MINI-PROJET 6 – OPTIMISATION

MINES ParisTech
https://moodle.psl.eu *2023-2024*

Ce mini-projet, à effectuer en binôme au sein du même groupe de PC, fera l'objet d'un rapport incluant notamment équations et graphiques obtenus par des simulations sous Python. La forme de ce rapport est laissée libre (pdf, jupyter notebook, github...). Le rendu s'effectuera sur Moodle. La date limite de rendu est le lundi 06/05 à 09h00, aucun rendu ne sera possible après cela.

A bicyclette...

On s'intéresse dans ce sujet à un vélo à assistance électrique, dont on cherche à optimiser le pilotage. On suppose que l'on connaît la trajectoire à suivre, modélisée de façon monodimensionnelle (quitte à considérer l'abscisse curviligne de la trajectoire). On suppose que l'on souhaite partir d'une abscisse x_0 à vitesse nulle pour rejoindre une seconde abscisse x_f en arrivant également à vitesse nulle. Pour cela, on considère un intervalle de temps $[0, T]$ que l'on découpe en N intervalles de temps de durée uniforme $\Delta t = T/N$. On note x_i et v_i les positions et vitesses au temps $t_i = i\Delta t$, reliées par

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t v_i \tag{1}$$

La dynamique du vélo s'écrit

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t \left(\alpha_1 - \alpha_2 v_i + \alpha_3 I_i + \alpha_4 T_i - g\gamma(x_i)\right) \tag{2}$$

où a_1 et $a_2, a_3, a_4 > 0$ sont des constantes données, I est l'intensité parcourant le moteur électrique, T_i est le couple fourni par le cycliste au pédalier, g la constante gravitationnelle et $\gamma(x_i)$ la pente de la route à la position x_i.

Le vélo avance, cad que sa vitesse est positive : $v_i \geq 0, i = 0, \ldots, N$. Par ailleurs, les performances du moteur sont limitées. D'un part, l'intensité est bornée

$$0 \leq I_i \leq I_M \tag{3}$$

et d'autre part la charge de la batterie l'est également

$$\sum_{i=0}^{N} \Delta t I_i \leq Q_{bat} \tag{4}$$

On souhaite limiter le couple fourni par le cycliste et on cherche donc à minimiser la valeur

$$\sum_{i=0}^{N} T_i^2 \tag{5}$$

1 Etude du problème d'optimisation

1. Commenter la contrainte (4) et son origine.

2. Interpréter les différents termes apparaissant dans (2), en notant qu'on a fait l'hypothèse que la pente de la route était faible. Comment varient a priori ces paramètres en fonction du cycliste ? Sa masse intervient-elle ?
3. Formuler le problème d'optimisation à résoudre sous la forme

$$\begin{aligned} \min_{z} \quad & f(z) \\ \text{tel que } & c_{eq}(z) = 0, \\ & c_{in}(z) \leq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

   On précisera les variables de décision z, leur nombre n, les contraintes c_{eq} et c_{in} ainsi que la fonction objectif f à minimiser.
4. Etudier la convexité de ce problème.

2 Identification du modèle dynamique

Avant de pouvoir aborder le problème principale d'optimisation, on cherche à identifier les paramètres régissant la dynamique du vélo, qui dépendent fortement de l'utilisateur. Pour ce faire, on dispose de données numériques de la vitesse v, l'intensité I et du couple du cycliste au niveau du pédalier T, enregistrés pendant un essai, *effectué sur terrain plat*.

5. Formuler le problème de moindres carrés correspondant à l'identification des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 dans (2).
6. Charger les données à l'aide du fichier data_velo.csv et résoudre ce problème (on pourra utiliser la solution des moindres carrés, ou utiliser la fonction numpy.linalg.lstsq). On n'oubliera pas de filtrer convenablement le bruit de mesure des données, si besoin, et de commenter l'impact de ce filtrage et les résultats obtenus. On tracera en particulier l'évolution de la vitesse au cours du temps, ainsi que de la vitesse estimée obtenue à partir des mesures et des paramètres estimés α_i.
7. On souhaite fournir un algorithme permettant de fournir l'estimation des paramètres en temps réel, et ne nécessitant pas l'inversion de matrice nécessaire pour les moindres carrés. Dans ce but, on suppose que l'on a résolu le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \|A_k x - b_k\|^2$$

   avec $A_k \in \mathbb{R}^{p \times m}$ et $b \in \mathbb{R}^p$ $(p > m)$ à une certain itération k dont on note $x_k = (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T b_k$ la solution. A l'itération $k+1$, on dispose de nouvelles mesures $\tilde{b}$ et a_{k+1} et on cherche alors à résoudre le nouveau problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \|A_{k+1} x - b_{k+1}\|^2$$

   où $A_{k+1} = (A_k^T, a_{k+1})^T \in \mathbb{R}^{p \times m}$ et $b \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $b_{k+1} = (b_k^T, \tilde{b}) \in \mathbb{R}^{p+1}$. On souhaite exprimer la solution x_{k+1} de ce nouveau problème à l'aide de x_k.
   (a) Montrer par la formule de Sherman-Morrison-Woodbury (Proposition 2 du polycopié, p.23) que

$$(A_{k+1}^T A_{k+1})^{-1} = (A_k^T A_k + a_{k+1} a_{k+1}^T)^{-1} = (A_k^T A_k)^{-1} - K_k a_{k+1}^T (A_k^T A_k)^{-1} \tag{7}$$

$$\text{avec } K_k = \gamma_k (A_k^T A_k)^{-1} a_{k+1} \text{ où } \gamma_k = 1/(1 + a_{k+1}^T (A_k^T A_k)^{-1} a_{k+1}) \tag{8}$$

   (b) En déduire que $x_{k+1} = x_k + K_k(\tilde{b} - a_{k+1}^T x_k)$.
   (c) Proposer alors un algorithme calculant itérativement x_{k+1}, et qui ne nécessite pas d'inversion de matrice au cours des itérations.Cette technique est connue sous le nom de moindre carrés récursifs [1].
8. Implémenter cette technique dans le cas présent. Comparer les résultats obtenus à ceux de la question 6.

1. De multiples variantes de cet algorithme existent, on pourra se référer à [1].

3 Etude et résolution numérique du problème d'assistance

Disposant à présent d'une estimation des valeurs des paramètres de (2), on est en mesure de résoudre le problème d'assistance électrique originelle.

9. Quelle difficulté présente la contrainte de dynamique (2) pour la résolution du problème d'optimisation ? Justifier que l'on cherche à développer un algorithme de résolution qui, à chaque itération $k+1$, approche la contrainte de dynamique par la version linéarisée autour de la solution z^k fournie par l'itération précédente

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t \left(\alpha_1 - \alpha_2 v_i + \alpha_3 I_i + \alpha_4 T_i - g\left(\gamma(x_i^k) + \gamma'(x_i^k)(x_i - x_i^k)\right)\right) \tag{9}$$

   Que cela change-t-il pour le problème d'optimisation (6) si la pente est nulle ?

10. Dans un premier temps, on suppose que la pente est nulle ($\gamma \equiv 0$). Résoudre le problème pour $T = 100s$, $\Delta t = 2.5s$, $x_0 = 0$, $x_f = 500m$ et les valeurs numériques suivantes :

$$Q_{bat} = 700C\,, \quad I_M = 30A\,, \quad g = 9.81 \tag{10}$$

    avec les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 précédemment obtenues. On affichera notamment les graphiques suivants :

    (a) l'évolution de la vitesse au cours du temps, superposée à l'évolution de la pente au cours du temps

    (b) l'évolution de la charge et de l'intensité fournie au cycliste, superposée à l'évolution de la pente au cours du temps.

    Commenter les résultats obtenus.

11. Modifier cet algorithme pour l'intégrer dans une boucle réalisant la linéarisation (9). On considèrera une pente constituée de deux dénivelés $\gamma(x) = \gamma_1 e^{-(x-\mu_1)^2/\sigma_1^2} + \gamma_2 e^{-(x-\mu_2)^2/\sigma_2^2}$ avec $\gamma_1 = 0.02$, $\gamma_2 = 0.01$, $\sigma_1 = 100m$, $\sigma_2 = 31.5m$, $\mu_1 = 187.5m$, $\mu_2 = 375m$ et les mêmes valeurs numériques qu'à la question précédente.

12. Comparer ces résultats au cas où l'on ne dispose pas d'une assistance électrique, en prenant $Q_{\text{bat}} = 0C$. On prendra soin de tracer les deux profils de couple fourni par le cycliste au cours du temps. Commenter les résultats obtenus et le rôle de l'assistance électrique.

Références

[1] Lennart Ljung *System identification.* 1995.