FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA 2

EXAMEN FINAL

Apellido y nombre: Carrera: Legajo:

PARTE PRÁCTICA

Justifique debidamente todas sus respuestas.

1. Considerar los vectores $v_1 = (1, 2, 2, 3)$; $v_2 = (-2, 1, m, m-1)$; $v_3 = (4, 1, 1, -2)$, $v_4 = (2, 2, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^4$. Se pide:

   (a) Determinar para qué valor/valores de m el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es linealmente dependiente.

   (b) Si (S) es el sistema $Ax = b$ donde b es el vector nulo de $\mathbb{R}^4$ y $A = (v_1|v_2|v_3|v_4)$ es la matriz cuadrada cuya primer, segunda, tercer y cuarta columna son v_1, v_2, v_3 y v_4 respectivamente, determinar los siguientes conjuntos:
   $CD = \{m \in \mathbb{R} : \ (S) \ \textit{es compatible determinado}\}$.
   $CI = \{m \in \mathbb{R} : \ (S) \ \textit{es compatible indeterminado}\}$.
   $I = \{m \in \mathbb{R} : \ (S) \ \textit{incompatible}\}$.

2. Considerar las matrices A, B y $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ donde B es una matriz simétrica y $|B| = 4$.

   (a) Hallar X resolviendo la ecuación matricial dada por $2(X^tB)^t + BX - BA = I$.

   (b) Hallar $|X|$ siendo X la matriz que verifica la ecuación del item anterior y sabiendo que:

$$BA + I = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Considere los puntos $A(2, -1, 1)$, $B(4, 0, 2)$ y $C(-3, 1, -2)$. Se pide:

   (a) Hallar las ecuaciones paramétricas y general del plano π que contiene los puntos A, B y C.

   (b) Expresar la ecuación de la recta r que es perpendicuar al plano π y que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$.

   (c) Hallar el punto Q que es simétrico a P respecto al plano π.

4. Indicar verdadero o falso. Justificar adecuadamente.

   (a) $\dfrac{y-1}{16} - \dfrac{x-2}{9} = 1$ es la ecuación de una hipérbola de centro $(2, 1)$ y focos $(2, -4)$ y $(2, 8)$.

   (b) Si $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base de $\mathbb{F}^3$ entonces $\{w_1, w_1 + 2w_2, w_2 + 3w_3\}$ también es una base de $\mathbb{F}^3$.

   (c) Si A es una matriz invertible tal que $A^2 = A + I$ entonces $A^{-1} = A - I$.

Complemento para alumnos libres

5. Siete amigos van al cine.

    (a) ¿De cuántas formas pueden sentarse los 7 amigos en una fila de 7 butacas?

    (b) Al llegar, son informados que quedan sólo 4 entradas. ¿De cuántas formas podrían repartirse estas entradas para ver la película?

6. Sea $\mathbb{L}$ el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos fijos $(2, 3, 4)$ y $(2, -3, 4)$ es constante e igual a 8.

    Identificar el lugar geométrico $\mathbb{L}$ y expresar su ecuación.

PARTE TEÓRICA

1. En los siguientes items, indique la veracidad o falsedad de los enunciados **justificando** adecuadamente.

   (a) Si A y B son dos conjuntos tales que $|A| = n$ y $|B| = m$ y, $\mathcal{F}(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones de A en B, entonces $|\mathcal{F}(A, B)| = n^m$.

   (b) El determinante de una matriz elemental es no nulo.

   (c) El determinante de una matriz triangular superior es el producto de los elementos de la diagonal.

2. Desarrolle las ecuaciones paramétricas del plano a partir de tres puntos no alineados. Explique sus elementos. Explique cómo obtenerlas a partir de la ecuación general del plano, y recíprocamente.

3. Desarrolle los conceptos de dependencia e independencia lineal en $\mathbb{F}^n$, para un cuerpo $\mathbb{F}$. Explique mediante ejemplos cómo la resolución de sistemas lineales permite determinar (in)dependencia lineal. Defina base de $\mathbb{F}^n$, si hace falta otro concepto, explíquelo brevemente.

4. Elija una de las siguientes cuádricas: hiperboloide de una hoja o paraboloide elíptico. Deduzca las trazas con los planos coordenados y planos paralelos a los planos coordenados. De un ejemplo y grafique.