Trabajo práctico 2 Análisis matemático 2

Renzi Lucio, Rabbia Augusto, Reynoso Ignacio

Septiembre 2021

1

1.1 7)h)

Determinar el área de la region encerrada entre las curvas
$g(y) = y^2 - y$ y $f(y) = 2y^2 - 2y - 6$

Hayamos los puntos de intersección entre las curvas. Para ello tengamos en cuenta que:

$g(y) = f(y) \Leftrightarrow g(y) - f(y) = 0 \Leftrightarrow (y^2 - y) - (2y^2 - 2y - 6) \Leftrightarrow \; y^2 - y - 6 = 0$

Para ello utilizamos la fórmula resolvente:

$y_0; y_1 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow y_0 = -2 \wedge y_1 = 3$

Veamos qué relación hay entre f y g en $(-2, 3)$
Teniendo en cuenta que ambas funciones son continuas en $[-2, 3]$ por ser polinómicas, su diferencia será una función continua en este intervalo. Se debe conservar el signo de $g(y) - f(y)$ para todo y en $(-2, 3)$.
En efecto, supongamos que $\exists\, y', y'' \in (-2; 3) \;/\; [g(y') - f(y')] \cdot [g(y'') - f(y'')] < 0$.
Como $g - f$ es continua en $[y', y'']$, por el Teorema de Bolzano,
$\exists\, c \in (y', y'') \;/\; g(c) - f(c) = 0$, lo cual resulta absurdo ya que por ser $g(y) - f(y)$ una función de grado 2, debe tener como máximo 2 raíces en $\mathbb{R}$.
Por lo tanto, podemos tomar un valor arbitrario en $(-2, 3)$ y hayar su signo.
Tomando $y = 0 \Rightarrow g(0) - f(0) = 6$.
$\therefore\ \forall\, y \in (-2, 3)$, $g(y) - f(y) > 0$
Luego, $\forall\, y \in [-2, 3]$, $g(y) - f(y) \geq 0 \Leftrightarrow f(y) \leq g(y)$
Y al ser continua, será integrable y el área entre ambas curvas coincidirá con la integral $\int_{-2}^{3} [g(y) - f(y)]\, dy$.

Calculemos dicha integral:

$$\int_{-2}^{3} [g(y) - f(y)]\, dy = \int_{-2}^{3} [(y^2 - y) - (2y^2 - 2y - 6)] dy =$$

$$\int_{-2}^{3} [-y^2 + y + 6]\, dy = -\int_{-2}^{3} y^2 dy + \int_{-2}^{3} y dy + \int_{-2}^{3} 6 dy =$$

$$-\left(\frac{3^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) + \left(\frac{3^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + (6(3) - 6(-2)) = \frac{125}{6}$$

$\therefore$ El área entre las curvas es de $\frac{125}{6}$ unidades.

1.2 9)

Suponga que el área de la región determinada por la gráfica de una función continua positiva f y el eje x desde $x = a$ a $x = b$ es 4 unidades. Determine el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = 2f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$.

Por hipótesis, $\int_a^b f(x) = 4$ y $f(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$.

Sabemos que $f(x) > 0 \Rightarrow f(x) + f(x) > 0 + f(x) = f(x) \Rightarrow 2f(x) > f(x)$
Por lo tanto, $2f(x) - f(x) > 0\ \forall x \in [a, b]$
El area entre las curvas en el intervalo será dada por: $\int_a^b 2f(x) - f(x)dx$

$$\int_a^b [2f(x) - f(x)]dx = \int_a^b f(x)dx = 4$$

$\therefore$ El área entre las curvas es de 4 unidades.