Práctica 4: ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO. ORTOGONALIDAD.

Cuando no se especifica lo contrario, el producto interno en $\mathbb{R}^n$ es $x^T y$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se considera con suma y producto por escalares habituales.

Un conjunto de vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un *conjunto ortogonal* si sus vectores son ortogonales dos a dos, es decir, $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ cuando $i \neq j$. Diremos que el conjunto dado es un *conjunto ortonormal* si es un conjunto ortogonal y todos sus vectores tiene norma igual a 1, es decir, es un conjunto ortogonal y $\|u_i\| = \sqrt{\langle u_i, u_i\rangle} = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Espacios vectoriales con producto interno

1. Verificar en cada caso que el producto definido es producto interno en V.

   a) Sea $V = \mathbb{R}^n$, un vector $v \in V$ lo pensamos como $v = (v_1, \cdots, v_n)^T$. Definiendo
   $$\langle u, v\rangle = u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$
   Resulta $\langle u, v\rangle$ así definido un producto interno en V.
   Sea $V = \mathbb{C}^n$. Definiendo
   $$\langle u, v\rangle = u^T \bar{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}.$$
   donde $\bar{v}$ es el vector de $\mathbb{C}^n$ cuyas componentes son los conjugados de las componentes del vector v. Resulta $\langle u, v\rangle$ así definido un producto interno en V.
   Este producto interno definido en $\mathbb{F}^n$ se conoce como **producto interno canónico**.

   b) En $V = \mathbb{R}^2$ se puede considerar para $u = (u_1, u_2)^T$ y $v = (v_1, v_2)^T$
   $$\langle u, v\rangle = u_1 v_1 - u_2 v_1 - u_1 v_2 + 4 u_2 v_2.$$
   Esto define un producto interno en V.

   c) Sea $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$, para $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, definamos
   $$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} \overline{b_{ij}},$$
   esto constituye un producto interno en V.
   Si dada una matriz A se considera su ***matriz adjunta*** dada por su matriz transpuesta conjugada $B^* = \bar{B}^T$, es decir que $b^*_{ij} = \overline{b_{ji}}$, puede expresarse este producto interno en función de la traza de una matriz
   $$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*) = \operatorname{tr}(B^* A).$$

   d) Sean $t_0, \cdots, t_n$ escalares distintos. Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{F}$ de grado menor o igual a n. Para $p, q \in V$ definimos
   $$\langle p, q\rangle = p(t_0)\overline{q(t_0)} + \cdots + p(t_n)\overline{q(t_n)}.$$

   e) Sea V el espacio vectorial de las funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$. Para $f, g \in V$ sea
   $$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt,$$
   esto define un producto interno.

2. Determinar en cada caso si el producto definido es un producto interno en $\mathbb{R}^n$. En caso de no serlo, indicar qué axioma no se verifica.

a) $u \times v = \sum_{i=1}^{n} u_i \, |v_i|$.

b) $u \times v = \left| \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \right|$.

c) $u \times v = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{i=1}^{n} v_i$.

d) $u \times v = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

3. Verificar que $\langle f, g \rangle = \int_1^e \ln(x) f(x) g(x) dx$ es un producto interno en $\mathcal{C}([1, e])$, espacio de las funciones continuas a valores reales en el intervalo $[1, e]$.

4. Dados $u, v \in V$ espacio vectorial con producto interno, probar que $u = v$ si y solo si $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $w \in V$.

Ortogonalidad y norma

5. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de dos vectores linealmente independientes que no sean ortogonales y un ejemplo de dos vectores ortogonales que no sean linealmente independientes.

6. Dados los vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, determinar qué par de vectores son ortogonales.

7. Dada la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$
calcular:

   a) Un vector no nulo x ortogonal al espacio fila de A.

   b) Un vector no nulo y ortogonal al espacio columna de A.

   c) Un vector no nulo z ortogonal al espacio nulo de A.

8. Verificar la ley del paralelogramo para los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$:
$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

9. Sea $\mathcal{C}([1, e])$, con el producto interno definido en el ejercicio 3.

   a) Calcular $\|f\|$ para $f(x) = \sqrt{2}$.

   b) Hallar un polinomio de grado uno que sea ortogonal a $g(x) = 1$.

10. Sea $u = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6} \right)^T$ y sea $P = uu^T$.

    a) Probar que $Pu = u$.

    b) Probar que si v es ortogonal a u entonces $Pv = 0$.

    c) ¿Cuál es la dimensión de $N(P)$?. Encontrar una base para $N(P)$.

11. Dados $u = (u_1, u_2)^T, v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ definimos el producto interno:
$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_1 - u_1 v_2 + 4 u_2 v_2.$$

    a) Calcular $\|e_1\|$ y $\|e_2\|$.

    b) Verificar la desigualdad de Cauchy-Swartz para $u = (u_1, u_2)^T$ y $v = e_1$.

Bases ortogonales

12. *a*) Verificar que los vectores $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales.

    b) Determinar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ donde dos de sus vectores son paralelos a los dados en el apartado anterior.

13. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Si $dim(V) = n$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de V, probar que:

    a) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.

    b) Si $\|v_i\| = 1$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, v_i \rangle|^2 \quad \forall x \in V$.

14. Sea $W = \langle \{v_1, \ldots, v_p\} \rangle$. Mostrar que si x es ortogonal a todo v_j, para $j \in \{1, \ldots, p\}$, luego x es ortogonal a todo vector en W.

15. En cada caso, mostrar que $\{u_1, u_2\}$ o $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente, y luego expresar a x como combinación lineal de la base correspondiente.

    a) $u_1 = \begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix}9\\-7\end{bmatrix}$.

    b) $u_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix}8\\-4\\-3\end{bmatrix}$.

Espacios ortogonales - Complementos ortogonales

16. Sea A una matriz $m \times n$. Demostrar que todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede escribirse en la forma $x = p + u$, donde p está en $Fil(A)$ y $u \in nul(A)$. Mostrar que si la ecuación $Ax = b$ es consistente, entonces hay una única p en $Fil(A)$ tal que $Ap = b$.

17. Mostrar que si $x \in W \cap W^\perp$, entonces $x = 0$.

18. Sea V un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio vectorial de V. Demostrar las siguientes proposiciones:

    a) $v \in W^\perp$ si y solo si v es ortogonal a todo vector $u \in U$ donde $\langle U \rangle = W$.

    b) $W^\perp$ es un subespacio vectorial de V.

    c) $(W^\perp)^\perp = W$.

19. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices reales de tamaño $n \times n$ y

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij},$$

    un producto interno en el espacio de las matrices reales $n \times n$.

    a) Hallar una base ortogonal para $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para dicho producto interno.

    b) Hallar $W^\perp$ siendo $W \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio generado por $\left\{ \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

    c) Ídem *b*) para $W = \left\{ \begin{bmatrix}a & b & c\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

20. Calcular el complemento ortogonal del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, 2)^T$ y $(1, 2, 3)^T$.

    Sugerencia: Pensar los vectores como filas de una matriz A.

21. Sea S el hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que contienen a todos los vectores que satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Calcular una base para el espacio $S^\perp$.

22. Sean

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sean $V = \langle \{u_1, u_2, u_3\} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ y $W = \langle \{u_4\} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

a) Probar que $V = W^{\perp}$.

b) Escribir x como suma de dos vectores, uno en V y el otro en W.

Proceso de Ortogonalizacin de Gram-Schmidt

23. *a*) Sean $v_1 = (2,1)^T, v_2 = (-1,1)^T \in \mathbb{R}^2$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt y encontrar una base ortogonal $\{w_1, w_2\}$ en $\mathbb{R}^2$. Dibujar los vectores v_1, v_2, w_1 y w_2.

b) Sean $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,1), v_3 = (1,1,2) \in \mathbb{R}^3$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt y encontrar una base ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$ en $\mathbb{R}^3$. Dibujar los vectores v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 y w^3.

24. *a*) Encontrar un conjunto ortonormal q_1, q_2, q_3 para el cual q_1 y q_2 generan el espacio columna de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) ¿Cuál es el espacio asociado a A que contiene a q_3?

25. Sean $V = \mathcal{C}([-1,1])$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\ dx$, $B = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ donde $p_j : [-1,1] \to \mathbb{R} / p_j(x) = x^j, j = 0,1,2,3$ y $W = \langle B \rangle$.
Aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt y obtener una base ortogonal B' de W.

26. Siendo $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, utilizar el proceso de Gram-Schimdt para producir una base ortogonal de $\langle \{u, v\} \rangle$.

27. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontrar una base ortogonal para el espacio columna de A.

Proyección ortogonal - Descomposición ortogonal

28. En cada uno de los siguientes casos, considerar a L como el subespacio de $\mathbb{R}^3$ tal que $L = \langle a \rangle$. Calcular $proy_{s/L}\ b$ y comprobar que el vector $b - proy_{s/L}\ b$ es perpendicular al vector a.

a) $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $a = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

29. Sea W un subespacio vectorial de V y $\{w_1, \ldots, w_p\}$ base ortogonal de W. Sea $v \in V - W$, probar que $v - proy_{s/W}\ v$ es perpendicular a w para todo $w \in W$.

30. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_p\}$ y sea $\{v_1, \ldots, v_q\}$ una base ortogonal de $W^{\perp}$.

a) Explicar por qué $\{w_1, \ldots, w_p, v_1, \ldots, v_q\}$ es un conjunto ortogonal.

b) Explicar por qué el conjunto definido en el ítem anterior genera $\mathbb{R}^n$.
Sugerencia: Utilizar el ejercicio anterior.

c) Demostrar que $\dim W + \dim W^{\perp} = n$.

31. Sea W el subespacio generado por $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   a) Si $y = (3, 1, 5, 1)^T$, escribirlo como la suma de un vector en W y uno en $W^{\perp}$.

   b) Si $y = (3, -1, 1, 13)^T$, encontrar el punto más cercano a y en W.

   c) Si $y = (2, 4, 0, 1)^T$, encontrar la mejor aproximación a y mediante vectores de la forma $c_1 v_1 + c_2 v_2$. Hallar la distancia de y a W.

32. Sean $u_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$, $u_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$ y $U = [u^1 u^2]$.

   a) Calcular $U^T U$ y UU^T.

   b) Sean $y = (4, 8, 1)^T$ y $W = C(U)$. Calcular $proy_{s/W}$ y y $(UU^T)y$.