Álgebra Lineal - LM - PM - LCC **2022**

Práctica 1: ELIMINACIÓN GAUSSIANA - FACTORIZACIÓN LU

1. Aplicar el método de Eliminación de Gauss al siguiente sistema y determinar si tiene o no soluciones.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

2. ¿Qué sucede si una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ es premultiplicada por las matrices

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Qué sucede si A es postmultiplicada por E_{31} y E_{23}?

3. *a*) Determinar las matrices E_{21}, E_{31} y E_{32} que llevan la siguiente matriz A a su forma triangular U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   b) Calcular la matriz $E = E_{32}E_{31}E_{21}$ que realiza todos los pasos de la eliminación $EA = U$.

4. Encontrar la matriz inversa de

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Exhibir la matriz M de orden 3 tal que, para toda matriz A de orden 3, M produce los siguientes cambios en A:

   a) Suma 5 veces la fila 1 a la fila 2.

   b) Suma -7 veces la fila 2 a la fila 3.

   c) Intercambia las filas 1 y 2, y luego las filas 2 y 3.

6. Resolver los siguientes sistemas utilizando eliminación gaussiana e identificar las matrices de eliminación y/o permutación utilizadas en cada caso.

$$a)\begin{cases} x_1 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -8 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ -2x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 32 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

7. Utilizando las propiedades de las matrices de permutación y matrices de eliminación, obtener los siguientes productos de matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Recordemos que la matriz $E_{ij}(a)$ con $i > j$ está definida por

$$E_{ij}(a) = (m_{kl})_{n\times n}, \qquad \text{con} \qquad m_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq i \text{ o } l \neq j, \text{ y } k \neq l \\ a & k = i \text{ y } l = j \end{cases}$$

a) Probar que $E_{ij}(a)e_l$ (columna l-ésima de $E_{ij}(a)$) verifica:

$$E_{ij}(a)e_l = \begin{cases} e_l, & l \neq j, \\ e_j + ae_i, & l = j. \end{cases}$$

b) Dado $r \in \mathbb{N}$, probar que $[E_{ij}(a)]^r = E_{ij}(ra)$.

c) Determinar la matriz $[E_{ij}(a)]^{-1}$.

d) Determinar la matriz $E_{ij}(a)E_{\tilde{i}\tilde{j}}(b)$, donde $\tilde{i} > \tilde{j}$, $i \leq \tilde{i}$ y $j \leq \tilde{j}$.

9. Sea A una matriz de tamaño $n \times p$ y $B = E_{ij}(\ell)A$. Probar que para todo $i \neq j$ y $k = 1, \ldots, n$, $B_k = A_k$ si $k \neq i$ y además, $B_i = A_i + \ell A_j$ si $k = i$.

10. Sean D y A matrices de orden n, con D una matriz diagonal y sea $B = DA$.

    Probar que, la fila k-ésima de B es igual a la fila k-ésima de A por la entrada k-ésima de la diagonal de D. Esto es, $B_k = D_k^k A_k$, para $k = 1, \ldots, n$.

11. Sean P_{ij} la matriz de permutación simple de orden n que se obtiene al intercambiar las filas i y j de I y $A \in \mathcal{M}_{n\times p}$. Probar que $P_{ij}A \in \mathcal{M}_{n\times p}$ es la matriz que se obtiene intercambiando las filas i y j de A.

    Sugerencia: Si e_k es el vector canónico de $\mathbb{R}^n$ con un 1 en la entrada k, probar que $e_k A = A_k$ siendo A_k la k-ésima fila de A y luego describir cada fila de la matriz $P_{ij}A$.

12. Encontrar la factorización $PA = LDU$ de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Determinar los valores de a y b para los cuáles la matriz A es no singular singular siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 3 \end{bmatrix}$$

14. Demostrar los siguientes enunciados

    a) Si $E_{ij}(-a)$ sustrae de la fila i un múltiplo de la fila j entonces $[E_{ij}(-a)]^{-1}$ lo suma nuevamente.

    b) Si P_{ij} intercambia dos filas, entonces P_{ij}^{-1} las vuelve a intercambiar, es decir $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

    c) Si D es una matriz diagonal, con entradas $d_1, \cdots, d_n$ no nulas, entonces D^{-1} es una matriz diagonal con entradas $\dfrac{1}{d_1}, \cdots, \dfrac{1}{d_n}$.

    d) Si P es una matriz de permutación, entonces $P^T = P^{-1}$.

15. Considerar el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

    Hallar la factorización LU de A, escribir y resolver el sistema triangular superior $Ux = \tilde{b}$ que se obtiene luego de la eliminación gaussiana.

16. Considerar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & & & + & 2x_4 & = & 6 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 8 \\ & & & & 6x_3 & + & 5x_4 & = & -4 \end{array} \right.$$

    a) Hallar la factorización LU de A, matriz de coeficientes del sistema y resolver el mismo.

    b) Resolver el sistema $Ax = \tilde{b}$, con $\tilde{b} = (6, 2, 10, 2)^T$.

c) Resolver el sistema $Ax = \hat{b}$, con $\hat{b} = (5, 0, 2, 0)^T$.

17. Encontrar los factores L, D, U para la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolver el sistema $Ax = b$ con $b = (6, 0, -6)^T$.

18. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostrar que

    a) AA^T y $A^T A$ son matrices simétricas.

    b) Para $m = n$ $A + A^T$ es simétrica. ¿Qué sucede con $A - A^T$?.

19. Mostrar que los pivotes de A son también los pivotes de A^T.

20. *a*) Hallar la factorización LDU de la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

    b) Usar lo realizado en el ítem anterior para resolver el sistema $A^T x = (2, 5, 5)^T$.