

Práctica 6: FORMAS DE JORDAN

1. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Mostrar que cada uno de los siguientes subespacios son invariantes por T :

$$i) \{0\} \quad ii) V \quad iii) \text{nul}(T) \quad iv) \text{Img}(T).$$

2. Sean $\{W_i\}$ una colección de subespacios de un espacio vectorial V invariantes por T . Mostrar que $W = \bigcap_i W_i$ también es invariante por T .

3. Hallar todos los subespacios invariantes de $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ considerada como operador lineal sobre \mathbb{R}^2 .

4. Sea \hat{T} la restricción de un operador T a un subespacio invariante W , es decir $\hat{T}w = Tw, \forall w \in W$. Probar que para todo polinomio $p(t)$, $f(\hat{T})w = f(T)w$.

5. Sea $T : V \rightarrow V$, $T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos que para todo $v \in V$ se tiene que $T^k v = 0$ pero $T^{k-1}v \neq 0$. Probar que:

a) $S = \{T^{k-1}, \dots, Tv, v\}$ es linealmente independiente.

b) El subespacio $W = \langle X \rangle$ es invariante por T .

6. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, probar que

a) $\{0\} = \text{nul}(T^0) \subset \text{nul}(T^1) \subset \dots \subset \text{nul}(T^k) \subset \text{nul}(T^{k+1}) \subset \dots$.

b) $\text{nul}(T^m) = \text{nul}(T^{m+1}) \Rightarrow \text{nul}(T^m) = \text{nul}(T^{m+1}) = \text{nul}(T^{m+2}) = \dots$.

c) Si $\dim V = n$ luego $\text{nul}(T^n) = \text{nul}(T^{n+1}) = \dots$.

7. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$, luego $V = \text{nul}(T^n) \oplus \text{img}(T^n)$.

8. Determinar todas las posibles formas canónicas de Jordan para una matriz de orden 5 cuyo polinomio minimal es $m(t) = (t - 2)^2$.

9. Determinar todas las posibles formas canónicas de Jordan para una matriz con polinomio característico $p_A(t) = (t + 2)^3(t - 7)^2$. En cada caso determinar el polinomio minimal $m(t)$.