Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2022

Práctica 2: ESPACIOS VECTORIALES

Espacios vectoriales y sus propiedades

1. Analizar si los siguientes conjuntos con las operaciones definidas son espacios vectoriales.

   a) El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$, con la suma y el producto por escalar usuales.

   b) El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$, con la suma $x+y$ definida como $x \cdot y$ y el producto cx como x^c con $c \in \mathbb{R}$ (tener en cuanta que $x^c = e^{ln\ x^c}$).

   c) El conjunto de las funciones pares, con la suma y producto por escalar usuales.

   d) El conjunto de las funciones continuas, con el producto cf definido como $(cf)(x) = f(cx)$ y la suma habitual de funciones.

   e) El conjunto de las funciones reales biyectivas, con el producto por escalar habitual y la suma $f+g$ definida como $(f+g)(x) = f(g(x))$.

   f) El conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 3, incluido el polinomio nulo, con la suma y producto por escalar habituales.

   g) $\mathbb{R}^2$ con el producto por escalar habitual y la suma de $x = (x_1, x_2)^T$ e $y = (y_1, y_2)^T$ definida como $x + y = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)^T$.

   Decir en cada caso que no resulte e.v., cuál es la propiedad que se está violando.

2. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial. En particular, sabemos que existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} + x = x$ para todo $x \in V$; y que para todo $x \in V$ existe un vector $\bar{x}$ tal que $x + \bar{x} = \mathbf{0}$.

   Demostrar los siguientes enunciados.

   a) *Unicidad del neutro*: si $\mathbf{0}' \in V$ es tal que $\mathbf{0}' + x = x$ para todo $x \in V$, entonces $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$.

   b) *Unicidad del opuesto*: dado $x \in V$, si $\bar{x}' \in V$ es tal que $x + \bar{x}' = \mathbf{0}$, entonces $\bar{x}' = \bar{x}$

   c) *Propiedad cancelativa*: si $z + x = z + y$ entonces $x = y$.

   d) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}\ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

   e) $0 \cdot v = \mathbf{0}\ \ \forall v \in V$.

   f) $\bar{x} = (-1) \cdot x$ (a partir de ahora, $-v$ es el opuesto de $v, \forall v \in V$).

   g) $(-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$.

   h) Si $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ entonces $\alpha = 0$ o $v = \mathbf{0}$.

   i) $\mathbf{0} \in V$ es el único elemento del espacio vectorial que coincide con su opuesto.

Subespacios de un espacio vectorial

3. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios.

   a) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0\}$.

   b) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 1\}$.

   c) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0\}$.

   d) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - 2x_3 = 4\}$.

   e) $\{\alpha(1, 4, 0) + \beta(2, 2, 2) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

   f) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

   g) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$.

4. Determinar cuales de estos subconjuntos definen subespacios vectoriales.

   a) $\mathbb{R}^2_+ \subset \mathbb{R}^2$.

   b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

   c) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 5\} \subset \mathbb{R}^3$.

   d) $\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : A \text{ es triangular}\} \subset \mathbb{F}^{n\times n}$.

   e) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es simétrica}\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$.

5. Sea **P** el plano de ecuación $x + 2y + z = 6$ y $\mathbf{P}_0$ el plano paralelo a P que pasa por el origen. ¿Son **P** y $\mathbf{P}_0$ subespacios de $\mathbb{R}^3$?.

6. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $U \subset V$. Entonces, U es un subespacio (vectorial) de V si y solo si toda combinación lineal de elementos de U pertenece a U; i.e. para todo $u_1, u_2 \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, resulta $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$.

7. Mostrar que las dos propiedades que definen un subespacio vectorial (i.e. que la suma sea cerrada en el conjunto y que el producto por escalar también lo sea) son propiedades independientes una de otra. Para ello buscar un espacio vectorial V y un subconjunto U que sea cerrado bajo la suma pero no bajo el producto por escalar y otro conjunto U' que cumpla lo contrario.

8. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   a) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B.

   b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener también a $\mathbb{I}$?.

9. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

   a) $\{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}\ es\ finito\}$.

   b) $\{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists i_0 \in \mathbb{N} / x_i = 0, \forall i \geq i_0\}$.

   c) $\{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_i \geq x_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}\}$ (conjunto de sucesiones decrecientes).

   d) $\{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists \lim\limits_{i\to\infty} x_i\}$ (conjunto de sucesiones convergentes).

   e) $\{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists c \in \mathbb{R} / x_{i+1} = c x_i, \forall i \in \mathbb{N}\}$ (conjunto de progresiones geométricas).

10. Para cada uno de los siguientes conjuntos determinar si es un subespacio de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ o explique por que no lo es

    a) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

    b) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(0) = 0, \}$.

    c) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(2) = 0, \}$.

    d) El conjunto de funciones constantes.

    e) $\{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Suma y suma directa de subespacios

11. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sean U y W subespacios de V. Probar que

$$U + W = \{v \in V : v = u + w, u \in U, w \in W\}$$

    es un subespacio de V.

12. *a*) Sean U_1, U_2 subespacios vectoriales de V. Probar que $V = U_1 \oplus U_2$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones:
    $i)$ $V = U_1 + U_2$.
    $ii)$ $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

    b) Encontrar un contraejemplo para demostrar que el resultado anterior no puede extenderse a más de dos subespacios, es decir, probar que para $m \geq 3$ NO ES VÁLIDA la siguiente afirmación.
    Sean U_i, $i = 1, \ldots, m$ subespacios vectoriales de V. Entonces, si se verifican las siguientes dos condiciones:
    $i)$ $V = U_1 + U_2 + \ldots + U_m$,
    $ii)$ $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_m = \{0\}$,
    resulta $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$.

13. Sea $\mathbb{K}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{K}[x]$ dado por

$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{K}\}.$$

Encontrar un subespacio W de $\mathbb{K}[x]$ tal que $\mathbb{K}[x] = U \oplus W$.

14. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sean W_1, W_2, W_3 son subespacios de V. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones

   a) Si $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$ luego $W_1 = W_2$.
   b) Si $W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3$ luego $W_1 = W_2$.

15. Sean W_1, W_2 subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y solo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

16. Considere el espacio vectorial V de todas las funciones con dominio y codominio igual a $\mathbb{R}$ (con la suma y producto por escalares usuales).
Sean $V_i = \{f \in V : f\, es\, un\, función\, impar\}$ y $V_p = \{f \in V : f\, es\, un\, función\, par\}$. Probar que

   a) V_i y V_p son subespacios de V.
   b) $V_i + V_p = V$.
   c) $V_i \cap V_p = \{0\}$.

Espacio generado

17. En el espacio vectorial de las matrices reales de orden 3, describir el subespacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos:

   a) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

   b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

   c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

18. Recordar que, dado V un espacio vectorial y $S \subset V$, $\langle S \rangle$ denota el subespacio de V generado por S. Demostrar las siguientes proposiciones:

   a) Si $S \subseteq T \subseteq V$, entonces $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$.
   b) $S \subseteq \langle S \rangle$.
   c) Si $S \subseteq T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S \rangle \subseteq T$. Observar que a partir de esta propiedad sabemos que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.
   d) S es un subespacio de V si y sólo si $\langle S \rangle = S$.
   e) Si $\langle S \rangle = U$, entonces $\langle U \rangle = U$.
   f) Sea $W \subseteq V$. Entonces:
      1) $\langle S \cap W \rangle \subset \langle S \rangle \cap \langle W \rangle$.
      2) $\langle S \cup W \rangle \subset \langle S \rangle + \langle W \rangle$.
   g) ¿Valen las contenciones inversas en los items *a*) y *f*)?

19. Describir el menor subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *b*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *c*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

20. Sea V el espacio vectorial de los polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual a 3. Considere los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 + 2x^2 + 4, & p_4(x) &= 3x^3 + 6x^2 + 9x + 12, \\ p_2(x) &= 2x^3 + 5x^2 + 11x + 8, & p_5(x) &= x^3 + 3x^2 + 8x + 3. \\ p_3(x) &= x^2 + 5x, \end{aligned}$$

Para $j \in \{4, 5\}$ determinar si $p_j \in \langle\{p_1, p_2, p_3\}\rangle$.

Independencia lineal

21. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que $N(A)$ es un subespacio vectorial real de $\mathbb{R}^n$ y $C(A)$ un subespacio vectorial real de $\mathbb{R}^m$.

22. Dada A una matriz $m \times n$, sea A' la matriz que se obtiene de agregar una columna A^{n+1} a A, donde A^{n+1} es una combinación lineal de las columnas de A. Probar que $C(A) = C(A')$.

23. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

24. Para que vectores $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ los siguientes sistemas tienen solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

25. Determinar una matriz A tal que su espacio nulo consista en:

   a) Todas las combinaciones lineales de $(2, 2, 1, 0)^T$ y $(3, 1, 0, 1)^T$.

   b) Todos los múltiplos de $(4, 3, 2, 1)^T$.

26. Dadas $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ probar que el espacio columna de AB está contenido en el espacio columna de A. Dar un ejemplo donde dicha contención sea estricta.

27. Sean A y B matrices tales que $AB = 0$. Demostrar que el espacio columna de B está contenido en el espacio nulo de A. ¿Qué sucede con el espacio fila de A y el espacio nulo de B^T?

28. Analizar si los siguientes vectores son linealmente independientes:

   a) $(1, 1, 0, 0)^T$, $(1, 0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1, 1)^T$, $(0, 1, 0, 1)^T$.

   b) $(1, 3, 2)^T, (2, 1, 3)^T, (3, 2, 1)^T$.

   c) $(1, -3, 2)^T, (2, 1, -3)^T, (-3, 2, 1)^T$.

   d) $(1, 1, 0)^T$, $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 1)^T$, $(x, y, z)^T$ para x, y, z cualesquiera.

29. Determinar si los siguientes conjuntos son conjuntos de vectores l.i. o l.d. en cada uno de los espacios vectoriales que se indica a continuación:

   a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   b) $\{1, x, -1 + 2x^2, -3x + 4x^3\} \subset \mathbb{R}_3[x]$.

30. Probar que:

   a) Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es un conjunto de vectores l.d..

   b) Si S es un conjunto de vectores l.d. y $S \subseteq T$ entonces T es un conjunto de vectores l.d..

31. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix},$$

demostrar que las columnas de A son linealmente independientes si y solo si $a \cdot d \cdot f \neq 0$.

32. Encontrar el mayor número posible de vectores linealmente independiente entre los siguientes: $v_1 = (1, -1, 0, 0)^T$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)^T$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)^T$, $v_4 = (0, 1, -1, 0)^T$, $v_5 = (0, 1, 0, -1)^T$ y $v_6 = (0, 0, 1, -1)^T$.

33. Sea $P = \left\{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z - t = 0\right\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

    a) Hallar 3 vectores linealmente independientes en P.

    b) Demostrar que no existen 4 vectores linealmente independientes en P.

34. Probar que

    a) Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es $l.d.$

    b) Si S es $l.i.$ entonces T es $l.i.$ $\forall T \subset S$.

    c) Si S es $l.d.$ entonces T es $l.d$ $\forall T \supset S$.

35. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i.. Probar que:

    a) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..

    b) $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d..

36. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

37. Sea $A = \{(1, -3, 2)^T, (2, 4, 1)^T, (3, 1, 3)^T, (1, 1, 1)^T\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

    a) Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

    b) Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

38. Sea $S = \langle\{(1, -1, 1)^T, (2, 1, 0)^T, (4, -1, 2)^T\} \subset \mathbb{R}^3$. Obtener una base de S.

39. Encontrar la dimensión de:

    a) El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.

    b) El espacio nulo de la matriz $I \in \mathcal{M}_{4\times4}$.

    c) El espacio de matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

40. Describir los cuatro espacios asociados a las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

41. Dar en cada caso una matriz que cumpla las condiciones dadas o justificar porque no existe.

    a) Su espacio columna está generado por los vectores $(1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$, y su espacio fila está generado por $(1, 1)^T$, $(1, 2)^T$.

    b) Su espacio columna tiene al vector $(1, 1, 1)^T$ como base y su espacio fila tiene como base al vector $(1, 2, 1)^T$.

    c) Su espacio columna contiene a los vectores $(1, 1, 0)^T$, $(1, 0, 1)^T$ pero no al vector $(1, 1, 1)^T$.

    d) Su espacio columna contiene a $(1, 2, 1)^T$, su espacio nulo contiene a $(-1, 0, 1)^T$ y tiene determinante -1.

42. Dado un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{F}$. Probar que:

   a) Todo conjunto generador minimal de V es un conjunto de vectores l.i..
   b) Todo conjunto generador de V cuyos elementos son l.i. es un conjunto generador minimal.

43. Obtener una base del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por:

   a) Los vectores $(1,-1,1)^T, (2,1,0)^T$ y $(4,-1,2)^T$.
   b) Los vectores $(1,1,-1)^T$ y $(-1,-1,1)^T$.
   c) Los vectores $(0,1,1)^T$, $(1,1,0)^T$ y $(0,0,0)^T$.
   d) Las columnas de una matriz escalonada de tamaño 3×5 con 2 pivots.

44. *a*) Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado a lo sumo 3 (incluyendo polinomio nulo). Encontrar una base $\mathcal{B}$ del subespacio S de $\mathbb{R}_3[x]$ definido por $S = \langle \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\} \rangle$.
   b) Extender $\mathcal{B}$ a una base de $\mathbb{R}_3[x]$, esto es, encontrar una base $\tilde{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$.

45. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) Si los vectores columna de una matriz son linealmente dependientes, también lo son sus vectores fila.
   b) El espacio columna de una matriz $n \times n$ coincide con el espacio fila de dicha matriz.
   c) El espacio columna de una matriz $n \times n$ tiene la misma dimensión que el espacio fila de dicha matriz.
   d) Los vectores columna de una matriz son una base de su espacio columna.
   e) Si los vectores columna de A son linealmente independientes, $Ax = b$ tiene exactamente una solución para todo b.
   f) Una matriz 5×7 nunca tiene columnas linealmente independientes.

Coordenadas

46. Sea $A = \{(1,-3,2)^T, (2,4,1)^T, (3,1,3)^T, (1,1,1)^T\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

   a) Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.
   b) Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

47. Sea $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base para un espacio vectorial V.

   a) Demostrar que $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ también es una base.
   b) Hallar la matriz de cambio de base A / $[v]_{\mathcal{B}_1} = A\,[v]_{\mathcal{B}_2}$

48. Sea $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base para un espacio vectorial V.

   a) Demostrar que $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ también es una base.
   b) Hallar la matriz de cambio de base M de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

49. Sea $V = \left\{ \sum\limits_{i=0}^{2} a_i x^i \;/\; a_i \in \mathbb{R} \right\}$ y $\mathcal{B}_1 = \left\{1, x, x^2\right\}$ base estándar de V.

   a) Probar que $\mathcal{B}_2 = \left\{x - 1, 1, (x-1)^2\right\}$ es otra base de V.
   b) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
   c) Utilizar lo obtenido en el ítem anterior y determinar $[p]_{\mathcal{B}_2}$ donde $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$. ¿Cuáles son las coordenadas de p en la base $\left\{1, (x-1)^2, x - 1\right\}$?

50. Hallar la matriz de cambio de base de:

   a) la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, a la base $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$.
   Determinar las coordenadas de A en la base $\mathcal{B}'$ para $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz cualquiera.
   b) La base $\left\{1, x, -1 + 2x^2, -3x + 4x^3\right\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ a la base $\left\{1, -\frac{1}{2} + x, -x + x^2, \frac{1}{4} - \frac{3}{2}x^2 + x^3\right\}$.

51. Sea $\mathcal{B} = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. ¿Existe una base $\mathcal{B}'$ tal que A es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$? De existir, hallar dicha base.