沙滩占位博弈模型的纳什均衡

何啻　统计学　37720222204921

1　博弈模型背景与符号说明

1.1　“沙滩占位模型”背景

“沙滩占位模型”最初由社会学家霍特林在 1929 年提出，旨在描述商家在一条直街上选择商店位置的竞争行为。其假设情境是两个卖冰淇淋的小贩在一条一定长度的沙滩线上选址，试图吸引均匀分布在沙滩上的顾客。顾客倾向于选择离自己最近的小贩购买冰淇淋，由此引发两个小贩在位置选择上的战略互动。

这种模型反映了实际经济生活中的竞争行为，如零售商选址、服务站布点、政治候选人选取政策立场等。通过沙滩占位模型，可以更清晰理解竞争者在有限市场中的策略调整和均衡状态，提供了理论依据和实用方法。

1.2　“沙滩占位博弈模型”基本假设

我们先介绍博弈模型的基本假设，然后我们的各个章节额外的假设都将建立在以下假设的基础上：

- 该博弈发生在一条狭长的沙滩上，通过映射可以将其转化为 $[0,1]$ 上的简单曲线。
- 顾客到达沙滩上时的位置，将会服从某种分布，可能是离散或连续。
- 就近原则，即顾客到达沙滩后将会选择距离他最近的小贩前往买水。
- 当顾客离两个小贩距离一样是，将有 0.5 的概率随机前往其中一个
- 每个小贩都试图通过改变卖水位置获得更多的顾客从而提高收益。

1.3　博弈模型符号说明

符号	意义
$\text{Player} = \{\ \text{player1}\ ,\ \cdots\ ,\ \text{playern}\ \}$	决策人集合，共 n 人参加博弈
$\mathcal{A}_i = \{x_i \mid x_i \in [0,1]\}$	决策人 playeri 的策略空间，即选址位置 x_i
$\mathcal{A} = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \cdots, n\}$	该博弈的联合策略空间 $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$
$\pi_i(x), x \in \mathcal{A}$	决策人 playeri 在博弈中群体策略为 x 时的效用
$\alpha_i(x)$	给定 $x_j, \forall j \neq i$ 下决策人 playeri 的最优反应函数

2 两人卖水博弈模型

2.1 顾客均匀分布假设

我们首先对效用函数进行假设：效用 π 是顾客数量（归一化成分布的顾客概率密度）n 的函数 $\mu=\mu(n)=n$，为了方便在分段的形式下写出，后在不至混淆的情况下记 playeri 分段形式的效应函数为 $\pi_i(x_1,x_2)$。

2.1.1 离散均匀分布

在此这一个部分下的博弈模型，我们假设顾客在沙滩上的分布服从离散均匀分布，此时可以看做离散的原因来源于有限顾客或者相同数量的顾客成群，如果将顾客的分布归一化成密度函数的话，那么就有 $P(x=\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$，这里 n 是离散的总类数，那么进一步假设还可以根据 n 的奇偶性进行分类：

- 顾客到来服从 $[0,1]$ 上的 $n=2k+1$ 类离散均匀分布 $(k=1,2,\cdots)$
- 顾客到来服从 $[0,1]$ 上的 $n=2k$ 类离散均匀分布 $(k=1,2,\cdots)$

我们先讨论奇数类的假设，并从最简单的 $k=1$ 即三类顾客开始讨论, 然后将其推广到任意奇数情况，最后再讨论偶数类下的情形：

奇数类离散均匀分布假设:

当 $k=1$ 时，顾客只有三个位置，那么此时就顾客的选择很简单就可以描述为，左右两端的顾客一定分别选择在 $[0,1]$ 上偏左、偏右的小贩，而中间的顾客一定选择离中间最近的小贩。

- 逻辑推断/验证法

情况 1：如果 $x_1\neq x_2$, 即两个小贩位置互异

此时这两个小贩一定能各自获得最左、最右的顾客，此时他们的目标将只剩下争取中心的顾客所以离中心越来越近，直到两个小贩重合在中心，此时获得相同的收益。

情况 2：如果 $x_1=x_2$, 即两个小贩位置相同

由于沙滩的对称性，我们不妨假设 $x_1=x_2<0.5$（如果 $x_1=x_2=0.5$ 就是情况 1 最终的结果了)，此时每一个小贩收益都相同，但是每个人都有动机挪动位置离中心更靠近一点来独吞中心顾客客源，挪动将打破位置相同的平衡，我们回到了情况 1 的开始，所以最终也将汇聚到中心。

我们可以验证，此时 $(x_1,x_2)=(0.5,0.5)$ 即为纳什均衡解，因为在这个情况下，任意的 playeri（i=1 或 2）将位置 x_i 挪动到 $x_i\neq 0.5$ 时，他将一定失去中心的顾客和本来均分的来自两端的顾客，此时他只剩下离它最近那一端的顾客，而另一位小贩将收获 2 个顾客，显然任意的小贩都没有额外的动机改变 $(x_1,x_2)=(0.5,0.5)$ 的情形。

我们介绍的上述解法其实只是一种逻辑推断的方法，那么我们也可以严谨一点列出数学的表达式来确定该均衡，并可以证明纳什均衡的存在唯一性。

- 公式推导法（最优反应映射）

根据我们之前假设顾客的数量就是收益（毕竟简单情况下最多只差乘上价格的常数），那么就可以写出 player1 和 player2 各自的效用函数：

$$\pi_1(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{1}{3} & \text{if } |x_1-0.5|>|x_2-0.5| \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_1=x_2 \\ \frac{2}{3} & \text{if } |x_1-0.5|<|x_2-0.5|\end{cases} \quad \pi_2(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{1}{3} & \text{if } |x_1-0.5|<|x_2-0.5| \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_1=x_2 \\ \frac{2}{3} & \text{if } |x_1-0.5|>|x_2-0.5|\end{cases} \tag{1}$$

我们可以看到上面的公式主要是依据 $|x_1-0.5|$ 和 $|x_2-0.5|$ 大小关系划分的区域，于是我们可以相应画出区域图来展示（图1），很直观和自然的一点是两人效用的分布面积在区域上是相同，这是公平博弈的自然情况，但我们主要想说的是，在这幅图中均衡点（0.5,0.5）恰好既是正中心，还是和所有区域相邻的一点，其独特性不言而喻。如果我们考虑更现实的情况下小贩的位置是逐步根据时间变动的，那么直观上初始点落在这幅图中的任意位置，变动的情况将会形成一条曲线最终收敛到中心。

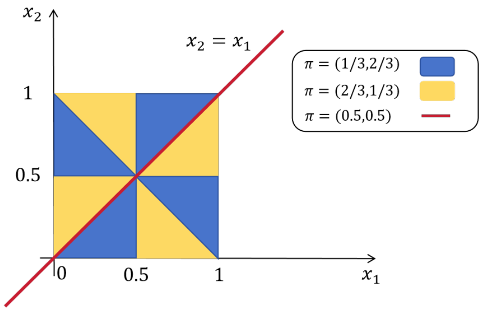

图 1: 两人博弈的效用分布 1

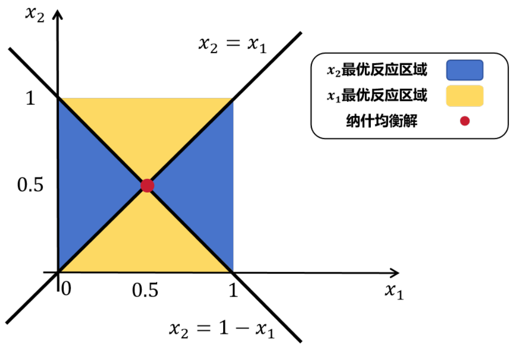

图 2: 两人博弈的最优反应函数对应区域 1

此时我们进一步写出他们各自的最优反应函数，也就是取上面效用最大的对应情况：

$$\alpha_1(x_1)=\begin{cases}x_1 & s.t.|x_1-0.5|<|x_2-0.5| \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_2=\frac{1}{2}\end{cases} \quad \alpha_2(x_2)=\begin{cases}x_2 & s.t.|x_2-0.5|<|x_1-0.5| \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_1=\frac{1}{2}\end{cases} \tag{2}$$

此时比较特殊的是这两个最优反应函数在另一方 $x_i\neq 0.5$ 时都是一个区间，我们将其简化一下就可以得到下面的式子，在直观的区域上就是（图2）：

$$\alpha_1(x_2)=\begin{cases}(x_2,1-x_2) & \text{if } x_2\in[0,\frac{1}{2}) \\ (1-x_2,x_2) & \text{if } x_2\in(\frac{1}{2},1) \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_2=\frac{1}{2}\end{cases} \quad \alpha_2(x_1)=\begin{cases}(x_1,1-x_1) & \text{if } x_1\in[0,\frac{1}{2}) \\ (1-x_1,x_1) & \text{if } x_1\in(\frac{1}{2},1) \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_1=\frac{1}{2}\end{cases} \tag{3}$$

我们略去单纯通过数学公式分区域的分类讨论取等条件，直接可以通过图 (2) 很清楚的看到，在这个博弈模型中的均衡点有且仅有一个，记为 $x^*=({x_1}^*,{x_2}^*)=(0.5,0.5)$，定义上就是 $\{x_i^*,x_j^*\}\in A_1\times A_2$ ，对每一个参与人 $playeri\in Player$ ，满足 $\pi_i(x_1^*,x_2^*)\geq\pi_i(x_1,x_2^*)$，for all $x_i\in A_i$ 。

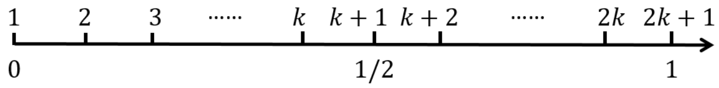

图 3: 奇数类离散均匀分布示意图

此时我们将 k 推广到一般情形 $k=1,2,3,\cdots$，先修改一下上面数学推导，也就是最优映射方法的公式，来得出一致的结论。首先我们写出顾客的离散阶梯式分布函数 $F(x)$：

$$F(x)=\frac{i+1}{2k+1}\quad \text{if } \frac{i}{2k}\leq x\leq \frac{i+1}{2k},\quad i=0,1,2,\ldots,2k-1$$

于是对应的 player1 的效用函数为:

$$\pi_1(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{if } x_1=x_2,\\ \frac{j+1}{2k+1} & \text{if } x_1<x_2 \text{ and } \frac{j}{2k}<\frac{x_1+x_2}{2}\leq\frac{j+1}{2k},\\ \frac{2k-j}{2k+1} & \text{if } x_1>x_2 \text{ and } \frac{j}{2k}<\frac{x_1+x_2}{2}\leq\frac{j+1}{2k},\end{cases}\tag{4}$$

其中 j 是使得 $\frac{j}{2k}<\frac{x_1+x_2}{2}\leq\frac{j+1}{2k}$ 成立的最大整数，此时我们想要画出效应分布的区域图就有点困难了，但是不难想象它应该像一个抽奖的转盘一样，被分割成交替更换颜色的一块一块，中心仍然为均衡点。接下来逻辑推断的方法和上面思路是一样的，两个小贩在已经收获各自两侧的顾客源基础上，都有倾向为了争取两人之间的顾客从而相互靠近，而 $n=2k+1$ 的奇数性质保证了 x=0.5 的位置一定有顾客，从而到了最后为了争取中点的顾客两个小贩一定会汇聚在唯一的均衡点上，而下面提到的 $n=2k$ 就没有这样的性质。

偶数类离散均匀分布假设:

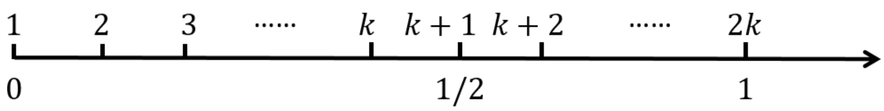

图 4: 偶数类离散均匀分布示意图

对于此时 $k=1,n=2k=2$ 的简单情形，我们一眼就可以知道在这个博弈模型下 $[0,1]$ 内任意位置都是均衡解，因为此时不管两人怎么选择位置，他们的获益也仅可能各自来源于一端。

那么在 $k=1,2,3,\cdots$ 时，player 的效用函数和上面是相似的，我们仍然只以 player1 举例:

$$\pi_1(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{if } x_1=x_2,\\ \frac{[2k\cdot\frac{x_1+x_2}{2}]+1}{2k} & \text{if } x_1<x_2,\\ \frac{2k-([2k\cdot\frac{x_1+x_2}{2}]+1)}{2k} & \text{if } x_1>x_2,\end{cases}\tag{5}$$

其中，$[\cdot]$ 为高斯取整函数，根据奇数时类似的推理，小贩将往中心汇聚，但由于非奇数类别的离散分布不存在中位数 0.5 上的顾客，此时当 $x_1,x_2\in(k-1,l)$ 时俩人利益均等，没有人有动机跳出这个位置。所以 $\mathcal{A}^*=\{x^*=(x_1{}^*,x_2{}^*)\mid x_i\in(k-1,k),i=1,2\}$ 为一组无限多的均衡解集合。特别的当 $\lim k\to\infty$ 时，这个范围越来越窄，最终仍然会交汇于 $(0.5,0.5)$。

2.1.2 连续均匀分布

上一个问题的末尾其实 $k \to \infty$ 的就会趋近于一个近似的连续分布情况。对于 $[0,1]$ 上的均匀分布，分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0, \\ x & \text{if } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

此时如果我们仍然假设顾客的分布数之间就是效用的话，每个 player 的效用函数就写起来就很容易了:

$$\pi_1(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2} & \text{if } x_1 < x_2 \\ 1-\dfrac{x_1+x_2}{2} & \text{if } x_1 > x_2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{if } x_1 = x_2 \end{cases} \quad \pi_2(x_1,x_2) = \begin{cases} 1-\dfrac{x_1+x_2}{2} & \text{if } x_1 < x_2 \\ \dfrac{x_1+x_2}{2} & \text{if } x_1 > x_2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{if } x_1 = x_2 \end{cases} \tag{6}$$

接下来就可以写出最优反应函数，以 player1 为例，当另一方位置 $x_2 = 0.5$ 时最优反应仍然为 0.5，其余时候将取 $x_1 \arg\max_{x_1}\{\max(\frac{x_1+x_2}{2}, 1-\frac{x_1+x_2}{2})\}$ 两层最大化的结果。此时由于上面效用分段，我们在选择最优效应的 x_1 时需要先确定上面第一个最大化的函数，此时是根据 x_1 与 x_2 大小关系确定的区域下的最大效用函数:

$$\max_{x_1} \pi_1(x_1,x_2) = \begin{cases} x_2 & \text{if } x_1 < x_2 \\ 1-x_2 & \text{if } x_1 > x_2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{if } x_2 = x_3 \end{cases} \tag{7}$$

我们需要注意，这里取最大的时候的 ${x_1}'$ 在严格意义上应该是:

- ${x_1}' = x_2 - \epsilon \quad \text{if } x_1 < x_2$
- ${x_1}' = x_2 + \epsilon \quad \text{if } x_1 > x_2$

其中 ϵ 为一个无穷小量，这是因为连续假设下 $x_1(>=<)x_2$ 三类区域需要严格区分边界，但是为什么我们仍然可以写成公式（7）是因为这个形式并不影响后续在极限意义下（$\epsilon \to \infty$）寻找交点也就是均衡点，所以实际上公式（7）里的 x_1 取值的意义应该是左/右极限。在后文不至混淆的情况下，我们都默认在最大化效用函数的这一步的取值都服从如上的解释。

然后我们再进行第二次最大化就得到了 player1 的最优反应函数 $\alpha_1(x_2)$，此时是根据 x_2 与 0.5 的大小关系确定的 x_1 应该选择公式 (7) 中的区域，我们在这里一并列出同样方法计算的 x_2 最优反应函数 $\alpha_2(x_1)$:

$$\alpha_1(x_2) = \begin{cases} 1-x_2 & \text{if } x_2 < \dfrac{1}{2} \\ x_2 & \text{if } x_2 > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \text{if } x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \alpha_2(x_1) = \begin{cases} 1-x_1 & \text{if } x_1 < \dfrac{1}{2} \\ x_1 & \text{if } x_1 > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \text{if } x_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{8}$$

此时从函数上直观的可以看出 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 是一个交点，我们相应画出图（5），首先我们可以更直观地看到两个最优反应曲线的交点，也就是纳什均衡解 $x^* = ({x_1}^*, {x_2}^*) = (0.5, 0.5)$ 存在且唯

一。其次，我们可以看到这幅图的曲线就是离散情况下图（2）中最优反应区域的边界，所以实际上离散的最优反应区域其实就是因为“离散”的特性从而使得最优反应的策略有了更多的自由空间，而连续下就将最优反应的“区域”收缩成了没那么自由的“曲线”。

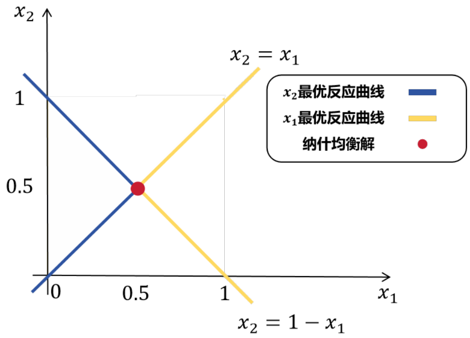

图 5: 两人博弈的最优反应曲线

2.2 一般概率密度分布

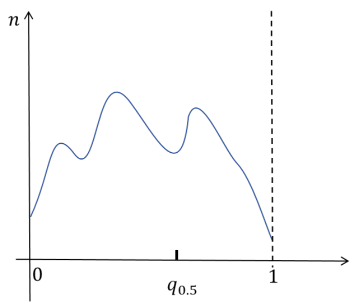

图 6: 一般概率密度函数

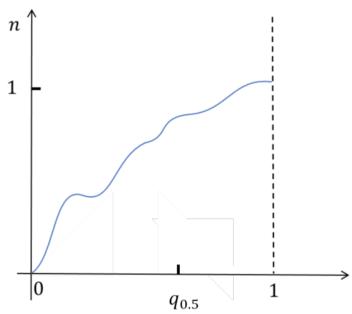

图 7: 一般分布函数

如果我们剔除均匀分布的假设,用一般性的 $p(x)$ 概率密度函数和其对应的分布函数 $F(X) = \int_0^x p(x)dx$ 来刻画顾客在沙滩 $[0,1]$ 上的分布情况，博弈的纳什均衡解会发生什么变化?

我们只需要再修改上面提到的效用函数:

$$\pi_1(x_1,x_2) = \begin{cases} \int_0^{\frac{x_1+x_2}{2}} p(x)dx & \text{if } x_1 < x_2 \\ 1 - \int_0^{\frac{x_1+x_2}{2}} p(x)dx & \text{if } x_1 > x_2 \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_1 = x_2 \end{cases} \quad \pi_2(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 - \int_0^{\frac{x_1+x_2}{2}} p(x)dx & \text{if } x_1 < x_2 \\ \int_0^{\frac{x_1+x_2}{2}} p(x)dx & \text{if } x_1 > x_2 \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_1 = x_2 \end{cases} \tag{9}$$

为了继续写出最优反应函数，以 player1 为例，为了实现 $x_1 \arg\max_{x_1}\{\max(\frac{x_1+x_2}{2}, 1-\frac{x_1+x_2}{2})\}$ 第一个最大化的函数，此时我们注意到分布函数 $F(X)$ 是单调递增的，所以仍然能通过单调性

来取到最大值，例如对 player1：

$$\max_{x_1} \pi_1(x_1,x_2) = \begin{cases} \int_0^{x_2} p(x)dx & \text{if } x_1 < x_2 \\ 1 - \int_0^{x_2} p(x)dx & \text{if } x_1 > x_2 \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_1 = x_2 \end{cases} \tag{10}$$

那么在判断下一层最大值时，也就是 x_1 对 $D_1 = \{x_1 \mid x_1 < x_2\}$ 和 $D_2 = \{x_1 \mid x_1 > x_2\}$ 区域的选取时，我们需要比较在 D_1, D_2 下效用函数 $\pi_1(x_1,x_2 \mid D_1)$ 和 $\pi_1(x_1,x_2 \mid D_2)$ 的大小。我们记这个分布的中位数为 $q_{\frac{1}{2}} \quad s.t. \int_0^{q_{\frac{1}{2}}} p(x)dx = 0.5$。于是我们就可以类似得到最优反应函数：

$$\alpha_1(x_2) = \begin{cases} 1 - \int_0^{x_2} p(x)dx & \text{if } x_2 < q_{\frac{1}{2}} \\ \int_0^{x_2} p(x)dx & \text{if } x_2 > q_{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_2 = q_{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \alpha_2(x_1) = \begin{cases} 1 - \int_0^{x_1} p(x)dx & \text{if } x_1 < q_{\frac{1}{2}} \\ \int_0^{x_1} p(x)dx & \text{if } x_1 > q_{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_1 = q_{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{11}$$

此时我们近似的画出最优反应函数的曲线示意图（8），为什么大概是这个形状的曲线？我们可以通过性质：

- $\alpha_i(x_j \mid x_j < q_{\frac{1}{2}})$ 和 $\alpha_i(x_j \mid x_j > q_{\frac{1}{2}})$ 关于 $x_j = q_{\frac{1}{2}}$ 对称
- $\alpha_i(x_j \mid x_j < q_{\frac{1}{2}})$ 关于 x_j 单调递减，$\alpha_i(x_j \mid x_j > q_{\frac{1}{2}})$ 关于 x_j 单调递增

来推断出最优反应曲线图的中心位置、曲线单调和彼此对称的性质，并且如图（8）所示，如果将坐标轴中心平移到 $(q_{\frac{1}{2}}, q_{\frac{1}{2}})$，那么两个 player 分段的最优反应曲线恰好分布在四个独立的象限并交汇于 $(q_{\frac{1}{2}}, q_{\frac{1}{2}})$，也就意味均衡解 $x^* = ({x_1}^*, {x_2}^*) = (q_{\frac{1}{2}}, q_{\frac{1}{2}})$ 存在唯一性同样成立。

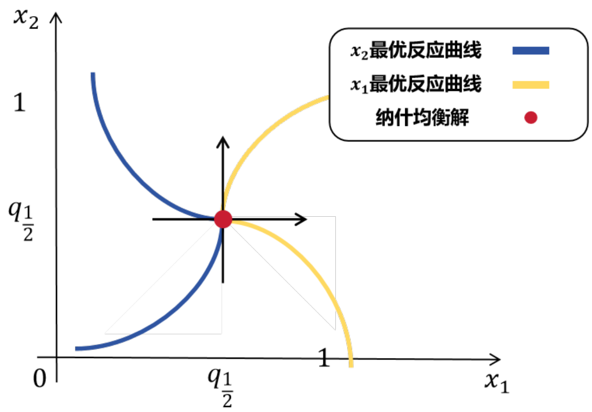

图 8: 一般分布的最优反应曲线

2.2.1 一般效用函数

我们还会进一步想知道，如果在开始不采用我们假设的“效用就是顾客数量（归一化成分布的顾客概率密度）”，而是“效用 π 是顾客数量 n 的函数 $\mu = \mu(n)$”呢？均衡还存在且唯一吗？

我们在这里引入假设：两个 player 的效用均是顾客数量的连续单增的函数 $\mu = \mu(n)$，单调递增性显然是一般情况下顾客数量越多，盈利越多来保证的。

此时对 player1 的效用函数和第一层最大值均可以写为：

$$\pi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \mu(\int_0^{\frac{x_1+x_2}{2}} p(x)dx) & \text{if } x_1 < x_2 \\ \mu(1 - \int_0^{\frac{x_1+x_2}{2}} p(x)dx) & \text{if } x_1 > x_2 \\ \mu(\frac{1}{2}) & \text{if } x_1 = x_2 \end{cases} \tag{12}$$

$$\max_{x_1} \pi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \mu(\int_0^{x_2} p(x)dx) & \text{if } x_1 < x_2 \\ \mu(1 - \int_0^{x_2} p(x)dx) & \text{if } x_1 > x_2 \\ \mu(\frac{1}{2}) & \text{if } x_1 = x_2 \end{cases}$$

在进行第二层最大化的区域选取的时候，我们为了判定 $\mu(\int_0^{x_2} p(x)dx) = \mu(1 - \int_0^{x_2} p(x)dx)$ 的边界条件，会发现由于函数 $\mu(n)$ 和 $F(x)$ 单调性的传递，仍然使得这个边界等价于判定 $\int_0^{x_2} p(x)dx = 1 - \int_0^{x_2} p(x)dx$ 的取等条件，也就是 $x_2 = q_{\frac{1}{2}}$，故而最终最优反应曲线的大致形状和交汇点和之前都是完全一样的，也就是说在满足假设 $\mu(\cdot)$ 连续、单增的效应函数条件下，此类两人博弈的均衡点一定为唯一的 $x^* = ({x_1}^*, {x_2}^*) = (q_{\frac{1}{2}}, q_{\frac{1}{2}})$。

3 m 人卖水博弈模型

我们回到连续均匀分布的假设，并尝试将参与者，也就是小贩的人数扩展到 m 的情况，我们先给出结论，在 $m = 3$ 时不存在均衡，当 $m \geq 4$ 时均存在均衡，此时均衡满足以下特性：

- player 以单人或两两聚合的方式分布在 $[0, 1]$ 之间，并平分收益
- player 位于最左/右的位置一定成对存在 player

我们说明在这个模型下，记 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{A}, x_i \in \mathcal{A}_i = \{x \mid x \in [0, 1]\}$ 为该博弈的策略空间。

3.1 3 人卖水博弈

在这个问题下，我们无法简单地写出对某一个 player 单独效用的分段函数，但我们可以根据三个 player 的相对位置来进行分类讨论。

情况 1：三个 player 位置互异

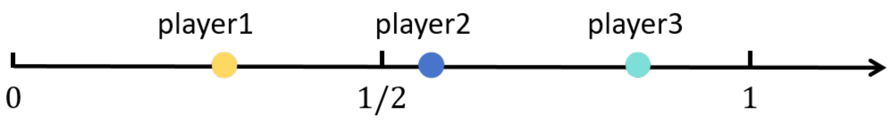

图 9: 情况 1：三个 player 位置互异

此时数学上的位置关系就是 $x_1 < x_2 < x_3$，各个玩家的效用函数可以写为：

- $\pi_1(x) = \frac{x_2+x_1}{2}$
- $\pi_2(x) = \frac{x_3-x_2}{2}$
- $\pi_3(x) = 1 - \frac{x_3+x_2}{2}$

我们验证这个静态情况（即默认其它人不动只改变自身）下每个 player 都有为了最大化效用变动位置的倾向，我们已经知道至少有一人有倾向改变的情形已经等价于不均衡，所以在这种情形下更不可能有均衡解的存在。

此时 player1 可以有三种改变位置的方式，位置变动后的 ${x_1}'$ 可以落在 $[0, x_2), (x_2, x_3), (x_3, 1]$ 中，重叠的变动我们将在**情况 2** 中讨论。

- 对于 ${x_1}' \in [0, x_2)$，显然可以通过在 ${x_1}' < x_2$ 的约束下靠近 x_2 来，使得最大效用 $\pi({x_1}', x_2, x_3) = x_2$
- 对于 ${x_1}' \in (x_2, x_3)$，效用完全由 x_3, x_3 决定，$\pi({x_1}', x_2, x_3) = \frac{x_3-x_2}{2}$
- 对于 ${x_1}' \in (x_3, 1]$，显然可以通过在 ${x_1}' > x_3$ 的约束下靠近 x_3 来，使得最大效用 $\pi({x_1}', x_2, x_3) = 1 - x_3$

对 player1/3，注意到由于 $[0, 1]$ 的对称性相对中间的 player2 在左/右时的讨论是等价（可以翻转得到）的，所以我们只需要讨论 player1 的策略。此时 player1 会选择 $\max(x_2, 1 - x_3)$ 对应的区域进行改变位置，尽管中间区域的效用 $x_3 - x_2$ 也有可能最大，但在另外两个策略统一的形成了两边都向中心逼近收缩的趋势下，中间 player 的效用完全由左右 player 位置之差决定，所以最终一定为变得越来越小，所以长远来看 player1/3 在静态下仅会变动位置到最左/右的区域。

对于 player2，理由已经在上面给出，由于效用完全受两侧 player 位置差决定，所以当中间区域足够窄时 player2 一定会选择跳出中间区域来到两侧。

综上，在**情况 1** 下不存在均衡。

情况 2：三个 player 分处两点

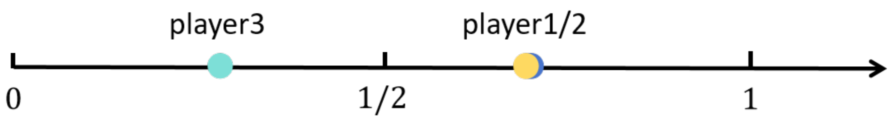

图 10: 情况 2：三个 player 分处两点

此时策略空间上就是关系 $x_1 = x_2 \neq x_3$ 我们可以将聚合的一组看做单独的一个 player 与 player3 竞争，然后再在聚合的组内进行平均，于是就可以写出此时各自的效用函数：

$$\pi_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x_3+x_1}{2} & \text{if } x_3 < x_1 = x_2 \\ 1 - \dfrac{x_3+x_1}{2} & \text{if } x_3 > x_1 = x_2 \end{cases}, \pi_1(x) = \pi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{x_3+x_1}{2}) & \text{if } x_3 < x_1 = x_2 \\ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x_3+x_1}{2} & \text{if } x_3 > x_1 = x_2 \end{cases} \tag{13}$$

并注意到由于 $[0,1]$ 的对称性聚合组的位置相对单独 player 在左/右时的讨论仍然是等价的，那么我们只需要讨论 $x_3 < x_1 = x_2$ 的情况并验证这个静态情况下每个 player 都有为了最大化效用变动位置的倾向，也就是没有均衡。

1. 此时 player3 在区域 $x_3 < x_1 = x_2$ 和 $x_3 > x_1 = x_2$ 内均有向 $x_1 = x_2$ 移动的倾向，由公式（13）分段单调性不难得到, 只要 x_3 无限接近但不与 x_1, x_2 重叠即可

2. player1/2 的处境和最优反应是一样的，同样只需要讨论 player1。

由于此时 x_1 的变动将导致 player1 脱离聚合组，破坏了此前计算效用时简单的组内均分的计算，所以我们要根据 x_1 改变后的位置 $x_1{}'$ 分类来计算改变后的效用，如图（11）所示，$x_1{}'$ 首先可以选择向左或右移动，向左移动还需要考虑是否越过 x_3 两种情况，所以 $x_1{}'$ 总共可能在 $[0, x_3), (x_3, x_1), (x_1, 1]$ 三类区间中。至于为什么没有 $x_1{}' = x_3$，这显然是又回到了和 $x_1 = x_2$ 聚合情况下，和移动前等价的情形所以没必要重复讨论。

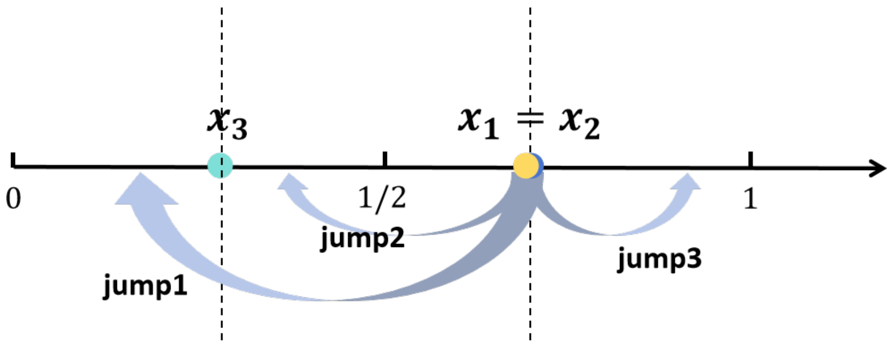

图 11: player1/2 改变位置的三种选择

此时 player1 的效用更新为:

$$\pi_1(x_1{}', x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1{}' + x_3}{2} & \text{jump1: } D_1 = \{x_1{}' \mid x_1{}' \in [0, x_3)\} \\ \dfrac{x_1 - x_3}{2} & \text{jump2: } D_2 = \{x_1{}' \mid x_1{}' \in (x_3, x_1)\} \\ 1 - \dfrac{x_1{}' + x_1}{2} & \text{jump3: } D_3 = \{x_1{}' \mid x_1{}' \in (x_1, 1]\} \end{cases} \tag{14}$$

证明：一定存在 jumpi$(i = 1,2,3)$，使得 $\pi_1(x_1{}', x_2, x_3) > \pi_1(x_1, x_2, x_3 \mid x_3 < x_1 = x_2)$

反证：

若不存在 jumpi$(i = 1,2,3)$，使得 $\pi_1(x_1{}', x_2, x_3) > \pi_1(x_1, x_2, x_3 \mid x_3 < x_1 = x_2)$，那么等价于使得上式成立的 $x_1{}'$ 均不在 jumpi 对应的区域 $D_i(i = 1,2,3)$ 中。

当 $\pi_1(x_1{}', x_2, x_3) > \pi_1(x_1, x_2, x_3 \mid x_3 < x_1 = x_2)$ 成立时，有:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1{}' + x_3}{2} > \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{x_3 + x_1}{2}) \\ \dfrac{x_1 - x_3}{2} > \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{x_3 + x_1}{2}) \\ 1 - \dfrac{x_1{}' + x_1}{2} > \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{x_3 + x_1}{2}) \end{cases} \implies \begin{cases} x_1{}' > 1 - \dfrac{x_1 + 3x_3}{2} \\ 3x_1 - x_3 > 2 \\ x_1{}' < 1 - \dfrac{x_1 - x_3}{2} \end{cases} \tag{15}$$

那么上式得到的范围不在 D_1, D_2, D_3 中，于是就有相应条件：

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{x_1 + 3x_3}{2} > x_3 \\ x_1 > \dfrac{2 + x_3}{3} \\ 1 - \dfrac{x_1 - x_3}{2} < x_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 > 2 - 3x_3 \\ x_1 > \dfrac{2 + x_3}{3} \\ x_1 > \dfrac{2 + x_3}{3} \end{cases} \tag{16}$$

此时若以 x_1, x_3 分别为纵、横轴就可以画出区域的范围如图（12），其中最低点也即俩直线交点为 $(\frac{1}{3}, 1)$，但由于 $x_i \in [0,1]$ 故矛盾，即一定存在 jumpi$(i = 1,2,3)$，使得 $\pi_1(x_1{'}, x_2, x_3) > \pi_1(x_1, x_2, x_3 \mid x_3 < x_1 = x_2)$

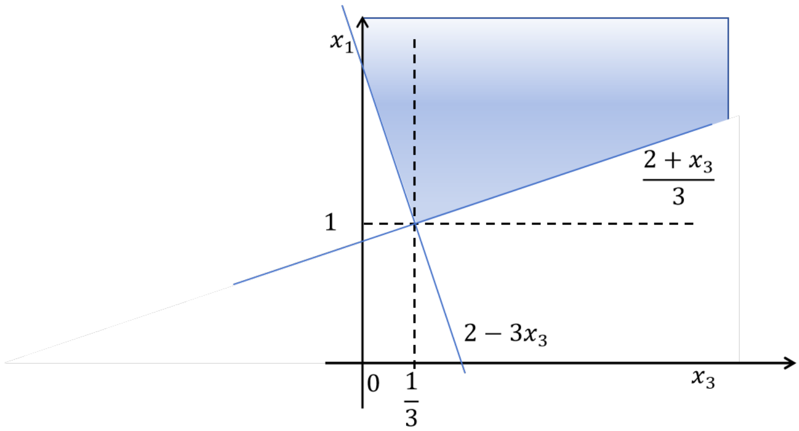

图 12: 反证条件的范围

情况 3：三个 player 位置重叠

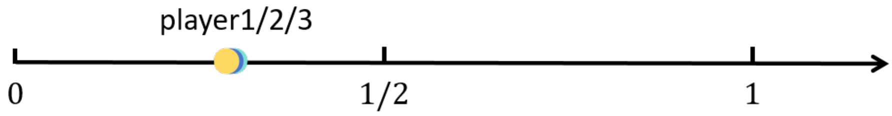

图 13: 情况 3：三个 player 位置重合

此时 $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$，在任意一个 player 变动后就回到了**情况 2**，所以我们只需要比较**情况 3** 一位 player 变动位置后和**情况 2** 中单独的一位 player 的最大效用之间的关系，就可以判断在情况下是否有均衡。

因为公式（13）中，单独的 player 效用的函数为

$$\pi_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x_3 + x_1}{2} & \text{if } x_3 < x_1 = x_2 \\ 1 - \dfrac{x_3 + x_1}{2} & \text{if } x_3 > x_1 = x_2 \end{cases}$$

于是我们有

$$\max(\pi_3(x_1{'}, x_2, x_3)) = \max(\frac{x_3 + x_1}{2}, 1 - \frac{x_3 + x_1}{2}) > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \pi_3(x_1, x_2, x_3)$$

即每一位 player 都有倾向改变位置获得**情况 2** 下的最大效用。

总结以上的**情况 1**，**情况 2**，**情况 3**，我们可以得出结论，3 人卖水博弈的问题下不存在纳什均衡解。

3.2 4 人卖水博弈

在 player 分散四点的情况中，最边缘两侧位置的 player 分别面临和 3 人卖水**情况 1** 下最边缘两侧位置的 player 相同的境地，易知情况不均衡。

若 player 以（1,3）和（1,1,2）方式聚合的分布情况，会导致至少有一个 player 单独位于边缘两侧，此时可类比前文两人、三人博弈的情形，易知此情况同样不均衡。这已说明在此类模型任意的 m 个 player 情形下，不存在最左或右侧含有一个单独的 player 的均衡，也就是均衡的必要条件为“player 位于最左/右的位置一定存在成对的 player”

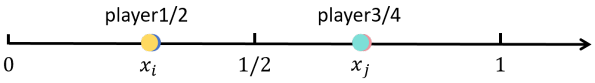

图 14: 4 人卖水博弈的两两聚合位置

我们对 player 以（2,2）两两聚合的情况求解博弈的均衡，此时用 x_i, x_j 来指代左/右聚合组的位置，此时效用函数为：

- $\pi_1(x) = \pi_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i+x_j}{2}$
- $\pi_3(x) = \pi_4(x) = \frac{1}{2}\dot{(}1 - \frac{x_i+x_j}{2})$

由于对称性我们仍然只需要讨论 x_1，根据定义，对任意变动后的位置 ${x_1}'$，均衡解 ${x_1}^*$ 满足 $\pi_1({x_1}^*, {x_2}^*, {x_3}^*, {x_4}^*) \geq \pi_1({x_1}', {x_2}^*, {x_3}^*, {x_4}^*)$，对于变动后的最优效用：

$$\max_{{x_1}'} \pi_1({x_1}', {x_2}^*, {x_3}^*, {x_4}^*) = \begin{cases} x_i & D_1 = \{{x_1}' \mid {x_1}' \in [0, x_i)\} \\ \dfrac{x_j - x_i}{2} & D_2 = \{{x_1}' \mid {x_1}' \in (x_i, x_j)\} \\ 1 - x_j & D_3 = \{{x_1}' \mid {x_1}' \in (x_j, 1]\} \end{cases} \tag{17}$$

均衡解满足的条件为：

$$\begin{cases} \dfrac{x_i + x_j}{4} \geq \dfrac{x_j - x_i}{2} \\ \dfrac{x_i + x_j}{4} \geq x_i \\ \dfrac{x_i + x_j}{4} \geq 1 - x_j \end{cases} \tag{18}$$

于是可以解得 $x_i = \frac{1}{3}x_j$，根据对称也可以列出式子 $1 - x_j = \frac{1}{3}(1 - x_i)$，此时联立求解就得到纳什均衡解为 $\{x_1^* = \frac{1}{4}, x_2^* = \frac{1}{4}, x_3^* = \frac{3}{4}, x_4^* = \frac{3}{4}\}$

综上即证明四个 player 竞争时，存在唯一均衡为销售者以两两聚合的形态分布在 $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ 两点上，并平分收益。

3.3 $m \geq 5$ 时的博弈情形

此时的讨论就相对复杂，由于我们已经证明了两侧不可能有孤立的 player 存在，所以在 $m = 5$ 时中间必有一个孤立的 player，此时 5 位 player 以（2,1,2）的形式聚合在点 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6})$ 为一个纳什均衡解。验证它是容易的：

我们知道此时 5 位玩家的效用依次为：

- $\pi_1 = \pi_2 = \pi_4 = \pi_5 = \frac{1}{6}$
- $\pi_3 = \frac{1}{3}$

于是对于中间的 player3，其变动位置后的最佳位置仍然在 $(\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ 之间，效用不变。对于边缘的 player，由于此时 $[0,1]$ 被划分为 6 个部分，所以最佳的变动的位置同样在 $(\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ 之间，此时效用均仍然为 $\frac{1}{6}$，再由对称性易知该情况均衡。当 $m \geq 6$ 此时均衡解未必唯一，但当 m 为偶数时一定存在一种均衡为 player 以两两聚合的形态分布在 $\frac{1}{m}, \frac{3}{n}, \frac{5}{m}, \cdots, 1 - \frac{1}{m}$，此时仍然只需要根据对称性和定义验证对于每位 player 效用的最大化即可。

4 总结

通过对沙滩占位博弈模型的详细研究，我们分析了不同顾客分布假设下两人及多人的纳什均衡情况。在顾客均匀分布的情况下，两人博弈的纳什均衡是唯一且稳定的，即两个小贩最终会选择沙滩的中点位置（0.5, 0.5）。对于一般概率密度分布，我们证明了纳什均衡的存在性和唯一性，均衡点推广为一般分布的中位数位置。扩展到多人的情况下，当参与者人数为 3 时，不存在稳定的纳什均衡解，而当人数大于等于 6 时，存在多种可能的均衡分布形式。