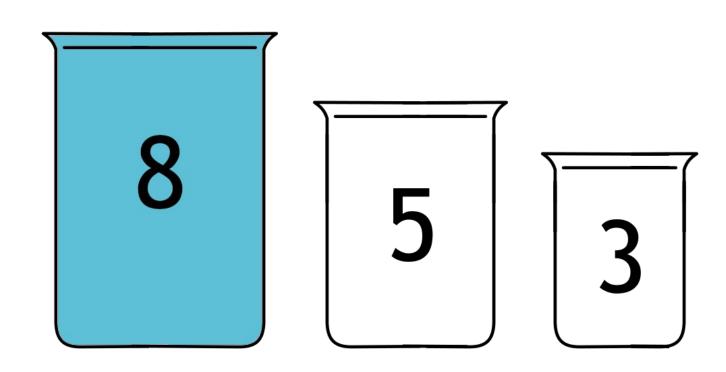
2. ESTRATEGIAS DE BÚSQUEDA NO INFORMADAS

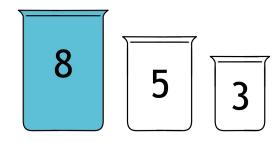
IA 3.2 - Programación III

1° C - 2023

Lic. Mauro Lucci

Problema de vertido de agua





Objetivo. Lograr que uno de los recipientes contenga exactamente 4 litros de agua, en el menor número de vertidos.

Reglas.

- Los recipientes no tienen marcas.
- 2. Se puede verter agua de un recipiente a otro, hasta que uno se vacíe o el otro se llene, lo que ocurra primero.
- 3. Se puede verter todo el contenido de un recipiente al piso.



De 1 a 2 Vaciar 2

Ejercicio de repaso

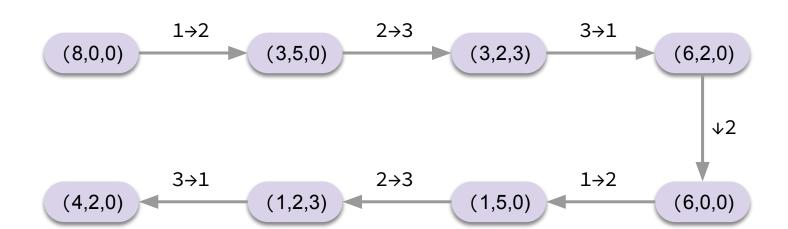
- 1. Dar una formulación para este problema.
- 2. Encontrar una solución.

Respuesta – 1. Propuesta de formulación

- **Estados.** Tuplas (x_1, x_2, x_3) con $x_1 \in \{0, ..., 8\}, x_2 \in \{0, ..., 5\}, x_3 \in \{0, ..., 5\}$ $\{0,\ldots,3\}$. Hay 9*6*4 = 216 estados.
- **Estado inicial.** (8,0,0)
- Acciones.
 - $i \rightarrow j$: verter del recipiente i al j (1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2).
 - \circ \downarrow i: vaciar el recipiente i $(\downarrow 1, \downarrow 2, \downarrow 3)$.
- Modelo transicional.
 - i⇒j: el recipiente i tendrá xi-d y el j tendrá xj+d, donde d es el mínimo entre xi y lo que le falta a j para llenarse.
 - ↓i: el recipiente i tendrá 0.
- Test objetivo. $x_1 = 4 \circ x_2 = 4$
- Costo de camino. El costo individual es 1, luego el costo de camino es el número de vertidos realizados.



Respuesta – 2. Una solución



Repaso

El procedimiento básico para buscar una solución de un problema ya formulado es:

- 1. Crear la raíz con el estado inicial y agregarlo a la frontera.
- 2. Mientras la frontera sea no-vacía, elegir un nodo y removerlo.
- 3. Si el nodo contiene un estado objetivo, retornar la solución.
- 4. Sino, expandir el nodo y agregar los hijos generados a la frontera.

Vimos dos algoritmos generales de búsqueda.

- TREE-SEARCH. Considera todos los posibles caminos a una solución.
- GRAPH-SEARCH. Evita caminos redundantes, pero necesita más memoria.

Un nodo es una estructura de datos con: un estado, un nodo padre, un costo de camino, una acción y opcionalmente una profundidad.



¿Cómo elegimos de la frontera el próximo nodo a expandir?

Veremos diferentes **estrategias de búsqueda no informadas:** sólo tienen acceso a la definición del problema.

Compararemos su completitud, optimalidad, tiempo y memoria.

Búsqueda primero en anchura

Breadth-First Search (BFS)

Los nodos del árbol de búsqueda se expanden por niveles.

Primero se expande la raíz, luego los hijos de la raíz, luego los hijos de los hijos de los hijos de la raíz, y así hasta encontrar un estado objetivo.



Nodo Frontera antes de Frontera después de Ν° expandir actual expandir 0 {A} 2 3 4 5

A: (8,0,0)



Nodo Frontera antes de Frontera después de Ν° expandir actual expandir 0 {A} {} Α 2 3 4 5

A: (8,0,0)

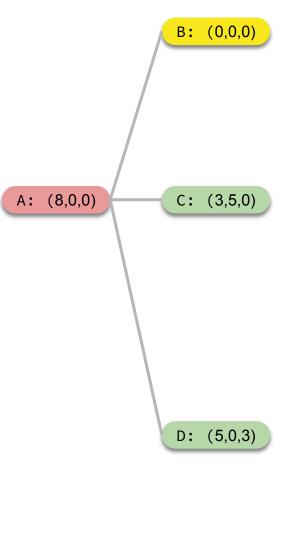


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	{}	{B,C,D}
2			
3			
4			
5			

B: (0,0,0) A: (8,0,0) C: (3,5,0) D: (5,0,3)



N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	0	{B,C,D}
2	В	{C,D}	
3			
4			
5			





N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	0	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3			
4			
5			

B: (0,0,0) A: (8,0,0) C: (3,5,0) D: (5,0,3)

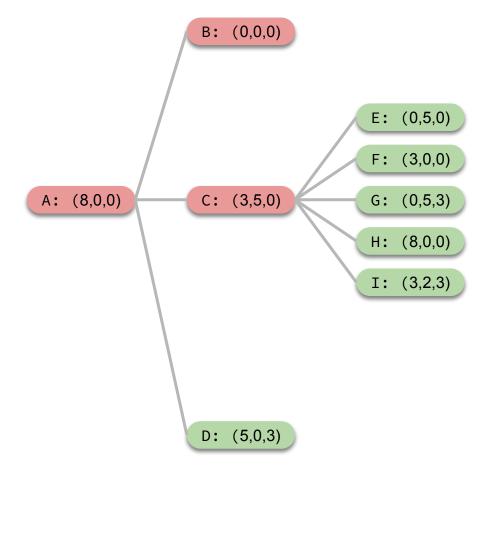


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	0	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	
4			
5			

B: (0,0,0) A: (8,0,0) C: (3,5,0) D: (5,0,3)

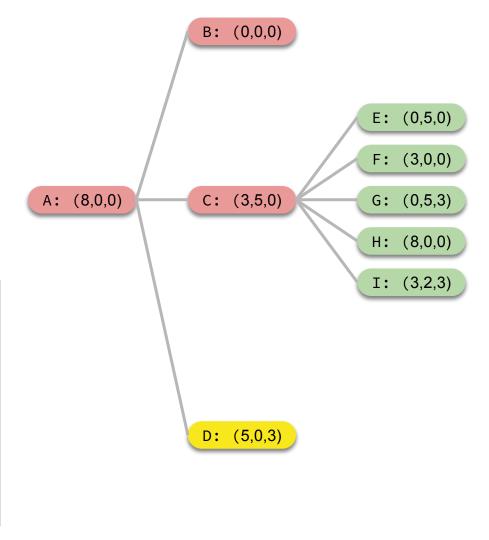


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	_	{A}	-
1	A	{}	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	{D,E,F,G,H,I}
4			
5			



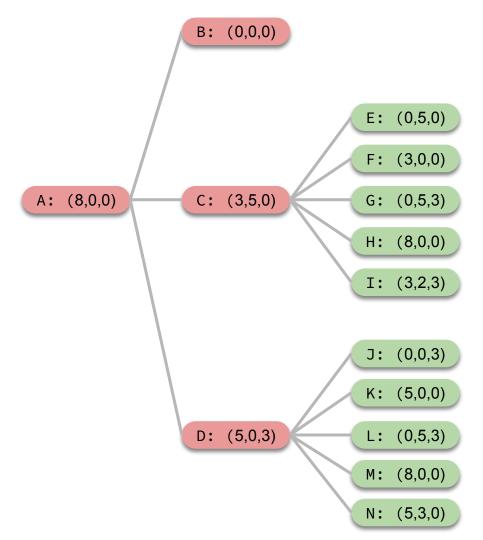


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	{}	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	{D,E,F,G,H,I}
4	D	{E,F,G,H,I}	
5			



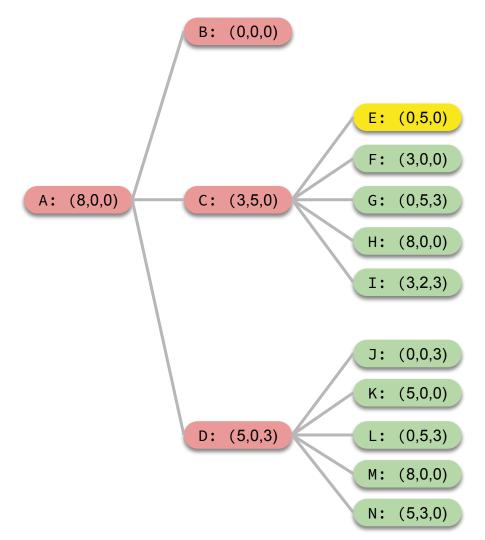


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	{}	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	{D,E,F,G,H,I}
4	D	{E,F,G,H,I}	{E,F,G,H,I,J,K,L,M,N}
5			





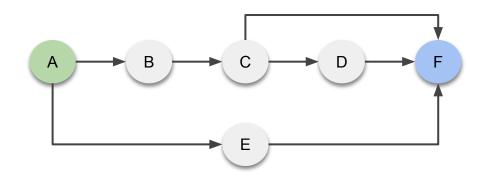
Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	0	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	{D,E,F,G,H,I}
4	D	{E,F,G,H,I}	{E,F,G,H,I,J,K,L,M,N}
5	E	{F,G,H,I,J,K,L,M,N}	CONTINÚA





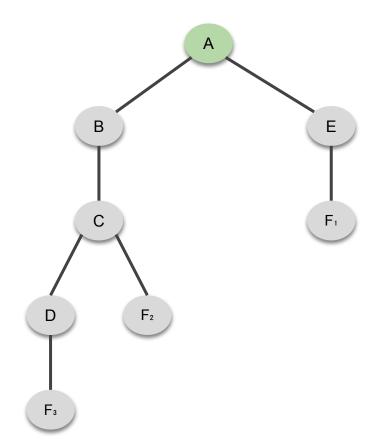
Sea un problema descrito por el siguiente espacio de estados, donde A es el estado inicial y F es el estado objetivo.

Resolverlo con el algoritmo general de búsqueda en árboles con la estrategia BFS.



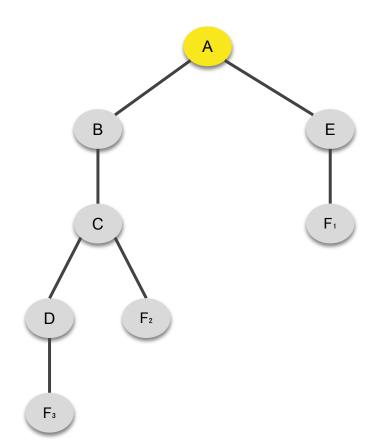


Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1			
2			
3			
4			
5			



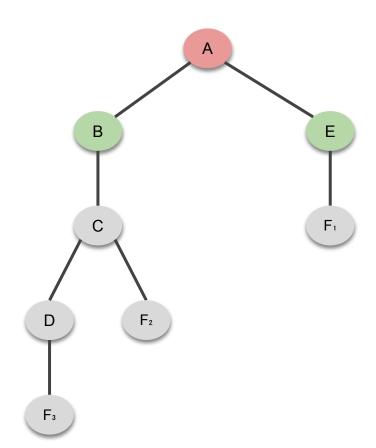


Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	{}	
2			
3			
4			
5			





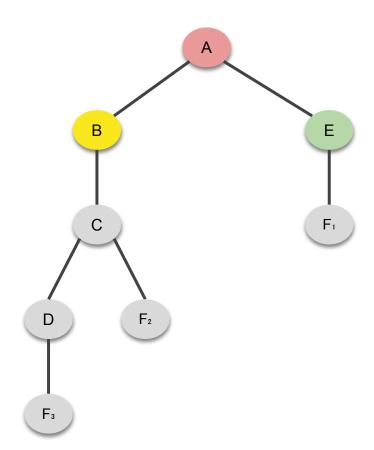
Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	0	{B,E}
2			
3			
4			
5			





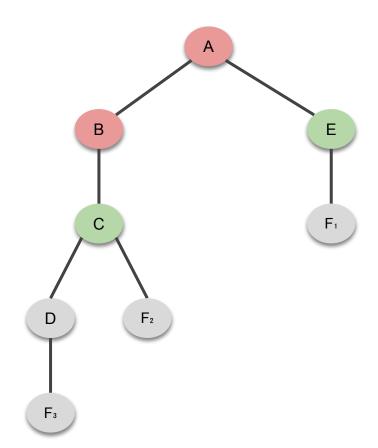
Respuesta

Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	8	{B,E}
2	В	{ E}	
3			
4			
5			





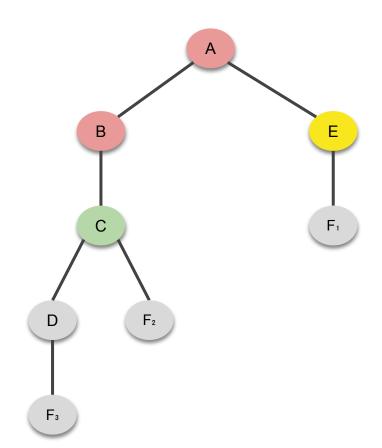
Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	8	{B,E}
2	В	{E}	{E,C}
3			
4			
5			





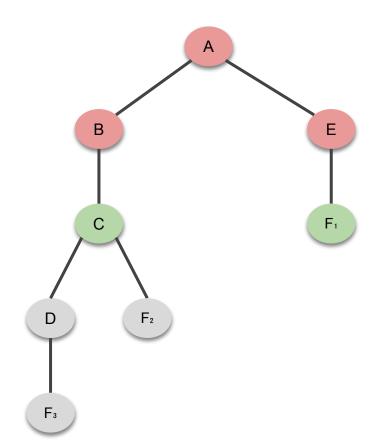
Respuesta

Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	0	{B,E}
2	В	{ E }	{E,C}
3	E	{C}	
4			
5			





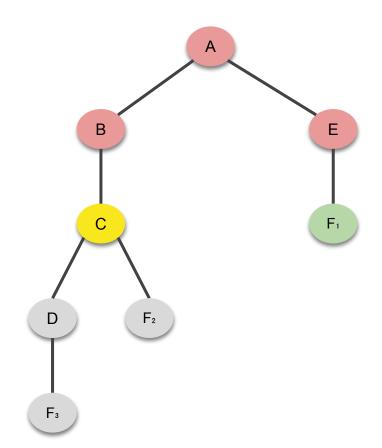
Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	{}	{B,E}
2	В	{ E}	{E,C}
3	E	{C}	{C,F ₁ }
4			
5			





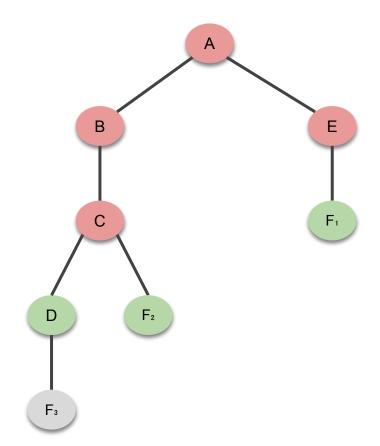
Respuesta

Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	8	{B,E}
2	В	{ E }	{E,C}
3	E	{C}	{C,F ₁ }
4	С	{F₁}	
5			



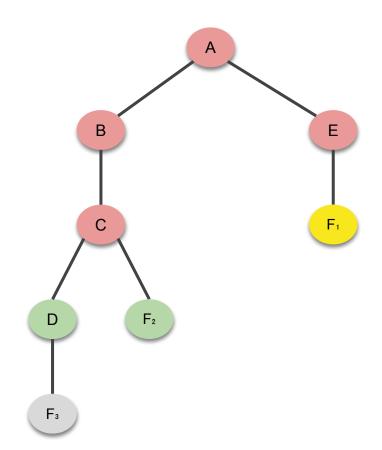


Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	{}	{B,E}
2	В	{E}	{E,C}
3	E	{C}	{C,F ₁ }
4	С	{F₁}	{F ₁ ,D,F ₂ }
5			





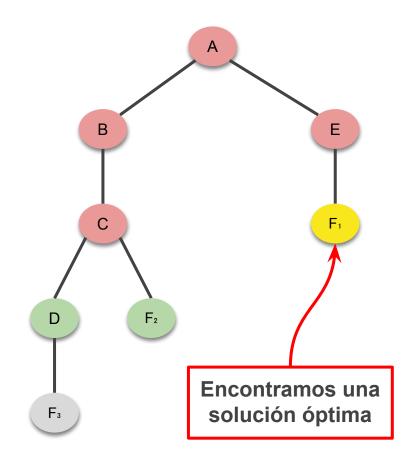
Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	0	{B,E}
2	В	{E}	{E,C}
3	E	{C}	{C,F ₁ }
4	С	{F₁}	$\{F_1,D,F_2\}$
5	{F₁}	{D,F ₂ }	FIN





Respuesta

Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	{}	{B,E}
2	В	{E}	{E,C}
3	E	{C}	{C,F₁}
4	С	{F₁}	$\{F_1,D,F_2\}$
5	{F₁}	{D,F ₂ }	FIN



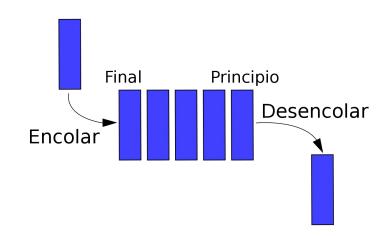
Implementación de BFS

• ¿Cómo elegimos de la frontera el próximo nodo a expandir? El de menor profundidad.

• ¿Cómo lo logramos?

Usando el TAD cola para la frontera.

Cola — El primero en entrar es el primero en salir



Los nuevos nodos (que están a mayor profundidad que sus padres) van al final de la cola, y los nodos más viejos (que están a menor profundidad que los nuevos nodos) quedan adelante y se expanden primero.

Algoritmo BFS en árboles

```
1 function TREE-BFS(problema) return solución o fallo
     raiz \leftarrow Nodo(estado = problema.estado-inicial, costo = 0)
     if (problema.test-objetivo(raíz.estado)) then return solución(raíz)
3
     frontera ← Cola()
5
     frontera.encolar(raíz)
     do
6
          if (frontera.vacía()) then return fallo
          nodo ← frontera.desencolar()
8
          forall acción in problema.acciones(nodo.estado) do
               hijo ← Nodo(estado = problema.resultado(nodo.estado, acción),
10
                            costo = nodo.costo + problema.c(nodo.estado, acción),
                            padre = nodo, acción = acción)
               if (problema.test-objetivo(hijo.estado)) then return solución(hijo)
11
               frontera.encolar(hijo)
12
```

Algoritmo BFS en árboles

El test objetivo se ejecuta antes de encolar el nodo para evitar expandir nodos de más.

```
1 function TREE-BFS(problema) return solución o fallo
     raiz \leftarrow Nodo(estado = problema.estado-inicial, costo = 0)
     if (problema.test-objetivo(raíz.estado)) then return solución(raíz)
3
     frontera ← Cola()
     frontera.encolar(raíz)
5
     do
6
          if (frontera.vacía()) then return fallo
          nodo ← frontera.desencolar()
          forall acción in problema.acciones(nodo.estado) do
               hijo ← Nodo(estado = problema.resultado(nodo.estado, acción),
10
                            costo = nodo.costo + problema.c(nodo.estado, acción),
                            padre = nodo, acción = acción)
11
               if (problema.test-objetivo(hijo.estado)) then return solución(hijo) ⁴
               frontera.encolar(hijo)
12
```

Performance de TREE-BFS

- Completitud.
- Optimalidad. 🗸 (si todas las acciones tienen el mismo costo).
- **Tiempo.** Se generan $1 + b + b^2 + ... + b^d \approx b^d$ nodos.
- Memoria. Se mantienen a lo sumo b^d nodos en la frontera.

Donde \boldsymbol{b} es el factor de ramificación (máximo número de hijos de cualquier nodo) y \boldsymbol{d} es la menor profundidad de un nodo objetivo.

Tiempos vs. memoria

Depth	Nodes		Time	Memory
2	110	.11	milliseconds	107 kilobytes
4	11,110	11	milliseconds	10.6 megabytes
6	10^{6}	1.1	seconds	1 gigabyte
8	10^{8}	2	minutes	103 gigabytes
10	10^{10}	3	hours	10 terabytes
12	10^{12}	13	days	1 petabyte
14	10^{14}	3.5	years	99 petabytes
16	10^{16}	350	years	10 exabytes

Se asume b = 10, 1M de nodos generados por segundo y 1 kb de memoria por nodo.

Tiempos vs. memoria

Depth	Nodes		Time	N	Memory
2	110	.11	milliseconds	107	kilobytes
4	11,110	11	milliseconds	10.6	megabytes
6	10^{6}	1.1	seconds	1	gigabyte
8	10^{8}	2	minutes	103	gigabytes
10	10^{10}	3	hours	10	terabytes
12	10^{12}	13	days	1	petabyte
14	10^{14}	3.5	years	99	petabytes
16	10^{16}	350	years	10	exabytes

El requerimiento de memoria es una complicación más seria que el de tiempo.

Se asume b = 10, 1M de nodos generados por segundo y 1 kb de memoria por nodo.

Algoritmo BFS en grafos

Muy parecido a BFS en árboles, salvo que:

- 1. Se mantiene un conjunto de estados alcanzados.
 - Antes de agregar un nodo a la frontera, se marca su estado como alcanzado.
- 2. Se **descarta** cualquier nodo generado con un estado ya alcanzado (ya que su costo de camino es mayor o igual al del primer nodo encontrado).

Mantiene la completitud y optimalidad... pero los requerimientos de tiempo y memoria ahora son proporcionales al tamaño del espacio de estados.

Algoritmo BFS en grafos

```
1 function GRAPH-BFS(problema) return solución o fallo
      raíz ← Nodo(estado = problema.estado-inicial, costo = 0)
      if (problema.test-objetivo(raíz.estado)) then return solución(raíz)
3
      frontera ← Cola()
4
      frontera.encolar(raíz)
      alcanzados ← {raíz.estado}
      do
            if (frontera.vacía()) then return fallo
            nodo ← frontera.desencolar()
            forall acción in problema.acciones(nodo.estado) do
10
                  hijo ← Nodo(estado = problema.resultado(nodo.estado, acción),
11
                              costo = nodo.costo + problema.c(nodo.estado, acción),
                              padre = nodo, acción = acción)
                  if (problema.test-objetivo(hijo.estado)) then return solución(hijo)
12
13
                  if hijo.estado is not in alcanzados then
                        alcanzados.insertar(hijo.estado)
14
                        frontera.encolar(hijo)
15
```

Búsqueda primero en profundidad

Depth-First Search (BFS)

Los nodos del árbol de búsqueda se expanden por profundidad.

Comenzando por la raíz, se expande siempre el nodo más profundo de la frontera.

La búsqueda desciende rápidamente a una hoja. Para continuar, se retrocede al nodo más profundo con hijos aún no expandidos y se elige uno de ellos.



N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1			
2			
3			
4			
5			
6			



N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	8	
2			
3			
4			
5			
6			



C: (3,5,0)

B: (0,0,0)

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	8	{B,C,D}
2			
3			
4			
5			
6			



B: (0,0,0)

A: (8,0,0) C: (3,5,0)

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	8	{B,C,D}
2	В	{C,D}	
3			
4			
5			
6			



B: (0,0,0)

C: (3,5,0)

A: (8,0,0)

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	8	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3			
4			
5			
6			



A: (8,0,0) C: (3,5,0)

D: (5,0,3)

Llegamos a una hoja, la búsqueda retrocede al nodo A y se elige un hijo de A no expandido.

Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	8	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3			
4			
5			
6			



B: (0,0,0)

A: (8,0,0) C: (3,5,0)

Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	{}	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	
4			
5			
6			



B: (0,0,0) F: (3,0,0) C: (3,5,0) G: (0,5,3)

H: (8,0,0)

D: (5,0,3)

I: (3,2,3)

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	{}	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	{E,F,G,H,I,D}
4			
5			
6			



H: (8,0,0)

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	8	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	{E,F,G,H,I,D}
4	E	{F,G,H,I,D}	
5			
6			



B: (0,0,0)

C: (3,5,0)

A: (8,0,0)

E: (0,5,0)

F: (3,0,0) K: (5,0,0)

J: (0,0,0)

G: (0,5,3) L: (0,2,3)

H: (8,0,0)

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	8	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	{E,F,G,H,I,D}
4	E	{F,G,H,I,D}	{J,K,L,F,G,H,I,D}
5			
6			



B: (0,0,0) A: (8,0,0)

E: (0,5,0)

K: (5,0,0)

J: (0,0,0)

F: (3,0,0)

G: (0,5,3)

H: (8,0,0)

L: (0,2,3)

C: (3,5,0)

D: (5,0,3) I: (3,2,3)

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	8	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	{E,F,G,H,I,D}
4	E	{F,G,H,I,D}	{J,K,L,F,G,H,I,D}
5	J	{K,L,F,G,H,I,D}	
6			



E: (0,5,0)

K: (5,0,0)

F: (3,0,0)

G: (0,5,3)

L: (0,2,3)

J: (0,0,0)

H: (8,0,0)

D: (5,0,3) I: (3,2,3)

B: (0,0,0)

C: (3,5,0)

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	8	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	{E,F,G,H,I,D}
4	E	{F,G,H,I,D}	{J,K,L,F,G,H,I,D}
5	J	{K,L,F,G,H,I,D}	{K,L,F,G,H,I,D}
6			



A: (8,0,0) D: (5,0,3)

B: (0,0,0)

C: (3,5,0)

E: (0,5,0) J: (0,0,0)K: (5,0,0) F: (3,0,0) L: (0,2,3) G: (0,5,3)H: (8,0,0) I: (3,2,3)

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	0	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	{E,F,G,H,I,D}
4	E	{F,G,H,I,D}	{J,K,L,F,G,H,I,D}
5	J	{K,L,F,G,H,I,D}	{K,L,F,G,H,I,D}
6			

Llegamos a una hoja, la búsqueda retrocede al nodo E y se elige un hijo de E no expandido.



B: (0,0,0)
A: (8,0,0)
C: (3,5,0)

E: (0,5,0)

G: (0,5,3)

K: (5,0,0)

J: (0,0,0)

F: (3,0,0)

L: (0,2,3)

H: (8,0,0)

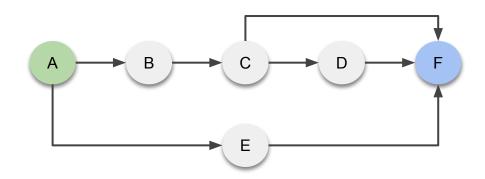
D: (5,0,3) I: (3,2,3)

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	8	{B,C,D}
2	В	{C,D}	{C,D}
3	С	{D}	{E,F,G,H,I,D}
4	E	{F,G,H,I,D}	{J,K,L,F,G,H,I,D}
5	J	{K,L,F,G,H,I,D}	{K,L,F,G,H,I,D}
6	K	{L,F,G,H,I,D}	CONTINÚA



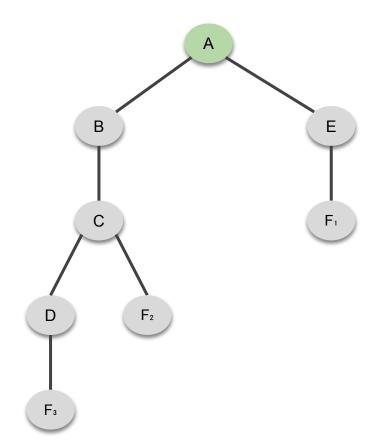
Sea un problema descrito por el siguiente espacio de estados, donde A es el estado inicial y F es el estado objetivo.

Resolverlo con el algoritmo general de búsqueda en árboles con la estrategia DFS.



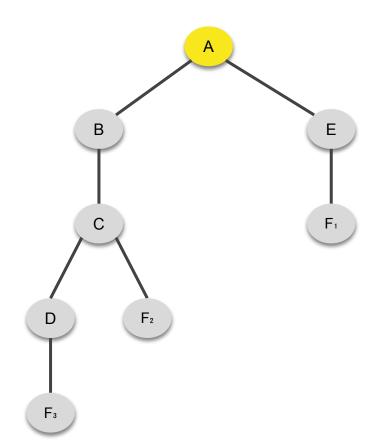


Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1			
2			
3			
4			
5			



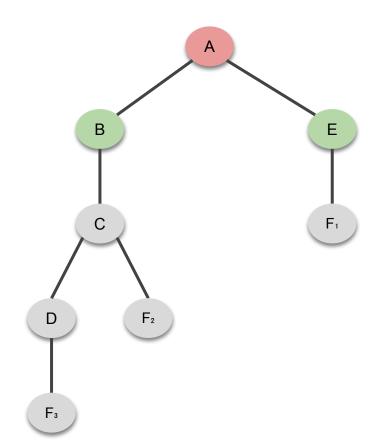


Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	{}	
2			
3			
4			
5			





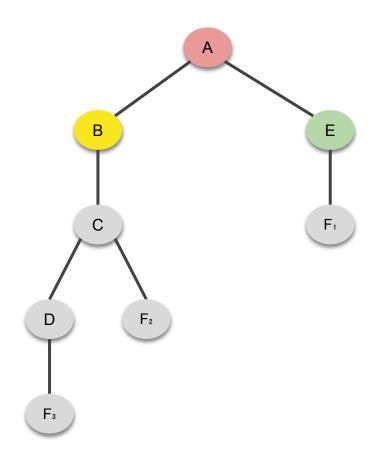
N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	0	{B,E}
2			
3			
4			
5			





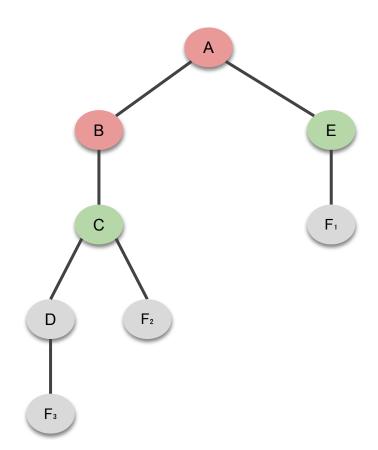
Respuesta

Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	0	{B,E}
2	В	{ E }	
3			
4			
5			





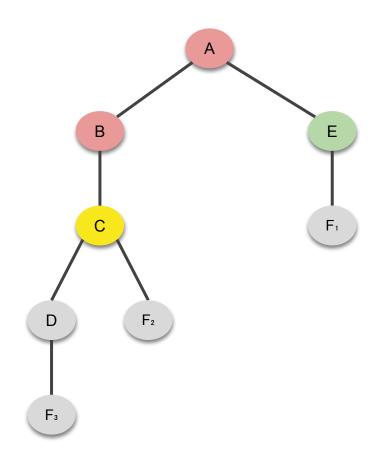
N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	8	{B,E}
2	В	{E}	{C,E}
3			
4			
5			





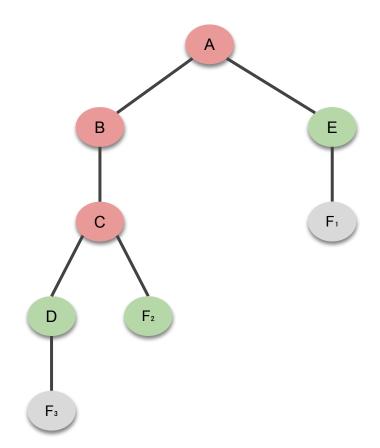
Respuesta

Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	0	{B,E}
2	В	{E}	{C,E}
3	С	{E}	
4			
5			



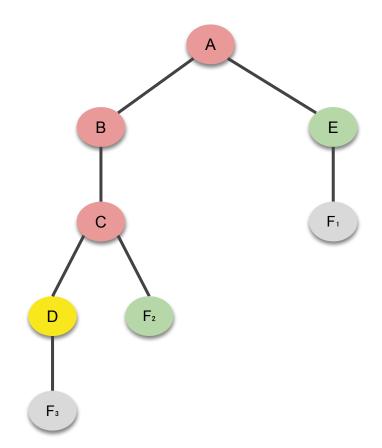


Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	8	{B,E}
2	В	{E}	{C,E}
3	С	{E}	{D,F ₂ ,E}
4			
5			



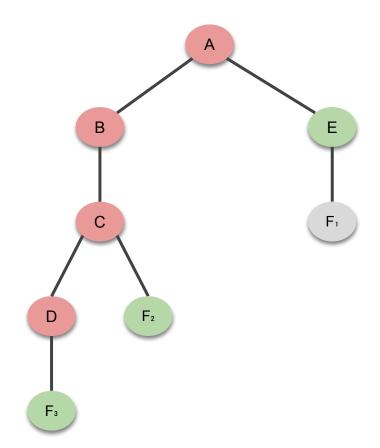


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	{}	{B,E}
2	В	{E}	{C,E}
3	С	{E}	{D,F ₂ ,E}
4	D	{F ₂ ,E}	
5			



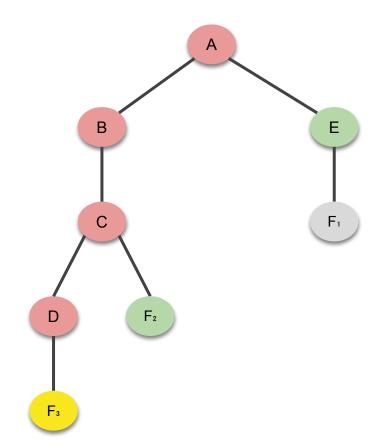


Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	{}	{B,E}
2	В	{E}	{C,E}
3	С	{E}	{D,F ₂ ,E}
4	D	{F ₂ ,E}	{F ₃ ,F ₂ ,E}
5			





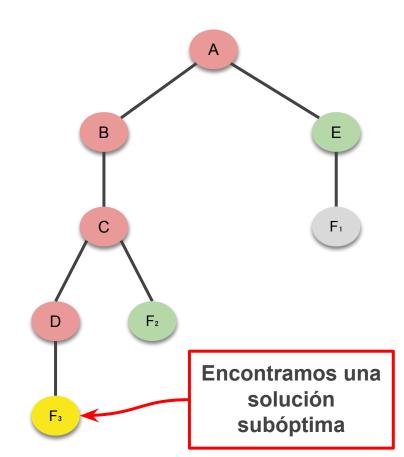
Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	8	{B,E}
2	В	{E}	{C,E}
3	С	{E}	{D,F ₂ ,E}
4	D	{F ₂ ,E}	$\{F_3,F_2,E\}$
5	F₃	{F ₂ ,E}	FIN





Respuesta

Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	0	{B,E}
2	В	{ E }	{C,E}
3	С	{ E }	{D,F ₂ ,E}
4	D	{F ₂ ,E}	$\{F_3,F_2,E\}$
5	F ₃	{F ₂ ,E}	FIN



Implementación de DFS

• ¿Cómo elegimos de la frontera el próximo nodo a expandir? El de mayor profundidad.

• ¿Cómo lo logramos?

Usando el TAD pila para la frontera.

Pila — El último en entrar es el primero en salir

Apilar Desapilar

Los nuevos nodos (que están a mayor profundidad que sus padres) van en el tope de la pila y se expanden primero.

Algoritmo DFS en árboles

```
1 function TREE-DFS(problema) return solución o fallo
     raíz ← Nodo(estado = problema.estado-inicial, costo = 0)
2
     frontera ← Pila()
3
     frontera.apilar(raíz)
4
     do
5
          if (frontera.vacía()) then return fallo
6
          nodo ← frontera.desapilar()
          if (problema.test-objetivo(nodo.estado)) then return solución(nodo)
8
          forall acción in problema.acciones(nodo.estado) do
9
               hijo ← Nodo(estado = problema.resultado(nodo.estado, acción),
10
                           costo = nodo.costo + problema.c(nodo.estado, acción),
                           padre = nodo, acción = acción)
               frontera.apilar(hijo)
11
```

Performance de TREE-DFS

- Completitud. <a>✓ (si se detectan caminos cíclicos).
- Optimalidad. X
- **Tiempo.** Se generan $1 + b + b^2 + ... + b^m \approx b^m$ nodos.
- **Memoria.** Se mantienen a lo sumo *b.m* nodos en la frontera (el camino de la raíz a la hoja y los hijos de cada nodo del camino).

Asumimos espacios de estados finitos. De lo contrario, es incompleto.

Donde \boldsymbol{b} es el factor de ramificación (máximo número de hijos de cualquier nodo), \boldsymbol{d} es la menor profundidad de un nodo objetivo y \boldsymbol{m} es el último nivel del árbol.

BFS vs. DFS

Suponiendo b = 10 y 1kb por nodo, en el nivel d = m = 16 BFS en árboles usaba:

10 exabytes

y DFS usa:

160 kilobytes.

El requerimiento de memoria de DFS puede llegar a ser varios órdenes de magnitud menor al de BFS, pero se pierde la garantía de optimalidad.

Algoritmo DFS en grafos

Muy parecido a DFS en árboles, salvo que:

- 1. Se mantiene un **conjunto de estados expandidos** (a diferencia de BFS en grafos que mantiene los estados alcanzados).
 - Al sacar un nodo de la frontera, si su estado ya fue expandido previamente se lo desecha. De lo contrario, se expande y se marca su estado como expandido.
- 2. No se generan nuevos nodos con estados ya expandidos.
 - Pero la frontera podría tener nodos con estados repetidos, aunque a lo sumo uno de ellos es expandido (el de mayor profundidad) mientras que los otros se desapilan sin expandir.

Empeora el requerimiento de memoria.

- En árboles: proporcional al largo del camino más profundo.
- En grafos: proporcional al tamaño del espacio de estados (al igual que BFS).

Algoritmo DFS en grafos

```
1 function GRAPH-DFS(problema) return solución o fallo
      raíz ← Nodo(estado = problema.estado-inicial, costo = 0)
      frontera ← Pila()
3
      frontera.apilar(raíz)
      expandidos ← {}
      do
6
            if (frontera.vacía()) then return fallo
            nodo ← frontera.desapilar()
8
            if (problema.test-objetivo(nodo.estado)) then return solución(nodo)
            if nodo.estado is not in expandidos then
10
                  expandidos.insertar(nodo.estado)
11
                  forall acción in problema.acciones(nodo.estado) do
12
                        hijo ← Nodo(estado = problema.resultado(nodo.estado, acción),
13
                                    costo = nodo.costo + problema.c(nodo.estado, acción),
                                    padre = nodo, acción = acción)
                        if hijo.estado is not in expandidos then
14
15
                              frontera.apilar(hijo)
```

Resumen

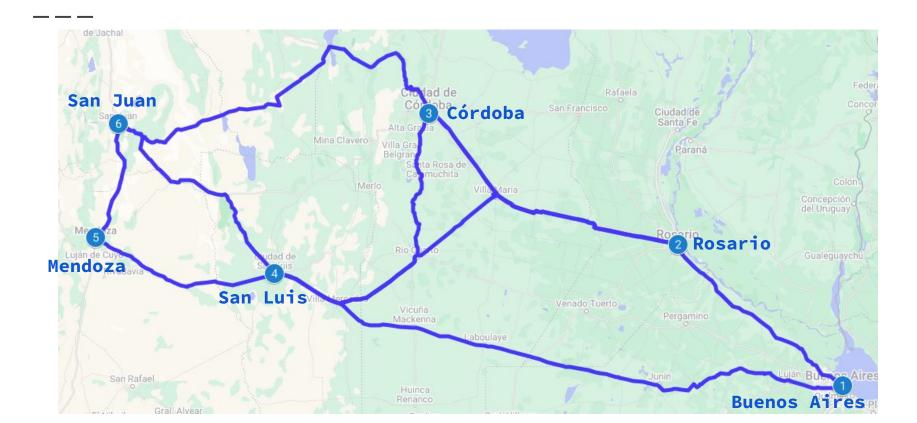
- Vimos dos estrategias de búsqueda: BFS y DFS.
- BFS expande siempre el nodo no expandido con la menor profundidad. Es óptima para costos individuales unitarios pero su consumo de memoria puede ser excesivo.
- DFS expande siempre el nodo no expandido con la mayor profundidad. Bajo consumo de memoria (en árboles) pero no tiene garantía de optimalidad.
- En grafos, BFS y DFS tienen el mismo consumo de memoria, con lo cual se prefiere a BFS como algoritmo de búsqueda por su optimalidad.

Próximamente

¿Es posible garantizar la optimalidad cuando los costos individuales no son unitarios?

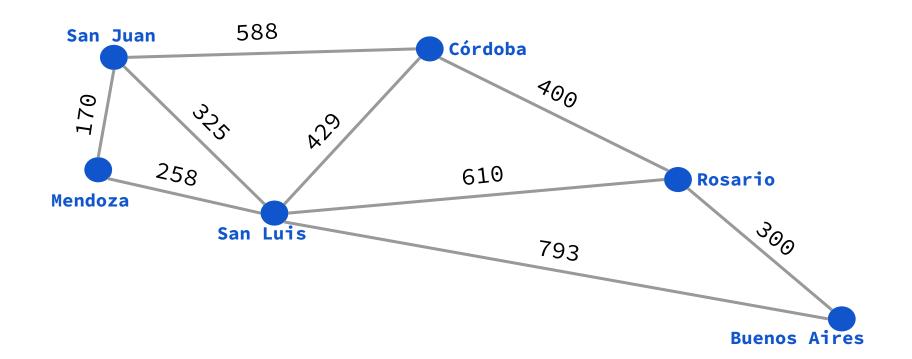
¿Es posible que DFS garantice completitud y optimalidad incluso en espacios de estados infinitos?

Problema de camino más corto

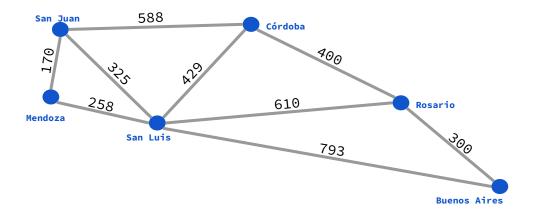


Problema de camino más corto

_ _ _



Descripción



Objetivo. Encontrar el camino más corto de Buenos Aires a San Juan.

Reglas. Sólo se puede mover de una ciudad a otra adyacente, es decir, conectadas con una arista.

Ejercicio de repaso

- 1. Dar una formulación para este problema.
- 2. Encontrar una solución óptima.

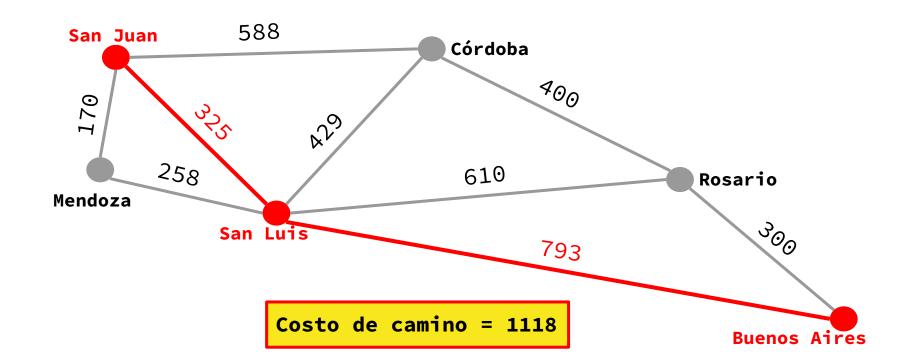


Respuesta – 1. Propuesta de formulación

- Estado. Cada ciudad. Hay 6 estados.
- Estado inicial. Buenos Aires.
- Acciones. →j viajar a la ciudad adyacente j.
- Modelo transicional. El resultado de →j es j.
- **Test objetivo.** ¿j = San Juan?
- Costo de camino. El costo individual de →j desde i es la distancia entre i y j. El costo de camino es la suma de los costos individuales.



Respuesta – 2. Solución óptima



Búsqueda de costo uniforme

Uniform-Cost Search (UCS)

Los nodos del árbol de búsqueda se expanden por su costo de camino.

Se expande siempre el nodo con el menor costo de camino de la frontera.



N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1			
2			
3			
4			
5			
6			

A: Bs. As.



N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	0	
2			
3			
4			
5			
6			

A: Bs. As.



N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	0	{B,C}
2			
3			
4			
5			
6			

B: Rosario 300 Bs. As. **C:** San Luis 793

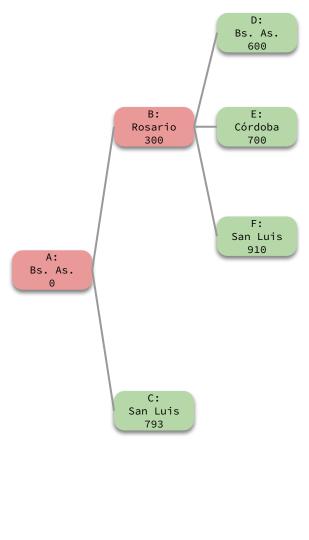


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	0	{B,C}
2	В	{C}	
3			
4			
5			
6			

Rosario 300 Bs. As. **C:** San Luis 793

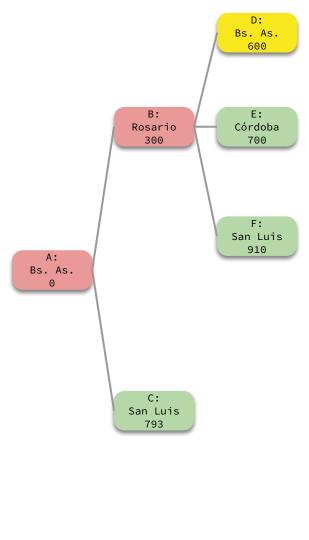


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	0	{B,C}
2	В	{C}	{C,D,E,F}
3			
4			
5			
6			



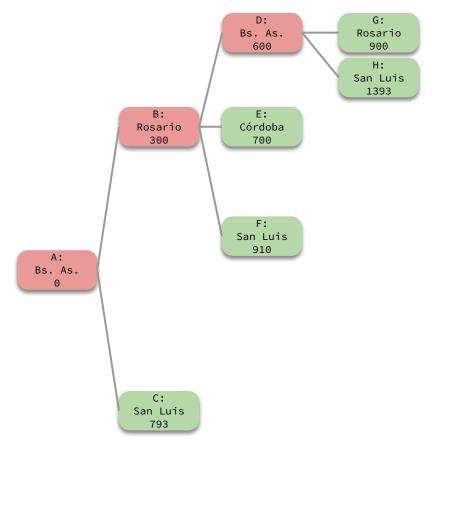


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	_	{A}	-
1	Α	0	{B,C}
2	В	{C}	{C,D,E,F}
3	D	{C,E,F}	
4			
5			
6			



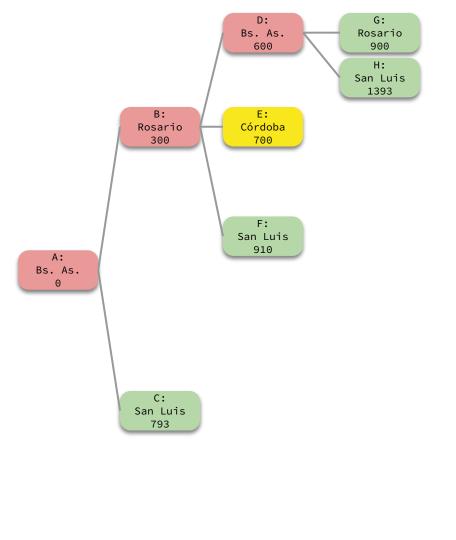


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	0	{B,C}
2	В	{C}	{C,D,E,F}
3	D	{C,E,F}	{C,E,F,G,H}
4			
5			
6			



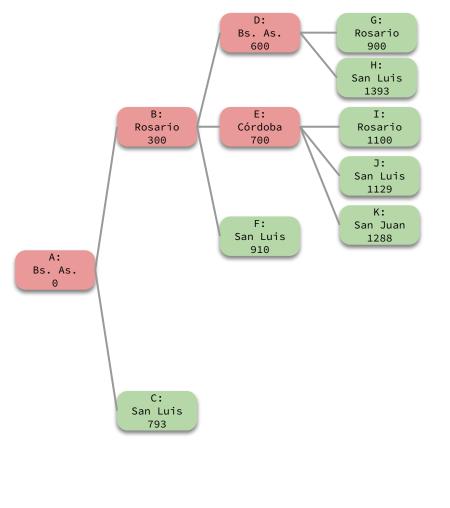


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	0	{B,C}
2	В	{C}	{C,D,E,F}
3	D	{C,E,F}	{C,E,F,G,H}
4	Е	{C,F,G,H}	
5			
6			





N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	8	{B,C}
2	В	{C}	{C,D,E,F}
3	D	{C,E,F}	{C,E,F,G,H}
4	Е	{C,F,G,H}	{C,F,G,H,I,J,K}
5			
6			





Encontramos un camino a San Juan, pero tenemos que seguir por si encontramos uno más corto. D:

Bs. As.

600

E:

Córdoba

700

F:

San Luis

910

B:

Rosario

300

C: San Luis 793

Bs. As.

G:

Rosario

900 H:

San Luis

1393

I:

Rosario

1100

J: San Luis 1129 K:

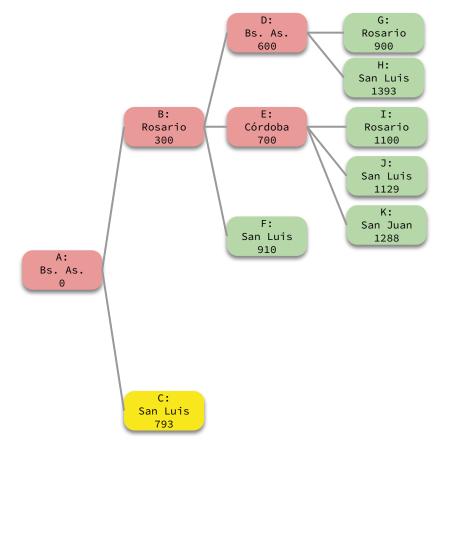
San Juan

1288

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	8	{B,C}
2	В	{C}	{C,D,E,F}
3	D	{C,E,F}	{C,E,F,G,H}
4	Е	{C,F,G,H}	{C,F,G,H,I,J,K}
5			
6			

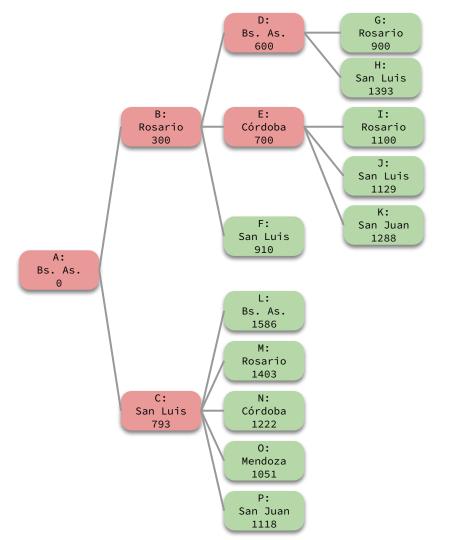


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	8	{B,C}
2	В	{C}	{C,D,E,F}
3	D	{C,E,F}	{C,E,F,G,H}
4	E	{C,F,G,H}	{C,F,G,H,I,J,K}
5	С	{F,G,H,I,J,K}	
6			





N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	8	{B,C}
2	В	{C}	{C,D,E,F}
3	D	{C,E,F}	{C,E,F,G,H}
4	E	{C,F,G,H}	{C,F,G,H,I,J,K}
5	С	{F,G,H,I,J,K}	{F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P}
6			

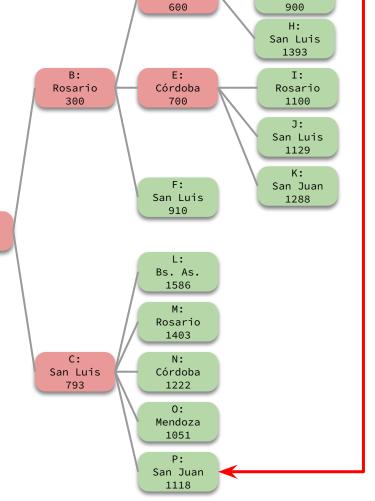




Encontramos un camino más corto a San Juan, pero tenemos que seguir por si encontramos uno aún más corto.

A: Bs. As.

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	8	{B,C}
2	В	{C}	{C,D,E,F}
3	D	{C,E,F}	{C,E,F,G,H}
4	E	{C,F,G,H}	{C,F,G,H,I,J,K}
5	С	{F,G,H,I,J,K}	{F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P}
6			



D:

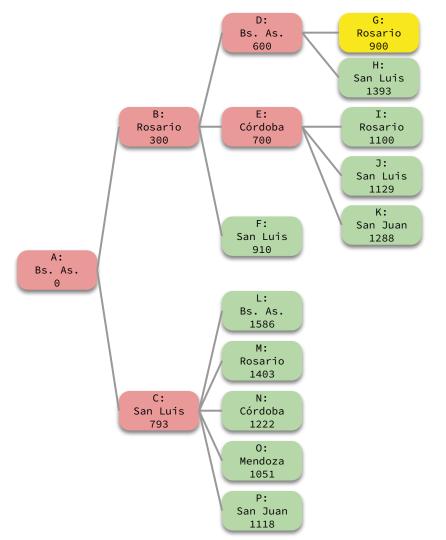
Bs. As.

G:

Rosario



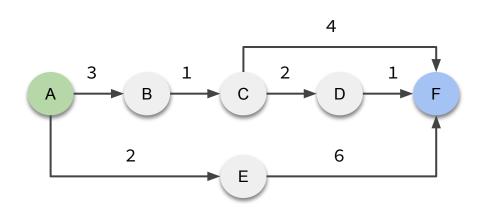
N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	8	{B,C}
2	В	{C}	{C,D,E,F}
3	D	{C,E,F}	{C,E,F,G,H}
4	E	{C,F,G,H}	{C,F,G,H,I,J,K}
5	С	{F,G,H,I,J,K}	{F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P}
6	G	{F,H,I,J,K,L,M,N,O,P}	CONTINÚA





Sea un problema descrito por el siguiente espacio de estados, donde A es el estado inicial y F es el estado objetivo. El costo de cada acción se encuentra sobre el arco correspondiente.

Resolverlo con el algoritmo general de búsqueda en árboles con la estrategia UCS.





A 0

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1			
2			
3			
4			
5			
6			

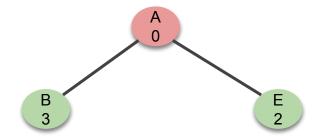


A 0

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	_	{A}	-
1	Α	{}	
2			
3			
4			
5			
6			

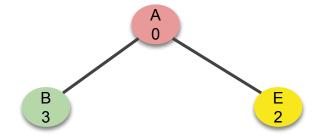


Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	{}	{B,E}
2			
3			
4			
5			
6			



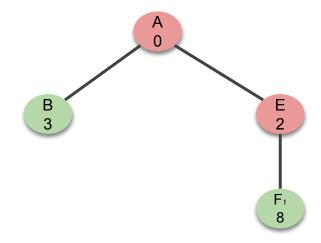


Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	8	{B,E}
2	E	{B}	
3			
4			
5			
6			





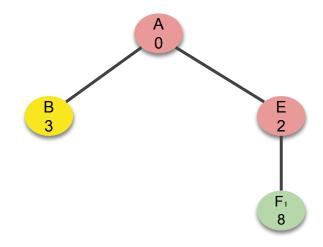
N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	{}	{B,E}
2	E	{B}	{B,F ₁ }
3			
4			
5			
6			





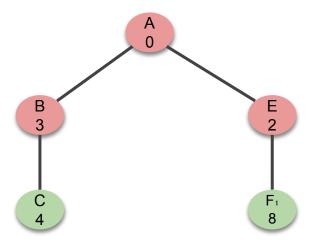
		_	

Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	А	8	{B,E}
2	E	{B}	{B,F ₁ }
3	В	{F₁}	
4			
5			
6			





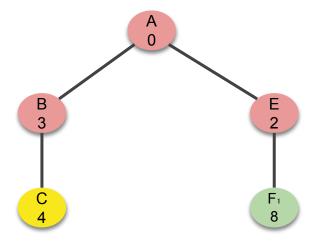
Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	0	{B,E}
2	E	{B}	{B,F ₁ }
3	В	{F₁}	{F₁,C}
4			
5			
6			





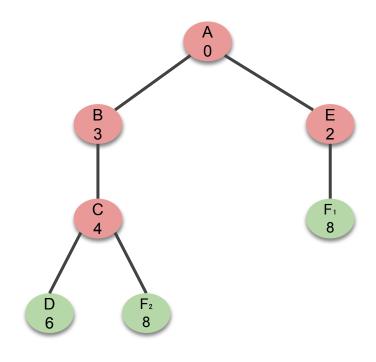
6

Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	0	{B,E}
2	E	{B}	{B,F ₁ }
3	В	{F₁}	{F₁,C}
4	С	{F₁}	
5			





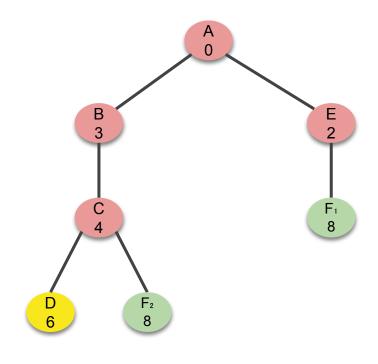
Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	0	{B,E}
2	E	{B}	{B,F ₁ }
3	В	{F ₁ }	{F₁,C}
4	С	{F₁}	{F ₁ ,D,F ₂ }
5			
6			





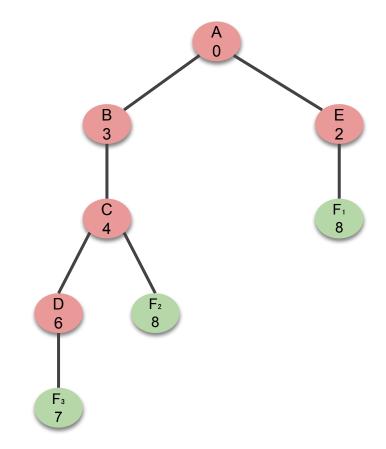
6

N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	8	{B,E}
2	E	{B}	{B,F ₁ }
3	В	{F ₁ }	{F₁,C}
4	С	{F ₁ }	{F ₁ ,D,F ₂ }
5	D	{F ₁ ,F ₂ }	



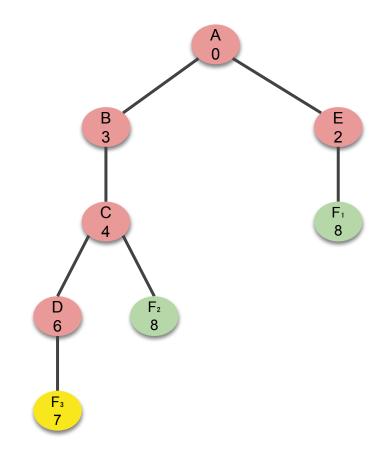


N°	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	0	{B,E}
2	E	{B}	{B,F ₁ }
3	В	{F₁}	{F₁,C}
4	С	{F₁}	{F ₁ ,D,F ₂ }
5	D	{F ₁ ,F ₂ }	{F ₁ ,F ₂ ,F ₃ }
6			



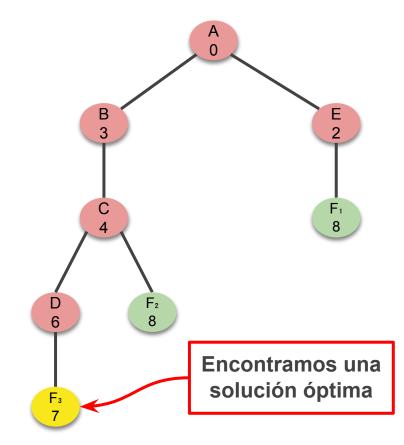


Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	A	0	{B,E}
2	E	{B}	{B,F ₁ }
3	В	{F₁}	{F ₁ ,C}
4	С	{F₁}	{F ₁ ,D,F ₂ }
5	D	{F ₁ ,F ₂ }	$\{F_1,F_2,F_3\}$
6	F ₃	{F ₁ ,F ₂ }	FIN





Nº	Nodo actual	Frontera antes de expandir	Frontera después de expandir
0	-	{A}	-
1	Α	{}	{B,E}
2	E	{B}	{B,F ₁ }
3	В	{F₁}	{F ₁ ,C}
4	С	{F₁}	{F ₁ ,D,F ₂ }
5	D	{F ₁ ,F ₂ }	{F ₁ ,F ₂ ,F ₃ }
6	F ₃	{F ₁ ,F ₂ }	FIN



Implementación de UCS

- ¿Cómo elegimos de la frontera el próximo nodo a expandir? El de menor costo de camino.
- ¿Cómo lo logramos?

 Usando el TAD cola de prioridades para la frontera.

Cola de prioridades – El de menor prioridad es el próximo en salir

Elemento de menor prioridad

4 6 7 8 10

Desencolar

Los nuevos nodos se encolan en una cola de prioridades ordenada por el costo de camino. El nodo que se desencola es siempre el de menor costo de camino.

Encolar

Algoritmo UCS en grafos

Similar a BFS en grafos, con cuatro modificaciones principales.

- 1. La frontera es una cola de prioridad.
- 2. El test objetivo se aplica antes de expandir el nodo y no cuando se lo genera por primera vez, para no devolver soluciones **subóptimas**.
- 3. Los estados alcanzados se mantienen en un diccionario:

dict[estado, nodo]

donde cada **estado** (clave) se asocia al **nodo** (valor) del árbol de búsqueda con el menor costo de camino entre todos los nodos generados hasta el momento que repiten ese estado.

3. Se descarta cualquier nuevo camino a un estado ya alcanzado **sólo si empeora el costo de camino**. De lo contrario, se actualiza el diccionario

con el nuevo nodo y se lo encola con su nuevo costo.

Algoritmo UCS en grafos

```
1 function GRAPH-UCS(problema) return solución o fallo
      raiz \leftarrow Nodo(estado = problema.estado-inicial, costo = 0)
3
      frontera ← ColaPrioridad()
      frontera.encolar(raíz, raíz.costo)
      alcanzados ← {raíz.estado: raíz}
6
      do
            if (frontera.vacía()) then return fallo
            nodo ← frontera.desencolar()
            if (problema.test-objetivo(nodo.estado)) then return solución(nodo)
            forall acción in problema.acciones(nodo.estado) do
10
                  hijo ← Nodo(estado = problema.resultado(nodo.estado, acción),
11
                               costo = nodo.costo + problema.c(nodo.estado, acción),
                               padre = nodo, acción = acción)
                  if hijo.estado is not in alcanzados or hijo.costo < alcanzados[hijo.estado].costo then
12
                        alcanzados[hijo.estado] = hijo
13
14
                        frontera.encolar(hijo, hijo.costo)
```

Algoritmo UCS en grafos

El algoritmo en árboles se obtiene borrando las partes relacionadas con el diccionario de alcanzados.

```
1 function GRAPH-UCS(problema) return solución o fallo
      raiz \leftarrow Nodo(estado = problema.estado-inicial, costo = 0)
3
      frontera ← ColaPrioridad()
      frontera.encolar(raíz, raíz.costo)
      alcanzados ← {raíz.estado: raíz}
      do
6
            if (frontera.vacía()) then return fallo
            nodo ← frontera.desencolar()
            if (problema.test-objetivo(nodo.estado)) then return solución(nodo)
            forall acción in problema.acciones(nodo.estado) do
10
11
                  hijo ← Nodo(estado = problema.resultado(nodo.estado, acción),
                               costo = nodo.costo + problema.c(nodo.estado, acción),
                               padre = nodo, acción = acción)
                  if hijo.estado is not in alcanzados or hijo.costo < alcanzados[hijo.estado].costo then
12
                        alcanzados[hijo.estado] = hijo
13
                        frontera.encolar(hijo, hijo.costo)
14
```

Performance de TREE-UCS y GRAPH-UCS

- Completitud. ✓
- Optimalidad. 🔽 para cualquier función de costo individual.
- Tiempo y memoria.
 - En árboles, no se puede caracterizar fácilmente en términos de b y d. La cantidad de nodos generados depende del menor costo individual de una acción.

Búsqueda de profundización iterativa

Se introduce un **límite de profundidad** *l*.

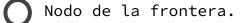
En cada iteración, se aplica DFS sobre el árbol de búsqueda limitado a la profundidad *l*.

Es decir, los nodos del árbol de búsqueda en el nivel *l* de profundidad se tratan como hojas.

Comenzando con l=0, el límite se incrementa gradualmente en 1 hasta encontrar un nodo objetivo.





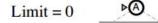




Nodo expandido con descendientes por expandir.

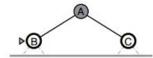


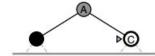
Nodo expandido sin descendientes por expandir.



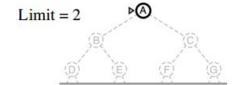


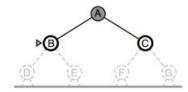
Limit = 1

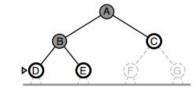


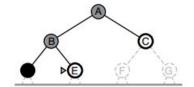


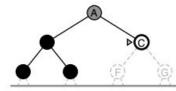


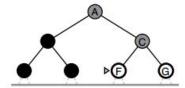


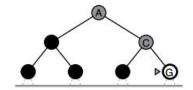


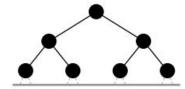












```
1 function TREE-IDS(problema) return solución o fallo
2 for l = 0 to ∞ do
3     resultado ← TREE-LIMITED-DFS(problema, l)
4     if resultado ≠ límite then resultado
```

Donde TREE-LIMITED-DFS es similar al algoritmo DFS en árboles, pero se agrega el control de profundidad.

¿Qué límite de profundidad usar?

```
1 function TREE-IDS(problema) return solución o fallo
2 for l = 0 to ∞ do 
3     resultado ← TREE-LIMITED-DFS(problema,l)
4     if resultado ≠ límite then resultado
```

Donde TREE-LIMITED-DFS es similar al algoritmo DFS en árboles, pero se agrega el control de profundidad.

```
1 function TREE-LIMITED-DFS(problema, l) return solución o fallo o límite
2
      raíz ← Nodo(estado = problema.estado-inicial, costo = 0, profundidad = 0)
3
      frontera ← Pila()
      frontera.apilar(raíz)
4
      resultado ← fallo
      do
6
            if (frontera.vacía()) then return resultado
            nodo ← frontera.desapilar()
            if (nodo.profundidad > l) then resultado \leftarrow límite
            else if (problema.test-objetivo(nodo.estado)) then return solución(nodo)
10
            else
11
12
                  forall acción in problema.acciones(nodo.estado) do
13
                        hijo ← Nodo(estado = problema.resultado(nodo.estado, acción),
                                     costo = nodo.costo + problema.c(nodo.estado, acción),
                                     padre = nodo, acción = acción, profundidad = nodo.profundidad + 1)
                        frontera.apilar(hijo)
14
```

No expandimos los nodos que superen el límite de profundidad

```
1 function TREE-LIMITED-DFS(problema, l) return solución o fallo o límite
2
      raíz ← Nodo(estado = problema.estado-inicial, costo = 0, profundidad = 0)
3
      frontera ← Pila()
      frontera.apilar(raíz)
      resultado ← fallo
      do
6
            if (frontera.vacía()) then return resultado
            nodo ← frontera.desapilar()
            if (nodo.profundidad > 1) then resultado ← límite ←
            else if (problema.test-objetivo(nodo.estado)) then return solución(nodo)
10
            else
11
12
                  forall acción in problema.acciones(nodo.estado) do
13
                        hijo ← Nodo(estado = problema.resultado(nodo.estado, acción),
                                    costo = nodo.costo + problema.c(nodo.estado, acción),
                                    padre = nodo, acción = acción, profundidad = nodo.profundidad + 1)
                        frontera.apilar(hijo)
14
```

Performance de TREE-IDS

Combina los beneficios de BFS y DFS.

- Completitud.
- Optimalidad. 🗸 (si todas las acciones tienen el mismo costo).
- **Tiempo.** Se generan $\approx b^d$ nodos. Ya veremos por qué.
- Memoria. Se mantienen a lo sumo b.d nodos en la frontera.

Donde \boldsymbol{b} es el factor de ramificación (máximo número de hijos de cualquier nodo) y \boldsymbol{d} es la menor profundidad de un nodo objetivo.

Performance de TREE-IDS

Los nodos de menor profundidad son generados múltiples veces. Por ejemplo, la raíz es generada d veces, sus hijos (d-1) veces, y así. El número de nodos generados por IDS es:

$$d.1 + (d-1).b^{1} + (d-2).b^{2} + ... + 1.b^{d}$$

y por DFS es:

$$1 + b^1 + b^2 + ... + b^d$$

Para b = 10 y d = 5:

La diferencia es cada vez menos significativa con el aumento de la profundidad, pues la mayoría de los nodos del árbol de búsqueda se encuentran en el último nivel.

Algoritmo IDS en grafos

- Mantiene en memoria el conjunto de estados ya expandidos, de la misma forma que DFS en grafos.
- Aumenta el consumo de memoria, ahora es proporcional al tamaño del espacio de estados.
- No tiene ninguna ventaja respecto a BFS en grafos.

Resumen

- ☐ Vimos dos estrategias de búsqueda: UCS e IDS.
- UCS expande siempre el nodo no expandido con el menor costo de camino. Es óptima para cualquier función de costo individual.
- □ IDS llama a DFS incrementando el límite de profundidad hasta alcanzar un nodo objetivo. Es completa, óptima para costos individuales unitarios, su consumo de tiempo es comparable a BFS y su consumo de memoria es comparable con DFS.
- IDS es la estrategia de búsqueda no informada de preferencia cuando el espacio de estados es grande, hay pocos caminos redundantes y la profundidad de la solución es conocida.
- En grafos, IDS no ofrece ninguna ventaja respecto a BFS.



Las estrategias de búsqueda que vimos hasta ahora toman sus decisiones basadas únicamente en la formulación del problema.

Veremos algunas **estrategias de búsqueda informadas**, cuyas decisiones están guiadas por una función **heurística** que estima el costo de una solución desde un estado en particular.