Departamento de Ciencias de la Computación
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
(FCEIA-UNR)

Optimización Continua

Prof. Alejandro G. Marchetti

Definiciones de Optimalidad

Marzo de 2025

1. Conceptos Topológicos

Entorno-ε: Dado $\bar{\mathbf{x}}$ en $\mathbb{R}^n$, el entorno-ε alrededor de $\bar{\mathbf{x}}$ es el conjunto

$$B_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon\}$$

Punto interior: Un punto $\mathbf{x}$ es un punto interior de un conjunto $\mathcal{S}$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset \mathcal{S}$.

Interior de un conjunto: $\mathrm{int}(\mathcal{S})$ es el conjunto de los puntos interiores de $\mathcal{S}$.

Punto exterior: $\mathbf{x}$ es un punto exterior de $\mathcal{S}$ si es un punto interior de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}$.

Clausura de un conjunto: $\mathbf{x} \in \mathrm{cl}(\mathcal{S})$ si $\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}) \neq \emptyset \ \ \forall\, \varepsilon > 0$.

Conjunto cerrado: $\mathcal{S}$ es cerrado si $\mathcal{S} = \mathrm{cl}(\mathcal{S})$.

Conjunto abierto: $\mathcal{S}$ es abierto si $\mathcal{S} = \mathrm{int}(\mathcal{S})$.

Punto frontera: $\mathbf{x}$ es un punto frontera de $\mathcal{S}$ si $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ contiene al menos un punto en $\mathcal{S}$ y un punto fuera de $\mathcal{S}$ para todo $\varepsilon > 0$.

Frontera de un conjunto: La frontera de $\mathcal{S}$, denotada $\partial\mathcal{S}$, es el conjunto de todos los puntos frontera de $\mathcal{S}$.

Conjunto acotado: $\mathcal{S}$ es acotado si puede ser contenido en una esfera de radio suficiente.

$$\exists\ \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \ \text{ y } \ M > 0 \ \text{ tal que } \ \mathcal{S} \subseteq B_M(\bar{\mathbf{x}})$$

Conjunto compacto: $\mathcal{S}$ es compacto si es cerrado y acotado.

Punto límite: $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ es un punto límite de $\mathcal{S}$ si $\forall\ \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}})$ contiene un punto $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$ tal que $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. Notar que $\bar{\mathbf{x}}$ no es necesariamente un elemento de $\mathcal{S}$.

Otra definición de conjunto cerrado: $\mathcal{S}$ es cerrado si y solo si para cualquier sucesión de puntos $\{\mathbf{x}_k\}$ contenida en $\mathcal{S}$ con punto límite $\bar{\mathbf{x}}$, se cumple que $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}$.

Ejemplo 1 *Sea* $\mathcal{S} = \left\{(x_1, x_2) : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$.

$\mathcal{S}$ *es cerrado, es decir,* $\mathcal{S} = \mathrm{cl}(\mathcal{S})$.

$\mathrm{int}(\mathcal{S}) = \left\{(x_1, x_2) : \ x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$.

$\partial\mathcal{S} = \left\{(x_1, x_2) : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$.

Sucesiones y Subsucesiones

Se dice que una sucesión de vectores $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_3, \ldots$ converge al punto límite $\bar{\mathbf{x}}$ si $\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\| \to 0$ cuándo $\mathbf{x}_k \to \infty$, es decir, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ entero positivo tal que $\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon\ \forall\ k \geq N$.

La sucesión se denota $\{\mathbf{x}_k\}$.

El punto límite se representa como

$$\mathbf{x}_k \to \bar{\mathbf{x}} \ \text{ cuándo } \ k \to \infty$$

o

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \bar{\mathbf{x}}$$

Eliminando ciertos elementos de una sucesión obtenemos una subsucesión $\{\mathbf{x}_k\}_{\mathcal{K}}$ donde $\mathcal{K}$ es el subconjunto de enteros positivos.

2. Definiciones de Optimalidad

2.1. Ínfimo y Supremo

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacio ($\mathcal{S} \neq \emptyset$).

Definición 1 (Ínfimo, Supremo) *El ínfimo de $\mathcal{S}$, denotado por* $\inf \mathcal{S}$*, en caso de existir, es la mayor de las cotas inferiores de $\mathcal{S}$, es decir, un número α tal que:*

(i) $z \geq \alpha, \ \ \forall\, z \in \mathcal{S}$,

(ii) $\forall\, \bar{\alpha} > \alpha, \ \exists\, z \in \mathcal{S}$ tal que $z < \bar{\alpha}$.

Similarmente, el supremo de $\mathcal{S}$, denotado por $\sup \mathcal{S}$*, en caso de existir, es la menor de las cotas superiores de $\mathcal{S}$, es decir, un número α tal que:*

(i) $z \leq \alpha, \ \ \forall\, z \in \mathcal{S}$,

(ii) $\forall\, \bar{\alpha} < \alpha, \ \exists\, z \in \mathcal{S}$ tal que $z > \bar{\alpha}$.

Teorema 1 (Axioma de Completitud) *Si un conjunto no vacío de números reales está acotado superiormente, entonces tiene un supremo. Si un conjunto no vacío de números reales está acotado inferiormente, entonces tiene un ínfimo.*

El ínfimo de un conjunto es siempre una cota inferior del mismo, pero no tiene porqué pertenecer a él. Cuando lo hace, se denomina un mínimo (lo mismo vale para el supremo de un conjunto, y entonces se denomina un máximo).

Ejemplo 2 *Sea $\mathcal{S} = (0, +\infty) = \{z \in \mathbb{R} : \ z > 0\}$. Claramente* $\inf \mathcal{S} = 0$ *y $0 \notin \mathcal{S}$.*

Notación. Sea $\mathcal{S} := \{f(\mathbf{x}) : \ \mathbf{x} \in \mathcal{D}\}$ la imagen de la región factible $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ de un problema de optimización con función costo f. Luego, la notación

$$\inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \quad \text{o} \quad \inf\{f(\mathbf{x}) : \ \mathbf{x} \in \mathcal{D}\}$$

se refiere al número $\inf \mathcal{S}$. Similarmente,

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \quad \text{o} \quad \sup\{f(\mathbf{x}) : \ \mathbf{x} \in \mathcal{D}\}$$

se refiere al número $\sup \mathcal{S}$.

Los números $\inf \mathcal{S}$ y $\sup \mathcal{S}$ pueden no pertenecer a la imagen de f.

Ejemplo 3 *Claramente,* $\inf\{\exp(x) : \ x \in (0, +\infty)\} = 1$, *pero* $\exp(x) > 1 \ \forall\, x \in (0, +\infty)$.

2.2. Mínimo y Máximo

Considere el problema estándar

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x})$$

donde $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ denota el conjunto o región factible.

Todo $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ es un punto factible (o solución factible).

Todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{x} \notin \mathcal{D}\}$ es un punto no factible.

Definición 2 (Mínimo (global), Mínimo (global) estricto) *Un punto $\mathbf{x}^\star \in \mathcal{D}$ es un mínimo (global) de f en $\mathcal{D}$ si*

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^\star), \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathcal{D},$$

es decir, un mínimo es un punto factible cuyo valor de la función costo es menor o igual al valor de la función costo de todos los demás puntos factibles.

Se dice que es un mínimo (global) estricto de f en $\mathcal{D}$ si

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^\star), \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^\star$$

Un máximo global se define invirtiendo la desigualdad.

Definición 3 (Máximo (global), Máximo (global) estricto) *Un punto $\mathbf{x}^\star \in \mathcal{D}$ es un máximo (global) de f en $\mathcal{D}$ si*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^\star), \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathcal{D},$$

Se dice que es un máximo (global) estricto de f en $\mathcal{D}$ si

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^\star), \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^\star$$

Una distinción importante entre mínimo/máximo e ínfimo/supremo es que el valor $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{D}\}$ debe obtenerse en uno o más puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, mientras que el valor $\inf\{f(\mathbf{x}) : \ \mathbf{x} \in \mathcal{D}\}$ no corresponde necesariamente a un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

Si un mínimo (respectivamente máximo) existe, entonces su valor será igual al ínfimo (respectivamente supremo).

Si un mínimo existe, no necesariamente es único. Introducimos la notación

$$\arg\min\{f(\mathbf{x}) : \ \mathbf{x} \in \mathcal{D}\} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} : \ f(\mathbf{x}) = \inf\{f(\mathbf{x}) : \ \mathbf{x} \in \mathcal{D}\}\}$$

para denotar el conjunto de mínimos.

Nos referimos a un mínimo $\mathbf{x}^\star$ del problema de optimización como:

- una solución óptima.
- una solución óptima global.
- una solución.

Nos referimos al número real $f(\mathbf{x}^\star)$ como:

- el valor óptimo.
- el valor de la solución óptima.

Sin importar el número de mínimos, existe un único valor óptimo $\text{mín}\{f(\mathbf{x}):\ \mathbf{x}\in\mathcal{D}\}$.

Definición 4 (Mínimo local, Mínimo local estricto) *Se dice que un punto* $\mathbf{x}^\star\in\mathcal{D}$ *es un mínimo local de* f *en* $\mathcal{D}$ *si*

$$\exists\ \varepsilon>0\ \ \text{tal que}\ \ f(\mathbf{x})\geq f(\mathbf{x}^\star),\quad \forall\ \mathbf{x}\in\beta_\varepsilon(\mathbf{x}^\star)\cap\mathcal{D}.$$

Se dice que $\mathbf{x}^\star$ *es un mínimo local estricto si*

$$\exists\ \varepsilon>0\ \ \text{tal que}\ \ f(\mathbf{x})> f(\mathbf{x}^\star),\quad \forall\ \mathbf{x}\in\beta_\varepsilon(\mathbf{x}^\star)\setminus\{\mathbf{x}^\star\}\cap\mathcal{D}.$$

Nota: un mínimo global es también un mínimo local (con ε arbitrariamente grande).

Definición 5 (Máximo local, Máximo local estricto) *Se dice que un punto* $\mathbf{x}^\star\in\mathcal{D}$ *es un máximo local de* f *en* $\mathcal{D}$ *si*

$$\exists\ \varepsilon>0\ \ \text{tal que}\ \ f(\mathbf{x})\leq f(\mathbf{x}^\star),\quad \forall\ \mathbf{x}\in\beta_\varepsilon(\mathbf{x}^\star)\cap\mathcal{D}.$$

Se dice que $\mathbf{x}^\star$ *es un máximo local estricto si*

$$\exists\ \varepsilon>0\ \ \text{tal que}\ \ f(\mathbf{x})< f(\mathbf{x}^\star),\quad \forall\ \mathbf{x}\in\beta_\varepsilon(\mathbf{x}^\star)\setminus\{\mathbf{x}^\star\}\cap\mathcal{D}.$$

La Figura 1 ilustra las distintas definiciones de mínimos y máximos. El punto x^1 es el único máximo global; el valor de la función objetivo en este punto es el supremo. El punto x^4 es el único mínimo global; el valor de la función objetivo en este punto es el ínfimo. Los puntos a, x^2, x^4 y b son mínimos locales estrictos ya que existe un entorno alrededor de estos puntos en cuyo interior son mínimos únicos (en la intersección de dichos entornos con la región factible $\mathcal{D}=[a,b]$). De igual modo, los puntos x^1 y x^3 son máximos locales estrictos. Finalmente, el punto x^5 es simultaneamente un mínimo local y un máximo local, ya que existe un entorno alrededor de x^5 en el cual la función objetivo permanece constante. El punto x^5 no es ni un mínimo local estricto ni un máximo local estricto.

Ejemplo 4 *Considere la función*

$$f(x)=\begin{cases}+1 & \textit{para } x<0\\ -1 & \textit{en caso contrario}\end{cases}$$

El punto $x^\star=-1$ *es un mínimo local de*

$$\min_{\mathbf{x}\in[-2,2]}\ f(x)$$

con valor $f(x^\star)=+1$*. El valor óptimo es* -1*, y*

$$\arg\min\{f(x):\ x\in[-2,2]\}=[0,2]$$

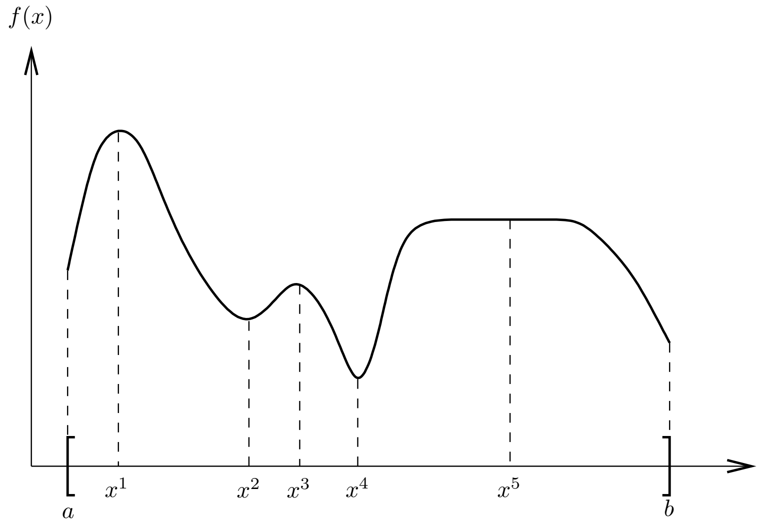

Figura 1: Varios tipos de mínimos y máximos.

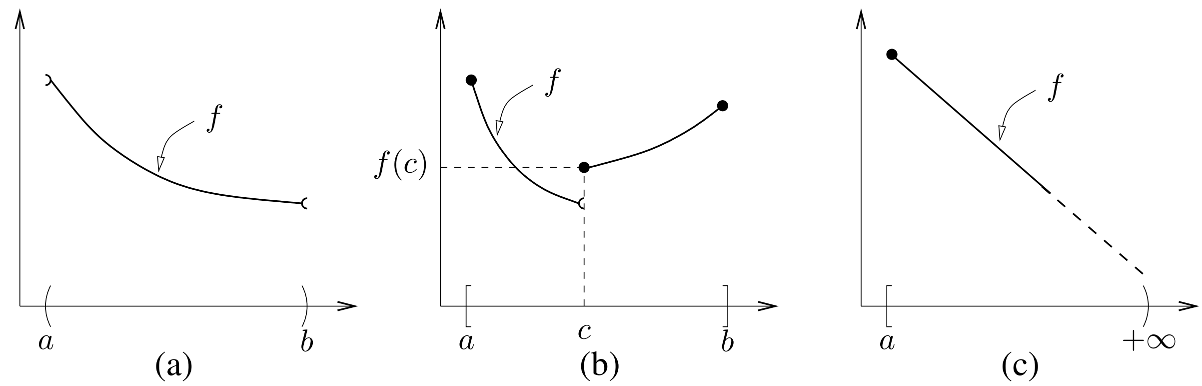

Figura 2: Inexistencia de una solución minimizadora.

2.3. Existencia de Mínimos y Máximos

Al optimizar una función en una región o conjunto dado, una pregunta crucial que nos debemos hacer es si existe o no un minimizador o un maximizador para dicha función en dicha región factible.

La Figura 2 ilustra tres casos en los que no existe un mínimo. En la Figura 2a, el ínfimo de f en $\mathcal{S} = (a, b)$ está dado por $f(b)$, pero como $\mathcal{S}$ no es cerrado, y en particular $b \notin \mathcal{S}$, no existe un mínimo. En la Figura 2b, el ínfimo de f en $\mathcal{S} = [a, b]$ está dado por el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c desde la izquierda, es decir, $\text{ínf}\{f(x) : \ x \in \mathcal{S}\} = \text{lím}_{x \to c^-} f(x)$. Sin embargo, como f es discontinuo en c, no existe una solución minimizadora. Finalmente, la Figura 2c ilustra la situación en la que la función f no está acotada en el conjunto no acotado $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\}$.

El siguiente teorema establece que si $\mathcal{S}$ es no vacio, cerrado y acotado, y si la función f es contínua en $\mathcal{S}$, luego existe un mínimo (y un máximo) en $\mathcal{S}$.

Teorema 2 (Teorema de Weierstrass) *Sea $\mathcal{S} \neq \emptyset$, compacto, y sea $f : \ \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathcal{S}$. Luego el problema $\text{mín}\{f(\mathbf{x}) : \ \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$ tiene un mínimo, es decir, existe una solución que minimiza $f(\mathbf{x})$ en $\mathcal{S}$.*

Demostración. Siendo que f es continua en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ es cerrado y acotado, entonces f es acotada inferiormente en $\mathcal{S}$. Por lo tanto, como $\mathcal{S} \neq \emptyset$, existe una máxima cota inferior $\alpha := \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$. Sea $0 < \varepsilon < 1$, y sea $\mathcal{S}_k = \{\mathbf{x} \in \mathcal{S} : \ \alpha \leq f(\mathbf{x}) \leq \alpha + \varepsilon^k\}$ para $k = 1, 2, \ldots$. Por la definición de ínfimo, $\mathcal{S}_k \neq \emptyset$ para cada k, y por ende se puede construir una sucesión de puntos $\{\mathbf{x}_k\} \subseteq \mathcal{S}$ seleccionando un punto $\mathbf{x}_k \in \mathcal{S}_k$, para cada $k = 1, 2, \ldots$. Como $\mathcal{S}$ es acotada, existe una subsucesión convergente $\{\mathbf{x}_k\}_{\mathcal{K}} \subset \mathcal{S}$ indexada por el conjunto $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}$, cuyo límite es $\bar{\mathbf{x}}$. Siendo $\mathcal{S}$ cerrado, tenemos que $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}$, y siendo f continua, y debido a que $\alpha \leq f(\mathbf{x}_k) \leq \alpha + \varepsilon^k$, para cada k, tenemos que

$$\alpha = \lim_{\substack{k \to \infty \\ k \in \mathcal{K}}} f(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}})$$

Por lo tanto, existe una solución $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) = \alpha = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$, y $\bar{\mathbf{x}}$ es un mínimo.
$\square$

Interpretación del Teorema de Weierstrass. Las hipótesis del teorema se pueden justificar de la siguiente manera:

- La región factible debe ser no vacía. De otro modo no habría puntos factibles donde lograr un mínimo.
- La región factible debe contener sus puntos frontera, lo cual se asegura si $\mathcal{S}$ es cerrado.
- La función objetivo debe ser continua en la región factible. De otro modo el límite en un punto puede no existir o ser distinto al valor de la función en dicho punto.
- La región factible debe ser acotada porque sino hasta una función continua puede ser no acotada en la región factible.

Ejemplo 5 *El Teorema de Weirerstrass establece que un mínimo (y un máximo) de*

$$\min_{x \in [-1,1]} x^2$$

existe, ya que $[-1, 1]$ es no vacío, compacto, y $x \to x^2$ es una función continua en $[-1, 1]$. Por otra parte, pueden existir mínimos aunque el conjunto no sea compacto o la función no sea contínua, ya que el Teorema de Weierstrass solo prove condiciones suficientes para la existencia de un mínimo. Este es el caso del problema

$$\min_{x \in (-1,1)} x^2$$

cuyo mínimo es $x = 0 \in \mathcal{S} = (-1, 1)$.

Ejemplo 6 *Considere el siguiente problema NLP:*

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 - x_2 - 3 \leq 0 \\ & x_2 - 1 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

La Figura 3 ilustra la región factible. El problema consiste en hallar un punto en la región factible con el menor valor posible de $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$. Notar que los puntos (x_1, x_2) tales que $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = c$ corresponden a un círculo de radio $\sqrt{c}$, centrado en $(3, 2)$. Dicho círculo es la curva de contorno de la función objetivo con el valor c. Para minimizar c, debemos hallar el círculo de menor radio que intersecta la región factible. Como se muestra en la Figura 3, *el menor círculo corresponde a* $c = 2$*, e intersecta la región factible en el punto* $(2, 1)$*. Por lo tanto, la solución óptima corresponde al punto* $(2, 1)$ *y tiene un valor de la función objetivo igual a 2.*

Este ejemplo también permite ilustrar la aplicación del Teorema de Weierstrass. La función objetivo es contínua y la región factible es no vacía, cerrada y acotada. Luego, por el Teorema de Weierstrass, existe un mínimo para este problema.

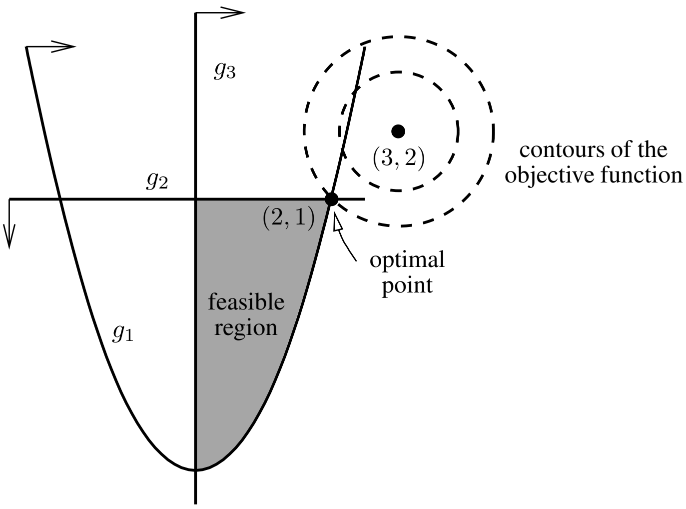

Figura 3: Solución geométrica del problema del Ejemplo 6.