数理基础

工程师学院数学理论基础

Fondements des Théories Mathématiques de l'Ecole d'Ingénieur de Chimie Pékin

第二部分:数学分析里的空间

Partie II: Espaces dans l'Analyse

Augustin

最后更新于:2023 年 10 月 16 日

目录

第一章　数列与数项级数

Suites et Séries

第二章　$\mathbb{R}$上的一元函数

Fonctions d'Une Variable Réelle

第三章　Riemann积分
Intégrale de Riemann

第四章　函数列与函数项级数

Suites et Séries de Fonctions

本章所研究的两个概念都是由以前学习过的数列(suite)和级数(série)推广而来. 其中,函数列是数列的推广,函数项级数是数项级数的推广,二者都是以数列和级数的理论为基础建立. 研究函数列和函数项级数,是为了用一种全新的方法定义函数,并讨论函数的性质,特别是收敛性(convergence)和连续性(continuité). 基于此,我们可以研究算子的换序问题.

4.1　函数列与函数项级数

4.1.1　Définition

函数列指各项为具有相同定义域的函数的序列. I是$\mathbb{R}$上的区间,$\mathcal{F}(I)$是区间I上所有函数的集合. 对一个有序列$f_n \in \mathcal{F}(I)$,称f_n为一个函数列. 后续会一直默认$f_n \in \mathcal{F}(I)$这个条件.

函数项级数可以被简单地理解为函数列的加和. 对于一个函数列f_n,其函数项级数为$S_p = \sum_{n=0}^{p} f_n$,其中$p \in \mathbb{N}$.

4.1.2 Remarque:二者的关系

函数项级数和函数列有着密切的关系,正如数列和数项级数那样, 一个函数项级数可以认为是某个函数列的构成的数列的前n项和, 而函数列f_n可以认为是函数项级数$S_p = \sum_{n=1}^{p} f_n - f_{n-1}$, $p \in \mathbb{N}, f_0 = 0$的$n$次部分和. 因此函数列以及函数项级数的性质可以等价,我们只需要研究其中一个,自然就可以得到两个的结论.

4.2 逐点收敛 Convergence simple

逐点收敛是函数列最基本的收敛,可以直观地理解为函数列f_n里每个函数f_i定义域中,每个点x组成的数列x_n随n都是收敛的.

4.2.1 Définition

逐点收敛的一种定义为:

$$\forall x \in I, f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

此时称函数列$f_n(x)$在区间I上逐点收敛于$f(x)$ (La suite $f_n(x)$ convergence simplement vers $f(x)$ sur I).
同理,对于函数项级数:

$$\forall x \in I, \sum_{n=0}^{p} u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} U(x)$$

称函数项级数$u_n(x)$在区间I上逐点收敛于$U(x)$.

4.2.2 Proposition:逐点收敛的算子交换

本章所研究的主要是针对于极限算子、Riemann积分算子和求导算子的交换问题. 显然,对于逐点收敛这么弱的结论,三种算子都是不可交换的.

极限算子

设$I=[0,1]$, $f_n(x)=x^n$.显然f_n在区间I上有逐点收敛

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ 1 & x=1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1}x^n=1,\text{然而由于}f\text{在}1\text{处不连续},\lim_{x\to 1}\lim_{n\to\infty}x^n\text{不存在}$$

故极限算子无法交换.

求导算子

同上,f在1处不连续,故不可导,故求导算子无法交换.

Riemann积分算子

设$I=[0,1]$, $s_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$.显然f_n在区间I上逐点收敛于$s(x)=0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2n^2xe^{-n^2x^2}=1,\text{然而}\int_0^1\lim_{n\to\infty}2n^2xe^{-n^2x^2}=0$$

故Riemann积分算子无法交换.

4.3 一致收敛 Convergence uniforme

4.3.1 界 La borne

Définition

设函数$f(x)$在集合D上有定义.若存在K使得对任意$x\in D$, $f(x)\le K$,则称$f(x)$在集合D上是有上界的(majoré). 对于最小的上界k,称其为函数$f(x)$在集合D上的上确界(le supremum),记为$k=\sup f(x)$.

Remarque:有界

特别地,若存在正数M使得对任意$x \in D, |f(x)| \leq M$,则称$f(x)$在集合D上是有界的(borné).

4.3.2 Définition

一致收敛的一种定义为：

$$\|f_n - f\|_\infty{}^1 = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

此时称函数列f_n在区间I上一致收敛于f (La suite f_n convergence uniformément vers f sur I).
同理,对于函数项级数：

$$\|\sum_{n=0}^{p} u_n - U\|_\infty = \sup_{x\in I} |\sum_{n=0}^{p} u_n(x) - U(x)| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

称函数项级数$u_n(x)$在区间I上一致收敛于$U(x)$.

一致收敛相比于逐点收敛是个强结论.逐点收敛中不同点对应的“收敛速度”可能不同,但一致收敛中各点收敛的速度具有一致性. 如果f_n在区间I上一致收敛于f,则f_n一定在区间I上逐点收敛于f.

4.3.3 Proposition:连续性的传递

若函数列f_n在区间I上一致收敛于f,且$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0(I)$, 则$f \in \mathcal{C}^0(I)$

4.3.4 Proposition:等价条件

以下五个命题等价：
1.$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$

[1]此记号为L^∞范数,后续说明.

2.$\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^*, x_0 \in I. n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

3.$d(f_n, f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

4.$\sup_{x\in I} |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

5.$\forall \{x_n\} \subseteq I, f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

其中,5常用于否定一致收敛.

4.3.5 判断一致收敛

方法1.

找到一个独立的、只与n有关的上界函数,证明该函数趋近于0.即：

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq g(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

方法2.

若f_n和f都在I上可导,则求出他们差的极大值趋近于0,即：

$$g(x)_{\max} = |f_n(x) - f(x)|_{\max} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

4.3.6 Proposition: 一致收敛的算子交换

与逐点收敛这种弱结论不同,一致收敛有许多优秀的性质,可以帮助我们交换算子.

极限算子1.

若函数列f_n在区间I上一致收敛于f,且$\forall n \in \mathbb{N}, \exists l_n \in \mathbb{R}$使得 $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$,则有：

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

极限算子2.

若函数列f_n在区间$I = [a, \infty), a \in \mathbb{R}$ [2] 上一致收敛于f,且$\forall n \in \mathbb{N}, \exists l_n \in \mathbb{R}$使得 $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_n$,则有：

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Riemann 积分算子

若函数列f_n在区间$I = [a, b], (a, b) \in \mathbb{R}^2$ 上一致收敛于f,且$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0([a, b])$,则有：

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_a^b f(x)$$

求导算子

若函数列f_n在区间$I = [a, b], (a, b) \in \mathbb{R}^2$上逐点收敛于$f$, f_n'在区间$I = [a, b]$上一致收敛于f, 且$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1([a, b])$,则有：

$$f' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

4.4 依范数收敛 Convergence normale

依范数收敛[3]的概念是由卡尔·维尔斯特拉斯(Karl Weierstrass)提出,于勒内·拜尔(René Baire)在1907-1908年出版的Leçons sur les théories générales de l'analyse中引入的. [4]

[2] $I = (-\infty, a], a \in \mathbb{R}$时将$x \to \infty$换成$x \to -\infty$仍然成立.

[3] 原课程范数还没讲就把这东西拿出来了,感觉好怪.

[4] 可参考wiki:convergence normale

4.4.1 Définition

依范数收敛的一种定义为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(x)\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \sup |f_n(x)| < \infty$$

称函数项级数f_n在I上依范数收敛.注意：我们不关心此时收敛于某个对象.

4.4.2 Remarque:一致收敛与依范数收敛

依范数收敛是一致收敛的强结论(自然也是逐点收敛的强结论).依范数收敛的列一定一致收敛,反则不一定.这里举一个例子：

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = n \\ 0 & x \neq n \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\text{一致收敛,然而}\sum_{n=0}^{\infty} \sup |f_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\text{发散.}$$

4.4.3 Proposition

第五章　一致收敛判别法

本节不打算展开讲,只谈判别法本身.详细内容留待以后有空再补充.会附更多例子.

5.1　Cauchy判别法

f_n在I上一致收敛,当且仅当：

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n > N, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

其函数项级数的表示为,$\sum_{i=0}^{p} f_i(x)$在I上一致收敛,当且仅当：

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > m > N, \forall x \in I, S_n - S_m = |sum_{i=m+1}^{n} f_i(x)| < \epsilon$$

Proposition:收敛于0

$$\sum_{n=0}^{p} f_n \text{ 在} I \text{上一致收敛,则有} \sup_{x \in I} |f_n(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Proposition:绝对收敛

$$\sum_{n=0}^{p} |f_n| \text{ 在} I \text{上一致收敛,则有} \sum_{n=0}^{p} f_n \text{ 在} I \text{上一致收敛}$$

5.2 Weierstrass判别法

设正向级数$\sum_{n=0}^{p} a_n$收敛, 若$\forall (x,n) \in I \times \mathbb{N}, |f_n(x)| \le a_n$则$f_n$在$I$上一致收敛.

5.3 Abel-Dirichlet判别法

5.3.1 Dirichlet判别法

若函数列$a_n(x)$对$\forall x \in I$都关于n单调,且在I上一致收敛于0; 函数项级数$\sum_{n=0}^{p} b_n(x)$在I上一致有界,则函数项级数$\sum_{n=0}^{p} a_n(x) b_n(x)$在$I$上一致收敛.

5.3.2 Abel判别法

若函数列$a_n(x)$对$\forall x \in I$都关于n单调,且在I上一致有界; 函数项级数$\sum_{n=0}^{p} b_n(x)$在I上一致收敛,则函数项级数$\sum_{n=0}^{p} a_n(x) b_n(x)$在$I$上一致收敛.

Abel判别法与Dirichlet判别法常常一起用,称为A-D判别法.

第六章　度量空间

Espace métrique

6.1　度量空间

度量就是距离的推广,当成距离看就行. 其概念由莫里斯·勒内·弗雷歇(René Maurice Fréchet)于1906年在著作Sur quelques points du calcul fonctionnel中首次引入.

6.1.1　Définition

对集合X,设函数$d : X \times X \to \mathbb{R}$若$\forall (p, q, r) \in X^3$满足:
1.非负性:$p \neq q, d(p, q) > 0, d(p, p) > 0$
2.对称性:$d(p, q) = d(q, p)$
3.三角不等式:$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$
称d是一个度量(métrique),(X, d)是一个度量空间. 度量空间中最符合人们对于现实直观理解的为三维欧几里得空间.事实上,“度量”的概念即是欧几里得距离四个周知的性质之推广.欧几里得度量定义了两点间之距离为连接这两点的直线段之长度. 此外,亦存在其他的度量空间,如椭圆几何与双曲几何,而在球体上以角度量测之距离亦为一度量.狭义相对论使用双曲几何的双曲面模型,作为速度之度量空间. 度量空间还能导出开集与闭集之类的拓扑性质,这导致了对更抽象的拓扑

空间的研究.

6.1.2 Exemple: $\mathbb{R}$上的绝对值

最常见、最熟悉的度量,两点之间的距离就是绝对值度量.具有由绝对值给出的距离函数

$$d(x,y)=|y-x|$$

的实数集合是一个度量空间.

6.1.3 Exemple:离散度量

定义度量

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

称度量d是离散的(Discrète).这是个简单但重要的例子,可适用于任何非空集合.并且,其证明了对于任何非空集合,总是有一个度量空间与之关联.使用此一度量,每个点都是开球,且因此每个子集都是开的,且该空间具有离散拓扑.

6.1.4 Exemple: Levenshtein度量

又称Levenshtein距离,是编辑距离的一种.指两个字串之间,由一个转成另一个所需的最少编辑操作次数.该距离可被视为一个图中最短路径度量的特例. 其允许的编辑操作包括:

1.将一个字符替换成另一个字符

2.插入一个字符

3.删除一个字符

例如,字符串”Augustin”和”Bugusetin”的Levenshtein度量为2,即:

”Augustin”→”Bugustin”→”Bugusetin”

6.2 度量空间中的点与集合

6.2.1 有界集与无界集

度量空间(X,d)中,对$E \subset X$,若:

$$\exists q \in X, \exists M \in \mathbb{R}\text{使得}\forall p \in E, d(p,q) \leq M$$

称E是有界集;若:

$$\forall q \in X, \forall M \in \mathbb{R}\text{使得}\exists p \in E, d(p,q) > M$$

称E是无界集.

6.2.2 Proposition:有界集有限并有界

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{i,i\in[\![1,n]\!]} \subset X\text{有界} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i\text{有界}$$

Démonstration

利用并集的有限性,考虑q与最远的p_i的距离,就能找到一个$M_i \geq d(p,q)$.详细证明留给读者.

Remarque

对于有界集无限并,该命题不成立.

6.2.3 邻域 Le voisinage

这是一个很简单但是很重要的概念,它表示一个点"附近"的空间. 度量空间(X,d)中点p的邻域$N_r(p) = \{q \in X | d(p,q) < r\}$.例如$\mathbb{R}^2$中任何一个圆的内部都是围绕圆心的邻域.

6.2.4 极限点

度量空间(X,d)中的集合E,若:

$$\forall r>0, N_r(p)\cap E\neq\{p\}\text{且}\neq\varnothing$$

称p是E的一个极限点.

Exemple

$(-114,514)$中的每个点都是其极限点,并且"紧贴着"的点-114和点514也是其极限点,尽管它们甚至都不在这个集合里面. 然而,一旦不是"紧贴着",就不是极限点了,比如-114.0019和点514.0081都不是$(-114,514)$的极限点.

Proposition

若p是E的一个极限点,则邻域$N_r(p)$包含了E中无穷多个点(否则就能找到最小的r了).

Proposition

若E是有限集,则它没有极限点.

6.2.5 闭集

度量空间(X,d)中的集合E若包含了其所有的极限点,则称E是闭集.例如$[-114,514]$就是一个闭集. 此外,所有的有限集都是闭集,因为它们没有极限点,自然也就包含了"所有的"极限点(哪怕是0个!).

6.2.6 内点

对$E\subset X$内的一点p,若:

$$\exists r>0,\text{使得}N_r(p)\subset E$$

称点p是E的内点.内点始终被"包裹"在集合内,没有"外露".

6.2.7 稠密集 La densité

定义稠密集为对$E \subset X$:

$$\forall x \in X, x \in E,\text{或者}x/EP$$

称E在X上是稠密的(dense).

Proposition

闭集E在X上稠密当且仅当$E = X$.

Proposition

有理数集在$\mathbb{R}$上稠密.

6.2.8 完备集

对$E \subset X$,若E是闭集且所有点都是其极限点,则称E是完备集.

Exemple

$[-114, 514]$是完备集,$[-114, 514] \cup \{1919\}$不是完备集,因为1919不是极限点.

Proposition

空集是完备集.

6.3 开集与闭集的性质

6.3.1 开集

对$E \subset X$,若:

$$\forall p \in E, \exists r > 0, \text{使得} N_r(p) \subset E$$

称E是X上的开集.

Exemple

$(-114, 514)$是开集, $[-114, 514)$不是.

6.3.2 Proposition:邻域是开集

任何邻域都是度量空间的开集.

Démonstration

$$E = N_r(p) \subset X \Rightarrow \exists r > 0, \forall q \in E, d(p,q) < r$$

$$\Rightarrow \exists k > 0, d(p,q) < r - k$$

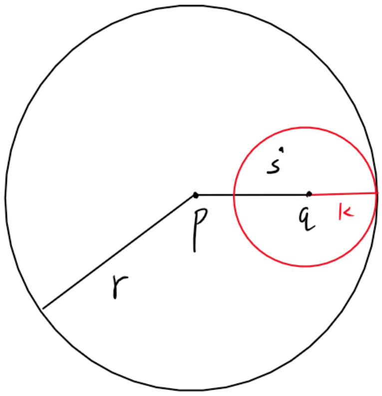
$$\Rightarrow \forall s \in N_k(q).d(q,s) < k$$

$$\text{由三角不等式得:} d(p,s) \leq d(p,q) + d(q,s) < r$$

$$\Rightarrow s \in E \Rightarrow N_k(q) \in E$$

$$\Rightarrow \forall q \in E, \exists k > 0, N_k(q) \subset E$$

$$\Rightarrow E \text{是开集}$$



6.3.3 开集的补集

$\forall E \subseteq X$:

$$E^C\text{是闭集} \leftrightarrow E\text{是开集}$$

Démonstration

Proposition

同理,补集是开集的集合是闭集.

6.3.4 Proposition: 开集的无限并与并集的无限交

$$\forall \alpha, U_\alpha\text{是开集} \Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha\text{是开集}$$

$$\forall \beta, E_\beta\text{是闭集} \Rightarrow \bigcap_\beta U_\beta\text{是闭集}$$

6.3.5 Proposition: 开集的有限交与并集的有限并

$$\forall \alpha, U_\alpha\text{是开集} \Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha\text{是开集}$$

$$\forall\beta, E_\beta\text{是闭集} \Rightarrow \bigcap_\beta U_\beta\text{是闭集}$$

6.3.6 闭包 L'adhérence

内点和极限点组成的几何叫做集合的闭包,记为$\overline{E}$即:

$$\overline{E} = E \cup E'$$

我们会给出一些关于闭包的简单的推论,它们都非常直观.

Exemple

$(114, 514)$的闭包为$[114, 514]$.

Remarque

闭包是闭集.

6.3.7 Proposition

与闭包相等的集合是闭集.

$$E = \overline{E} \Leftrightarrow E\text{是闭集}$$

6.3.8 Proposition

集合E的闭包是包含它的最小闭集.

6.3.9 Proposition

对度量空间中的子集E,若:

- E有上界$\Rightarrow \sup E \in \overline{E}$
- E有下界$\Rightarrow \inf E \in \overline{E}$

Démonstration

设$y = \sup E$. 显然,若$y \in E$ 则$y \in \overline{E}$.
若$y \notin E$ 则$\forall \epsilon > 0 \, \exists x \in E \, y - \epsilon < x < y$,也即$x \in N_\epsilon(y) \cap E$,则$y$是$E$极限点,故$y \in \overline{E}$. inf的证明一样.

Remarque

上述命题的逆命题不对.例如$[-114, 0) \cup (0, 514]$ 的上下界都属于该集合,但它不是闭集.

6.4 相对开集/相对闭集

Exemple

集合的开与闭受到其所在的度量空间的影响.设$E = (-3, 3)$,则其在$\mathbb{R}$上是个开集,但是在$\mathbb{R}^2$上不是. 这说明集合的开性质受到其所在度量空间的影响.为了消除这样的影响,我们需要讨论相对的开集和闭集.

6.4.1 相对开集

对度量空间X种的集合E和一点$q \in X$,若:

$$\forall p \in E \, \exists r > 0 \, d(p, q) < r \Rightarrow q \in E$$

则称E是X的相对开集.

6.4.2 Proposition

$Y \subseteq X$, $E \subseteq Y$, $G \in X$若G是开集,则:

$$E = G \cap Y \Leftrightarrow E是Y的相对开集$$

这个概念非常像第9.1.9 节提到的子空间拓扑. 一个大空间里某个集合的性质仍属于这个集合和一个小空间交出来的集合.

6.4.3 相对闭集

对度量空间X种的集合E和一点$p \in X$,若:

$$\forall p \in X\, \exists r > 0\, N_r(p) \cap E \neq \varnothing \wedge N_r(p) \cap E \neq \{p\} \Rightarrow p \in E$$

则称E是X的相对闭集.

6.5 紧集

这部分内容放在这会显得很奇怪,因为在后面拓扑空间里我又会再讲一遍. 但是为了Heine-Borel定理我又不得不讲清楚.

6.5.1 开覆盖

有限子覆盖

6.5.2 紧集

6.5.3 相对紧致

6.5.4 紧集的性质

6.6 Heine-Borel定理

OK,我们简单点,一上来我就把这个定理告诉你:
对$E \subseteq \mathbb{R}^k\; k \in \mathbb{N}$,有:

$$E\text{是紧集} \Leftrightarrow E\text{是闭集} \wedge E\text{是有界集}$$

很显然,很直观,很一眼得出的结论.但是我们现在想要证明它可不简单.本节剩余的内容都是对这个重要定理的证明.

6.6.1 闭区间套性质

设$\mathbb{R}$中的一族闭区间$\{I_n\}$,$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$,则有:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \varnothing$$

闭区间套性质来源于$\mathbb{R}$的最小上界性.事实上这也是一种刻画实数集的方式,每个实数都是这样一族闭区间交集的极限.

Démonstration

证明非常简单,我已经给出了提示,就是最小上界性.设$I_i = [a_i, b_i]$,考虑闭区间下界组成的集合$E = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$, 显然这个集合有上界(否则会得到$I_j = [a_j, b_j]\, b_j < a_j$),因此设最小上界$x = \sup E$.此外,$\forall i \in \mathbb{N}$, b_i也是E的上界, 故有$x < b_i$,因此有$x \in [a_i . b_i]$.

6.6.2 k维格子

闭区间套性质不止是用于$\mathbb{R}$,而是可以类似地推广到$\mathbb{R}^k$. 向量集

$$\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) | x_j \in [a_j, b_j]_{j \in [\![1,k]\!]}\}$$

称为k维格子.

Exemple

- 1维格子就是上文提到的闭区间.
- 2维格子是一个封闭的矩形.
- 3维格子是一个长方体.

6.6.3 k维格子的嵌套性质

设$\mathbb{R}^k$中的一族闭k维格子$\{I_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$,则有:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \varnothing$$

Démonstration

这里的证明是闭区间套性质证明他推广,请读者自行尝试.只需要证明存在一组$x* = (x_1*, \ldots, x_n*)$属于所有的$I_n$就行.

6.6.4 k维格子的紧致性

k维格子是紧集.

Démonstration

6.6.5 Proposition

设$\mathbb{R}^k$中的子集E,则有:

$$E\text{有界} \Leftrightarrow \exists I = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) | x_j \in [a_j, b_j]_{j \in [\![1,k]\!]}\} \in \mathbb{R}^k, E \subseteq I$$

6.6.6 Heine-Borel定理

对$E \subseteq \mathbb{R}^k$ $k \in \mathbb{N}$,有:

$$E\text{是紧集} \Leftrightarrow E\text{是闭集} \wedge E\text{是有界集}$$

Démonstration

$\Rightarrow$:

$\Leftarrow$:

6.6.7 实紧集的极限点

$\mathbb{R}^{\urcorner}$的子集E是紧集$\Leftrightarrow E$的每个无限子集在其中都有一个极限点.

Démonstration

6.6.8 Weierstrass定理

6.7 完备集与连通集

6.7.1 Cantor三分集

6.7.2 分离集

6.8 压缩映射 Applications contractante

第七章　赋范空间 Espace Vectoriel Normé

这一章的核心概念是范数(模)的推广.把以前所学习的范数抽象化,然后推广应用.

7.1　范数 La norme

范数是映射,也是泛函.对于以前学习过的模长,我们发现其具有非负性、绝对齐次性和三角不等式三个优秀的性质,于是我们将其提取出来并推广,重新定义范数.

7.1.1　Définition

给定映射：

$$\|\cdot\| : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

满足：

- 非负性：$\forall \alpha \in \mathbb{E}, \|\alpha\| \geq 0$并且$\forall \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{E}}$.
- 绝对齐次性(homogénéité):$\forall \alpha \in \mathbb{E}, \|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$.这里$k$属于$\mathbb{R}$或者$\mathbb{C}$,具体由$\alpha$决定.

- 三角不等式(inégalité triangulaire):$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{E}^2, \|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$.

即可称该映射是一个范数,并称$(\mathbb{E},N)$为一个赋范向量空间(sspace vectoriel normé) ,简称赋范空间,其中N为范数.

7.1.2 Remarque:线性

所谓齐次性,指的是$f(k\alpha)=kf(\alpha)$,绝对齐次性就是$f(k\alpha)=|k|f(\alpha)$.另外还有可加性$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$. 同时满足齐次性和可加性的运算称线性.为了明确乘法和加法,范数的公理化必须在线性空间内.

7.1.3 Proposition:范数诱导的度量

7.1.4 平移不变性

7.2 L^P范数

与讲义上的顺序不同,我打算直接定义L^P范数(又称为P范数)并研究它的性质,而不是通过需要的性质去定义三个范数.

7.2.1 Définition

对线性空间里的向量$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$,定义范数:

$$\|\alpha\|_P=(\sum_{i=1}^n|a_i|^P)^{\frac{1}{P}}, P\ge 1$$

容易验证L^P范数的非负性和绝对齐次性,其三角不等式由Minkowski不等式得出.
当$P=1$,L^1范数称曼哈顿(Manhattan)范数,诱导的度量称曼哈顿距离.这是因为曼哈顿的街道都建得方方正正,从街道上一点到另一点的距离基本上就是走出两条垂直的线的长度.
当$P=2$,L^2范数称即是通常意义下的范数,诱导的也就是通常意义下的距离

当$P \to \infty$,L^∞范数称一致范数(或者上确界范数),诱导的度量称切比雪夫(Chebyshev)距离,又叫棋盘距离.两点之间的距离是其各个坐标数值中绝对值最大的那一个. 显然,这是因为$\|\alpha\|_\infty = \max\{|a_i|\}$

当$P < 1$时,Minkowski不等式不成立,需要反号,无法定义范数,但仍然有许多有趣的性质.

7.2.2 开球 La boule ouverte

Définition

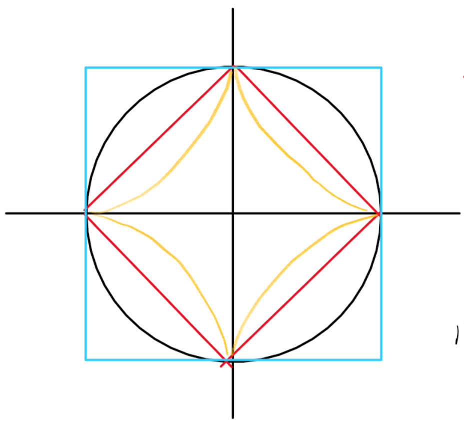
赋范空间$(E, \|\cdot\|)$中,有$q \in E, r \in (0, +\infty)$,对于集合:

$$B(q,r) = \{x \in E | \|x-q\| < r\}$$

称B是以q为中兴半径r的开球.请对照第6.2.3 节,开球与邻域的区别,其实就是度量和范数的差异.

7.2.3 单位球与等距线

称$B(0,1)$为赋范空间$(E, \|\cdot\|)$上的单位球(boule unité).作距离为1的各范数的等距线:



L^2. $x^2+y^2=1$

L^1, $|x|+|y|=1$

$L^{+\infty}$, $\max\{|x|,|y|\}=1$.

$L^{\frac{1}{2}}$, $|x|^{\frac{1}{2}}+|y|^{\frac{1}{2}}=1$ ⚠ 此时 Minkowski 不等式不成立.

需反号,不是范数.

同过4个点,p越大越突出.

特别说明,我这里给出了$P = \frac{1}{2}$的情况,用来说明,对于单位球,其实就是固定4个点,然后P越大曲线越往外凸.

7.2.4 函数空间上的L^P范数

既然有了Euclide空间上的L^P范数,我们自然也会想在其他空间上玩玩这个.最熟悉的空间莫过于函数空间了！仿照之前的L^P范数,我们发现,不太好给函数又加和又开方什么的.但是所幸我们有一个替代方案,那就是同样非常熟悉的Riemann积分!

Définition

对$\mathcal{C}^0 I$上的函数f,定义范数：

$$\|f\|_P = (\int_I |f(x)|^P \mathrm{d}x)^{\frac{1}{P}}, P \geq 1$$

这样就得到了函数空间上的L^P范数!

Remarque

我们发现,当$P \to \infty$时L^∞范数$\|f\|_\infty = \max|f(x)|, x \in I$,这正是函数$f$在$I$上的上确界. 现在回顾之前我们对一致收敛的定义,那里提到的$\|f_n - f\|_\infty \to 0$就非常好理解了.

7.3 空间的完备化

(Introduction)让我们先通过一个例子引出完备空间.

7.3.1 实数：七个等价命题

我们说"实数$\mathbb{R}$是完备的",这对应于七个等价的命题.这些命题可以相互推导：

- Dedekind分割定理
- 确界原理
- Heine-Borel定理
- 单调收敛定理
- 闭区间套定理
- Bolzano-Weierstrass定理
- Cauchy收敛原理

这其中,AAAAA是本讲义已经介绍过的内容,剩余的(带介绍).

在这七个命题里,Cauchy收敛原理应为只涉及了度量,故比较容易用来达成我们的完备化步骤.我们将通过这一原理来详细阐述一个度量空间的完备化

7.3.2 收敛

当我们尝试把范数、度量、内积等等概念都抽象化、公理化地定义了之后,是时候重新回顾一下,一个重要概念——收敛了. 当然,课程的内容只在赋范空间内讨论了收敛,所以我们先看赋范空间内的. 我们会尝试用精确的$\epsilon-\delta$语言来定义它：

Définition

赋范空间$(E,\|\cdot\|)$中,点列$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, l\in E$,若:

$$\forall\epsilon>0,\exists p\in\mathbb{N}, n\geq p\Rightarrow\|u_n-l\|<\epsilon$$

称$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$在$(E,\|\cdot\|)$中收敛于l.

7.3.3 Proposition

若$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$在$(E,\|\cdot\|)$中收敛于l,则$(u_n-l)_{n\in\mathbb{N}}$在$(E,\|\cdot\|)$中收敛于0.

7.3.4 Proposition

若$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$在$(E,\|\cdot\|)$中收敛于l_1和l_2,且二者同属于赋范空间$(E,\|\cdot\|)$,则$l_1=l_2$

7.3.5 Cauchy列与收敛

下面我们进入到度量空间,利用Cauchy列讨论完备.

Définition

度量空间(X,d)中,点列$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,若:

$$\forall\epsilon>0,\exists p\in\mathbb{N},m>p,n>p\Rightarrow d(u_m,u_n)<\epsilon$$

称点列$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$是一个Cauchy列.

Proposition

度量空间中收敛的点列一定是Cauchy列.

Proposition

度量空间中的Cauchy列一定有界.

Proposition

子列收敛的Cauchy列一定收敛.

7.3.6 再论闭包与稠密集

闭包

现在我们可以尝试把集合拖到赋范空间里,尝试定义集合的闭包. 对赋范空间$(E, \|\cdot\|)$中的集合A,定义其闭包为:

$$\overline{A} = \{x \in E | \forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x\}$$

Proposition

赋范空间$(E, \|\cdot\|)$中的集合$A \in \overline{A}$.

稠密集

对赋范空间$(E, \|\cdot\|)$和其中的集合A,如果:

$$\forall x \in E, \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$$

称集合A在E上是稠密的.显然,常见的如有理数集在实数集上仍然是稠密的.

Bonus

Pierre曾在某次作业里要求证明无理数集在$\mathbb{R}$上稠密.当你学了这里的定义之后应该就非常简单了.当时我是这么写的:

Soit $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\forall x \in \mathbb{R}$:

Si $x \in \mathbb{I}$, soit une suit $\{\alpha_n\} = x \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x = x \in \overline{\mathbb{I}}$.

Si $x \in \mathbb{Q}$, soit une suit $\{\beta_n\} = x - \frac{\sqrt{2}}{n}$. $\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = x - \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{I}$ et $\lim_{n \to \infty} \beta_n = x \in \overline{\mathbb{I}}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{I}^{\mathbb{N}}, n \xrightarrow[a_n \to \infty]{} x$. Cela dit que $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

7.3.7 完备空间与完备化

Définition

若度量空间(X,d)中任意一个Cauchy列都收敛,称度量空间(X,d)是完备的(complet)度量空间. 称完备的赋范空间为Banach空间,完备的内积空间为Hilbert空间.想要熟悉这两个空间的具体性质就去学习泛函分析吧.

把一个度量空间加上其Cauchy列的极限点组成的最小度量空间这一过程称为对度量空间的完备化.例如,有理数集的完备化就是实数集.

7.4 等价度量与等价范数

7.4.1 双Lipschitz条件

给定两个度量空间$(E_1,d_1),(E_2,d_2)$,集合$U\subseteq E_1$. 若对于函数$f:U\to E_2$存在常数K使得对任意集合U中的元素(a,b)有:

$$d_2(f(a),f(b))\le Kd_1(a,b)$$

称该函数符合Lipschitz条件.
若存在$K\ge 1$使得:

$$\frac{1}{K}d_1(a,b)\le d_2(f(a),f(b))\le Kd_1(a,b)$$

称该函数符合双Lipschitz条件.

7.4.2 等价范数 La norme équivalente

Définition

设线性空间E上的两个范数N_1和N_2若:

$$\exists(a,b)\in(0,+\infty),\forall x\in E,aN_1(x)\le N_2(x)\le bN_1(x)$$

称N_1和N_2是等价(équivalente)范数.

Remarque

等价范数是等价关系,具有自反性、传递性和对称性.

Proposition

n维线性空间上的所有范数等价.

第八章　内积 Produit Scalaire

这一部分是在小学期讲的.

8.0.1 Définition

8.0.2 Cauchy-Schwatz不等式

8.0.3 内积诱导的范数

8.0.4 平行四边形等式

第九章　拓扑空间

Espace Topologique

拓扑是什么？拓扑学内容有哪些？拓扑这个词或许经常听到,但是对于具体的含义和内容想必不是很了解. 事实上,从度量开始,就已经可以算是拓扑学的内容了,我们已经学习了好几章的拓扑学,只不过到了这一章才正式地把这些概念定义出来. 之前我们完成了距离的公理化、模长的公理化和内积的公理化,拓扑也是一个我们熟悉的概念公理化,那就是开集. 拓扑研究的就是开集的集族(Famille d'ensembles).

9.1　拓扑空间

与度量空间、赋范空间和内积空间类似,拓扑也有对应的拓扑空间,定义如下:

9.1.1　Définition

给定集合X和集族τ,满足：

1.$\varnothing \in \tau, X \in \tau$,空集和全集是开集

2.$\forall \alpha \in I, U_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$,开集的并集是开集.

3.$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$,开集的有限交是开集.

则称τ是X上的一个拓扑,称(X,τ)是一个拓扑空间,U称其中的开集.

9.1.2 Remarque:其他的公理化

除了以上的公理化方式,还有两种常见的拓扑定义.

9.1.3 Proposition:闭集

由de Morgan定律得:

1.$\varnothing, X/$.

2.$\forall\alpha \in I, E_\alpha$是闭集 $\Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$是闭集.闭集的交是闭集.

3.$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$是闭集.闭集的有限并是闭集.

9.1.4 Exemple

$\mathbb{R}$上的所有形如$[a,b)$的区间可以组成一个拓扑,其中每个$[a_i,b_i)$都是开集.

9.1.5 离散拓扑 Topologie discrète

离散拓扑即$\tau = \mathcal{P}(X)$,其拓扑是集合的幂集,也就是其所有子集的集族. 离散拓扑空间里所有的单点集都既是开集又是闭集,相互之间都是"孤立的".

9.1.6 密着拓扑 Topologie grossiète

密着拓扑即$\tau = \{X, \varnothing\}$,又叫不可分拓扑,其空间里只有空集和整个空间是开集,所有的点都被"粘在一起",无法通过拓扑的方式区分开来.

可以认为,离散拓扑和密着拓扑是两个"极端的"拓扑,全包和全不包. 也正因为其极端性,它们有着一些特殊的性质,我们在后续研究.

9.1.7 度量诱导的拓扑

对(X,τ),若存在度量d可以定义拓扑的开集,称(X,τ)是可度量的(英:metrizable). 例如,第6.1.3 节的离散度量可以诱导离散拓扑,此时邻域$N_{\frac{1}{2}} = \{X\}$就是开集. 而对于$\mathrm{card}(X) > 1$的密着拓扑就无法被度量.

9.1.8 有限补拓扑 Topologie des compléments finis

有限补拓扑中,补集有限的集合是开集.即$\tau = \{U|U \subseteq X, U^C\text{是有限集}\}\cup\{\varnothing\}$

9.1.9 子空间拓扑

提前预告一下,这是个简单但是非常重要的概念,我们在后面的证明中会多次用到这个概念.
对(X,τ),Y是X的子集,则存在一个拓扑$\tau_y = \{Y\cap U|U\in\tau\}$,也就是说,拓扑与子集的交集可以组成一个新的拓扑.

Démonstration

$$\begin{aligned}
&\varnothing\cap Y = \varnothing \in \tau_y\\
&X\cap Y = Y \in \tau_y\\
&\bigcup_{\alpha\in I}(U_\alpha\cap Y) = (\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha)\cap Y \in Y\\
&\bigcap_{i=1}^{n}(U_i\cap Y) = (\bigcap_{i=1}^{n}U_i)\cap Y \in Y
\end{aligned}$$

Exemple

对于$\mathbb{R}$上的常规拓扑和子集$Y = [0,+\infty), \forall(a,b)\in\mathbb{R}, (a,b)\cap[0,\infty)\in\tau_y$.

9.2 拓扑空间里的点集

现在让我们来看一看那些以前很熟悉的概念拿到拓扑空间里之后会发生什么.

9.2.1 邻域

对(X,τ)中的一点x,若存在开集$U\in\tau, x\in U$,则称U是x的一个邻域,记为$U(x)$,U/x是x的去心邻域,记为$\check{U}(x)$. 注意到,现在的邻域跟之前的在对称性上有所差异,之前我们规定一个点的邻域好像都是关于这个点"对称"的,点在邻域的正中央,现在这个点可以在邻域里的任意位置. 我当初学到这里也觉得奇怪,但是后面一想,也没用上这个所谓的对称性啊,所以其实问题不大.

9.2.2 内点

$(X,\tau), E\subseteq X, x\in E$,若存在$U(x)\subseteq E$则称呼$x$是$E$的一个内点. E的所有内点组成的集合称为其内部,记为E^O.

9.2.3 极限点与闭包点

$(X,\tau), E\subseteq X, x\in E$若有$\forall\check{U}(x)\cap E\neq\varnothing$,则$x$是$E$的极限点.$E$的所有极限点组成的集合称为导集,记为$E'$.同理, 若有$\forall U(x)\cap E\neq\varnothing$,则$x$是$E$的闭包点.$E$的所有闭包点组成的集合称为闭包,记为$\bar{E}$. 熟悉的感觉又回来了.同样,我们可以证明$\bar{E}=E\cup E'$.

9.2.4 外点与边界点

与内点这个概念相对应,考虑E的补集E^C,将其内点称为E的外点,组成的集合称为外部,记为E^e.不是内点又不是外点的点称为边界点,组成的集合称为边界,记为∂E.

9.2.5 熟悉的命题

把以前的一些命题拿过来放到拓扑空间,它们仍然成立.

- U是开集 $\Leftrightarrow U = U^O$,内部等于自身的集合是开集.
- $U^O = (U^O)^O$,内部是开集.
- U^O是包含于U的最大开集.
- E是闭集 $\Leftrightarrow E = \bar{E}$,闭包等于自身的集合是闭集.
- $\bar{E} = \bar{\bar{E}}$,闭包是闭集.
- $\bar{E}$是包含于E的最小闭集.

Démonstration

待补充,笔记上的太乱了.

9.3 拓扑空间里的收敛

现在我们要在拓扑空间中再次研究这个重要的,贯穿了大量分析学内容的概念————收敛.

9.3.1 Définition

(X, τ)中的点列$\{a_n\}$和一点x,若有:

$$\forall U(x), \exists N \in \mathbb{N}* \text{使得} n > N \Rightarrow a_n \in U(x)$$

称点列$\{a_n\}$收敛于点x.

Exemple

$X = \{a, b, c\}, \tau = \{\varnothing, X, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}\}, a_n \equiv a$.则有$\{a_n\}$收敛于点$a$.

Remarque:收敛不唯一

注意到,在上述的条件里,点列的收敛是不唯一的!!!因为$\{a,b\}$也是点a的邻域,所以$\{a_n\}$收敛于点b;$\{a,c\}$也是点a的邻域,所以$\{a_n\}$收敛于点c.也就是说,$\{a_n\}$同时收敛于a,b,c三个不同的点! 这多么可怕,与我们之前见过的只收敛到一个点的收敛概念完全不同.出现这一情况,是因为在之前我们学习的空间里,两个点之间存在没有交集的邻域,但是在拓扑空间里这条法则失效了,所以收敛有了这样的奇怪的性质. 然而这不是什么好的性质,如果点列的收敛是不唯一的,那我们就无法区分收敛到的哪些点了,点集拓扑的探讨也就失去了意义. 所以这一个收敛的定义其实不重要,因为没什么用.我们必须对它加以改进,添加更多的限制条件来确保能有效运用收敛.

9.3.2 Hausdorff条件:T_2公理

对(X,τ)中任意两点x_1,x_2,若:

$$\forall(x_1,x_2)\in X^2, x_1\neq x_2, \exists U(x_1),U(x_2)\text{使得}U(x_1)\cap U(x_2)=\varnothing$$

则称X是一个Hausdorff空间.该条件又称为拓扑空间里的分离公理,或者T_2公理,它把空间里的点分离开了.

Proposition

一个有限集是一个Hausdorff空间,当且仅当它的τ是离散拓扑.

Démonstration

离散拓扑的有限集显然是Hausdorff空间.我们证明另一个方向,利用反证法:

$$\neg(\tau\text{是离散拓扑}) \Rightarrow \exists x \in X, \{x\} \notin \tau$$
$$\text{设}x\text{的所有邻域交集为}\mathbb{U} \Rightarrow \mathbb{U} \cap x \neq \varnothing$$
$$\text{设}y \in \mathbb{U} \cap x$$
$$\Rightarrow \forall U(y) \cap \mathbb{U} \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow \forall U(y), \forall U(x), U(y) \cap U(x) \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow X\text{不是Hausdorff空间}$$

所以我们发现,如果研究有限集,那就绕不开离散拓扑,研究其收敛性也就没什么意义了.

Proposition

Hausdorff空间里点列的收敛具有唯一性,即$\{a_n\}$收敛于点x和$y \Rightarrow x = y$.

9.3.3 Hausdorff空间里的闭集

Hausdorff空间里单点集都是闭集.

Démonstration

对于Hausdorff空间里一点x,有:

$$\forall y \in x^C, \exists U(y) \cap x \neq \varnothing \Rightarrow U(u) \subseteq x^C \Rightarrow y \in (x^C)^O$$

因此x^C是个开集,那x自然就是个闭集了.

Proposition

Hausdorff空间里有限集都是闭集.

Proposition

度量空间都是Hausdorff空间.

9.3.4 Fréchet条件:T_1公理

在证明Hausdorff空间里单点集都是闭集的时候,我们用到了这样一步:

$$\exists U(y) \cap x \neq \varnothing$$

对比Hausdorff条件本身,我们发现这里没有用全.我们只用了点和邻域的关系而不是邻域和邻域的关系,这说明Hausdorff条件是一个很强的条件,我们可以尝试再稍微弱化一下它. 于是就有了Fréchet条件:单点集都是闭集的拓扑空间称为Fréchet空间.

9.3.5 T_0公理与Kolmogorov体系

这里重新调整一下

9.4 拓扑公理体系 Systeme d'axiomes topologiques

9.4.1 T_0 Kolmogorov 公理 Axiome de Kolmogorov

9.4.2 T_1 公理 Axiome de Fréchet

9.4.3 T_2 Hausdorff 公理 Axiome de Hausdorff

9.4.4 T_3 正规公理 Axiome régulier

9.4.5 T_4 公理 Axiome complètement régulier

9.4.6 T_5 公理 Axiome complètement régulier de Hausdorff

9.4.7 T_6 公理 Axiome dénombrable

9.4.8 T_7 公理 Premier axiome dénombrable

9.4.9 T_8 公理 Deuxième axiome dénombrable

9.4.10 T_9 公理 Axiome de Lindelöf

9.5 连续性与映射

现在,我们继续公理化拓扑空间里映射的连续性.

9.5.1 Définition

考虑两个拓扑空间$(X, \tau_x)(Y, \tau_y)$上的映射$f : X \to Y$,若:

$$\forall U \in \tau_y, f_{-1}(U) \in \tau_x$$

则称映射f是连续的.

9.5.2 拓扑的选择与连续性

对于同一个集合,我们选择不同的拓扑,则可能导致连续性的改变. 例如,设$\mathbb{R}_d$是$\mathbb{R}$上的离散拓扑,$\mathbb{R}_n$是$\mathbb{R}$上的通常拓扑,$f(x)=x$是恒等映射,则:

- $f:\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}_d$不是连续映射,单点集在$\mathbb{R}_n$上不是开集.
- $f:\mathbb{R}_d\to\mathbb{R}_n$是连续映射.

9.5.3 由公理推导而来的等价命题

一下命题等价,它们分别对应着不同的拓扑公理.这也说明拓扑公理是可以相互转化的.

- 1.$\forall U\in\tau_y, f_{-1}(U)\in\tau_x$.(开集公理)
- 2.$\forall E\subseteq X, f(\bar{E})\subseteq \bar{f(E)}$.(闭包公理)
- 3.$\forall E\in Y$是闭集, $f_{-1}(E)\in X$是闭集.(闭集公理)
- 4.$\forall x\in X,\forall U[f(x)],\exists U(x)$使得$f[U(x)]\subseteq U[f(x)]$.(邻域公理)

Démonstration

$1\Rightarrow 2$:

$$\begin{aligned}&\forall x\in\bar{E}, f^{-1}U[f(X)]\cap E\neq\varnothing\\&\Rightarrow U[f(x)]\cap f(E)\neq\varnothing\Rightarrow f(x)\in \bar{f(E)}\end{aligned}$$

$2\Rightarrow 3$:

$$\begin{aligned}&\forall x\in \bar{f^{-1}(E)}, f(x)\in\bar{E}\\&\Rightarrow x\in f^{-1}(E)\Rightarrow \bar{f^{-1}(E)}\subseteq f^{-1}(E)\\&\Rightarrow f^{-1}(E)\text{是闭集}\end{aligned}$$

3 ⇒ 1:

$$U \subseteq \tau_y \Rightarrow U^C\text{是闭集} \Rightarrow f^{-1}(U^C)\text{是闭集}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(U^C) = [f^{-1}(U)]^C \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_x$$

4 ⇒ 1: 这里的证明其实就是前面证明过的东西反过来,留给读者完成.

9.5.4 Exemple

接下来给出几个连续映射

常值映射

$$f : X \to Y$$

$$x \to C$$

$\forall$开集$U \subseteq Y, C \in U \Rightarrow f^{-1}(U) = X$是开集,$C \notin U \Rightarrow f^{-1}(U) = \varnothing$是开集,故常值映射是连续映射.

包含映射

包含映射是X的子集A上的恒等映射

$$i : A \hookrightarrow X$$

$$x \to x$$

$\forall$开集$U \subseteq X, i^{-1}(U) = U \cap A$是开集(子空间拓扑),故常值映射是连续映射.

复合映射

给定连续映射$f : X \to Y$ $g : Y \to Z$,其复合映射

$$\phi : X \to Z$$

$$x \to g(f(x))$$

也是连续映射.$\forall$开集$U \subseteq Z, g^{-1}(U) \subseteq Y$是开集 $\Rightarrow$ $f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X$是开集 $\Rightarrow$ $(f \circ g)^{-1}(U)$是开集, 故连续映射的复合映射也是连续映射.

限制映射

考虑连续映射$f : X \to Y$,对$A \subseteq X$:

$$f|_A : A \to Y$$

$$x \to f(x)$$

为连续映射(考虑包含映射和映射f的复合映射即可).

陪域缩小

考虑连续映射$f : X \to Y$,对$Z \subseteq X$:

$$f' : X \to Z$$

$$x \to f(x)$$

则f'也是连续映射(考虑映射f和包含映射的逆映射的复合映射即可).

陪域扩大

考虑连续映射$f : X \to Y$,对$Y \subseteq Z$:

$$f' : X \to Z$$

$$x \to f(x)$$

则f'也是连续映射(考虑映射f和包含映射的复合映射即可).

9.5.5 局部表示与粘接原理

在讨论拓扑空间上的连续函数时,我们不必要求直观地看出整个函数都是连续的,而是可以间接地"拼凑"出一个连续函数. 若我们采用开集"拼凑",则这个过程称为连续性的局部表示;若采用闭集,则称为粘接原理.即对拓扑空间上的函数$f:X\to Y$:

$$X=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha,\forall\alpha\in I,U_\aleph\text{是开集}$$

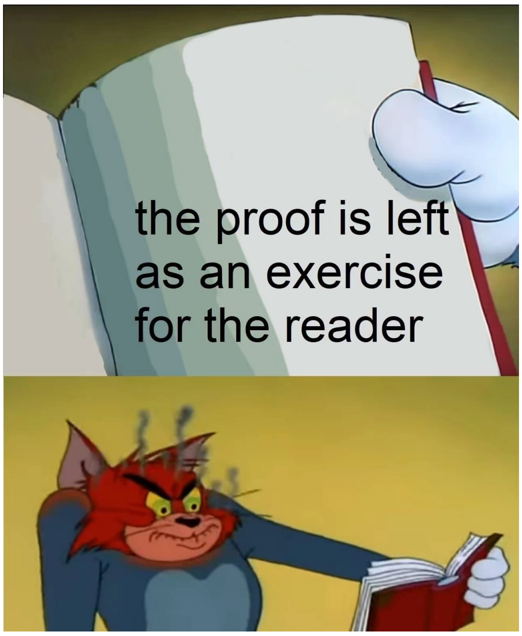
$$\forall\alpha\in I,f|_{U_\alpha}:U_\alpha\to Y\text{连续}\Rightarrow f:X\to Y\text{连续}$$

即为连续性的局部表示;

$$X=\bigcap_{i=0}^{n}V_i,\forall i\in[\![0,n]\!],V_i\text{是闭集}$$

$$\forall i\in[\![0,n]\!],f|_{V_i}:V_i\to Y\text{连续}\Rightarrow f:X\to Y\text{连续}$$

Démonstration



9.6 同胚 Homeomorphisme

现在我们来到了拓扑里面最重要的概念——同胚.你可能听过这个著名的笑话:

一个拓扑学家把咖啡倒进了甜甜圈里.有人问他为什么不把咖啡倒进咖啡杯里,拓扑学家非常惊讶:"它们有什么区别?不是同胚的吗?"

9.6.1 Définition

对拓扑空间上的映射$f: X \to Y$若f满足:

- f是双射
- f是连续映射
- f^{-1}是连续映射

则称f是X到Y上的一个同胚映射,此时X和Y是同胚的.显然,同胚是一个等价关系.

9.6.2 Exemple

9.6.3 Remarque

请回顾我们在第**??** 节和第**??** 节里提到的同态和同构,它们有什么相似的地方?

在拓扑空间上前两条无法推出第三条性质,我们讲马上给出一个经典的反例用来说明这一点.

9.6.4 Exemple: 反例

给出由半开半闭区间$[0,1)$到单位圆上的映射

$$f:[0,1)\to\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$$

$$x\mapsto\cos(2\pi x)+\sin(2\pi x)$$

f是连续的双射,但是f^{-1}在$(1,0)$处不连续. 这是因为我们把区间的两端"粘贴"了起来,这导致了拓扑性质的改变,因此无法保持同胚.事实上,只要进行了类似"粘贴""裁剪"或者"穿孔"等等操作,原来的拓扑就变了. 这些操作会在拓扑学里严格定义,这里不再谈论.

9.6.5 Proposition

对$\mathbb{R}$上的一元函数$f:X\to Y$,有:X,Y是$\mathbb{R}$上的两个区间(不能是子集!).若:

- f是双射
- f是连续映射

则X,Y同胚.

9.6.6 Exemple: 反例

若上述推论里将X,Y**是$\mathbb{R}$上的两个区间** 改成 X,Y**是$\mathbb{R}$上的两个子集** ,则结论不成立. 例如映射$f:X\to Y$有 $X=[0,1]\cup(2,3],Y-[0,2]$

$$x\mapsto\begin{cases}x & x\in[0,1]\\ x-1 & x\in(2,3]\end{cases}$$

则f^{-1}不连续.

9.6.7 Proposition

对双射$f : X \to Y$,若:

$$U\text{是}X\text{上的开集} \Leftrightarrow f(U)\text{是}Y\text{上的开集}$$

则X, Y同胚.

9.7 紧致性与列紧性 Compacité et séquentialité

9.7.1 拓扑不变量 Topological invariant

与同构类似,同胚的拓扑空间也有一些不会变化或者相等的东西.这些东西被称为拓扑性质或者拓扑不变量. 它们在同胚映射下保持不变.由于许多概念还没有讲到,我们仅仅给出拓扑不变量的概念,以便于大家理解拓扑空间上的紧致性. 更多的拓扑不变量将在拓扑学中研究.

9.7.2 Remarque

我们将以前所学过的度量空间上的开覆盖推广到拓扑空间.这并没有难度,因为拓扑空间直接就是拿开集定义的,不需要额外添加什么内容. 对拓扑空间X上的开集族$\{U_\alpha | \alpha \in I\}$满足

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

则称$\{U_\alpha\}$是拓扑空间X上的一个开覆盖.

同理,若能找到一组有限个开集覆盖X,即A和B拥有相同的基数

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

则称$\{U_\alpha\}$是拓扑空间X上的一个有限开覆盖/有限子覆盖.

9.7.3 Définition: 紧致

对拓扑空间X上的任意一个开覆盖,若都能找到一个有限子覆盖,则称X是一个紧致空间,或称X是紧的. 若$Y \subseteq X$也是紧的,则称Y是一个紧致集/紧集.

9.7.4 Définition: 序列紧致

对拓扑空间X上的任意一个序列,若都能找到一个子序列$\{x_n\}$收敛于$x \in X$,则称X是一个序列紧致空间,或称X是列紧的. 若$Y \subseteq X$也是列紧的,则称Y是一个列紧集.

9.7.5 Remarque

或许你还记得我们在度量空间上讨论的紧致性问题,当时我们并没有这么区分紧和列紧. 事实上,在度量空间上,紧致性和列紧性是等价的,这两个概念都起源于Bolzano对于收敛子列的研究. 在研究收敛性上,发展出了Bolzano-Weierstrass定理和Arzela-Ascoli定理等对于序列紧致性的结论; 在研究连续性上,又发展出了Heine-Borel定理作为连续性的结论. 早期的列紧性比紧致性更为直观(显然,度量下的点列收敛肯定比开集更加容易直观理解),因此Fréchet将现在的列紧性定义为紧致. 但是后来随着拓扑空间研究的深入,人们发现两者不等价,且在拓扑空间上Heine-Borel利用开区间表示的紧致性更容易理解,更何况在一般的拓扑空间下无法讨论序列的收敛, 因此最终由Pavel和Urysohn用Heine-Borel的方法定义紧致性,而将Bolzano-Weierstrass的方法定义为列紧性.在本章中,我们主要考虑紧致性的问题.

9.7.6 Proposition

Y是X上的一个紧致集等价于以下表述:

对开集族 $\{U_\alpha\} \subseteq X, \{U_\alpha\}$是 Y的开覆盖 $\Rightarrow \exists\{U_i | i \in [\![1, n]\!]\} \subseteq \{U_\alpha\}$是 Y的有限子覆盖

这说明了一个很重要的结论:集合的紧致性与其在什么空间上无关.一个紧的Y放在任何X里都是紧的.

9.7.7 Exemple

1. $\mathbb{R}$既不紧,也不列紧

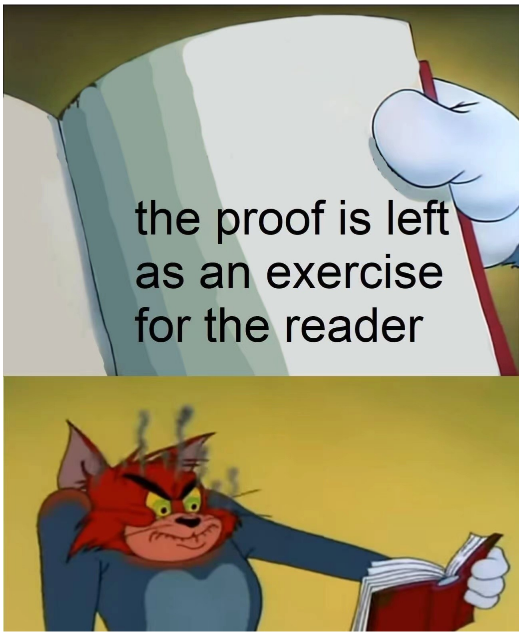
我们可以找到开覆盖

$$C = \{(n, n+2) | n \in \mathbb{Z}\}$$

从中拿去任意一个区间之后就无法覆盖$\mathbb{R}$了.
对于$\mathbb{R}$趋近于正无穷的子列显然不收敛于$\mathbb{R}$上的某个点.

2. $(0,1]$既不紧,也不列紧

3. $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$既紧,也列紧



9.7.8 紧集的投影

定义投影算子$\mathcal{P}: X^2 \to X$

$$(a,b) \mapsto a$$

若A^2紧致,则$\mathcal{P}(A)$也紧致.

9.7.9 Proposition

两个紧集的笛卡尔积同样是紧集.

$$A \times B\text{是紧集} \Leftrightarrow A\text{是紧集} \wedge B\text{是紧集}$$

9.7.10 Proposition

有限个紧集的笛卡尔积同样是紧集.(此时不能反推)

$$A_1, \ldots, A_n\text{是紧集} \Rightarrow A_1 \times \cdots \times A_n\text{是紧集}$$

9.8 闭集刻画的紧致集

利用闭集刻画紧致集,可以在一定程度上简化我们的计算和证明.

9.8.1 Remarque: 有限交性质

对集合X,设子集族$C = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$,若对$C$的任一**有限**子集族$C_U = \{U_1, U_2, dots, U_n\}$,都有

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \neq \varnothing$$

则称C具有**有限交性质**.

9.8.2 Proposition

X是紧集等价于以下陈述:
对X中任意具有有限交性质的闭集族$\{V_\alpha|\alpha \in I\}$,有

$$\bigcap_{\alpha\in I} V_\alpha \neq \varnothing$$

Démonstration

利用De Morgan定律和反证法.

9.8.3 Proposition

紧致空间内的任意闭子集都是紧集.

Démonstration

设$Y \subseteq X$,取Y的开覆盖$C = \{U_\alpha|\alpha \in I\}$,令$C' = C \cup Y^{\complement}$, 则$C'$是$X$的一个开覆盖.若$X$是紧致的,设其有限子覆盖$D = \{U_1, U_2, dots, U_n\} \subseteq C'$.则有:

$$Y^{\complement} \nsubseteq D \Rightarrow D\text{是}Y\text{的有限开覆盖} \Rightarrow Y\text{是紧集}$$

$$Y^{\complement} \subseteq D \Rightarrow D \setminus Y^{\complement}\text{是}Y\text{的有限开覆盖} \Rightarrow Y\text{是紧集}$$

9.8.4 Proposition

Hausdorff空间里紧致集都是闭集

Démonstration

Exemple: 反例

以上命题不可反推.例如考虑到非Hausdorff空间上$\mathbb{R}$的有限补拓扑,任意的闭集都是紧集,但是也是有限集.

9.9 同伦 Homotopie

9.10 拓扑不变量 Topologie invariante

9.11 连通集 Connexité