Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2021

Unidad 4: Métodos de integración.

El Teorema Fundamental del Cálculo Integral que vimos en la Unidad anterior nos permitió integrar aquellas funciones de las cuales conocemos una *primitiva* o *antiderivada*. Es decir, si f es una función integrable en $[a,b]$ y F es una función tal que $F' = f$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Generalmente, este resultado se abrevia escribiendo

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b\,.$$

Consideremos por ejemplo la función $F(x) = x\ln(x) - x$. Entonces un cálculo inmediato muestra que $F'(x) = 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$. Por lo tanto,

$$\int_a^b \ln(x)dx = (x\ln(x) - x)|_a^b\,. \tag{1}$$

Este ejemplo muestra que el cálculo de la integral de una función aparentemente sencilla como $\ln(x)$ depende de la "suerte" de encontrar una primitiva de $\ln$.

Desarrollaremos en esta Unidad algunos métodos que nos permitan hallar una primitiva que pueda expresarse en términos de funciones conocidas como sen, $\ln$, $\exp$, etc. Una función que puede expresarse de esta forma recibe el nombre de *función elemental*. Más precisamente, una **función elemental** es aquella que puede obtenerse a través de suma, multiplicación, división y composición de funciones racionales, trigonométricas, logaritmos y exponenciales y sus inversas.

Es importante notar sin embargo que no todas las funciones pueden expresarse en términos elementales. Existe de hecho un resultado (dificil de probar) que establece que la función $f(x) = e^{-x^2}$ no admite como primitiva una función elemental, y por lo tanto los métodos que aquí desarrollaremos no nos permitiran obtener explícitamente su integral.

Los métodos que estudiaremos se basan en poder calcular primitivas de funciones más "complejas" a través de primitivas simples. Haremos primeramente una observación respecto de la notación que utilizaremos. Usualmente se utiliza el símbolo $\int$ para designar a las primitivas de una función. Es decir, el símbolo coincide con el de la integral, omitiendo los extremos. Toda función continua f admite una primitiva, que está dada por $\int_a^x f(t)dt$, aunque no podamos calcular explícitamente esta primitiva. Por otra parte, sabemos que si F es una primitiva de f, entonces $F(x)+C$ también lo será, es decir, cualquier función que admita una primitiva, admite automáticamente infinitas primitivas que difieren entre sí por una constante. Usualmente $\int f(x)dx$ se utiliza para designar el conjunto de todas las primitivas de la función f. De esta manera suele escribirse por ejemplo

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C.$$

A los efectos de hallar la integral de f, la constante C que elijamos no juega ningún rol importante, pues sabemos que la fórmula (1) vale para **cualquier** primitiva de f. Es por esto que muchas veces escribiremos directamente

$$\int xdx = \frac{x^2}{2}$$

sobreentendiendo que el lado derecho representa a la familia de funciones $\frac{x^2}{2} + C$, para cualquier constante C.

Comenzaremos recordando algunas primitivas "directas":

- $\int a\,dx = ax.$
- $\int x^n, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq 1.$
- $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln(x).$
- $\int e^x\,dx = e^x.$
- $\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x).$
- $\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x).$
- $\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x).$
- $\int \sec(x)\tan(x)\,dx = \sec(x).$
- $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x).$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x).$

Todas ellas se obtienen simplemente derivando la función de la derecha y viendo simplemente que esta derivada es la función de la izquierda.

Es además inmediato de las propiedades de la derivación que

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot \int f(x)\,dx, \quad \int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Es interesante notar como es posible obtener algunos de los resultados de la Unidad 1 (cuya prueba hicimos a partir de la definición de integral) como consecuencia de estas fórmulas y de la propiedad (1).

Los dos métodos más usuales de integración (llamados integración por partes y por sustitución) son de alguna manera el proceso inverso a las reglas de derivación de un producto y de una composición. Ya se han estudiado en Análisis I para el cálculo de primitivas. Los recordaremos aquí como métodos de integración:

Teorema 47. Integración por partes. Sean f y g funciones derivables tales que f' y g' son continuas en un entorno abierto que contenga a $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

<u>**Demostración:**</u> La prueba es inmediata de la fórmula de derivación del producto. En efecto, recordemos que

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Reordenando, resulta

$$fg' = (fg)' - f'g$$

Ahora basta observar que fg es una primitiva de $(fg)'$. Por otra parte, siendo f, g, f' y g' continuas en $[a,b]$, resultan $(fg)'$, fg' y $f'g$ integrables en $[a,b]$ de donde resulta la tesis. $\square$

Ejemplos.

En los siguientes casos, veremos ejemplos de aplicación del teorema. En caso de que ambas funciones pudieran actuar como la g' en el teorema, no hay una regla para decidir cuál usar. En cambio la práctica ayuda a ver de qué modo se simplifica de alguna manera la expresión para proceder al cálculo de la integral que queremos.

1. $$\begin{aligned} \int xe^x\,dx &= xe^x - \int 1e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x, \end{aligned}$$

   donde en la primera integral e^x fue considerada como la g' del teorema y en la integral a la derecha, tuvimos que derivar la función $f(x) = x$ cuya derivada es 1.

2. Este ejemplo muestra un artificio que suele resultar útil en algunos casos.

   $$\begin{aligned} \int \ln(x)\,dx &= 1\ln(x) - \int x(\tfrac{1}{x})\,dx \\ &= x\ln(x) - x. \end{aligned}$$

3. En este otro ejemplo, también usamos un artificio, que consiste en utilizar la integración por partes para hallar una integral en términos de la misma integral, pero tal que se pueda despejar en la ecuación resultante.

   $$\int \tfrac{1}{x}\ln(x)\,dx = \ln(x)\ln(x) - \int (\tfrac{1}{x})\ln(x)\,dx,$$

   lo cual implica que

   $$2\int \frac{1}{x}\ln(x)\,dx = \ln(x)^2.$$

Teorema 48. Fórmula de sustitución. Sean f y g' funciones continuas, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx.$$

Demostración: Sea F una primitiva de f, entonces el primer miembro es $F(g(b)) - F(g(a))$. Por otra parte

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = (f \circ g)(x)g'(x),$$

de modo que $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g)(x)g'(x)$ y el segundo miembro es entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

$\square$

Ejemplos.

En cualquier caso de uso de este método se trata de reconocer cuál es la función dada en la forma $(f \circ g)g'$.

1. $\int_a^b \operatorname{sen}^5(x)\cos(s)\,dx$, donde si pensamos $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $f(u) = u^5$, entonces la integral resulta

$$\int_a^b \operatorname{sen}^5(x)\cos(s)\,dx = \int_{\operatorname{sen}(a)}^{\operatorname{sen}(b)} u^5\,du = \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6(b) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6(a).$$

2. $\int_a^b \tan(x)\,dx = -\int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{u}\,du = \ln(\cos(a)) - \ln(\cos(b))$,

   donde usamos $g(x) = \cos(x)$ y $f(u) = \frac{1}{u}$.

Las etapas intermedias en los ejemplos anteriores pueden eliminarse fácilmente observando lo siguiente: para pasar del primer miembro al segundo, sustituimos

$$g(x) \text{ por } u, \quad g'(x)dx \text{ por } du$$

y cambiamos los límites de integración.

Por ejemplo, para calcular

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx,$$

sea $u = 1+x^2$, de donde $du = 2xdx$. El factor 2 que aparece no es problema. Con estas sustituciones obtenemos

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(u),$$

de modo que

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Es importante notar que una vez hecha la sustitución, o el cambio de variables de x a u, en la escritura final, dejamos todo en términos de lo original, en este caso en que la integral no era definida.

Finalizamos esta unidad introduciendo un método conocido como *reducción a fracciones simples* que permite integrar funciones racionales, es decir, aquellas dadas por cocientes de polinomios.

Este método se basa en una propiedad que establece que cualquier polinomio se puede factorizar como un producto de potencias de términos lineales y cuadráticos. Esto es, cualquier polinomio $q(x)$ puede expresarse en la forma

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}.$$

y en ese caso cualquier cociente de la forma $p(x)/q(x)$ puede expresarse como

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} \quad = \quad & \left[\frac{a_{1,1}}{x-\alpha_1}+\frac{a_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{a_{1,r_1}}{(1-\alpha_1)^{r_1})}\right]+\cdots \\ & +\left[\frac{a_{k,1}}{x-\alpha_k}+\frac{a_{k,2}}{(x-\alpha_k)^2}+\cdots+\frac{a_{k,r_k}}{(1-\alpha_k)^{r_k})}\right] \\ & +\left[\frac{b_{1,1}x+c_{1,1}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1}+\cdots+\frac{b_{1,s_1}x+c_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}}\right]+\cdots \\ & +\left[\frac{b_{l,1}x+c_{l,1}}{x^2+\beta_l x+\gamma_l}+\cdots+\frac{b_{l,s_l}x+c_{l,s_l}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}}\right]\end{aligned}$$

Siempre que el grado de $p(x)$ sea mayor que el grado de $q(x)$ será conveniente realizar la división de polinomios para así obtener un polinomio $C(x)$ y un polinomio $R(x)$ que verifiquen

$$p(x) = C(x)q(x) + R(x)$$

donde el grado de R es estrictamente menor que el grado de $q(x)$. De esta manera, tendremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{q(x)}.$$

A los efectos de calcular una integral, el término $C(x)$ se resuelve de manera inmediata. Por lo tanto nos interesan aquellas funciones racionales donde el grado del numerador sea menor estricto que el grado del denominador.

Para esclarecer este proceso analicemos algunos ejemplos:

1. Supongamos que queremos determinar

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$$

Observamos primero que el grado del numerador es mayor que el del denominador. Efectuando la división de polinomios, obtenemos facilmente que

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}.$$

Nos concentraremos en este último término. No es difícil ver que el polinomio $q(x) = x^3-x^2-x+1$ puede factorizarse como

$$(x-1)^2(x+1).$$

El resultado anterior nos indica que por lo tanto existirán constantes $A = a_{1,1}$, $B = a_{1,2}$ y $C = a_{2,1}$ tales que

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Realizando la suma del lado derecho y comparando los numeradores (el denominador coincidirá siempre con $q(x)$), debemos obtener las constantes $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ y $a_{2,1}$ de modo que

$$4x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)$$

Comparando los coeficientes de ambos polinomios, deberá ser

$$A + C = 0, \quad B - 2C = 4, \quad -A + B + C = 0$$

y por lo tanto $A = 1$, $B = 2$ Y $C = -1$.

Concluimos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}dx &= \int (x+1)dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} + \int \frac{-1}{x+1}dx \\
&= x^2 + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1|.
\end{aligned}$$

2. Hallaremos ahora

$$\int \frac{-x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x(x^2+1)^2}dx.$$

El grado del numerador es menor que el del denominador y por lo tanto no efectuaremos la división de polinomios. Para obtener la descomposición en fracciones simples, deberemos encontrar constantes A, B, C, D y E tales que

$$\frac{-x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}. \tag{2}$$

El procedimiento es análogo al anterior, solo que las cuentas pueden resultar engorrosas. Dejamos como ejercicio verificar que deberán ser

$$A = 1,\ B = -1,\ C = -1,\ D = 1,\ E = -2.$$

Reemplazando en 2 tenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{-x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x(x^2+1)^2}dx &= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-x-1}{x^2+1}dx + \int \frac{x-2}{(x^2+1)^2}dx \\
&= \ln(|x|) - \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx + \int \frac{x-2}{(x^2+1)^2}dx \\
&= \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \int \frac{x-2}{(x^2+1)^2}dx
\end{aligned}$$

Solo nos queda determinar el último término

$$\int \frac{x-2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx.$$

La primera parte es inmediata: haciendo la sustitución $x^2+1=u$ obtenemos $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$.

Para la última integral (que aparecerá frecuentemente) será útil realizar la sustitución $x=\tan(\theta)$ (o más propiamente, $\theta = \arctan(x)$). Tendremos entonces

$$dx = \sec^2(\theta)d\theta, \quad x^2+1 = \sec^2(\theta)$$

y por lo tanto

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec^4(\theta)}d\theta = \int \cos^2(\theta)d\theta$$

Observando que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) = 2\cos^2(\theta)+1$, resulta

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx &= \frac{1}{2}\int (1+\cos(2\theta))d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} \\ &= \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\arctan(x)).\end{aligned}$$