Formalización Proceso Poisson

Consideremos el espacio muestral Ω.
Sea $w \in \Omega$ y $t \geq 0$.

Definimos,

$N_t(w)$: variable aleatoria que cuenta el número de arribos en el intervalo $[0, t)$ para la realización w.

- ✓ Para w fijo, $t \to N_t(w)$ es una función seccionalmente constante cuyos saltos se producen en los instantes de los arribos.
- ✓ El número de arribos posibles en un lapso de tiempo $[0, t)$ es cualquier número natural.

Luego,

la familia $N = \{N_t, t \geq 0\}$ es un proceso de parámetro continuo $(t \geq 0)$ y espacio de estados $E = N_0$ (discreto).

Hipótesis de trabajo

• En el instante inicial no se ha producido ningún arribo. Luego, $N_0(w) = 0$

• $t \rightarrow N_t(w)$ tiene sólo saltos de magnitud 1. No se considera la posibilidad de que se produzcan dos arribos en el mismo instante

(si asi fuera en la realidad se considera que el contador no tiene sensibilidad como para contabilizar ambos y cuenta sólo uno).

• El número de arribos en un intervalo acotado es finito con probabilidad 1.

• El número de arribos en un intervalo de la forma (s, s+t] es $N_{s+t} - N_s$.

Ese número es independiente de los arribos ocurridos antes del tiempo s y más aún, del instante de inicio del intervalo. Sólo depende de la longitud del intervalo.

Estas hipótesis permiten asegurar que todas las v.a. que conforman el proceso tienen distribución de Poisson con el mismo parámetro . Esto significa que:

Lema 1: $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0$

Lema 2: $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} P(N_t \geq 2) = 0$

Lema 3: $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} P(N_t = 1) = \lambda$

Lema 4: $P(N_t = k) = \dfrac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \quad \forall k \in \mathrm{N}\,; \forall t \geq 0$

Lema 5: $E(N_t) = \lambda t \quad y \quad V(N_t) = \lambda t$

El parámetro puede interpretarse como:

Número promedio de eventos por unidad de tiempo.

Además puede probarse que ∀k ∈ℕ , ∀t, s ≥ 0

$$P\left(N_{s+t} - N_s = k \,/\, N_u, u \le s\right) = P\left(N_{s+t} - N_s = k\right) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

$$E\left(N_{s+t} - N_s = k \,/\, N_u, u \le s\right) = \lambda t$$

Si: $t_1 < t_2 < \ldots\ldots t_{n-1} < t_n$ entonces:

$$\left(N_{t_2} - N_{t_1}\right);\left(N_{t_3} - N_{t_2}\right);\ldots\ldots;\left(N_{t_n} - N_{t_{n-1}}\right)$$

!!son variables aleatorias independientes entre si!!

(ver ej 1.16 pag.76 Cinlar)

Sea N_t un proceso de Poisson con tasa λt.

- ✓ La función $t \to N_t$ es no decreciente, continua a derecha y da saltos de medida 1.
- ✓ Esos saltos los da en los instantes en que se producen arribos (aleatorios).

Si T_k representa el instante en que se produce el k - *ésimo* arribo, entonces:

$$\{T_k, k \in \mathbb{N}\}$$

- ✓ representa el proceso de los instantes de arribo y
- ✓ es un proceso estocástico con espacio de estados $\mathbb{R}^+$ (infinito no numerable) y observado en tiempos discretos $k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto:

- Si el tiempo k - *ésimo* del arribo es mayor que s significa que en [0, s] ocurren menos de *k* arribos.
- Recíprocamente si en [0, s] ocurren menos de *k* arribos, el $k+1$- *ésimo* arribo ocurrirá después del tiempo s.

$$T_k > s \Leftrightarrow N_s < k$$

- ✓ Si el tiempo que pasa entre el k - *ésimo* arribo y el siguiente es mayor que s significa que:

entre el tiempo del k - *ésimo* arribo y ese tiempo más s no ocurre ningún arribo.

- ✓ Recíprocamente, si entre el instante de arribo T_k y el instante T_k+s no ocurre ningún arribo:

el lapso de tiempo entre el k - *ésimo* arribo y el siguiente es mayor que s.

$$T_{k+1} - T_k > s \Leftrightarrow N_{T_k+s} - N_{T_k} = 0$$

$$P(T_k > s) = P(N_s < k) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^j}{j!}, \quad [1]$$

$$P(T_{k+1} - T_k > s) = P(N_{T_k+s} - N_{T_k} = 0) = e^{-\lambda s}. \quad [2]$$

$$P(T_{k+1} - T_k < s \mid T_1, ..., T_k) = 1 - e^{-\lambda s} \quad [3]$$

De [2] y [3]: el tiempo transcurrido entre dos arribos sucesivos es independiente de los arribos de los que se trate y de los instantes de los arribos precedentes.

Más aún, los tiempos inter-arribos son independientes e idénticamente distribuidos y todos tienen distribución exponencial.

Si T es v.a. exp(λ) entonces $E(T) = \frac{1}{\lambda}$

Pensar:

Si en promedio ocurren λ arribos por unidad de tiempo, el tiempo entre dos arribos debe ser en promedio 1/λ.

Específicamente:

$$E(T_{k+1} - T_k) = \frac{1}{\lambda}, \quad \forall k.$$

Es decir T_k puede escribirse como suma de k variables aleatorias iid. Luego:

$$E(T_k) = \frac{k}{\lambda}.$$

Se puede probar que:

Si $\{T_k, k \in N\}$ es un proceso de tiempos de arribo en un proceso $N = \{N_t, t \geq 0\}$ y

$$T_k = T_1 + (T_2 - T_1) + ... + (T_k - T_{k-1}),$$

son variables aleatorias iid con distribución exp(λ), entonces N es un proceso de Poisson de tasa λ.

(ver ej (2.12) pag.82 Cinlar)

A partir de [1] o su equivalente:

$$P(T_k < s) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^j}{j!}, \quad s \in \mathbb{R}^+$$

se dice que T_k tiene distribución de *Erlang* de grado k (caso particular de la distribución Gamma).

Notar que:

$$T_k = T_1 + (T_2 - T_1) + ... + (T_k - T_{k-1}),$$

Lema 7 *Si* $\{T_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *es un proceso de tiempos de arribo en un proceso* $N = \{N_t, t \geq 0\}$ *y* $T_1, (T_2 - T_1), ..., (T_k - T_{k-1})...$ *son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro* λ*, entonces* N *es un proceso de Poisson de tasa* λ*.*