Trabajo Práctico 4 Análisis Matemático II

Lucio Renzi, Augusto Rabbia, Gonzalo Longo, Matías Pendino

Noviembre 2021

Unidad 9 - Ejercicio 8

Considere la función $f(x,y) = x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x}$, con $x \neq 0$, $y \neq 0$. ¿Tiene límite en $(0,0)$?

Para analizar el límite en $(0,0)$ de f primero veremos que pasa con el límite en $(0,0)$ de las funciones que llamaremos $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tales que $f_1(x,y) = x \sin\frac{1}{y}$ y $f_2(x,y) = y \sin\frac{1}{x}$.

Tomemos el caso de f_1. Consideremos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(t) = \sin\frac{1}{t}$. La función tiene una discontinuidad esencial en $t = 0$ pero es continua en todo punto $t \neq 0$. En efecto, la función g en $t = 0$ no tiene límite finito ni infinito, pues está acotada.

Luego, podemos ver que el límite de $x \sin\frac{1}{y}$ será igual al límite del producto de una función continua por una que está acotada. Finalmente, como x tiende a 0 cuando $(x,y) \to (0,0)$, al multiplicar una función que tiende a 0 por una que está acotada concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin\frac{1}{y} = 0$$

Análogamente,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0$$

Por álgebra de límites y teniendo en cuenta que el límite de f_1 y f_2 es 0 concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) + \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0 + 0 = 0$$

$$\boxed{\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$$

Unidad 9 - Ejercicio 12

Analice la existencia del siguiente límite:

$$c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(xy)}{xy}$$

Sea $f(x,y) = \frac{sen(xy)}{xy}$. Recordemos que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{sen(t)}{t} = 1 \qquad (i)$$

Luego, consideremos las funciones auxiliares

$$g_1(t) = \begin{cases} \frac{sen(t)}{t} & si \quad t \neq 0 \\ \\ 1 & si \quad t = 0 \end{cases} \quad , \quad g_2(x,y) = xy$$

Por (i), y por ser una función polinómica, tenemos que g_1 y g_2 son funciones continuas (ii).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g_1 \circ g_2(x,y) = g_1(g_2(x,y))$$

Sabemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0 \quad (iii)$$

Finalmente, por (ii), (iii), y por el Teorema del Límite de la función compuesta,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_1(g_2(x,y)) = 1$$

$$\boxed{\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(xy)}{xy} = 1}$$

1. Unidad 10 - Ejercicio 7

Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0{,}0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto (x, y) $\neq (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right)' = \frac{(x^2+y^2)\cdot(xy(x^2-y^2))' - (x^2+y^2)'\cdot(xy(x^2-y^2))}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)\cdot((xy)'(x^2-y^2)+xy(x^2-y^2)') - 2x\cdot(xy(x^2-y^2))}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)\cdot(y(x^2-y^2)+xy\cdot 2x) - 2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)\cdot(x^2y-y^3+2x^2y) - 2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)\cdot(3x^2y-y^3) - 2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)\cdot(3x^2y-y^3) - 2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4y+3x^2y^3-x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)\cdot((xy)'(x^2-y^2)+xy(x^2-y^2)') - 2y\cdot(xy(x^2-y^2))}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)\cdot(x(x^2-y^2)+xy\cdot(-2y)) - 2y^2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)\cdot(x^3-y^2x-2y^2x) - 2y^2x^3+2y^4x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-3y^4x-3y^2x^3+y^2x^3+x^5-2y^2x^3+2y^4x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-y^4x-4y^2x^3+x^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y^4x-4y^2x^3+x^5}{(x^2+y^2)^2}}$$

b) Muestre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\cdot 0(h^2-0^2)}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0(0^2-h^2)}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$$

c) Muestre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0+h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0^4 h + 4\cdot 0^2 h^3 - h^5}{(0^2+h^2)^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-h^5}{h^4}}{h} == \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0+h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-0^4 h - 40^2 h^3 + h^5}{(h^2+0^2)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^5}{h^4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1}$$

d) Explique por qué el resultado de c).

Como las derivadas parciales cruzadas no son iguales, significa que no se está cumpliendo alguna de las hipótesis del **"Teorema de Clairaut"**. Es decir, que debe existir alguna derivada parcial de segundo orden que no sea continua en $(0,0)$.

Unidad 10 - Ejercicio 11

11) Se afirma que hay una función $f(x, y)$ cuyas derivadas parciales son $f_x(x, y) = x + 4y, f_y(x, y) = 3xy$. Determine si esto es posible.

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces si f admite derivadas parciales esto implica que f es tal que:

$$f_x(x, y) = x + 4y$$
$$f_y(x, y) = 3x - y$$

Luego, calculamos la antiderivada de una de ellas y así obtenemos:

$$f(x, y) = \int f_x(x, y)\ dx = \int x + 4y\ dx = \frac{x^2}{2} + 4xy + C(y)$$

Donde $C(y)$ es una función de y, que no puede contener a x.

Luego, calculando la derivada parcial del $f(x, y)$ con respecto a y obtenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + C'(y)$$

Ahora bien,

$$4x + C'(y) = f_y(x, y) = 3x - y \iff C'(y) = -y - x$$

Lo cual resulta absurdo pues ya sabemos que $C(y)$ no puede contener a la variable x, y por lo tanto tampoco lo hará su derivada.

$$\therefore \nexists \quad f : D \to \mathbb{R} / f_x(x, y) = x + 4y \land f_y(x, y) = 3xy, \qquad D \subseteq \mathbb{R}^2$$