Matemática Discreta

Permutações e Combinações

Permutação: Quantas listas podem ser feitas utilizando-se k objetos dentre n (ordem importa).

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinação: Quantos conjuntos de k elementos dentre n (n escolhe k) (ordem não importa).

$$\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Listas Circulares: Primeira e última posição consideradas consecutivas. *Problema*: Quantas formas para acomodar 8 pessoas em uma mesa circular de 5 lugares? *Ideia*: Escolhe as 5 pessoas que irão se sentar, fixa uma delas e distribui as outras.

$$\binom{8}{5} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{8}{5} 4!$$

Repetições: Contagens onde alguns elementos se repetem. *Problema*: Temos n bolinhas brancas e k bolinhas pretas. De quantas formas podemos colocá-las em fila? *Ideia*: Podemos pensar que existem $n+k$ casas no total. Agora, dentre essas casas temos que escolher quais delas serão para bolinhas pretas.

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!}$$

Estrelas e Barras: Separar n elementos em k grupos. *Problema*: Quantas formas de separar n bolinhas em k grupos onde cada grupo possui pelo menos uma bolinha? *Ideia*: Note que podemos representar uma bolinha como uma estrela e a divisão entre dois grupos como uma barra. A resposta será a quantidade de formas de escolher $k-1$ (irá dividir as bolinhas em k grupos) dentre $n-1$ possíveis localizações para pôr uma barra (entre duas estrelas).

$$*|**|** \cdots **|* = \binom{n-1}{k-1}$$

Problema: Mesma coisa do problema anterior, só que um grupo pode ter 0 bolinhas. *Ideia*: Agora, podemos colocar 2 barras em posições consecutivas, no começo e/ou no final da sequência. Basta então escolher $k-1$ (número de barras) posições dentre $n+k-1$ (espaço total para símbolos, nº estrelas + nº barras).

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

Funções

Definições: Uma associação dentro da matemática pode ser representada por uma função. Em $f: A \to B$, A é o domínio, B é o contradomínio, o subconjunto de B "atingido" por f é a imagem. Se $\mathrm{Im}(f) = B$, f é sobrejetora. Se dados $a \neq b$, temos que $f(a) \neq f(b)$, f é injetora. Se f é injetora e sobrejetora, f é bijetora.

Exemplo: *Problema*: Em uma república com 11 pessoas e uma geladeira, os moradores querem garantir que ela possa ser aberta apenas quando 6 ou mais estiverem presentes. Qual é o número mínimo de cadeados e chaves necessários? *Ideia*: Considere a função $c : G \to C$, onde G é o conjunto de grupos de 5 moradores e C o conjunto de cadeados. Para cada $g \in G$, $c(g)$ é o cadeado que o grupo g não consegue abrir, mas qualquer sexta pessoa pode. A função c é injetora, pois, para grupos distintos $g_1 \neq g_2$, temos $c(g_1) \neq c(g_2)$, já que há pelos menos uma pessoa em g_2 que não está em g_1 e pode abrir $c(g_1)$, e vice-versa. Assim, o número de cadeados é $|G| = \binom{11}{5}$. Cada morador deve abrir todos os cadeados não correspondentes aos grupos de que faz parte, resultando em $\binom{10}{5}$ chaves por morador.

Princípio da inclusão-exclusão: Notação: $N(P_i)$ é a quantidade de objetos que não satisfazem a propriedade P_i. $S(P_i)$ é a quantidade de elementos que satisfazem P_i. T é a quantidade total de objetos. R é um conjunto de propriedades. *Ideia*: Pega todos os objetos, desconta os que satisfazem cada propriedade, mas aí você descontou mais de uma vez os que satisfazem mais de uma propriedade, então adicionamos os que satisfazem mais de uma propriedade e assim sucessivamente.

$$N(P_1, P_2) = T - S(P_1) - S(P_2) + S(P_1, P_2)$$
$$N(R) = \sum_{X \subset R} (-1)^{|X|} S(X)$$

Problema: Uma pessoa almoçou 34 vezes, sempre acompanhada por um grupo de 4 amigos. Ela almoçou com cada amigo individualmente 20 vezes, com cada dupla 11 vezes, com cada trio 5 vezes e com todos os quatro uma única vez. Quantas vezes ela almoçou sozinha? A dificuldade está na contagem repetida: um almoço com 4 amigos contribui para as contagens de cada indivíduo, trio e dupla. Usaremos o princípio da inclusão-exclusão para ajustar essa superposição. Denotando almoçar com o amigo x de P_x. Temos:

$$S(P_a) = S(P_b) = \ldots = 20$$
$$S(P_aP_b) = S(P_cP_d) = \ldots = 11$$
$$S(P_aP_bP_c) = S(P_aP_bP_d) = \ldots = 5$$
$$S(P_aP_bP_cP_d) = 1$$

Aplicando inclusão-exclusão:

$$\sum_{S \subset \{a,b,c,d\}} (-1)^{|S|} N(S) = 34 - \binom{4}{1} 20 + \binom{4}{2} 11 - \binom{4}{3} 5 + \binom{4}{4} 1 = 1$$

Contagem funções sobrejetoras: Seja $S(n,m)$ a quantidade de funções da forma $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., m\}$ sobrejetoras.

$$S(n,m) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

Problema: Um avô tem 15 bilhetes de loteria e quer distribuí-los entre seus 4 netos, cada um recebendo pelo menos um bilhete. De quantas formas ele pode fazer isso? *Ideia*: Basta pensarmos em uma função $f: X \to Y$, onde $f(x) = y$ quer dizer que o bilhete x vai para o neto y. Agora, estamos interessados justamente na quantidade de possíveis funções f sobrejetoras, já que todos os netos devem ficar com pelo menos um bilhete.

$$S(15,4) = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{4}{k} (4-k)^{15} = 1.016.542.800$$

Contagem de desarranjos: Uma função $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ tal que $f(i) \neq i$ é um desarranjo. Seja d_n a quantidade de desarranjos de n elementos.

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

Problema: Em um sorteio válido de amigo secreto, buscamos distribuir o nome de cada pessoa entre um grupo sem que ninguém pegue o próprio nome. Qual é a chance de um sorteio qualquer ser válido? *Ideia*: Podemos pensar em um sorteio válido como uma função injetora $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ tal que

$f(n) \neq n$ (desarranjo). Para encontrar a chance de um determinado sorteio ser válido, basta dividir a quantidade casos válidos (d_n) pelo total de casos possíveis ($n!$).

$$P = \frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!}{n!}$$

Quantidade de subconjuntos: Seja A e B dois conjuntos finitos. A quantidade de funções $f : A \to B$ é dada por $|B|^{|A|}$. Podemos obter a quantidade de subconjuntos de A contando todas as funções da forma $f : A \to \{0,1\}$, onde para cada subconjunto S de A existe somente uma função e vice versa (função característica de S), logo o número de subconjuntos de A será $2^{|A|}$ (ou um elemento está no subconjunto, ou não está).

Indução

Motivação: Provar algo que vale para todos os naturais. Primeiro prove que a propriedade vale para 0. Depois, prove que se a propriedade vale para algum $n \in \mathbb{N}$ ela precisa valer para $n+1$. Com essas verificações, a propriedade está provada.
Exemplos:
Problema: Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. *Ideia*: Verificamos a igualdade para $n = 0$: $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$. Agora, supomos que vale para n (vale $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$) e mostramos que se vale para n, vale para para $n+1$.

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n) + 2^{n+1} \\ &\overset{\text{HI}}{=} (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

Problema: Se $n \geq 5$, então $4n < 2^n$. *Ideia*: Verificamos para $n = 5$: $4 \cdot 5 = 20 < 32 = 2^5$. Supomos que vale para n (vale $4n < 2^n$) e mostramos que se vale para n, vale para $n+1$.

$$4(n+1) = 4n + 4 \overset{\text{HI}}{<} 2^n + 4 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Aplicações:
Problema: Há uma pilha com n moedas. Duas pessoas se alternam tirando uma ou duas moedas da pilha, ganhando quem tirar a última moeda. Há uma estratégia vencedora? *Ideia*: n sempre será da forma $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$. Vamos para os casos onde n é da forma $3k+1$ ou $3k+2$. Quando $k = 0$, ou $n = 1$ ou $n = 2$, onde o primeiro a jogar retira todas as moedas e ganha o jogo. Passo de indução: o primeiro jogador sabe ganhar quando $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$. Agora, vamos supor que o jogo começa com n da forma $3(k+1)+1 = 3k+4$ ou $3(k+1)+2 = 3k+5$. O primeiro jogador pode deixar $3k+3$ moedas na pilha retirando uma ou duas moedas, respectivamente. Assim, o segundo jogador só poderá retirar uma moeda, deixando $3k+2$, ou duas moedas, deixando $3k+1$, jogos que, por indução, a primeira sabe vencer. Para o caso onde n é da forma $3k$, note que independente da jogada do primeiro jogador, o segundo jogador ficará com um jogo da forma $3k+1$ ou $3k+2$. Assim, ele poderá copiar a estratégia vencedora anteriormente discutida e, portanto, ganhar o jogo.
Problema: Suponha que só existam moedas de 5 e 7 centavos. Mostre que é possível montar qualquer valor $n \geq 24$ utilizando somente essas moedas. *Ideia*: Vamos construir soluções para n de 24 a 28. $24 = 5+5+7+7$, $25 = 5+5+5+5+5$, $26 = 5+7+7+7$, $27 = 5+5+5+5+7$, $28 = 7+7+7+7$. Agora, para qualquer $n \geq 29$, sabemos, por indução, que existe uma solução para $n-5$, bastando acrescentar uma moeda de 5 para chegar em n.
Problema: Um trómino é tipo um dominó com três quadrados em formato de L. Suponha que temos um tabuleiro $2^n \times 2^n$. Prove que se removermos qualquer casa do tabuleiro, é possível cobrir perfeitamente o tabuleiro com trominós. *Ideia*: Para $n = 1$, o tabuleiro vai ser 2×2 e, ao retirar uma casa, temos exatamente o formato de um trominó. Por indução, suponha que o tabuleiro seja $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. Divida esse tabuleiro em 4 quadrantes de lado 2^n. A casa retirada vai estar em um desses 4 quadrantes. Coloque um trominó bem no centro do tabuleiro, cobrindo 3 casas nos quadrantes que não tiveram nenhuma casa removida. Agora, pensando nas casas cobertas pelo trominó como casas removidas, temos 4 tabuleiros $2^n \times 2^n$ com uma casa removida cada, onde, pela hipótese de indução, há uma forma de cobrir completamente, usando trominós, cada um desses quadrantes.

Ideias Extras

Princípio da casa dos pombos: Se n pombos devem ser postos em m casas e se $n > m$, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo. *Fato*: Em São Carlos há 250 mil habitantes e uma pessoa não tem mais que 200 mil fios de cabelo na cabeça. Logo, pelo menos dois habitantes de São Carlos tem a mesma quantidade de fios de cabelo.
Lemas de Kaplansky:
Problema: Quantos subconjuntos de 3 elementos do conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ podemos formar sem que haja números consecutivos? *Ideia*: Vamos denotar um subconjunto de A com símbolos $-$ e $+$, onde $-$ significa que um elemento não está no subconjunto e $+$ significa que ele está (ex: $\{2,4,5\}$ seria representado por $-+-++---$). Agora podemos disponibilizar os $8-3=5$ -'s na mesa, ficando com $-----$. Para obter nossa resposta, basta agora distribuir os nossos 3 +'s entre os 6 espaços entre -'s (contando as pontas). Isso nos resultará $\binom{6}{3}$. A generalização desse problema, onde o tamanho dos subconjuntos é k e o tamanho do conjunto é n, ficará $\binom{n-k+1}{k}$ (primeiro lema).
Problema: Numa mesa circular estão sentadas n pessoas. De quantas maneiras podemos escolher k delas de forma que nenhuma esteja em lugares adjacentes. *Ideia*: O segundo lema sai justamente utilizando o primeiro lema para calcular os casos em que o 1 está ou não está presente. Daí tiramos a resposta $\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$ (segundo lema).

Lista 1 - alguns problemas

Problema: Quantos números inteiros de 20 dígitos sem dois dígitos consecutivos iguais? *Ideia*: O primeiro dígito pode ser qualquer um de 1 a 9. Do segundo dígito em diante, não poderemos utilizar o dígito anterior, mas poderemos utilizar o 0. Logo, a resposta ficará 9^{20}.
Problema: Uma pessoa tem uma pilha de 10 fichas distintas e divide essa pilha em 2 novas pilhas (podem ter tamanhos diferentes), depois escolhe outra pilha e divide ela em duas outras pilhas, repetindo o processo até que todas as pilhas só tenham uma ficha. De quantas maneiras ele pode fazer isso? *Ideia*: Vamos começar pelo final, onde temos 10 pilhas com uma ficha cada. Cada uma dessas pilhas foi formada pela divisão de uma pilha maior que continha duas dessas pilhas. Ou seja, podemos reconstruir esse processo escolhendo 2 filas para "mesclar" até que só reste uma fila. Então escolhemos 2 das 10 filas para mesclar, reduzindo o número para 9 filas de onde vamos escolher 2 filas para mesclar e assim por diante. Obtemos então a resposta $\binom{10}{2} \cdot \binom{9}{2} \cdots \binom{2}{2}$.
Problema: Considere um tabuleiro 8x8. Temos 8 torres, 4 brancas e 4 pretas (torres de mesma cor se atacam). De quantas formas podemos distribuir essas torres no tabuleiro sem que nenhuma se ataque? *Ideia*: Note que para cada linha do tabuleiro, vamos ter que escolher uma coluna, não escolhida anteriormente, para colocar uma torre, assim, nos asseguramos que nenhuma vai atacar nenhuma. Primeiro escolhemos 4 das 8 linhas para colocar torres brancas, assim fixando também as linhas com torres pretas. Agora, para a primeira linha temos 8 colunas válidas, para a segunda temos 7, até que chegamos na última fila, com só uma coluna válida. Juntando tudo, obtemos a resposta $\binom{8}{4}8! = \frac{8!8!}{4!4!}$.