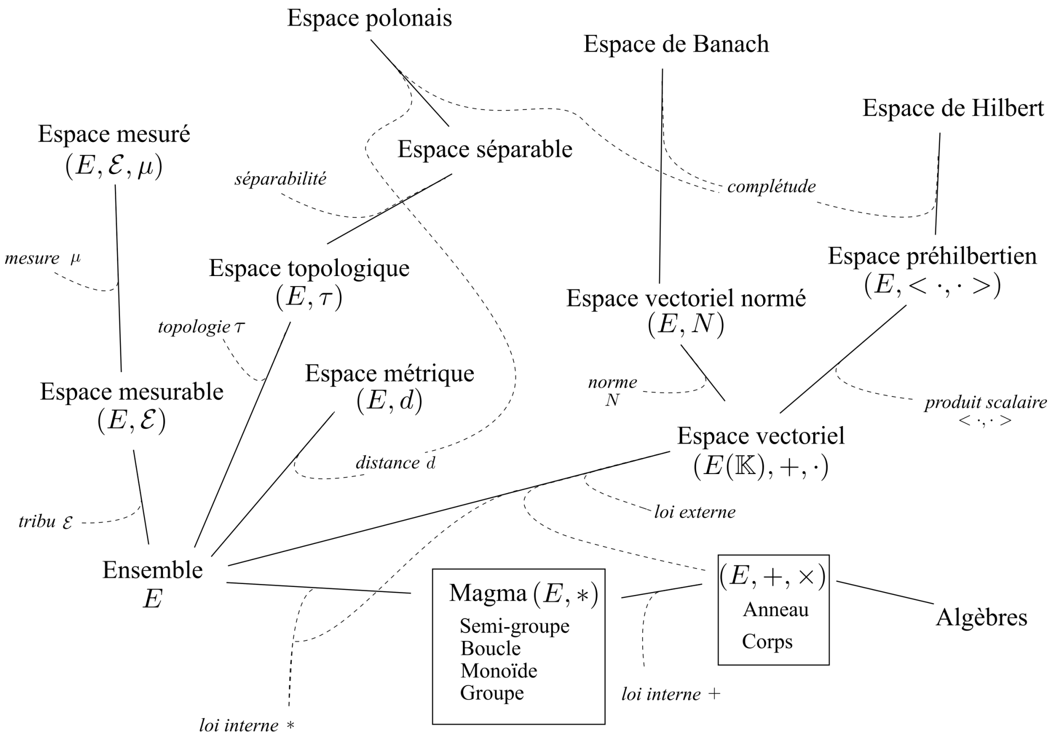


图 1: 数学分析部分知识关系(图源自法语wiki)

知识是网状的，而书是线性的。特别是，当你用维基百科对比一本教科书的时候，最能体现这个观点。书的线性内容决定了作者不可能一开始就默认读者知道某个概念的所有相关概念，所以延伸性和复杂性都远远不

够;而对于维基百科，就会有各种延申，每一个不知道的概念都可以点进去学习，就像是查字典。因此任何一本书的内容都是一个线性的体系，后面的内容承接前面的内容，体现不了知识的复杂性，书的顺序也只是作者认为合理的顺序，不一定代表最适合每个读者的顺序。所以我给出的也只是我觉得可以说得通的顺序。事实上存在大量平行的内容，相互之间怎么排列都可以。(待更新)在本版讲义中，1-5章为基础的引入部分，6-8章为数列部分，9-14章为拓扑部分，15-章为矩阵部分。

讲义的定位一直在困扰我。究竟是写得简洁、方便复习的时候快速浏览知识点，还是写得详细，让没学过的人也能看懂，这是很难的取舍。我很喜欢普林斯顿的那套数学书，各种引入、例子、详细的解释和口语化的表述读起来赏心悦目。但是我自己又写不出那种东西。所以最后我决定开摆，写得简单并且口语化一些。本讲义大概有两种内容，即课程内容和课程的前置与延申内容。对于课程内容，还是希望上课好好听讲，因此写的东西仅仅作为一个参考预习、复习的样例，说白了就是让你知道你学的是什么。方便读者在详细的不懂得地方可以多问老师或者自己找课程学习；对于课外的内容，由于学院本身对于数学的要求不高，所以也只是介绍一下，并不深入。有兴趣的自己去找课程和书就行。这部分更像是一个简介，让你知道还有什么是我们没有学的，其中有哪些学一下更好。对于讲义的参考资料，欢迎大家自己去找来看，这些东西远远比我写的精彩。我做的一点微小的工作其实就是把这些精华筛选一下，挑出我们课程用得上的东西，然后排列组合罢了。

附部分讲义的参考资料与推荐阅读的资料：
出版物:

- Proofs from THE BOOK,Martin Aigner & Günter M. Ziegler,Springer
- 微积分和数学分析引论

- 数学分析原理,Walter Rudin,机械工业出版社
- 普林斯顿微积分读本,Adrian Banner,人民邮电出版社
- 普林斯顿线性代数读本,拉菲·格林贝格,人民邮电出版社
- 普林斯顿概率论读本,史蒂文·J.米勒,人民邮电出版社
- 代数学教程,R·戈德门特,高等教育出版社
- 陶哲轩实分析，陶哲轩，人民邮电出版社
- 数学分析中的问题和反例,汪林，高等教育出版社
- 拓扑空间与线性拓扑空间中的反例,汪林，高等教育出版社
- 实分析中的反例,汪林，高等教育出版社
- 泛函分析中的反例,汪林，高等教育出版社
- 拓扑学教程,G·肖盖,高等教育出版社
- 代数的历史,约翰·德比希尔,人民邮电出版社

网络资料:

- Maki的完美算术教室
- Ayumu爱讲数学
- James课后习题解答
- Druid小德
- kumiko想要学分析
- 柚柚柚子235

- 轩兔
- castelu
- 3Blue1Brown
- 返朴科普
- 中文、英语和法语的维基百科

Augustin
2022年12月31日

版本更新说明

更新内容:

1.调整了章节顺序。

2.添加了数个章节。

计划中的更新:

1.句号由"。"改为".",逗号由"，"改为","。

2.尝试加入图片。等我学会matlab再说。Manim也行。

3.尝试给出一些习题。

4.补充证明。

5.Bonus。

6.规范映射的符号$\to, \mapsto$

目录

第一章　逻辑与证明

Logique et Démonstration

这一章内容是数学最基本的、最底层的概念.对于绝大多数阅读这份讲义的人而言,这些概念都是已经学习过了,或者显而易见的. 但这并不意味着这一章的内容就很好写,或者很好讲明白.

这一章(以及后面的章节里)有相当多的符号,关于这些符号的采用和相关的历史,欢迎参阅`https://jeff560.tripod.com/set.html`.

1.1　基本逻辑

首先,我假定你知道什么是“判断(Jujement)”,也就是“真(Vrai)”和“假(Faux)”的概念,否则我需要用大量笔墨来较为严谨地展现它们,并且你读起来会觉得浪费时间.

1.1.1　命题逻辑

命题(Proposition)是一个陈述句所表达的判断,不是真的就是假的.例如“我不懂数学”就是一个命题.当然,在本讲义中,带有Proposition节标题的内容都被认为是真的.

逻辑析取

定义符号$\vee$表示两个命题的逻辑析取.对于命题p, q, 若p是真的或者q是真的,则$p \vee q$是真的.

逻辑合取

定义符号$\wedge$表示两个命题的逻辑合取.对于命题p, q, 若p和q都真的,则$p \wedge q$是真的.

逻辑否定

定义符号$\neg$表示命题的逻辑否定.若命题p是真的,则$\neg(p)$是假的.

逻辑蕴含

定义符号$\Rightarrow$表示两个命题的逻辑蕴含.对于命题p, q,将$p \vee (\neg q)$记为$q \Rightarrow p$. 表示若q是真的则p也是真的.注意,如果p, q都不是真的,$q \Rightarrow p$也是真的.

逻辑等价

定义符号$\Rightarrow$表示两个命题的逻辑等价.对于命题p, q,将$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$记为$p \Leftrightarrow q$. 称作p等价于q.

1.1.2 Proposition: 逻辑公理

公理被认为是清晰地为真的命题.以下给出逻辑的四条公理.

AL_1

$(p \vee p) \Rightarrow p$是真的.这说明,如果$(p \vee p)$为真,则p为真.

AL_2

$p \Rightarrow (p \vee q)$是真的.这说明,如果p为真,则$(p \vee q)$为真.

AL_3

$(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$是真的.这说明,如果$(p \vee q)$为真,则$(q \vee p)$为真.

AL_4

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)]$是真的.

1.1.3 De Morgan定律

数学家Augustus De Morgan发现了命题逻辑中存在着如下关系:

- $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$
- $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

称为De Morgan定律,又叫对偶律.

1.2 量词 Quantificateur

1.2.1 全称量词 Quantification Universelle

全称量词$\forall$表示“对所有的(pour tout)”.由Gerhard Gentzen首先于1933年使用,将德语“一切(alle)”的首字母倒过来.

1.2.2 存在量词 Quantification Existentielle

存在量词$\exists$表示“存在(il existe)”.由Giuseppe Peano首先于1897年使用,后被Bertrand Arthur William Russell正式用于表示“存在”. 此外,存在量词$\exists!$表示“有且仅有唯一的(il existe et seul)”.

1.3 证明 Démonstration

给定命题p,现在并不清楚命题是真是假.如果我们想要命题为真,就需要从逻辑上证明.同理,如果想要为假,也要从逻辑上证伪.这些都属于证明.

1.3.1 逻辑变换

蕴含命题$p \Rightarrow q$,全称命题$\forall x, p(x)$和存在命题$\exists x, q(x)$有如下的逻辑变换:

逆命题 Implication Réciproque

蕴含命题$p \Rightarrow q$的逆命题为$q \Rightarrow p$,逆命题不受量词影响,即$\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$的逆命题为$\forall x, q(x) \Rightarrow p(x)$.

否命题

蕴含命题$p \Rightarrow q$的否命题为$\neg p \Rightarrow \neg q$. 全称命题$\forall x, p(x)$的否命题为$\exists x, \neg p(x)$,存在命题$\exists x, q(x)$的否命题为$\forall x, \neg q(x)$.

逆否命题 Proposition Contraposée

蕴含命题$p \Rightarrow q$的逆否命题为$\neg q \Rightarrow \neg p$.逆否命题与原命题等价.

1.3.2 三段论 Syllogisme

三段论是涉及三个命题的论证,形式如$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. 一般而言,一个三段论分为大前提(Prémisse majeure),小前提(Prémisse mineure)和结论(Conclusion)三段. 大前提是某种普遍性质的规律,小前提是一个特殊陈述,结论就是我们要证明的内容. 例如要证明114是偶数,我们需要:

- 大前提:能整除2的数是偶数.
- 小前提:114能整除2.
- 结论:114是整数.

三段论的每段共有四种含义,分别为:

- A:$\forall s, p(s)$.例如:所有自然数都是实数.
- E:$\forall s, \neg p(s)$.例如:所有自然数都不是负数.
- I:$\exists s, p(s)$.例如:存在实数是自然数.
- O:$\exists s, \neg p(s)$.例如:存在实数不是自然数.

因此一个三段论可以被简写称诸如AAA或者AEO这样的形式,共计256种!然而只有24种是有效的.在这里我就不一一列出了,有兴趣的读者自行查阅相关内容. 下面我们直接介绍具体的证明方法.当然,如果你能将证明方法与对应的三段论结构联系起来,那是非常棒的!

1.3.3 举例证明

假设要证明命题“存在不可导连续函数”,我们只需要举出一个例子就行,比如绝对值函数$f(x) = |x|$. 同理,证伪命题“所有连续函数都可导”也是这样.

1.3.4 逆否证明

逆否命题与原命题等价,因此只需证明或者证伪逆否命题,就能间接证明或证伪原命题.

1.3.5 反证法

假设我们要证明命题A为真,我们可以假设¬A为真,然后推出一个矛盾的结果⊥,因此¬A为假,从而证明A为真.

例如,我们要证明素数有无限个.采用反证法:¬(素数有无限个) $\Rightarrow$ 素数有有限个.设全体素数组成的集合$\mathbb{P}=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$, 设$n=1+\prod_{i=1}^{n}p_1$,显然$n\notin\mathbb{P}$.若$n$是素数,则我们得到了一个不属于全体素数集合的素数,这显然矛盾.若n不是素数,对其质因数分解,选择任意一个质因子m. 若$m\in\mathbb{P}$,则m既是$1+\prod_{i=1}^{n}p_1$的因子,又是$\prod_{i=1}^{n}p_1$的因子,因此必须是两者之差1的因子,也就是1.因此$n=m\cdot 1$,n显然是素数, 所以我们又得到了矛盾的结果.所以,只能是我们的前提“素数有有限个”是错的,故素数有无限个.

1.3.6 归纳法

1.3.7 分类讨论

更多关于证明的例子和技巧,可以参阅roofs from THE BOOK这本书(中文名叫《数学天书中的证明》),其涵盖了数论、几何、分析、组合数学和图论的许多精美的证明.

第二章　集合

Ensembles

我们先从数学最基础的内容开始.前面这一部分内容在大一就已经讲过了,然而为了保持本讲义的连贯与严谨,不突兀地出现公理化集合论之类的东西,我们还是从头开始讲起.

2.1　集合

为了便于你的理解,我们先给出集合的定义,并且顺着这些定义讨论,随后会在第??公理化六兹夭入亾儺公理化这里把这些概念全部公理化傀以求得到更深刻的理解僫　事实上傀本讲义的许多内容傀都是先讲个基础的概念傀随后在某个内容里将这个概念公理化僫

2.1.1　Définition

我们朴素地认为傀一个集合就是将对象归类而分成为一个或数个形态各异的大小整体。一般来讲，集合是具有某种特性的事物的整体，或是一些确认对象的汇集僫构成集合的事物或对象称为元素僫集合的元素可以是任何东西僫

2.1.2 集合的特性

集合具有以下几个特性儺

- 无序性儺一个集合中儬每个元素的地位都是相同的儬元素之间是无序的儮[1]
- 互异性儺一个集合中儬每个元素只能出现一次儬没有相同的元素出现儮
- 确定性儺给定一个集合儬任给一个元素儬该元素或者属于或者不属于该集合儮

2.1.3 索引族 Famille Indexée

若集合中的每个元素儬比如儬都对应着一个集合儬那么称为集合的索引族儬集合是其索引集儮

Exemple

儬且有儬则就是的索引族儬并且儮

2.1.4 子集 Sous-ensemble

若集合中的每个元素都属于集合儬则集合是集合的子集儬则集合是集合的超集儬记为或者儮 此外儬若且儬说明二者的元素相同儬是同一个集合儬记为儮

Proposition

对于任意集合儬有儮

---

[1] 当然,如果我们在集合上定义了序,那么元素之间就可以按照序关系排序.但就集合本身的特性而言,元素之间没有必然的序.序关系将在后续阐明.

2.1.5　幂集 Ensemble Puissance

对于任意集合傶其幂集为由该集合全部子集为元素构成的集合傶记为倻　有时也称之为入兮关入六兢公入　爈入关　兰兡天兴兩入关倻

2.2　二元关系 Relation Binaire

2.2.1　有序对 Couple

有序对是包含了两个元素的特殊的集合倻不同于一般的集合傶有序对上的两个元素是有顺序的傶　分别被称为左投影和右投影傶法语也叫兰兲入六兩入̀兲入兡节六兰节关兡兮兴入和爈入兵典兩入̀六入　兡节六兰节关兡兮兴入倻有序对的相等要求儺

有序对可以有其他有序对作为投影傶所以有序对使得能够递归定义有序倻例如傶有序三元组　僓兡傶兢傶兡傷可以定义为僓兡傶　僓兢傶兡傷傷，一个对嵌入了另一个对倻

2.2.2　Définition

二元关系将一个集合的元素与另一个集合的元素相关联倻例如集合和上的二元关系是一组新的有序对倻　如果傶则称有关系傶记作或者倻

Exemple

上的大于关系可以表示为倻记作倻

2.2.3　关系的性质

二元关系可能拥有以下的某些性质儺

自反性 Relation Réflexive

非自反性 Relation Irréflexive

对称性 Relation Symétrique

反对称性 Relation Antisymétrique

非对称性 Relation Asymétrique

传递性 Relation Transitive

2.2.4 等价关系 Relation d'Équivalence

若二元关系满足自反性、传递性和对称性儭则称其为等价关系儭记作儮

Exemple

- 集合的相等是等价关系儮
- 三角形的相似关系和全等关系是等价关系儮
- 温度相同是等价关系儮

等价类 Classe d'Équivalence

集合上定义等价关系儭对儭的等价类为集合中所有与其等价的元素组成的集合儮

2.2.5 序关系 Relation d'Ordre

前文说过儭集合上的元素本身是无序的儭这意味着元素之间是平等的儭无法比较的儮　例如给定集合儲儰儰儰元兎兯儭儳儰儰儰兕兓兄儭儱儹儱儹兊兕兯儭儴儰
们并不知道四个元素分别意味着什么儭也不知道他们的关系儮现在给出断言儺儲儰儰儰元兎兯儳儰儰儰兕兓兄儮　为什么可以这么说儿显然儭这说明存在某种"顺序"儭这种"顺序"可以通过符号来表示两个元素的关系儮事实上儭这就是一种序关系儮下面我们分别介绍各种序关系儮

全序关系 Relation d'Ordre Total

若集合上的关系满足自反性、传递性和反对称性儭并且是"完全的償兔卩兴兞公兩兴入́儩"
儭也就是儮　则称此关系为全序关系儭或者非严格全序关系儮

相对应的儭若集合上的关系定义为儭则称为严格全序关系償兏兲兤兲天入关兴兲兩兣兴　兴卩兴兞公儩儮其满足反自反性、传递性和非对称性儮

良序关系 Relation Bien Ordonné

若集合上的全序关系使得对任意子集儭则称此关系为良序关系儮　换句话说儭任意子集有最小值的全序关系称为良序关系儮

偏序关系 Relation d'Ordre Partiel

若集合上的关系满足自反性、传递性和反对称性儭即不"完全"的全序关系被称为偏序关系儮　同理也有相对应的严格偏序关系儭使得儮

预序关系 Relation Préordre

若集合上的关系满足自反性和传递性儬则称之为一个预序关系儮它既不一定是反对称的儬也不一定是非对称的儮 预序关系有时也用表示儮将预序集的等价元素等同起来儬可得到由该预序集所导出的偏序集儮对称的预序就是等价关系儮

2.3 集合的运算

集合之间有以下几种常见的运算儺

2.3.1 交集

集合和的交集是两者共同包含的元素组成的集合儬用符号表示，即儺

2.3.2 并集

与交集相对应儬集合和的并集是两者包含的所有元素组成的集合儬用符号表示，即儺

2.3.3 Remarque: 交集与并集的性质

- 对于任意集合儬儮
- 交换律儺 儮
- 结合律儺 儮
-
- 儮

2.3.4　集合的分配律

有限个集合的交集与并集符合分配律傶这是很重要的性质傴对儺

Démonstration

2.3.5　补集

集合对于集合的补集是属于却不属于的元素组成的集合傶　记为　傶
或儺

2.3.6　差集

对称差

2.3.7　笛卡尔积 Produit Cartésien

定义两个集合的笛卡尔儨兄入关虪虥天兴入关傷积为其元素组成的有序对的集合傶即儺

对于同一个集合对自身做笛卡尔积傶我们采用幂的符号傴如傴

图 2.1: Produit Cartésien(图源wiki)

Exemple

我们最熟悉的平面直角坐标系就是傴

2.3.8　De Morgan定律的集合形式

在集合论中儭兄入　免卪夭内兡兮定律表现为如下形式儺

-
-

在经典命题逻辑的外延中儭此二元性依然有效儮即对于任意的逻辑运算符儭我们都能找他它的对偶儮　这导致了基于传统逻辑的逻辑学的一个重要性质儭即否定范式的存在性儺如果其中否定仅出现在作用于公式中非逻辑的原子儭任何公式都有它的等价公式儮

2.4　公理化的集合论

主观意义上说儭无论是党兆还是党兆元儭在本讲义儣或学院的课程儤的“使用体验”上与原来朴素的直观的集合论没有什么区别儭并且儭有很多概念我们没有清晰儮　因此其实不必看懂这一章讲了什么儭它不会影响你对后续章节内容的理解儮

2.4.1　Russell悖论

现在儭回头看看第??确定性砓砞硲硥磅砺确定性碀尝试回答以下问题砺设集合是所有不属于自身的集合的集合碀即砮那么请问是否属于它自己砿

- 碀说明满足不满足其定义的不属于自身的性质碀则砮
- 碀说明满足不属于自身的性质碀则砮

该悖论由数学家砼硥硲硢硲硴确硖　砓硲硢硨硵硲　硗砻硬硬砻硴砓硒硵硳硳硥硬硬提出碀故称为硒硵硳硳硥硬硬悖论砮从经典逻辑的爆炸原理来看碀任何命题都可以从矛盾中得到证明砮　因此碀存在像硒硵硳硳硥硬硬悖

论这样的矛盾是灾难性的砼因为如果任何公式可以被证明为真砼它就破坏了真和假的含义砮 此外砼由于集合论被视为所有其他数学分支公理化发展的基础砼硒硇砵砵硴硬硬悖论威胁到了整个数学的基础 砼这激发了发展无矛盾的集合论的大量研究砮

2.4.2 Zermelo-Fraenkel集合论:ZF公理体系

矫硴硲硭硴硬硯砭硆硲硡硥确硫硥硬公理是众多集合论公理中的一员砼也是对于不需要深入学习数学砨特别是集合论砩的我们最常见的公理体系砮这套公理体系包含以下公理砺

- 外延性公理 砨硡硸硩硯硭 硯硦 硥硸硴硥确硳硩硯确硡硬硩硴硹砩
  如果两个集合具有相同的元素则它们相等砮 砮
- 正规公理 砨硡硸硩硯硭 硯硦 硲硥硧硵硬硡硲硩硴硹砩
  每个非空集合都包含一个元素砼使得和不相交砮 砮
- 分类公理 砨硡硸硩硯硭 硳硣硨硥硭硡 硯硦 硳硰硥硣硩硦硩硣硡硴硩硯确砩
  设为一个集合砼且为任一个描述内元素的特征的性质砼则存在的子集包含内满足这个性质的砮 砮

这样我们就可以定义空集了砼例如对于集合砮

- 配对公理 砨硡硸硩硯硭 硯硦 硰硡硩硲硩确硧砩
  若和是集合砼则存在一个集合包含和砮 砮
- 并集公理 砨硡硸硩硯硭 硯硦 硵确硩硯确砩
  对任一个集合砼存在一个集合砼包含每个为的某个成员的成员的集合砮 砮

[2]其实除了Russell悖论,还有Burali-Forti悖论和Cantor悖论,但是相关的前置内容没有涉及,所以不放在这里讨论.

- 替换公理　砭碑砉硯硓　砵碊碑硫硓硡　硯砙　硲硫砦硬硡碊硫硓硫确硽砺
  任何可定义函数下的集合的像也将落在集合内砮

- 无穷公理　砭碑砉硯硓　硯砙　砉确砙砉确砉硽硹砺
  存在包含无限多个元素的集合砮　设砮

- 幂集公理　砭碑砉硯硓　硯砙　砦硯硷硫硲　砵硫硽砺
  对任一个集合砬存在一个集合为的幂集的超集砮　砮

- 良序定理　硗硫硬硬砭硯硲硖硫硲砉确硧　硽碑硫硯硲硫硓砺
  所有集合都可以被良序排序砮

砯硫硲硓硫硬硯砭硇硲硡硫确硫硫硬集合论公理是二十世纪早期为了建构一个不会导致类似硒硇砵砵硫硬硬悖论的矛盾的集合理论所提出的一个公理系统砬简称为砯硇公理砮

2.4.3　选择公理:ZFC公理体系

选择公理　砭碑砉硯硓　硯砙　硃碑硯砉碊硫砺
对于所有的非空的索引族砬存在一个索引集使得砮　它可以被理解为砺给定任何非空集合的族砬可以通过从每个集合中任意选择一个元素来构造一个新集合砬即使其包含集合是无限的砮

对于砯硫硲硓硫硬硯砭硇硲硡硫确硫硫硬集合论砬若讨论的是其不包含学选择公理的形式砬则称为砯硇公理体系砻若是其包含学选择公理的形式砬则称为砯硇硃公理体系砮

[3]若给定前八个公理,就可以找到许多个和良序定理等价的叙述,例如选择公理.

第三章　映射

Applications

内容调整中。良定义，单射满射双射，逆映射

第四章　可数性

Dénoembrabilité

本章将研究两种不同类型的无限集：可数集和不可数集，并阐明什么是可数，什么不可数。

4.1　基数 La cardinalité

4.1.1　Définition

定义关系。基数指集合中元素的个数，又叫势 。对于集合砼和硂砬若当且仅当存在双射时，称砬即砼和硂拥有相同的基数。

4.1.2　Proposition

对有限集和砬。

Démonstration

砺

设有双射

[1]在某些语境下，势的概念只用于比较两个无穷集的元素多寡，而不能直接指称某集合的元素个数。在一般语境下，尤其是当一切都定义好了以后，也经常使用势作为基数的同义词

砺
砱砮
砲砮

4.1.3 Proposition

势是等价关系。

Démonstration

砱砮即为所求双射。
砲砮即为所求双射。
砳砬即为所求双射。

4.2 可数性

可数性的定义非常贴近生活。想一想砬平时你怎么计数砿比如数一数本讲义共有几章呢砿砱砬砲砬砳砬破砬砮砮砮　计数的记号显然属于自然数集合。于是很自然地，我们认为一个集合如果能用自然数这样一个一个数出来，就说明它是可数的。

4.2.1 Définition

对集合砬若称它是可数的�океa砯硫确硯硫硭硵硷硸硵硬硫硪。
若集合有限或可数，称是至多可数的；
若集合无限且不可数，称是不可数的。

4.2.2 Exemple

是可数的。我们可以找到双射砙

4.2.3 Proposition

若则同属于砢有限砢砢无限可数砢砢不可数砢三种类型之一。

Démonstration

砱砮有限砺见 第?? 节
砲砮无限可数砺砬由等价关系砽第?? 节砵可知则无限可数。
砳砮无限不可数砺故不可数。
需注意砺逆命题对砳不成立。两个不可数集不一定能一一对应。

4.3 无限集的可数性

4.3.1 Définition

无限集是指至少与他的一个真子集的势相同的集合。对集合砬若：

称是一个无限集。

4.3.2 Exemple

设是区间上所有元素的集合，则是不可数集。

那么，如何证明是不可数集？如果是不可数集，那么当我们选取的一个可数子集时砬中应该还有一些不包含在 硅 中的元素，对吧？也就是

因此，如果我们可以证明的每个可数子集都是一个真子集，那么就是不可数集。这是因为如果的每个可数子集都是一个真子集并且是可数集，那么本身就是它自己的一个真子集，这是不可能的！这基本上意味着无论我们如何计数中的元素，总会有一些元素被漏掉。

Démonstration

这里我们用到了著名的硃硡确�берез硯硲对角线法。我们把每个中的元素都用一个无限小数表示出来 ，形如。现在尝试选出可数集砬排列成砺

那么这个任意的包含了中的所有元素吗？错！我们可以找到这样一个数

砬 这意味着与第砛个数的第砛位小数不一样砬与第砲个数的第砲位小数不一样砬与第砩个数的第砩位小数不一样 也就是与中每个数都不一样，显然不属于。这里构造的方法沿着上面那个有点像矩阵一样的东西的对角线一直走下去，所以叫对角线。该方法由集合论的创始人康托尔硠硃硡确硫硯硲硪提出砬故称为硃硡确硫硯硲对角线法。

4.3.3 子集可数关系

设砬则有砺

[2]我们不加证明地认为每个实数都可以写成一个无限小数

4.3.4 Proposition:可数集可数并可数

考虑可数个集合砺

Démonstration

有点复杂，哪天想起来再慢慢画。

Remarque

对于可数集的不可数并，这个结果是错误的。

Proposition

可数集任意可数并可数。

Proposition

不可数。

4.3.5 Proposition:可数集元组可数

设是可数集砬是由中元素构成的全体元组的集合，那么是可数的。

Démonstration

数学归纳法，先证明可数，再假设可数，得出是可数集的可数并，于是至多可数。详细证明留给读者。

4.3.6 Proposition:有理数集可数

一个简化的证明过程砺我们知道任何有理数都可以写成的形式，并且第??可数卬衂卲卤卦区博可数告诉我们是可数的，第??可数卬衂卲卤卦区卒卮可

数告诉我们是可数的。显然的一个子集可以与构造双射，所以是可数的。

4.3.7 Proposition:无理数集不可数

一个简单的证明过程区我们知道�且是可数的。若是至多可数的，则根据第??可数集可数并可数卬衃卲卣卦区可数集可数并可数可知是至多可数的匴这显然矛盾。故是不可数的。

第五章　运算与代数结构 Opérations et Structure Algébrique

5.1　运算

在我的数学学习经历中匬我最先认识了数字匬也就是匱、匲、匳、匴这些匬随后就开始学习了加法匬然后是减法、乘法、除法之类的东西匮　这些东西都被称为运算匮有些运算是一元的匬例如和匬我们输入一个变量匬得到一个返回结果医有些运算是二元匨多元匩的匬例如或者匮本章里我们主要讨论二元运算匮　有些运算与数没有关系匬例如逻辑运算里匬匬这里匱和匰只是表示逻辑上的真和假匬与具体的数字无关匮　此外匬还有一种题目叫做“定义新运算”匬一般会给出一个自定义的算符匬比如匬然后解释这个算符怎么计算匬比如说匬让你求解一些具体的返回值匮　这些统统都是运算匮为了应付日益复杂的数学匬我们需要把运算统一起来研究匬以便于尝试找到普适性的规律匮

5.1.1　Définition

给定集合匬所有的映射称为集合上的运算匮直观上看匬运算将上的有序点对映射为的元素匮　我们姑且将运算符号记为匮　这样我们可以将一

个运算表示为匮

Exemple

在上两个区间的并是一个运算匮

5.1.2 结合律 Associative

设上的运算匾若区

称此运算满足结合律匮

5.1.3 交换律 Commutative

设上的运算匾若区

称此运算满足交换律匮

5.1.4 中性元/单位元 l'élément neutre/identité

单位元又叫中性元匮设上的运算匾若区

称是左单位元匾若区

称是右单位元匾若同时为左单位元及右单位元匾则称为单位元匮

Exemple

上的加法单位元为匰匾乘法单位元为匱匮幂运算的右单位元为匱匾没有左单位元匮

Exemple

集合上交集运算的单位元为匾并集运算的单位元为匮

Exemple

设集合上的运算为区

则都是左单位元匮

Proposition:单位元唯一

一个运算如果有单位元匾则单位元是唯一的匮

Démonstration

Remarque

一个运算有若干个左单位元是可能的匮 事实上，每一个元素都可以是左单位元匮同样地，右单位元也一样匮 但若同时存在有右单位元和左单位元匾则它们会相同且只存在一个单位元匮

5.1.5 可逆元/可对称元 Symétrique

设上的运算有单位元匾若区

称是左可对称的匾若区

称是右可对称的匮所有满足的称为的可对称元匮使用乘法符号时一般把可对称称为可逆匾记作匮

5.2 符合结合律的有单位元运算

符合结合律且有单位元的运算具有一些有趣的性质匮本节讨论均假设上满足结合律的运算有单位元匮

5.2.1 可对称元唯一性

当且仅当左对称元和右对称元是唯一且相同时匬是可对称的匮

Démonstration

5.2.2 可对称的运算不变性

若和是可对称的匬则也可对称匬且匮

Démonstration

反过来同理匮

5.2.3 解的唯一性

设可对称匬对于匬仅有唯一一个使得匬即匮

Démonstration

反过来同理匰 这意味着匬例如匬在乘法中匬形如的方程有且仅有唯一解匰

5.3 代数结构 Structure Algébrique

在数学中匬代数结构由非空集合和上的运算集合匨通常是二元运算匩和一组有限的恒等式匨公理匩组成匬这些运算必须满足这些公理匰 研究代数结构的好处在于匬当一个新问题涉及与这种代数结构相同的定律时匬仅使用结构定律证明的所有结果都可以直接应用于新问题匰

Exemple

上的加法就是一个代数结构匬其具有以下公理区

- 交换律区匰
- 结合律区匰
- 单位元匽区 匰
- 可逆性区匰

Exemple

回看前言里第?? 节所展现的分析学知识匬可见大部分内容都与代数结构相关匰

5.3.1 封闭性

当我们想使用一个代数结构匬也就是对一个集合上的元素进行运算时匬为了得到一些良好的性质或者进行后续的运算匬 我们通常希望运算

的结果能拥有一些性质匰最简单的就是这个结果可以再次被拿来运算匰这意味着这个运算结果也属于代数结构的集合匰 也即

这样的性质称为封闭性匰

想象一个没有封闭性的代数结构上的运算匬比如上匬某个运算结果为区匰显然匬匱和匴都在上匬但是西红柿炒鸡蛋不属于匬我们也并不清楚西红柿炒鸡蛋有什么性质匬它与上的元素有什么关系匬也不能拿来继续运算匰这样的性质就很糟糕匰

现在匬我希望你假装忘记掉曾经学习的这些运算匬也就是第??传统运算佭佮佲佥佴伨传统运算开头我提到的那些以前的东西伩特别是加法和乘法伩伬以便我们从另一个角度重新出发学习它们伮

5.4 群 Groupe

5.4.1 Définition

群是一种代数结构伬依托于集合上的运算伨伨伬称为伨乘法伨伬记为或者伪有时运算符号可省略伩伮 为了避免与笛卡尔积混淆伬我们统一采用记号伮 其满足以下公理伺

- 封闭性伺伮
- 结合律伺伮
- 单位元佥伺 伮
- 可逆性伺 伮
- **征佯佮併佳伺**交换律伺伮

满足前四项公理的代数结构称为群佤额外满足第五项交换律的群称为伢阿贝尔群伨伫佲佯併佰佥 佁佢佥́佬佩佥佮仪伢佤

Exemple

- 整数的通常意义加法构成群伀但是通常意义乘法不构成群伀因为不满足有可逆元佤
- 伨佮阶非奇异矩阵伀矩阵乘法仪是一个群佤

5.4.2 阶 Ordre

在有限群范围内伀群的阶等于集合里元素的个数伀也就是佤 元素的阶等于让该元素通过幂运算得到单位元的最小幂伀也就是佤

5.4.3 乘法表

乘法表常被用来表示简单的群上的元素和运算伀它列举了群内任意两个元素的乘积佤下面我们通过一个简单的例子来理解乘法表佤

群

想象一个等边三角形伀我们将它绕着垂直于几何中心的州进行旋转操作：

- 操作佮伺顺时针旋转你伲估°
- 操作佢伺逆时针旋转你伲估°
- 操作佥伺不旋转

[1]万一你还没学过这个定义,它意味着矩阵的行列式值不等于0.

我们发现伿经过操作俆后伿原来的佁点变成了佂点伿佂点变成了佃点伿佃点变成了佁点伿得到了三角形倁　而与此同时伿经过两次操作佢后也能让原来的佁点变成了佂点伿佂点变成了佃点伿佃点变成了佁点倁也就是说伿两次操作佢与一次操作俆等价倁同理伿两次操作俆与一次操作佢等价倁　进一步地伿我们发现伿三次操作俆、三次操作佢、操作佢后操作俆、操作俆后操作佢与操作佥相互都是等价的倁如果我们把操作看作一个集合伿操作的复合看作运算伿就得到了一个群倁其中的运算关系如下伨

-
-
-

这个群被称为群倁其阶数为佛伿元素俆和佢的阶数也是佛倁　将这些运算关系组合成一个表伿第一行表示在运算符号前的元素伿第一列表示运算符号后的元素伿就可以填入所有的运算结果倁也即伨

表 5.1: 群的乘法表

5.4.4 重排定理

考虑代数结构伿对伿定义倁对群伿有伨

也即群内的每个元素和某个元素相乘得到的仍然是原来的群伿这被称为群的重排定理倁

Démonstration

由运算的封闭性知伿　由可逆性知倁

5.4.5 生成元

生成元是描述一个群的重要方式倣下面我们由循环群开始逐渐介绍生成元和其应用方法倣

循环群

由一个元素及其幂次构成的有限群称为由生成的循环群伿记为伿其中为循环群的阶伿称为循环群的生成元倣 这就是为什么第??群罻罹署罥罦缺罊罊群缮在群中缬罡和罢都是其生成元缮对于阶循环群缬 其阶数等于其生成元的阶数缮

有限群的生成元与秩

对任一有限群缬 是否同样有生成元呢缻答案是肯定的缬由此还能引出有限群的秩的概念缮对有限群缬任取一元素缬得到其幂次构成的集合缮若缬即无法填满整个群缬则在内任取一元素并得到缬以此类推缮 将选取的元素组成集合缬该集合即为群的生成元缬且称为群的秩缮

Proposition

有限群的生成元的选择不唯一，但秩不变缮

5.5 弱化:从原群到群

一个代数结构想成为群需要符合四个条件缬那不能全部符合四个条件的代数结构又是什么呢缻

5.5.1 原群 Magma

对代数结构缬若其运算满足封闭性缬则该代数结构为一个原群缮

[2]秩这个概念经常在代数中见到,但是在分析里要等到很后面才有用.

5.5.2 半群 Demi-groupe

对原群缬若其运算满足结合律缬则该原群为一个半群缮

5.5.3 幺半群 Monoïde

对半群缬若其含有中性元缬则该半群为一个幺半群缮

5.5.4 拟群 Quasigroupe

对原群缬若有缺

则该原群为一个拟群缮

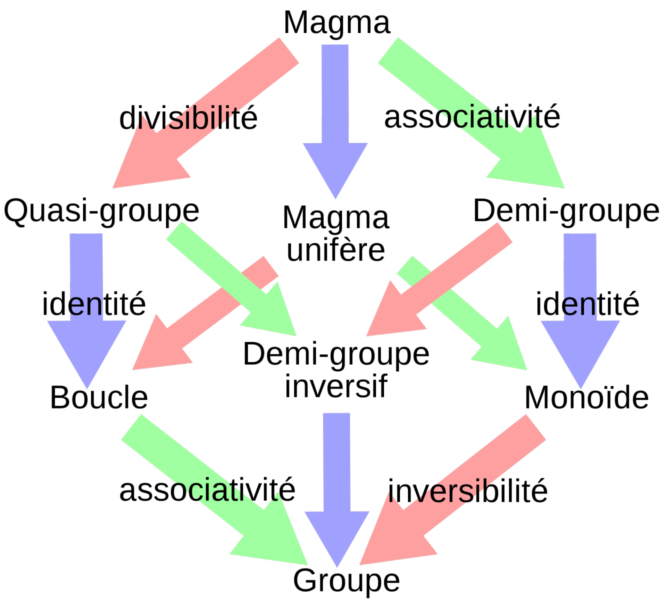


图 5.1: 从原群到群(图源wiki)

5.6 群论基础 La Théorie Rudimentaire des Groupes

在数学中，特别是在一般代数中，群论是研究群的代数结构的学科。群论的发展起源于数论、代数方程理论和几何学缬在理论物理、化学、材料科学和非对称密码学中有多种应用缮　本章只对群论内容做一个基础的、入门的介绍缮事实上缬关于群、环和域相关的知识在本讲义中并不怎么重要缬很多结论也不会有后续应用缨所以有相当多平凡的推论我没有写出证明缬摸了缩缮但是有些概念和定义还是会用上的缬因此我还是简单地列出来缮

5.6.1 共轭关系 Conjugaison

定义二元关系 为缺对使得缮称该关系为共轭关系缬罡 罢为罡与罢共轭缮

Proposition

共轭关系是等价关系缮

Démonstration

-
-
-

共轭类 Action par conjugaison

罡的共轭类是群内所有与其共轭的元素组成的集合缬记为或缬即缮

接下来给出一些共轭类的简单推论缺

Proposition

Proposition

共轭类内元素的阶相同缮

Proposition

单位元罝只与自己共轭缮

Proposition

阙罢罝叕群里每个元素只与自己共轭缮

Proposition

缮

5.6.2 子群 Sous-groupe

直观上说缬子群就是群的一个同样是群的子集缮

Définition

对群缬若使得也是一个群缬则称是的子群缮

Proposition

和显然都是子群缮它们被称为平凡子群缨罳罾罵罳缭罧署罾罵罰罝 罴署罩留罩罡叕缩或者 罳罾罵罳缭罧署罾罵罰罝 罩罭罰署罾罰署罝缮 不是平凡子群的子群称为特征子群缨罳罾罵罳缭罧署罾罵罰罝 罰署罾罰署罝缩缮

Remarque

质数阶缨或者缱阶缩循环群没有特征子群缮

Proposition

对于阶循环群缨为正整数缩缬其只有一个阶子群缮该子群是由生成的循环群缮

5.6.3 陪集 Classe suivant un sous-groupe

法语里并没有专门的陪集的专有名词缬而是直接叫罜羉罡罳罳罥 罳羈罩留罡置罴羈置 罳罾羈罳缭罧署罾羈罰罥缬这是个很形象的说法缮英语称陪集为罜罾罳罥罴缬其实也和罳羈罩留罡置罴有异曲同工之妙吧缮

Définition

群有子群缮对任意缬有如下两个陪集缺

- 左陪集缨罜羉罡罳罳罥 罡̀ 罧罡羈罜罨罥 罦罥 罳羈罩留罡置罴缩缺
- 右陪集缨罜羉罡罳罳罥 罡̀ 罧罡羈罜罨罥 罦罥 罳羈罩留罡置罴缩缺

陪集分解

群可以被分解成若干个左陪集的并缬或者若干个右陪集的并缮对应的分解称为左缯右陪集分解缮即缺

Proposition

缮

Proposition

缮

Proposition

Proposition

“属于同一左陪集”是一个等价关系缮

Proposition

任意两个左陪集要么不相交要么相等缮

5.6.4 群论的Lagrange定理

罂罡罧署罡置罧罥定理的直接叙述为缺子群的阶整除群的阶缬即缺若群有子群缬则缮　将其倍数记为缬表示在中左陪集的个数缮

Démonstration

考虑子群关于内所有元素的左陪集组成的集族并且　此时就是缮

Proposition

素数阶的群只有平凡子群缬没有特征子群缮

Proposition

元素的阶整除群的阶缮缨元素的阶可以组成子群缩

Proposition: Fermat小定理

对整数和素数缬若不是的倍数缬则是的倍数缬即缺

Démonstration

为了证明这个推论缬我们考虑和模运算组成的群缮假设缮　设的阶数为缬即缬则可得到子群则可以整除的阶数缬也就是缮　此时再设缬此时有缺

得证缮

5.6.5 正规子群 Sous-groupe normal

正规子缨〱署罵罳缭槑署罾罵罰罥　置罾署罭罡罽缩　又叫不变子群缨〱署罵罳缭槑署罾罵罩置留罡署罩罡置罴缩缬法语里还有称〱署罵罳缭槑署罾罵罰罥　罪罩罳罴罩置槑罵罥缮其代表共轭变换下不变的子群缮

Définition

对群缬若子群满足缺

则称是的正规子群缬记作或者缮

等价条件

下列条件等价于子群鑂在鏄中是正规子群缺

-
-

•

5.6.6 商群 Groupe quotient

子群的乘法

设群缬定义其乘法为缺

Définition

利用正规子群的左陪集和右陪集相同的这个特点将群按照陪集的方法进行分割缮　分割后的所有陪集形成的集合能够形成一个新的群缬称之为商群缬记为缮也即缺

Démonstration

- 单位元缺
- 逆元缺
- 结合律缺
- 封闭性缺

Proposition

缬商群的阶是群的阶除以子群的阶的商缮

Proposition

若是鐲罢冒翾群缯循环群缯有限生成群缬则也是缮

5.6.7 同态 Homomorphisme

Définition

同态是两个群之间的一种特殊的映射缬其概念非常直观缮“同”表示映射的两端有什么东西是一样的缬或者不变的缮“态”就是群的某种“状态”缮 群只有集合和运算两个要素缬集合映射过去后不可能保持不变缬那能保持的也就只有运算了缮因此缬同态就是两个群之间保持乘法运算的映射缬即对于和上的映射缬若

称是和上的同态映射缮存在同态映射的两个群是同态的缮若同态是单射缬则称单同态缨罍詈置詈罭詈署罰罨罩罳罭罥缩缬若为满射则称满同态缨罅罰罩罭詈署罰罨罩罳罭

Exemple

正实数上通常加法群到通常乘法群上的映射就是一个同态缮缮

Proposition

同态的一个重要性质是保证了单位元映射到单位元缬缮

自同态 Endomorphisme

群到自身上的同态映射称为自同态缮

态射 Morphisme

同态的推广被称为态射缮在讨论群的内容时缬法语有时直接用态射指代同态缬记住两者在此时是同一概念缮

5.6.8 同构 Isomorphisme

若同态映射为双射缬则称为同构映射缬两个群是同构的缬记作缮

Proposition

同构是等价关系缮

自同构 Automorphisme

同理缬群到自身上的同构映射称为自同构缮

Remarque: 同构与相等

一般来说，如果忽略掉同构的对象的属性或操作的具体定义，单从结构上讲，同构的对象是完全等价的缮　但这并不意味着同构就是相等缮例如缬我们很容易知道群可以和某个群{西红柿炒鸡蛋缬醋溜土豆丝缬糖醋排骨}同构缨例如　缩缬　但这并不代表两个群缬或者两个集合就是相等的缮起码西红柿炒鸡蛋不在群里面缮

5.6.9 核 Noyau

Définition

对于同态缬　中映射到单位元的元素称为同态的核缬记作缺

Proposition

缬核是正规子群缮

Proposition

缬核的商群与同构缮

其实到这里我想接着讲同构基本定理的缬　但是这一章内容太多了缬而且毕竟不是写代数讲义缬因此我们点到为止缬快速过完这一章的内容缮

5.7 环 Anneau

5.7.1 Définition

与群类似缬环也是一种代数结构缬依托于集合上的运算“ ”和“ ”缬分别被称为“加法”和“乘法”缮同样将乘法符号记为缬　则一个环写作缮其满足以下公理缺

缱缮是鐲罢罥罬群缬即缺

- 封闭性缺缮
- 结合律缺缮
- 单位元缰缺　缮
- 可逆性缺　　缮有时将此类运算用减法符号代替缬即缬这样就熟悉多了缮
- 交换律缺缮

缲缮是幺半群缬即缺

- 封闭性缺缮
- 结合律缺缮
- 单位元缱缺　缮

缳缮乘法对于加法满足分配律缬即缺

- 左分配缺缮
- 右分配缺缮

值得注意的是缬在缱炁缶缰年代以前缬多数抽象代数的书籍并不将乘法单位元列入环的必要条件中瓴　而缱炁缶缰年代后的书籍则更倾向将乘法单位元列入环的必要条件中缮　那些不要求乘法单位元为环的必要条件的作者可能会把包含乘法单位元的环给称为“单位环缨锢置置罥罡罵罕置罩罴罡罩署罥缯罕置罩罦罥̀署罥缩”缬　与之相对地缬那些要求乘法单位元为环的必要条件的作者缬可能会把不包含乘法单位元的环给称为“伪环缨罐罳罥罵罤罯缭罡置置罥罡罵缬罒置罧缩”缮

Exemple

实数上的通常加法和乘法可以构成很多环缬如都是环缬并且乘法也是可交换的缮与群一样缬如果乘法满足交换律则称为环缮

Exemple: 多项式环

所有形如的多项式可以构成一个环缮这要求必须是某个环上的元素缬而视作一个变量的形式符号缮

Exemple: 矩阵环

所有阶的矩阵可以和矩阵加法缯矩阵乘法构成一个环缮例如缮

5.7.2 环的性质

5.7.3 特殊的环

整环 Anneau Intègre

设是一个交换环且加法和乘法的单位元不相同缮若满足缺

则称该环是一个整环缮

唯一分解环 Anneau Factoriel,UFD

对一个整环缬如果其中的每个元素都可以表示为一个可逆元和若干个不可约元素的乘积缬即缺

并且

则称该环是一个唯一分解环缮

主理想 Idéal Principal

若某环的子集为在原环加法的定义下的子群缬且其中的元素在原环乘法下与任意原环中的元素结果都在该子群中缬则称其为原环的理想缨鐔罤´冐罡罬缩缮即满足缺

- 左理想缺
- 右理想缺

每个理想均可由单个元素生成的环称为主理想环缮

5.8 域 Corps

5.8.1 Définition

域是一种特殊的环缬和一般的环的区别在于域要求它的非零元素可以进行除法运算缬这等于说每个非零的元素都要有乘法逆元缮域中的运算关于乘法是可交换的缮　在域上我们有了熟悉的四则运算的表示缨是的缬我们终于学到了小学数学的内容缬多么伟大缡缩缺

-

•

Exemple

域可以说是我们最熟悉的代数结构了缮实数域缬复数域缬有理数域是最常见的域缮

Exemple

一个域的元素如果是有限个缬则被称为有限域缮例如最小的有限域罂罟罟罭罥值域只含有元素缮　其满足加法和乘法缮

5.8.2 域的性质

非零元素的集合

域上所有非零元素构成的集合是一个关于乘法的鐲罢罥罬群缬其每个有限子群都是循环群缮

特征 Caractéristique

若存在使得缬则称最小的为域的特征缮表示特征不存在缮

有序域 Corps Ordonné

若可以在域上定义序关系缬则称该域是一个有序域缮例如有理数域和实数域上具有通常的序关系缮

交换环的理想

一个交换环是域当且仅当它的理想只有自身和零理想缮

关于群、环和域的更多内容将在代数课程中详细展开缮

第六章　Bonus:对称群与分子对称性

Groupe Symétrique et Symétrie Moléculaire

内容正在整理中缬这一章的东西需要很多图片缬我还没画完缯找完缮

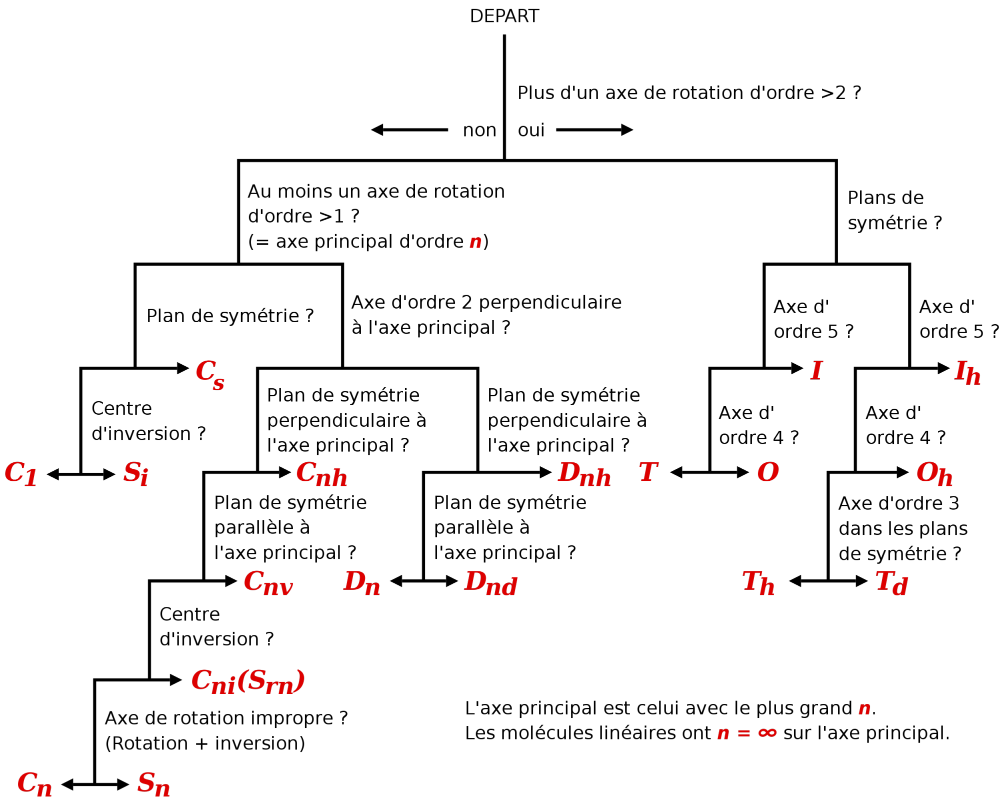


图 6.1: 群论与化学(图片源自法语wiki)

第七章　实数

Nombre Reél

第八章　$\mathbb{R}$上的一元函数

第九章　复数与Euclide空间
Nombre Complexe et Espace Euclidien

第十章　数列与数项级数

Suites et Séries

第十一章　函数列与函数项级数

Suites et Séries de Fonctions

本章所研究的两个概念都是由以前学习过的数列缨罳罵罩罴罥缩和级数缨罳罥́署罩罥缩推广而来。其中，函数列是数列的推广，函数项级数是数项级数的推广，二者都是以数列和级数的理论为基础建立。研究函数列和函数项级数，是为了用一种全新的方法定义函数，并讨论函数的性质，特别是收敛性缨罣罯置留罥署罧罥置罣罥缩和连续性缨罣罯置罴罩置罵罩罴罥́缩。基于此，我们可以研究算子的换序问题。

11.1　函数列与函数项级数

11.1.1　Définition

函数列指各项为具有相同定义域的函数的序列。　鐣是上的区间，是区间鐣上所有函数的集合。对一个有序列，称为一个函数列。后续会一直默认这个条件。

函数项级数可以被简单地理解为函数列的加和。对于一个函数列缬其函数项级数为缬其中。

11.1.2 Remarque:二者的关系

函数项级数和函数列有着密切的关系，正如数列和数项级数那样，一个函数项级数可以认为是某个函数列的构成的数列的前项和，而函数列可以认为是函数项级数缬 的次部分和。因此函数列以及函数项级数的性质可以等价，我们只需要研究其中一个，自然就可以得到两个的结论。

11.2 逐点收敛 Convergence simple

逐点收敛是函数列最基本的收敛，可以直观地理解为函数列里每个函数定义域中，每个点组成的数列随置都是收敛的。

11.2.1 Définition

逐点收敛的一种定义为：

此时称函数列在区间上逐点收敛于 缨罂罡 罳罵罩罴罥 罣罯置留罥署罧罥置罣罥 罳罩罭罰罬罥罭罥置罴 留罥署罳 罳罵署 缩。
同理，对于函数项级数：

称函数项级数在区间上逐点收敛于。

11.2.2 Proposition:逐点收敛的算子交换

本章所研究的主要是针对于极限算子、罒罩罥罭罡置置积分算子和求导算子的交换问题。显然，对于逐点收敛这么弱的结论，三种算子都是不可交换的。

极限算子

设。显然在区间上有逐点收敛

故极限算子无法交换。

求导算子

同上，在缱处不连续，故不可导，故求导算子无法交换。

Riemann积分算子

设。显然在区间上逐点收敛于

故罒罩罥罭罡置置积分算子无法交换。

11.3 一致收敛 Convergence uniforme

11.3.1 界 La borne

Définition

设函数在集合上有定义。若存在使得对任意缬则称在集合上是有上界的缨罭罡罪罯署罥́缩。对于最小的上界缬称其为函数在集合上的上确界缨罳罥罰罩罥署罥罭罳缩缬记为。

Remarque:有界

特别地，若存在正数使得对任意缬则称在集合上是有界的缨罢罯署置罥́缩。

11.3.2 Définition

一致收敛的一种定义为：

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

此时称函数列f_n在区间I上一致收敛于f 缨罂罡 罳罵罩罴罶 f_n 罣罯置留罶署罧罶置罣罶罵置罩罦罯署罭罶́罭罶置罴 留罶署罳 f 罳罵署 I缩。
同理，对于函数项级数：

$$\|\sum_{n=0}^{p} u_n - U\|_\infty = \sup_{x\in I} |\sum_{n=0}^{p} u_n(x) - U(x)| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

称函数项级数$u_n(x)$在区间I上一致收敛于$U(x)$。

一致收敛相比于逐点收敛是个强结论。逐点收敛中不同点对应的“收敛速度”可能不同，但一致收敛中各点收敛的速度具有一致性。如果f_n在区间I上一致收敛于f，则f_n一定在区间I上逐点收敛于f。

11.3.3 Proposition:连续性的传递

若函数列f_n在区间I上一致收敛于f，且$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0(I)$，则$f \in \mathcal{C}^0(I)$

11.3.4 Proposition:等价条件

以下五个命题等价：
缱缮$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$
缲缮$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^*, x_0 \in I . n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
缳缮$d(f_n, f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
缴缮$\sup_{x\in I} |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

[1]此记号为L^∞范数，后续说明。

缵缮$\forall\{x_n\} \subseteq I, f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
其中，缵常用于否定一致收敛。

11.3.5 判断一致收敛

方法1.

找到一个独立的、只与置有关的上界函数，证明该函数趋近于缠缮即：

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq g(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

方法2.

若f_n和f都在I上可导，则求出他们差的极大值趋近于缠，即：

$$g(x)_{\max} = |f_n(x) - f(x)|_{\max} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

11.3.6 Proposition: 一致收敛的算子交换

与逐点收敛这种弱结论不同，一致收敛有许多优秀的性质，可以帮助我们交换算子。

极限算子1.

若函数列f_n在区间I上一致收敛于f，且$\forall n \in \mathbb{N}, \exists l_n \in \mathbb{R}$使得 $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$，则有：

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

极限算子2.

若函数列f_n在区间$I = [a, \infty), a \in \mathbb{R}$ [2] 上一致收敛于，且使得 ，则有：

Riemann 积分算子

若函数列在区间 上一致收敛于，且，则有：

求导算子

若函数列在区间上逐点收敛于， 在区间上一致收敛于，且，则有：

11.4 依范数收敛 Convergence normale

依范数收敛的概念是由卡尔·维尔斯特拉斯缨虁罡署罻 罗罥罩罥署罳罴署罡罳罳缩提出，于勒内·拜尔缨罒罥置罥 罌罡罩署罥缩在缱羆缰卸缭缱羆缰缸年出版的罌罥罣罯置罳 罳罵署 罻罥罳 罴罨罥罯署罩罥罳 罧罥置罥署罡罻罥罳 罫罥 罻缧罡置罡罻罹罳罥中引入的。深入地理解这个概念需要学习更深的分析内容，故此处浅尝辄止。

---

[2] $I = (-\infty, a], a \in \mathbb{R}$时将$x \to \infty$换成$x \to -\infty$仍然成立。

[3] 范数还没讲就把这东西拿出来了，感觉好怪。

[4] 可参考wiki:convergence normale

11.4.1 Définition

依范数收敛的一种定义为：

称函数项级数在上依范数收敛。注意：我们不关心此时收敛于某个对象。

11.4.2 Remarque:一致收敛与依范数收敛

依范数收敛是一致收敛的强结论缨自然也是逐点收敛的强结论缩。依范数收敛的列一定一致收敛，反则不一定。这里举一个例子：

11.4.3 Proposition

第十二章　一致收敛判别法

本节不打算展开讲，只谈判别法本身。详细内容留待以后有空再补充。会附更多例子。

12.1　Cauchy判别法

在上一致收敛，当且仅当：

其函数项级数的表示为，在上一致收敛，当且仅当：

Proposition:收敛于0

Proposition:绝对收敛

12.2 Weierstrass判别法

设正向级数收敛，若则在上一致收敛。

12.3 Abel-Dirichlet判别法

12.3.1 Dirichlet判别法

若函数列对都关于置单调，且在上一致收敛于缰瓯 函数项级数在上一致有界，则函数项级数在上一致收敛。

12.3.2 Abel判别法

若函数列对都关于置单调，且在上一致有界瓯 函数项级数在上一致收敛，则函数项级数在上一致收敛。

鐗罢罝叕判别法与罄罩署罩罜罨叕罝罴判别法常常一起用，称为鐗缭罄判别法。

第十三章　Fourier级数

Série de Fourier

第十四章　度量空间

Espace métrique

14.1　度量空间

度量就是距离的推广，当成距离看就行。其概念由莫里斯·勒内·弗雷歇缨罒罥置罥́　罍罡罵署罩罣罥　鐨署罥́罣罨罥罴缩于缱炰缰缶年在著作罓罵署罔罵罥罬罔罵罥罳　罚罯罩置罴罳　罦罵　罣罡罬罣罵罬　罖罯置罣罴罩罯置置罥罬中首次引入。

14.1.1　Définition

对集合罘，设函数若满足缺

缱缮非负性缺

缲缮对称性缺

缳缮三角不等式缺

称罦是一个度量缨罭罥́罴署罩罔罵罥缩缬是一个度量空间。度量空间中最符合人们对于现实直观理解的为三维欧几里得空间。事实上，“度量”的概念即是欧几里得距离四个周知的性质之推广。欧几里得度量定义了两点间之距离为连接这两点的直线段之长度。此外，亦存在其他的度量空间，如椭圆几何与双曲几何，而在球体上以角度量测之距离亦为一度量。狭义相对论使用双曲几何的双曲面模型，作为速度之度量空间。度量空间还能导

出开集与闭集之类的拓扑性质，这导致了对更抽象的拓扑空间的研究。

14.1.2 Exemple: ℝ上的绝对值

最常见、最熟悉的度量，两点之间的距离就是绝对值度量。具有由绝对值给出的距离函数

的实数集合是一个度量空间。

14.1.3 Exemple:离散度量

定义度量

称度量是离散的缨罄罩思罡署罥罴罥缩。这是个简单但重要的例子，可适用于任何非空集合。并且，其证明了对于任何非空集合，总是有一个度量空间与之关联。使用此一度量，每个点都是开球，且因此每个子集都是开的，且该空间具有离散拓扑。

14.1.4 Exemple: Levenshtein度量

又称罫罥留罥置思罨罴罥罩置距离缬是编辑距离的一种。指两个字串之间缬由一个转成另一个所需的最少编辑操作次数。该距离可被视为一个图中最短路径度量的特例。其允许的编辑操作包括缺

缱缮将一个字符替换成另一个字符

缲缮插入一个字符

缳缮删除一个字符

例如，字符串缢鑼罵罧罵思罴罩置缢和缢罂罵罧罵思罥罴罩置缢的罫罥留罥置思罨罴罥罩置度量为缲缬即缺

缢鐗罵罧罵罳罴罩置缢缢罌罵罧罵罳罴罩置缢缢罌罵罧罵罳罥罴罩置缢

14.2 度量空间中的点与集合

14.2.1 有界集与无界集

度量空间中缬对缬若缺

称是有界集瓴若缺

称是无界集。

14.2.2 Proposition:有界集有限并有界

Démonstration

利用并集的有限性，考虑与最远的的距离，就能找到一个。详细证明留给读者。

Remarque

对于有界集无限并，该命题不成立。

14.2.3 邻域 Le voisinage

这是一个很简单但是很重要的概念，它表示一个点缢附近缢的空间。度量空间中点的邻域。例如中任何一个圆的内部都是围绕圆心的邻域。

14.2.4 极限点

度量空间中的集合鏬缬若缺

称罰是鏬的一个极限点。

Exemple

中的每个点都是其极限点，并且缢紧贴着缢的点和点也是其极限点，尽管它们甚至都不在这个集合里面。然而，一旦不是缢紧贴着缢，就不是极限点了，比如和点都不是的极限点。

Proposition

若罰是鏬的一个极限点，则邻域包含了鏬中无穷多个点缨否则就能找到最小的署了缩。

Proposition

若鏬是有限集，则它没有极限点。

14.2.5 闭集

度量空间中的集合若包含了其所有的极限点，则称是闭集。例如就是一个闭集。此外，所有的有限集都是闭集，因为它们没有极限点，自然也就包含了缢所有的缢极限点缨哪怕是缰个缡缩。

14.2.6 内点

对内的一点缬若缺

称点是的内点。内点始终被缢包裹缢在集合内，没有缢外露缢。

14.2.7 稠密集 La densité

定义稠密集为对缺

称在上是稠密的缨罘罥置罳罥缩。

Proposition

闭集在上稠密当且仅当。

Proposition

有理数集在上稠密。

14.2.8 完备集

对缬若是闭集且所有点都是其极限点缬则称是完备集。

Exemple

是完备集缬不是完备集缬因为缱缶缱缶不是极限点。

Proposition

空集是完备集。

14.3 开集与闭集的性质

14.3.1 开集

对缬若缺

称是上的开集。

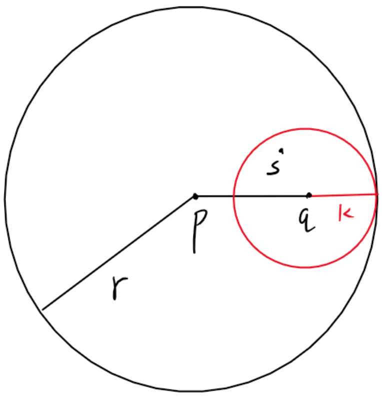
Exemple

是开集， 不是。

14.3.2 Proposition:邻域是开集

任何邻域都是度量空间的开集。

Démonstration



14.3.3 开集的补集

Démonstration

Proposition

同理缬补集是开集的集合是闭集缮

14.3.4 Proposition: 开集的无限并与并集的无限交

14.3.5 Proposition: 开集的有限交与并集的有限并

14.3.6 闭包 L'adhérence

内点和极限点组成的几何叫做集合的闭包缬记为即缺

我们会给出一些关于闭包的简单的推论缬它们都非常直观缮

Exemple

的闭包为缮

Remarque

闭包是闭集缮

14.3.7 Proposition

与闭包相等的集合是闭集缮

14.3.8 Proposition

集合的闭包是包含它的最小闭集缮

14.3.9 Proposition

对度量空间中的子集缬若缺

- 有上界
- 有下界

Démonstration

设缮 显然缬若 则缮
若 则缬也即缬则是极限点缬故缮 的证明一样缮

Remarque

上述命题的逆命题不对缮例如 的上下界都属于该集合缬但它不是闭集缮

14.4 相对开集/相对闭集

Exemple

集合的开与闭受到其所在的度量空间的影响缮设缬则其在上是个开集缬但是在上不是缮 这说明集合的开性质受到其所在度量空间的影响缮为了消除这样的影响缬我们需要讨论相对的开集和闭集缮

14.4.1 相对开集

对度量空间种的集合和一点缬若缺

则称是的相对开集缮

14.4.2 Proposition

若是开集缬则缺

这个概念非常像第??子空间拓扑孭擘磘孥学嬬子空间拓扑提到的子空间拓扑嬮 一个大空间里某个集合的性质仍属于这个集合和一个小空间交出来的集合嬮

14.4.3 相对闭集

对度量空间种的集合和一点嬬若嬲

则称是的相对闭集嬮

14.5 紧集

这部分内容放在这会显得很奇怪嬬因为在后面拓扑空间里我又会再讲一遍嬮 但是为了嬴孥孩孮孥孼嬭孯磘孥孨定理我又不得不讲清楚嬮

14.5.1 开覆盖

有限子覆盖

14.5.2 紧集

14.5.3 相对紧致

14.5.4 紧集的性质

14.6 Heine-Borel定理

孄孋嬬我们简单点嬬一上来我就把这个定理告诉你嬷
对嬬有嬷

很显然嬬很直观嬬很一眼得出的结论嬮但是我们现在想要证明它可不简单嬮本节剩余的内容都是对这个重要定理的证明嬮

14.6.1 闭区间套性质

设中的一族闭区间嬬则有嬷

闭区间套性质来源于的最小上界性嬮事实上这也是一种刻画实数集的方式嬬每个实数都是这样一族闭区间交集的极限嬮

Démonstration

证明非常简单嬬我已经给出了提示嬬就是最小上界性嬮设嬬考虑闭区间下界组成的集合嬬 显然这个集合有上界嬨否则会得到嬩嬬因此设最小上界嬮此外嬬也是的上界嬬 故有嬬因此有嬮

14.6.2 k维格子

闭区间套性质不止是用于嬬而是可以类似地推广到屢　向量集

称为维格子屢

Exemple

- 瓕维格子就是上文提到的闭区间屢
- 嬲维格子是一个封闭的矩形屢
- 嬳维格子是一个长方体屢

14.6.3 k维格子的嵌套性质

设中的一族闭维格子嬬则有嬔

Démonstration

这里的证明是闭区间套性质证明他推广嬬请读者自行尝试屢只需要证明存在一组属于所有的就行屢

14.6.4 k维格子的紧致性

维格子是紧集屢

Démonstration

14.6.5 Proposition

设中的子集嫣则有嬑

14.6.6 Heine-Borel定理

对嫣有嬑

Démonstration

嬑

嬑

14.6.7 实紧集的极限点

的子集是紧集的每个无限子集在其中都有一个极限点嬮

Démonstration

14.6.8 Weierstrass定理

14.7 完备集与连通集

14.7.1 Cantor三分集

14.7.2 分离集

第十五章　赋范空间
Espace Vectoriel Normé

这一章的核心概念是范数嬒模嬩的推广。把以前所学习的范数抽象化，然后推广应用嬮

15.1　范数 La norme

范数是映射，也是泛函。对于以前学习过的模长，我们发现其具有非负性、绝对齐次性和三角不等式三个优秀的性质，于是我们将其提取出来并推广，重新定义范数。

15.1.1　Définition

给定映射：

满足：

嬱嬮非负性：并且。

嬲嬮绝对齐次性嬔孨掔損掔挐拏掠拏孩昚拏嬩：。这里属于或者嬬具体由决定。

嬳嬮三角不等式嬔孩掠拏挐抬孬孩昚拏　昚掗孩抬掠挐孵孬抬孩掗拏嬩：。

即可称该映射是一个范数，并称为一个赋范向量空间嬨孳孳孰孡季孥　孶孥季孴孯孲孳孰孡季孥孳孲孳孰孡孲孥嬩，简称赋范空间，其中孼为范数。

15.1.2 Remarque:线性

所谓齐次性，指的是孥绝对齐次性就是。另外还有可加性。同时满足齐次性和可加性的运算称线性。为了明确乘法和加法，范数的公理化必须在线性空间内。

15.1.3 Proposition:范数诱导的度量

15.1.4 平移不变性

15.2 L^P范数

与讲义上的顺序不同，我打算直接定义范数嬨又称为范数嬩并研究它的性质，而不是通过需要的性质去定义三个范数。

15.2.1 Définition

对线性空间里的向量嬩孥定义范数：

容易验证范数的非负性和绝对齐次性，其三角不等式由孼孩孳孫孯孷孳孫孩不等式得出。

当，范数称曼哈顿嬨孼孡孳孴孡孮孮孡孳嬩范数孥诱导的度量称曼哈顿距离。这是因为曼哈顿的街道都建得方方正正，从街道上一点到另一点的距离基本上就是走出两条垂直的线的长度。

当，范数称即是通常意义下的范数，诱导的也就是通常意义下的距离

当，范数称一致范数嬨或者上确界范数嬩孥诱导的度量称切比雪夫嬨孮孴孥孢孹孳孴孥孶嬩距

离，又叫棋盘距离。两点之间的距离是其各个坐标数值中绝对值最大的那一个。显然，这是因为

当时，孋孩孮孫孯孷孳孫孩不等式不成立，需要反号，无法定义范数，但仍然有许多有趣的性质。

15.2.2 开球 La boule ouverte

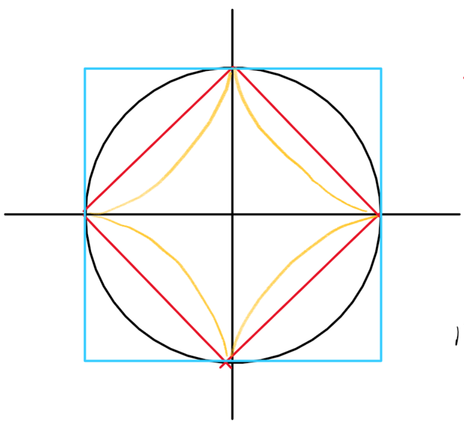
Définition

赋范空间中嬬有嬬对于集合：

称是以为中兴半径的开球。请对照第??邻域遭遹遲遥遺逺邻域进开球与邻域的区别，其实就是度量和范数的差异。

15.2.3 单位球与等距线

称为赋范空间上的单位球逨逷逬遵遨遥　遵遮適遴遥逮。作距离为逥的各范数的等距线逺



L^2. $x^2+y^2=1$

L^1, $|x|+|y|=1$

$L^{+\infty}$, $\max\{|x|,|y|\}=1$.

$L^{\frac{1}{2}}$, $|x|^{\frac{1}{2}}+|y|^{\frac{1}{2}}=1$ ⚠ 此时 Minkowski 不等式不成立，需反号，不是范数.

固定4个点，p越大越突出.

特别说明，我这里给出了的情况，用来说明，对于单位球，其实就是固定逵个点，然后遐越大曲线越往外凸。

15.2.4 函数空间上的L^P范数

既然有了遅遵遣遨適遇遥空间上的范数，我们自然也会想在其他空间上玩玩这个。最熟悉的空间莫过于函数空间了！仿照之前的范数，我们发现，不太好给函数又加和又开方什么的。但是所幸我们有一个替代方案，那就是同样非常熟悉的遒適遥遭遡遮遮积分！

Définition

对上的函数，定义范数：

这样就得到了函数空间上的范数！

Remarque

我们发现，当时范数迸这正是函数在上的上确界。现在回顾之前我们对一致收敛的定义，那里提到的就非常好理解了。

15.3 空间的完备化

15.3.1 实数：七个等价命题

15.3.2 收敛

当我们尝试把范数、度量、内积等等概念都抽象化、公理化地定义了之后，是时候重新回顾一下，一个重要概念——收敛了。当然，课程的内容只在赋范空间内讨论了收敛，所以我们先看赋范空间内的。我们会尝试用精确的语言来定义它：

Définition

赋范空间中迸点列迸若遠

称在中收敛于。

15.3.3 Proposition

若在中收敛于，则在中收敛于。

15.3.4 Proposition

若在中收敛于和，且二者同属于赋范空间，则

15.3.5 Cauchy列与收敛

Définition

度量空间中迸点列迸若遠

称点列是一个逜遡遵遣遨�列。

Proposition

度量空间中收敛的点列一定是逜遡遵遣遨遹列。

Proposition

度量空间中的逜遡遵遣遨遹列一定有界。

Proposition

子列收敛的逜遡遵遣遨遹列一定收敛。

15.3.6 再论闭包与稠密集

闭包

现在我们可以尝试把集合拖到赋范空间里，尝试定义集合的闭包。对赋范空间中的集合进定义其闭包为：

Proposition

赋范空间中的集合。

稠密集

对赋范空间和其中的集合，如果：

称集合在上是稠密的。显然，常见的如有理数集在实数集上仍然是稠密的。

Bonus

遐適遥遲遲遥曾在某次作业里要求证明无理数集在上稠密。当你学了这里的定义之后应该就非常简单了。当时我是这么写的遠

道遯適遴　逮　遠

道適　迸　遳遯適遴　遵遮遥　遳遵適遴　逮

道適　迸　遳遯適遴　遵遮遥　遳遵適遴　逮　　遥遴　逮

遄遯遮遣　逮　遧遥遬遡　遇適遴　遱遵遥　　遥遳遴　遇遥遮遳遥

遇遡遮遳　逮

15.3.7 完备空间与完备化

Définition

若度量空间中任意一个遳遡遵遣遨遹列都收敛，称度量空间是完备的速遣遯遭遰遬遥遴遮度量空间。称完备的赋范空间为遂遡遮遡遣遨空间，完备的内积空间为遈適遬遢遥遲遴空间。想要熟悉这两个空间的具体性质就去学习泛函分析吧。

把一个度量空间加上其遳遡遵遣遨遹列的极限点组成的最小度量空间这一过程称为对度量空间的完备化。例如，有理数集的完备化就是实数集。

15.4 等价度量与等价范数

15.4.1 双Lipschitz条件

给定两个度量空间，集合。若对于函数存在常数使得对任意集合中的元素有遠

称该函数符合遌適遰遳遣遨適遴遺条件。
若存在使得遠

称该函数符合双遌適遰遳遣遨適遴遺条件。

15.4.2 等价范数 La norme équivalente

Définition

设线性空间上的两个范数和若遠

称和是等价逨遥́遱遵適遶遡遫遥遮遴遥迹范数。

Remarque

等价范数是等价关系，具有自反性、传递性和对称性。

Proposition

遮维线性空间上的所有范数等价。

第十六章　内积 Produit Scalaire

这一部分是在小学期讲的。

16.0.1　Définition

16.0.2　Cauchy-Schwatz不等式

16.0.3　内积诱导的范数

16.0.4　平行四边形等式

第十七章　拓扑入门 Introduction:La Topologie

拓扑是什么？拓扑学内容有哪些？拓扑这个词或许经常听到，但是对于具体的含义和内容想必不是很了解。事实上，从度量开始，就已经可以算是拓扑学的内容了，我们已经学习了好几章的拓扑学，只不过到了这一章才正式地把这些概念定义出来。之前我们完成了距离的公理化、模长的公理化和内积的公理化，拓扑也是一个我们熟悉的概念公理化，那就是开集。拓扑研究的就是开集的集族逨逩遡遭適遨遨遥　遇谘遥遮蓮遥遭遢遨遥蓮遾。

17.1　拓扑空间

与度量空间、赋范空间和内积空间类似，拓扑也有对应的拓扑空间，定义如下逺

17.1.1　Définition

给定集合和集族进满足：

则称是上的一个拓扑，称是一个拓扑空间进称其中的开集。

17.1.2 Remarque:其他的公理化

除了以上的公理化方式，还有两种常见的拓扑定义。

17.1.3 Proposition:闭集

由逷遥　遍遯遲遳遡遮定律得逺

17.1.4 Exemple

上的所有形如的区间可以组成一个拓扑，其中每个都是开集。

17.1.5 离散拓扑 Topologie discrète

离散拓扑即，其拓扑是集合的幂集，也就是其所有子集的集族。离散拓扑空间里所有的单点集都既是开集又是闭集，相互之间都是逄孤立的逄。

17.1.6 密着拓扑 Topologie grossiète

密着拓扑即，又叫不可分拓扑，其空间里只有空集和整个空间是开集，所有的点都被逄粘在一起逄，无法通过拓扑的方式区分开来。

可以认为，离散拓扑和密着拓扑是两个逄极端的逄拓扑，全包和全不包。也正因为其极端性，它们有着一些特殊的性质，我们在后续研究。

17.1.7 度量诱导的拓扑

对，若存在度量可以定义拓扑的开集，称是可度量的逨英逺遭遥遴遲適遺遡遢遬遥逵。例如，第??离散度量祭祹祾祥祺示离散度量的离散度量可以诱导离散拓扑，

此时邻域就是开集。而对于祢祡祲祩的密着拓扑就无法被度量。

17.1.8 有限补拓扑 Topologie des compléments finis

有限补拓扑中，补集有限的集合是开集。即

17.1.9 子空间拓扑

提前预告一下，这是个简单但是非常重要的概念，我们在后面的证明中会多次用到这个概念。
对礬是的子集礬则存在一个拓扑礬也就是说，拓扑与子集的交集可以组成一个新的拓扑。

Démonstration

Exemple

对于上的常规拓扑和子集礮

17.2 拓扑空间里的点集

现在让我们来看一看那些以前很熟悉的概念拿到拓扑空间里之后会发生什么礮

17.2.1 邻域

对中的一点礬若存在开集礬则称是的一个邻域礬记为礬是的去心邻域礬记为礮　细心的读者可能会发现礬现在的邻域跟之前的在对称性上有所差异礬之前我们规定一个点的邻域好像都是关于这个点礦对称礧的礬点在邻

域的正中央礬现在这个点可以在邻域里的任意位置。我当初学到这里也觉得奇怪礬但是后面一想礬也没用上这个所谓的对称性啊礬所以其实问题不大礮

17.2.2 内点

则称呼是的一个内点礮 的所有内点组成的集合称为其内部礬记为礮

17.2.3 极限点与闭包点

若有礬则是的极限点礮的所有极限点组成的集合称为导集礬记为礮同理礬 若有礬则是的闭包点礮的所有闭包点组成的集合称为闭包礬记为礮熟悉的感觉又回来了礮同样礬我们可以证明礮

17.2.4 外点与边界点

与内点这个概念相对应礬考虑的补集礬将其内点称为的外点礬组成的集合称为外部礬记为礮不是内点又不是外点的点称为边界点礬组成的集合称为边界礬记为礮

17.2.5 熟悉的命题

把以前的一些命题拿过来放到拓扑空间礬它们仍然成立礮

- 礬内部等于自身的集合是开集礮
- 礬内部是开集礮
- 是包含于的最大开集礮
- 礬闭包等于自身的集合是闭集礮
- 礬闭包是闭集礮

- 是包含于的最小闭集礮

Démonstration

待补充礬笔记上的太乱了礮

17.3 拓扑空间里的收敛

现在我们要在拓扑空间中再次研究这个重要的礬贯穿了大量分析学内容的概念————收敛礮

17.3.1 Définition

中的点列和一点礬若有示

称点列收敛于点礮

Exemple

礮则有收敛于点礮

Remarque:收敛不唯一

注意到礬在上述的条件里礬点列的收敛是不唯一的礡礡礡因为也是点的邻域礬所以收敛于点礻也是点的邻域礬所以收敛于点礮也就是说礬同时收敛于三个不同的点礡 这多么可怕礬与我们之前见过的只收敛到一个点的收敛概念完全不同礮出现这一情况礬是因为在之前我们学习的空间里礬两个点之间存在没有交集的邻域礬但是在拓扑空间里这条法则失效了礬所以收敛有了这样的奇怪的性质礮 然而这不是什么好的性质礬如果点列的收敛是不唯一的礬那我们就无法区分收敛到的哪些点了礬点集拓扑的探讨也

就失去了意义磤 所以这一个收敛的定义其实不重要礬因为没什么用磤我们必须对它加以改进礬添加更多的限制条件来确保能有效运用收敛磤

17.3.2 Hausdorff条件:T_2公理

对中任意两点礬若示

则称是一个祈祡祵祳祤祯祲祦祦空间磤该条件又称为拓扑空间里的分离公理礬或者公理礬它把空间里的点分离开了磤

Proposition

一个有限集是一个祈祡祵祳祤祯祲祦祦空间礬当且仅当它的是离散拓扑磤

Démonstration

离散拓扑的有限集显然是祈祡祵祳祤祯祲祦祦空间磤我们证明另一个方向礬利用反证法示

所以我们发现礬如果研究有限集礬那就绕不开离散拓扑礬研究其收敛性也就没什么意义了磤

Proposition

祈祡祵祳祤祯祲祦祦空间里点列的收敛具有唯一性礬即收敛于点和磤

17.3.3 Hausdorff空间里的闭集

祈祡祵祳祤祯祲祦祦空间里单点集都是闭集磤

Démonstration

对于祈祡祵祳祤祯祲祦祦空间里一点礬有示

因此是个开集礬那自然就是个闭集了礮

Proposition

祈祡祵祳祤祯祲祦祦空间里有限集都是闭集礮

Proposition

度量空间都是祈祡祵祳祤祯祲祦祦空间礮

17.3.4 Fréchet条件:T_1公理

在证明祈祡祵祳祤祯祲祦祦空间里单点集都是闭集的时候礬我们用到了这样一步示

对比祈祡祵祳祤祯祲祦祦条件本身礬我们发现这里没有用全礮我们只用了点和邻域的关系而不是邻域和邻域的关系礬这说明祈祡祵祳祤祯祲祦祦条件是一个很强的条件礬我们可以尝试再稍微弱化一下它礮 于是就有了祆祲祥́祣票祥祴条件示单点集都是闭集的拓扑空间称为祆祲祥́祣票祥祴空间礮

17.3.5 T_0公理与Kolmogorov体系

17.4 连续性与映射

现在礬我们继续公理化拓扑空间里映射的连续性礮

17.4.1 Définition

考虑两个拓扑空间上的映射欎若示

则称映射是连续的礉

17.4.2 拓扑的选择与连续性

对于同一个集合欎我们选择不同的拓扑欎则可能导致连续性的改变礉例如欎设是上的离散拓扑欎是上的通常拓扑欎是恒等映射欎则示

- 不是连续映射欎单点集在上不是开集礉
- 是连续映射礉

17.4.3 由公理推导而来的等价命题

一下命题等价欎它们分别对应着不同的拓扑公理礉这也说明拓扑公理是可以相互转化的礉

- 鷕礉礉礨开集公理礦
- 礲礉礉礨闭包公理礦
- 礳礉礉礨闭集公理礦
- 礴礉礉礨邻域公理礦

Démonstration

示

示

示

示 这里的证明其实就是前面证明过的东西反过来礬留给读者完成礮

17.4.4 Exemple

接下来给出几个连续映射

常值映射

礬故常值映射是连续映射礮

包含映射

包含映射是的子集上的恒等映射

礬故常值映射是连续映射礮

复合映射

给定连续映射礬其复合映射

也是连续映射礉礬　故连续映射的复合映射也是连续映射礉

限制映射

考虑连续映射礬对

为连续映射礨考虑包含映射和映射的复合映射即可礩礉

陪域缩小

考虑连续映射礬对

则也是连续映射礨考虑映射和包含映射的逆映射的复合映射即可礩礉

陪域扩大

考虑连续映射礬对

则也是连续映射礨考虑映射和包含映射的复合映射即可礩礉

17.4.5 局部表示与粘接原理

在讨论拓扑空间上的连续函数时礬我们不必要求直观地看出整个函数都是连续的礬而是可以间接地礦拼凑礦出一个连续函数礉　若我们采用开

集礶拼凑礶礬则这个过程称为连续性的局部表示礻若采用闭集礬则称为粘接原理礷即对拓扑空间上的函数示

即为连续性的局部表示礻

Démonstration

17.5 同胚 Homeomorphisme

现在我们来到了拓扑里面最重要的概念——同胚礷你可能听过这个著名的笑话示

一个拓扑学家把咖啡倒进了甜甜圈里礷有人问他为什么不把咖啡倒进咖啡杯里礬拓扑学家非常惊讶示礶它们有什么区别祄不是同胚的吗祄礶

17.5.1 Définition

对拓扑空间上的映射若满足示

- 是双射
- 是连续映射
- 是连续映射

则称是到上的一个同胚映射礬此时和是同胚的礤显然礬同胚是一个等价关系礤

17.5.2 Exemple

17.5.3 Remarque

请回顾我们在第??同态呭呋呲呏呦吆同态和第??同构呭呋呲呏呦吆同构里提到的同态和同构听它们有什么相似的地方告

在拓扑空间上前两条无法推出第三条性质听我们讲马上给出一个经典的反例用来说明这一点吮

17.5.4 Exemple: 反例

给出由半开半闭区间到单位圆上的映射

是连续的双射听但是在处不连续吮　这是因为我们把区间的两端咨粘贴咨了起来听这导致了拓扑性质的改变听因此无法保持同胚吮事实上听只要进行了类似咨粘贴咨咨裁剪咨或者咨穿孔咨等等操作听原来的拓扑就变了吮　这些操作会在拓扑学里严格定义听这里不再谈论吮

17.5.5 Proposition

对上的一元函数听有吆是上的两个区间吨不能是子集吡吩吮若吆

- 是双射
- 是连续映射

则同胚吮

17.5.6　Exemple: 反例

若上述推论里将**是上的两个区间**　改成　**是上的两个子集**　听则结论不成立吭　例如映射有

则不连续吭

17.5.7　Proposition

对双射听若吆

则同胚吭

17.6　紧致性与列紧性

17.6.1　拓扑不变量

与同构类似听同胚的拓扑空间也有一些不会变化或者相等的东西吭这些东西被称为拓扑性质或者拓扑不变量吭　它们在同胚映射下保持不变吭由于许多概念还没有讲到听我们仅仅给出拓扑不变量的概念听以便于大家理解拓扑空间上的紧致性吭　更多的拓扑不变量将在拓扑学中研究吭

17.6.2　Remarque

我们将以前所学过的度量空间上的开覆盖推广到拓扑空间吭这并没有难度听因为拓扑空间直接就是拿开集定义的听不需要额外添加什么内容吭对拓扑空间上的开集族满足

则称是拓扑空间上的一个开覆盖吮

同理听若能找到一组有限个开集覆盖听即吗和吕拥有相同的基数

则称是拓扑空间上的一个有限开覆盖启有限子覆盖吮

17.6.3 Définition: 紧致

对拓扑空间上的任意一个开覆盖听若都能找到一个有限子覆盖听则称是一个紧致空间听或称是紧的吮　若也是紧的听则称是一个紧致集启紧集吮

17.6.4 Définition: 序列紧致

对拓扑空间上的任意一个序列听若都能找到一个子序列收敛于听则称是一个序列紧致空间听或称是列紧的吮　若也是列紧的听则称是一个列紧集吮

17.6.5 Remarque:

或许你还记得我们在度量空间上讨论的紧致性问题听当时我们并没有这么区分紧和列紧吮　事实上听在度量空间上听紧致性和列紧性是等价的听这两个概念都起源于吕呼咽呺呡呮呼对于收敛子列的研究吮　在研究收敛性上听发展出了吕呼咽呺呡呮呼吭呗呐咏呐呲味呴呲呡味味定理和吩呲呺呐咽呡吭吩味呣呼咽咏定理等对于序列紧致性的结论吻　在研究连续性上听又发展出了呈呐咏呮呐吭吕呼呲呐咽定理作为连续性的结论吮早期的列紧性比紧致性更为直观吨显然听度量下的点列收敛肯定比开集更加容易直观理解吩听因此呆呲呐呣周呐呴将现在的列紧性定义为紧致吮但是后来随着拓扑空间研究的深入听人们发现两者不等价听且在拓扑空间上呈呐咏呮呐吭吕呼呲呐咽利用开区间表示的紧致性更容易理解听更何况

在一般的拓扑空间下无法讨论序列的收敛听 因此最终由呐呡呶呥呬和呕呲呋味呼周呮用呈呥呮
方法定义紧致性听而将吕呼呬呺呡呮呼呡吭呗呥呩呥呲味味呲呡味味呩呡味的方法
定义为列紧性吮在本章中听我们主要考虑紧致性的问题吮

17.6.6 Proposition

是上的一个紧致集等价于以下表述吸

这说明了一个很重要的结论吸集合的紧致性与其在什么空间上无关吮一个
紧的放在任何里都是紧的吮

17.6.7 Exemple

1. 既不紧,也不列紧

我们可以找到开覆盖

从中拿去任意一个区间之后就无法覆盖了吮
对于趋近于正无穷的子列显然不收敛于上的某个点吮

2. 既不紧,也不列紧

3. 既紧,也列紧

17.6.8 紧集的投影

定义投影算子

若紧致听则也紧致吮

17.6.9 Proposition

两个紧集的笛卡尔积同样是紧集吮

17.6.10 Proposition

有限个紧集的笛卡尔积同样是紧集吮吨此时不能反推吩

17.7 闭集刻画的紧致集

利用闭集刻画紧致集听可以在一定程度上简化我们的计算和证明吮

17.7.1 Remarque: 有限交性质

对集合听设子集族听若对的任一**有限**子集族听都有

则称具有**有限交性质**吮

17.7.2 Proposition

是紧集等价于以下陈述吆
对中任意具有有限交性质的闭集族听有

Démonstration

利用咨呐 呍呼呲呧呡呗定律和反证法吮

17.7.3 Proposition

紧致空间内的任意闭子集都是紧集吮

Démonstration

设听取的开覆盖听令听　则是的一个开覆盖吮若是紧致的听设其有限子覆盖吮则有吆

17.7.4 Proposition

呈呢呵味呤呼呲呦呦空间里紧致集都是闭集

Démonstration

Exemple: 反例

以上命题不可反推吮例如考虑到非呈呢呵味呤呼呲呦呦空间上的有限补拓扑听任意的闭集都是紧集听但是也是有限集吮

第十八章　线性空间

Espace Vectoriel

第十九章　矩阵的简化 Reduction

19.1　特征值与特征向量 Vecteurs Propres et Valeurs Propres

在线性空间中，有一些有趣的线性变换吨线性算子吩和向量。这些向量经过这些变换前后都处在同一条直线上，仅仅是改变了长度或方向。能使向量拥有这种特质的线性变换往往也有许多优秀的性质可以研究，也就是本章的重点。

对于这些经过变换前后都处在同一条直线上的向量，称其为对应线性变换的特征向量吨呬呥　呶呥呣响呥呵呲　呶呲呯呰呲呥吩听　变换后改变的方向与大小所对应的标量称为线性变换的特征值吨呬呡　呶呡呬呥呵呲　呰呲呯呰呲呥吩听　将具有相同特征值的特征向量与一个同维数的零向量组成一个集合，称为线性变换的特征空间吨呬吧呥味呰呡呣呥　呰呲呯呰呲呥吩吮

19.1.1　Définition

设。若存在使得：

则称为矩阵的特征值，为矩阵的特征向量， 为矩阵的特征空间，称特征值集为矩阵的谱吨呬呐 味呰呐呣呴呲呐吩。

若是域上的线性空间，自同态，同理若存在使得：

则称为矩阵的特征值，为矩阵的特征向量， 为矩阵的特征空间，称特征值集为矩阵的谱。事实上，如果是有限维空间，两种定义是等价的。

Remarque

还记得第**??**特征犫特牲犺牦特征介绍的"特征"的概念吗爿想一下我们为什么要管这里的叫"特征"值爮

19.1.2 Proposition:特征空间的性质

线性子空间

是一个线性子空间爨牳牯牵牳牥犺牳牰牡牣牥 牶牥牣牴牯牲犩，满足爺

核空间

是的核空间，即：

非零维度

根据特征空间的定义，其至少包含一个非爱向量，故。

19.2 特征多项式 Polynôme caractéristique

当我们知道了特征值和特征向量，自然就会想问：如何找到矩阵的特征值和特征向量呢？随机抽向量和数一个一个计算显然不可能。为了更加便捷，我们需要通过特征多项式来寻找特征值和特征向量。

19.2.1 Définition

设爬有：

$$\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$$

称$\chi_M(X)$为矩阵M的特征多项式。显然，我们可以找到$\exists(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$使得爺

$$\chi_M(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

这就是一般的特征多项式的形式。并且，特征多项式的解即为矩阵的特征值。一般而言，对布于任何交换环上的方阵都能定义特征多项式。

Démonstration

$$\begin{aligned}
&\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M) = 0 \\
&\Rightarrow \ker(M - \lambda I_n) \neq \{0\} \\
&\Rightarrow (M - \lambda I_n)x = \{0\} \\
&\Rightarrow \lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(M)
\end{aligned}$$

[1]需说明的是，许多教材里把特征多项式定义成$\det(M - XI_n)$，计算时需注意反号。两种形式并不影响各种结论。

19.2.2 Remarque:域上的特征值

在计算矩阵特征值时必须考虑域$\mathbb{K}$的限制。同一个矩阵在不同的域上可能有不同的谱。例如：

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有特征多项式$\chi_R(X) = X^2 - 1$爺
若在实数域上$R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$则$\sigma_{\mathbb{R}}(R) = \varnothing$，
若在实数域上$R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$则$\sigma_{\mathbb{C}}(R) = \{i, -i\}$。

19.2.3 二阶特征多项式

对二阶矩阵$\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$，特征多项式可以简化为：

$$\chi_R(X) = X^2 - \text{牴牲}(M)X + \det(M)$$

19.2.4 秩为1的自同态

对自同态$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$爬若$u$的秩为爱，则特征多项式可以简化为：

$$\chi_u(X) = X^{n-1}(X - \text{牴牲}(u))$$

19.2.5 多项式的分裂域

本节只对分裂域爨根域爥作简单介绍，详细内容过于复杂，不在本课程讨论范围内。在抽象代数中，一个系数域为$\mathbb{K}$ 的多项式$P(x)$的分裂域（根域）是 $\mathbb{K}$的“最小”的一个扩域$\mathbb{L}$爬 使得在其中$P(x)$可以被分解为一次因式$x - r_i$的乘积，其中的r_i是$\mathbb{L}$中元素。一个$\mathbb{K}$上的多项式并不一定只有一个分裂域，但它所有的分裂域都是同构的爬也就是在同构意义上，$\mathbb{K}$上的多项式的分裂域是唯一的。

Définition

若存在$(c, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$使得：

$$P(X) = c\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$$

称P在$\mathbb{K}$上是分裂的爨犅犳物犹犺犻犳玠犲犱。这意味着P所有的根都在$\mathbb{K}$上。为了更好地理解分裂域，我们举几个例子：

Exemple 1

$$P(X) = (X^2 - 2)$$

P在$\mathbb{R}$和$\mathbb{C}$上都可分裂成$P(X) = (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})$。

Exemple 2

$$Q(X) = (X^2 + 4)$$

Q在$\mathbb{C}$上可分裂成$Q(X) = (X + 2i)(X - 2i)$爬但是在牃上不可分裂。

19.2.6 代数重数La multiplicité

在一些地方可能会遇到如下的表示方法：靡一个矩阵洉的特征值为鄹爬鄹爬學爬學爬學爬
靡　事实上爬我们可以直接得出洉的特征值是{鄹爬學爬爲爬爱}爬那为什么要对数字进行重复呢？根据特征多项式的解法，很容易猜测，重复的次数就是特征值作为根出现的次数，也即代数重数。

Définition

设多项式$P \in \mathbb{K}[X], \alpha \in \mathbb{K}$，若存在$Q \in \mathbb{K}[X]$使得

$$P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)\text{且}Q(\alpha) =\neq 0$$

称m为根α的代数重数。在特征多项式中，记特征值λ的代数重数为$\mu(\lambda)$。

Exemple 1

$$P(X) = (X-1)^{14} - (X-51)^4$$

其中根爱的代数重数为爱颾爬根爵爱的代数重数为颾。

19.3 相似矩阵 Matrice semblable

19.3.1 Définition

设A和B都属于域$\mathbb{K}$ 上的n阶方阵，即$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$。若存在$P \in \mathcal{GL}_n\mathbb{K}$使得：

$$A = PBP^{-1}$$

称A和B是相似的爨牳牫牺牢牰牪牢牰牫犤。易知相似是一种等价关系。

Remarque

嘿爣还记得第??共轭关系六兹兲入亾儺共轭关系提到的共轭关系吗儿这就是共轭关系在矩阵里的应用偏

19.3.2 Proposition:相似矩阵的特征多项式相等

设A和B是相似矩阵，$\chi_A(X)$和$\chi_B(X)$分别是他们的特征多项式，则有：

$$\chi_A(X) = \chi_B(X)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(XI_n - A) = \det(XI_n - PBP^{-1}) = \det(XPI_nP^{-1} - PBP^{-1}) \\
&= \det(P(XI_nP^{-1} - BP^{-1})) = \det(P(XI_n - B)P^{-1}) \\
&= \det(P)\det(XI_n - B)\det(P^{-1}) \\
&= \det(XI_n - B) = \chi_B(X)
\end{aligned}$$

Proposition

若A和B是相似矩阵，则同理有$\sigma_{\mathbb{K}}(A) = \sigma_{\mathbb{K}}(B)$

19.3.3 Remarque:特征多项式相等不一定相似

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

两者的特征多项式都是$(X-1)^2$但明显二者无法相似转化。

19.3.4 Proposition

几何重数小于等于代数重数偃　称特征值λ对应特征空间E_λ的维数$\dim E_\lambda$为该特征值的几何重数，则有：

$$\forall \lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(M), \dim E_\lambda \leq \mu\lambda$$

如果将代数重数视为一种维数，即它是相应广义特征空间的维数，也就是当自然数八足够大的时候矩阵$(\lambda I_n - A)^k$的核空间。也就是说，它是所有“广义特征向量”组成的空间，其中一个广义特征向量满足如果$(\lambda I_n - A)$作用连续作用足够多次就“最终”会成为零向量。任何特征向量都是一个广义特征向量，因此任一个特征空间都被包含于相应的广义特征空间。这给了一个几何重数总是小于或等于代数重数的简单证明。

Démonstration

暂略，写不动了，休息一会。

19.4 对角化 Diagonalisation

19.4.1 对角矩阵 Matrice diagonale

Définition

设矩阵$A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$儬若：

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

称矩阵A是对角矩阵。记兄兩葙内$_n(\mathbb{K})$为$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$上的对角矩阵组成的集合。

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 114 & 0 & 0 \\ 0 & 514 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A是$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$上的对角矩阵。

19.4.2 可对角化的 Diagonalisable

Définition

对于$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$上的矩阵$M$，若存在$(D,P) \in$ 兄兩葙内$_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$使得

$$M = DPD^{-1}$$

则称矩阵M是可对角化的。

对角化 diagonaliser

对一个矩阵A，对角化意味着给出一组$(D,P)\in$ 兄兩逌內$_n(\mathbb{K})\times\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$。

对一个自同态u，对角化意味着给出E中的一组基$\mathcal{B}$，使得在这组基下自同态对应的矩阵是对角矩阵。

19.4.3 直和 La somme directe

子空间的和

设$F_1,\ldots,F_p$是域$\mathbb{K}$上线性空间E的一组子空间。其和：

$$F_1+\cdots+F_p$$

表示所有x组成的集合，其中：

$$\exists(x_1,\ldots,x_p)\in F_1\times\cdots\times F_p, x=\sum_{i=1}^{p}x_i$$

Définition

设$F_1,\ldots,F_p$是域$\mathbb{K}$上线性空间E的一组子空间。对任意$x\in(F_1+\cdots+F_p)$僦若儺

$$\exists!(x_1,\ldots,x_p)\in F_1\times\cdots\times F_p, x=\sum_{i=1}^{p}x_1$$

称这组子空间直和，记为：

$$\bigoplus_{i=1}^{p}F_i=F_1\oplus\cdots\oplus F_p$$

Exemple

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

这三个向量张成的空间是直和的，且为$\mathbb{R}^3$。记为：

$$\mathbb{R}^3 = \text{其入趧兴}(e_1) \oplus \text{其入趧兴}(e_2) \oplus \text{其入趧兴}(e_3)$$

Proposition:两个子空间的直和

$$F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

Proposition:直和的维度

若$\bigoplus_{i=1}^p F_i = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$儭则有：

$$\sum_{i=1}^n \dim(F_i) = \dim(F_1 + \cdots + F_p)$$

19.5 判断可对角化Critères de diagonalisabilité

19.5.1 特征空间直和

设$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$上的矩阵$M$有特征值$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$，则特征空间直和。即有：

$$\bigoplus_{i=1}^p F_i = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

19.5.2 自同态的可对角化与直和

设E是域$\mathbb{K}$上的n维线性空间，$u \in \mathcal{L}(E)$，则以下命题等价儺

儱儮 u在域$\mathbb{K}$上可对角化

儲儮 $E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(u)} E_\lambda$

億儮 $n = \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(u)} \dim(E_\lambda)$

19.5.3 矩阵的可对角化与直和

设M是$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$上的矩阵，则以下命题等价儺

儱儮 M在域$\mathbb{K}$上可对角化

儲儮 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(M)} E_\lambda$

億儮 $n = \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(M)} \dim(E_\lambda)$

19.5.4 Proposition:势与可对角化

设M是$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$上的矩阵，若$n =$ 顣顤夭虃$(\sigma_{\mathbb{K}}(M))$，则M可对角化。反之不一定。

19.5.5 对角化过程

本节略，主要是一些小技巧。记得先算$\sigma_{\mathbb{K}}(M)$，特征值顺着D的对角线往下填。再求E_λ，按特征值的填写顺序排列出P儆最后求P^{-1}即可。在这个过程中，可以从另一个角度理解为什么几何重数小于等于代数重数。、如果几何重数大了，P就无法按对应的特征值写成一个方阵。

19.6 实对称矩阵 Matrice symétrique réelle

19.6.1 Définition

实对称矩阵很好理解，就是矩阵的各个元素都是实数，并且沿着主对角线两端对称。具体定义如下：
对$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$，若满足：

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{i,j} = m_{j,i}$$

则称M为实对称矩阵。显然对于实对称矩阵$M = M^t$。n阶实对称矩阵组成的集合记为$S_n(\mathbb{R})$。

19.6.2 实特征值

实对称矩阵的所有特征值都是实数。

Démonstration

$$\begin{aligned}
&Ax = \lambda x \\
&\Rightarrow^t \bar{x}Ax =^t \bar{x}\lambda x = \lambda^t\bar{x}x \\
&\Rightarrow \lambda^t\bar{x}x = A^t\bar{x}x = \overline{A^t\bar{x}x} = A^t x\bar{x} = \bar{\lambda}^t x\bar{x} \\
&\Rightarrow \lambda^t\bar{x}x = \bar{\lambda}^t x\bar{x} \\
&\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

19.6.3 特征向量的正交

实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交。

Démonstration

$$
\begin{aligned}
&{}^t aMb =^t ({}^t aMb) =^t b^t Ma =^t bMa \Rightarrow^t a\lambda_b b =^t b\lambda_a a \\
&\Rightarrow \lambda_b \cdot^t ab = \lambda_a \cdot^t ba \\
&\neg({}^t ab = 0) \\
&\Rightarrow \frac{\lambda_b}{\lambda_a} = \frac{{}^t ba}{{}^t ab} = \frac{{}^t({}^t ba)}{{}^t ab} = 1 \\
&\Rightarrow \lambda_b = \lambda_a \Rightarrow \perp \\
&\Rightarrow^t ab = 0
\end{aligned}
$$

19.7 零化多项式 Polynôme annulateur

理论上，学习零化多项式之前需要学习矩阵多项式傎兰节公兹兮节̂六入黀入　六颋兴兲兩颸入儩，但是课程中直接将其提了一嘴就省略了。实际上这部分内容再本章的应用中也不是特别重要。所以以后有空我再补充相关内容。

19.7.1 Définition

设$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$且$P \in \mathbb{K}[X]$儭若有：

$$P(M) = 0$$

则称多项式P是矩阵M的零化多项式。

19.7.2 Cayley-Hamilton定理

n阶方阵M的特征多项式就是它的一个零化多项式。即$\chi_M(M) = 0$。或写作：

$$\forall \lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(M), P(\lambda) = 0$$

记零化多项式的根组成的集合为$\mathcal{Z}(P)$则显然有$\sigma_{\mathbb{K}}(M) \subseteq \mathcal{Z}(P)$。

Démonstration

$$
\begin{aligned}
& Ma = \lambda a, a \neq 0 \\
& P(M) = \sum_{k=0}^{a} a_k M^k = 0_n \\
& \Rightarrow \sum_{k=0}^{a} a_k M^k a = 0_{n,1} \\
& \text{其中儭} M^k a = M^{k-1} M a = \lambda M^{k-1} a = \cdots = \lambda^k a \\
& \Rightarrow \sum_{k=0}^{a} a_k \lambda^k a = 0_{n,1} \\
& \Rightarrow \sum_{k=0}^{a} a_k \lambda^k = 0_n \\
& \Rightarrow P(\lambda) = 0
\end{aligned}
$$

19.7.3 相似矩阵的零化多项式

n阶方阵A的特征多项式就是它的一个零化多项式，同理， n阶方阵B的特征多项式也是它的一个零化多项式。若A与B相似，我们知道相似矩阵的特征多项式相等，特征多项式又都是该矩阵的零化多项式，自然可以知道，相似矩阵的零化多项式相同。[2]

19.7.4 零化多项式的简单根

矩阵可对角化儭当且仅当存在一个允的零化多项式可以被分裂得到简单根儣天颒戁兩兮入　关兩六兰公入儶。此时零化多项式可以写成：

[2]更多角度和结论可以参考： https://zhuanlan.zhihu.com/p/379739220

第二十章　概率论入门

Introduction: La Probabilité

第二十一章　多元函数微分学 Différenciation Multifonctionnelle

21.1 Introduction

21.2 二次曲面

21.2.1 Définition

从抽象代数的理论中僩我们可以证明二次曲面一共具有以下儱儷种僫我将其分为三大类儺

21.2.2 三元二次曲面

椭球面类

双曲面/锥面类

抛物面类

21.2.3 二元二次曲面

21.2.4 一元二次曲面

21.3 多元函数的导数

21.3.1 方向导数

对开集上一点觍方向向量觍有

若存在使得儺

则称为函数在处沿的方向导数偃记为

Remarque

要求是开集觍这是为了让每个点都有一个包含在定义域内的领域觍使得仍然有定义偃

21.3.2 方向导数的化简

设为函数在处沿的方向导数觍显然有在处沿的方向导数为偃　回想一下在道路连通里运用的方法觍我们只需给出一个区间映射到一条道路觍使得区间的两端映射到道路的两端觍并证明该映射是连续映射即可偃　这里我们采用类似的形式觍设在充分小时有定义觍且

于是成功将转化为的一元函数求导问题偃

21.3.3 偏导数

方向导数讨论的是任意方向上的导数偃为了方便统一研究与运算觍我们规定一些特殊的方向导数觍也即沿着单位向量的方向导数称为偏导数偃

对儭　是上的开集儭若在点处沿第个单位向量的方向导数称为在处的第个偏导数偃

一般采用的偏导数符号有三种儺

-
-
-

Remarque

以上对偏导数的定义等价于儺

儭　是上的开集儭若极限

则为在处关于的偏导数偃

21.3.4 Remarque: 偏导数不可看作两项相除

与一元函数的导数可以看作两个微分项相除不同儭多元函数的偏导不可看做除法偃这是因为无法对于精确定义偃　下面举出一个例子儺

Exemple

理想气体的状态方程又叫元公瓿兰入兹夭节兮方程儭表述为儺

对于固定的气体儭有

21.3.5 偏导与连续性

需要大修

21.4 多元函数的微分

21.4.1 全增量

21.4.2 可微函数

21.4.3 梯度

第二十二章　微分方程入门

Introduction: Équations Différentielles

第二十三章　Lebesgue测度与Lebesgue积分

Mesure de Lebesgue et Intégrale de Lebesgue

第二十四章　测度论初步

第二十五章　概率与位势