Materia Optativa

Optimización Continua

Dr. Alejandro Marchetti

Departamento de Ciencias de la Computación
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA)
Universidad Nacional de Rosario (UNR)

Centro Internacional Franco-Argentino de Ciencias de la Información y de Sistemas
CIFASIS (CONICET - UNR)

Marzo de 2025

Importancia de la Optimización

- La optimización desempeña un papel fundamental en la tecnología y las ciencias, ya que permite mejorar el rendimiento, reducir costos y maximizar la eficiencia en una amplia variedad de aplicaciones.

- En ingeniería, química, economía y biología, la optimización es clave para la toma de decisiones óptimas bajo restricciones complejas.

- En las ciencias de la computación, la optimización es esencial para el desarrollo de algoritmos eficientes, la gestión de recursos computacionales y la mejora del rendimiento de sistemas de inteligencia artificial y aprendizaje automático.

- Las técnicas de optimización permiten abordar problemas cada vez más desafiantes en un mundo impulsado por los datos y la automatización.

Clasificación de Problemas de Optimización

Clasificación basada en el tipo de variables de decisión

Optimización Continua:	Las variables toman valores continuos
Optimización Entera (IP):	Las variables toman valores enteros
Optimización Mixta-Entera (MIP/MINLP):	Una combinación de variables enteras y continuas
Optimización Binaria	Caso especial en que las variables toman valores 0/1

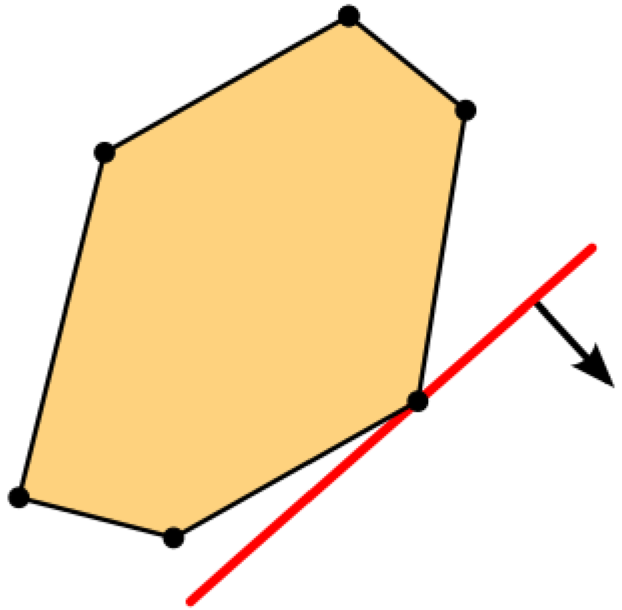
Nota: todo problema con variables enteras se puede reformular como un problema con variables binarias.

Optimización Continua

Optimización Lineal: La función objetivo y las restricciones son lineales

Programación Matemática Lineal
Linear Programming (LP)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathsf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$



$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ son las variables de decisión.

Optimización Continua

Optimización No Lineal: La función objetivo y/o las restricciones son no lineales

Programación Matemática No Lineal
Nonlinear Programming (NLP)

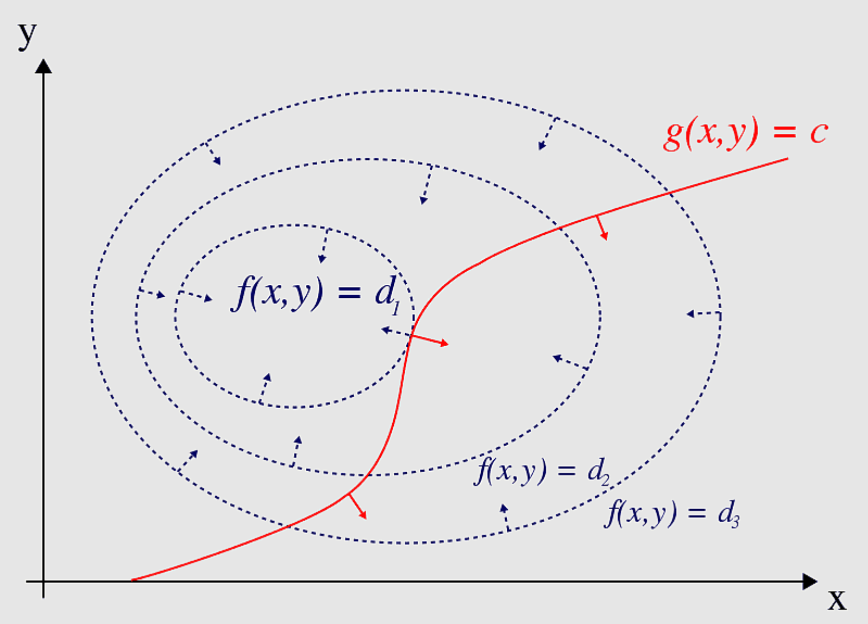
$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\
& \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ son las variables de decisión.

$f(\mathbf{x})$ es la función objetivo a minimizar.

$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, n_g$, son las restricciones de desigualdad.

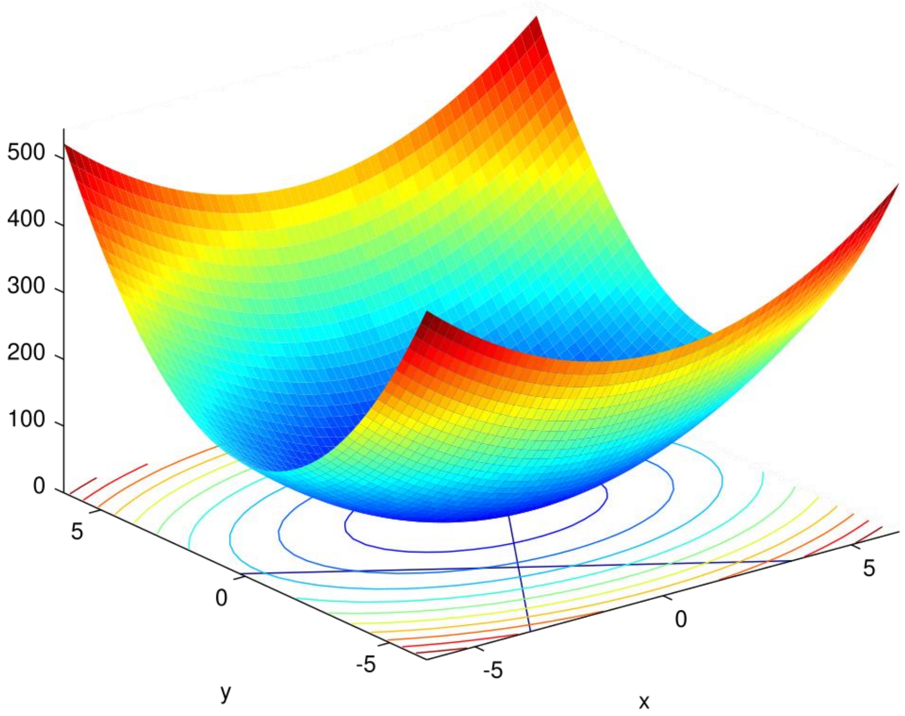
$h_j(\mathbf{x}) = 0, \;\; j = 1, \ldots, n_h$, son las restricciones de igualdad.

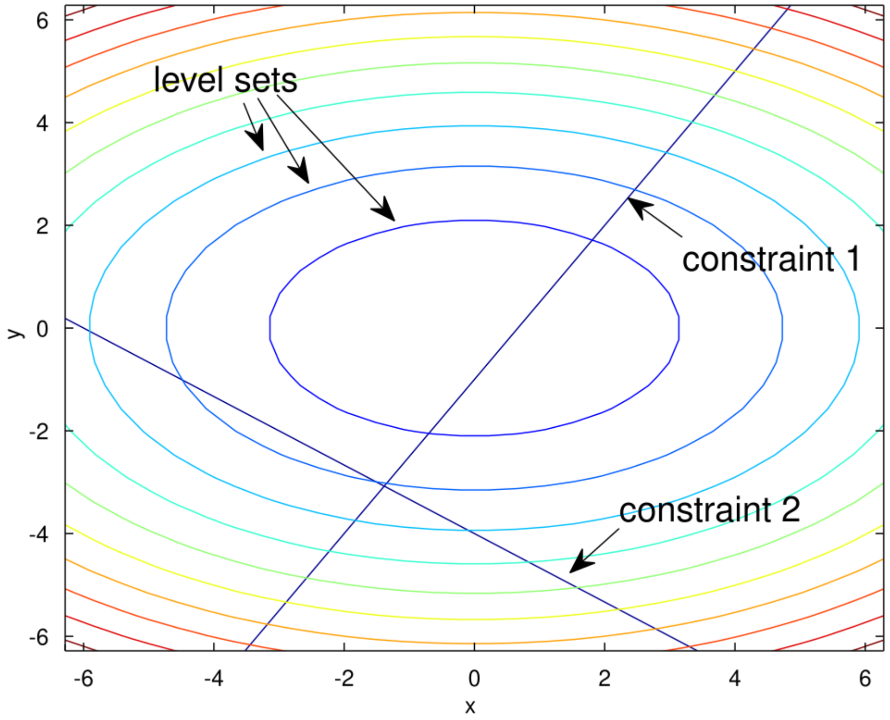


Optimización Continua

Optimización Cuadrática: Función objetivo cuadrática y restricciones lineales

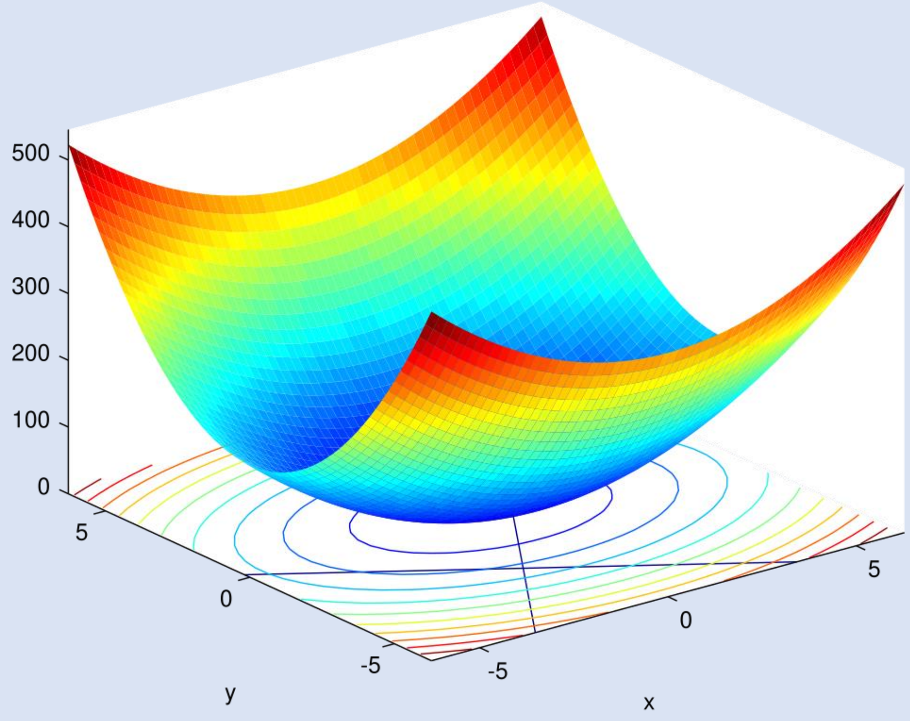
Programación Matemática Cuadrática
Quadratic Programming (QP)





Optimización Convexa

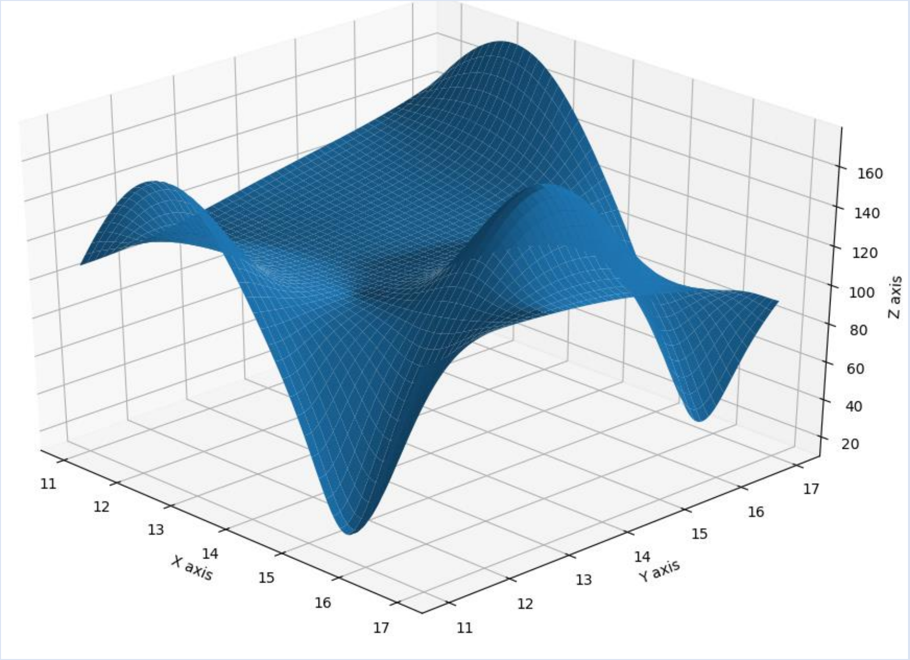
La función objetivo y las restricciones son funciones convexas



Un mínimo local es un mínimo global

Optimización No Convexa

La función objetivo y/o al menos una restricción son funciones no convexas



Pueden existir mínimos locales suboptimos

Optimización Local

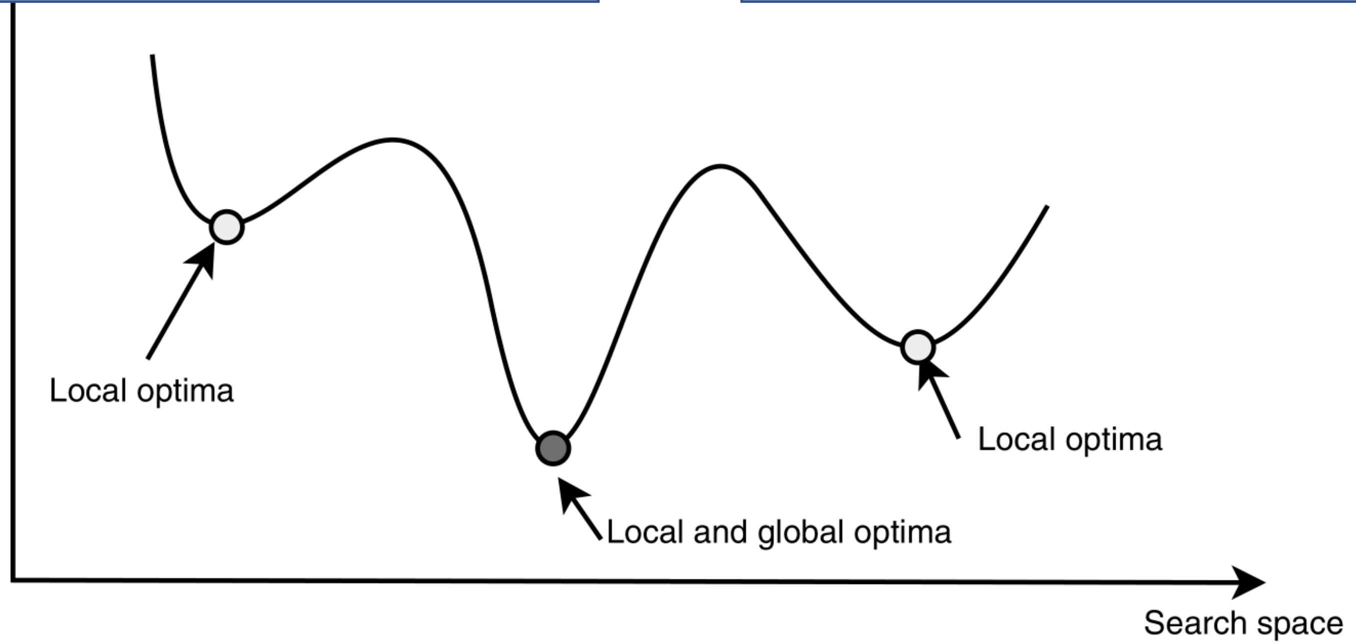
Se refiere a métodos de optimización que buscan un mínimo o máximo local

- Métodos comunes: descenso por gradient, Newton, cuasi-Newton
- No garantizan que la solución sea la major en todo el dominio

Optimización Global

Se refiere a métodos de optimización que buscan un mínimo o máximo absoluto en todo el dominio factible

- Métodos comunes: algoritmos evolutivos, búsqueda en ramas y acotaciones
- Más costosa computacionalmente que la optimización local.

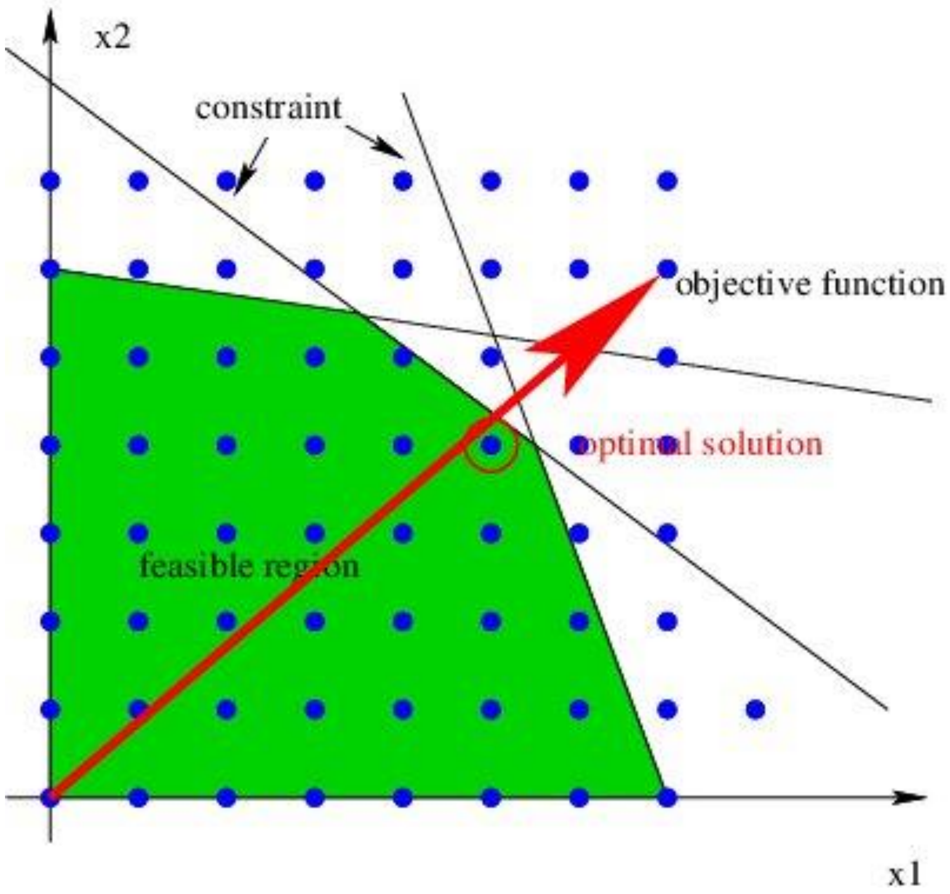


Optimización Entera

Integer Programming (IP)

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x})$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ son variables de decisión enteras.



Integer Linear Programming (ILP)

Integer Nonlinear Programming (INLP)

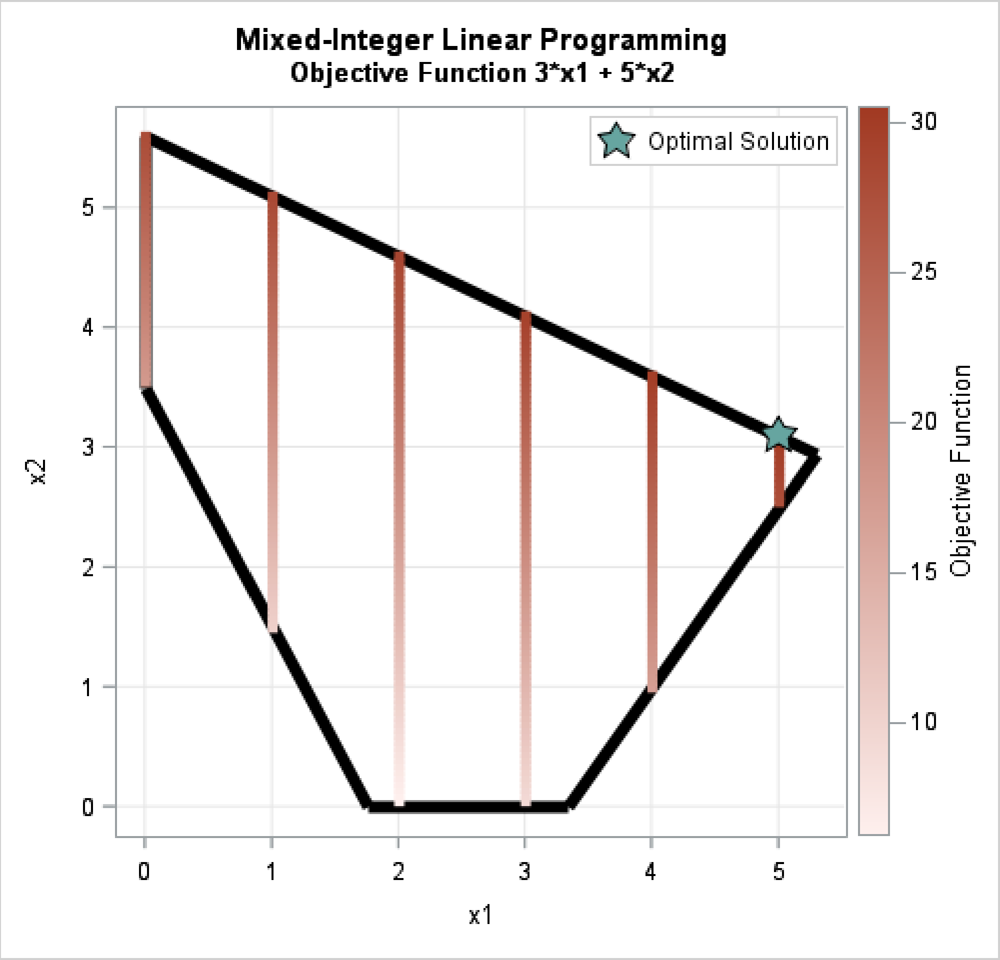
Optimización Mixta Entera

Mixed Integer Programming (MIP)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x},\mathbf{z}} \quad & f(\mathbf{x},\mathbf{z}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{z}) \le \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ son variables de decisión continuas.

$\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^m$ son variables de decisión enteras.



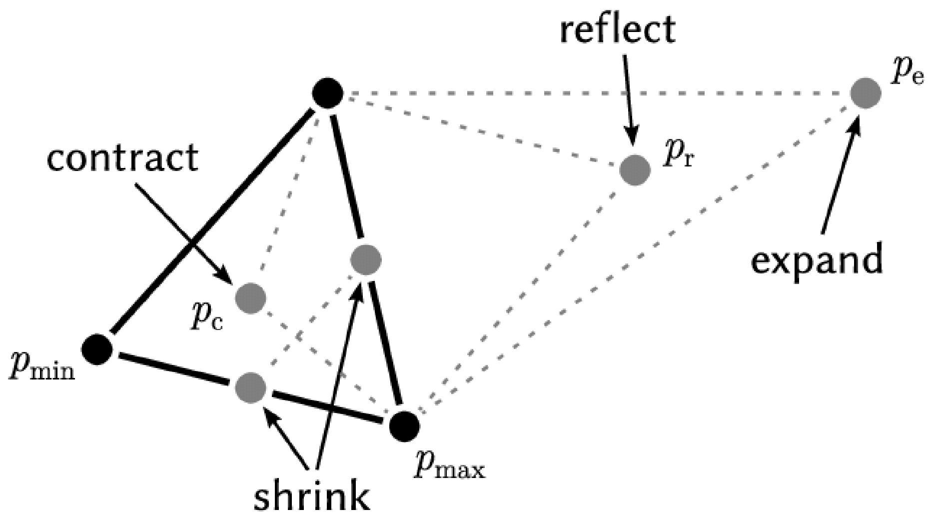
Mixed Integer Linear Programming (MILP)

Mixed Integer Nonlinear Programming (MINLP)

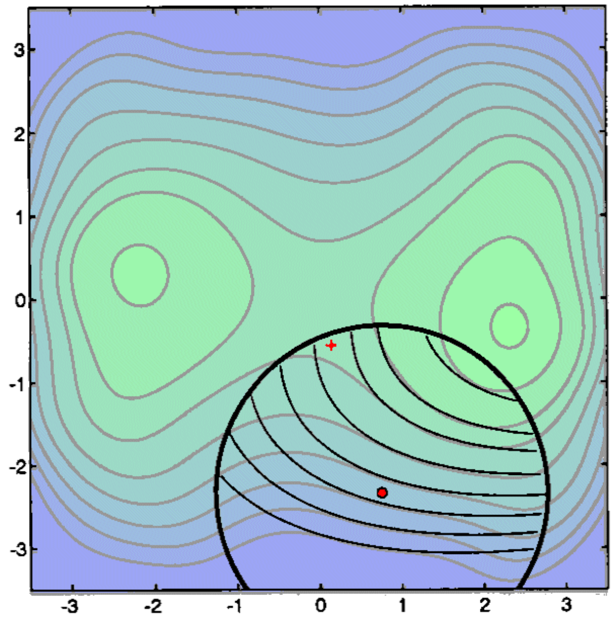
Optimización Sin Derivadas

Derivative Free Optimization (DFO)

Métodos que no calculan derivadas en un punto.
Se utilizan cuando la función objetivo es no diferenciable, costosa de evaluar, o ruidosa.



Método Simplex de Nelder Mead



Métodos de región de confianza basados en interpolación lineal o cuadrática

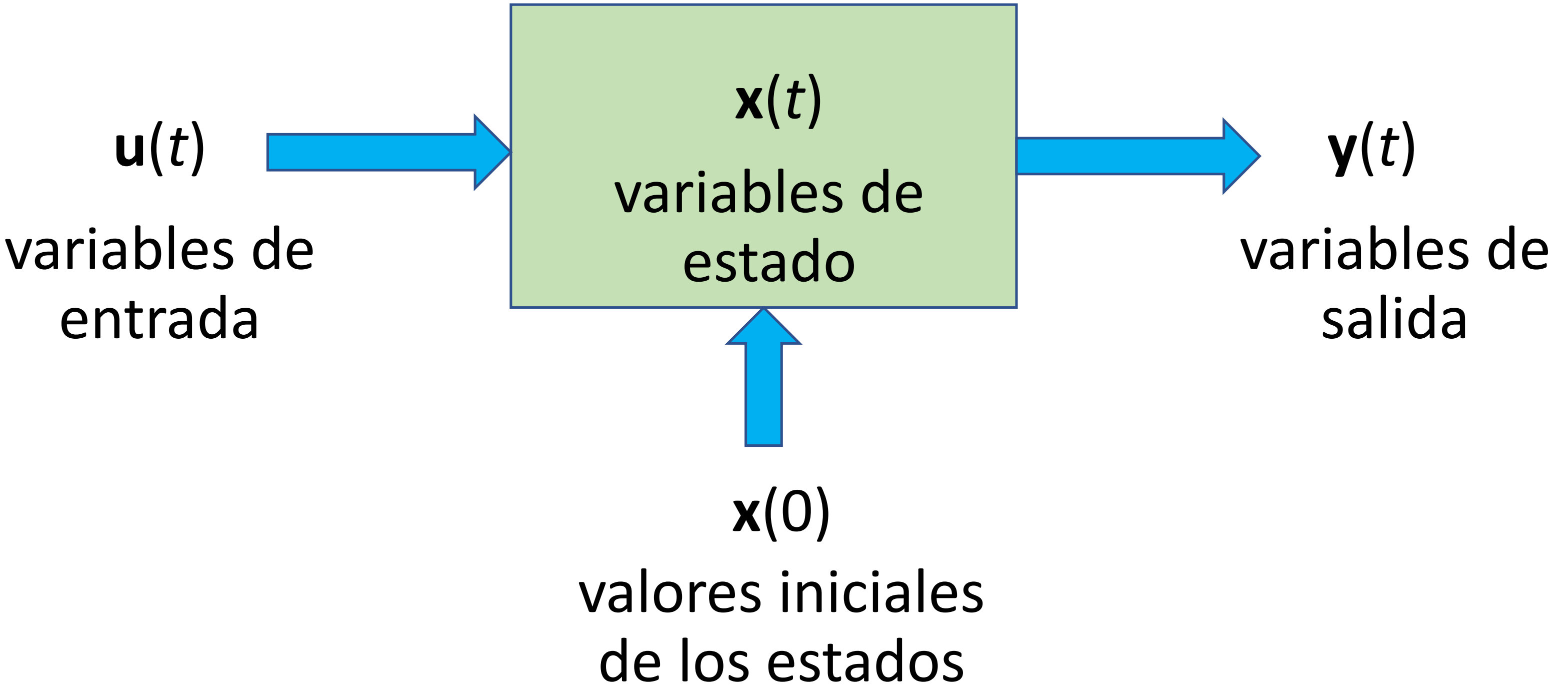
Clasificación basada en incertidumbre

Optimización Determinista:	Los parámetros toman valores precisos.
Optimización Estocástica:	Algunos parámetros son inciertos y modelados probabilísticamente.
Optimización Robusta:	Algunos parámetros son inciertos pero acotados. Considera el peor escenario para los parámetros inciertos.

Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico es aquel que evoluciona con el tiempo.

Variables de estado

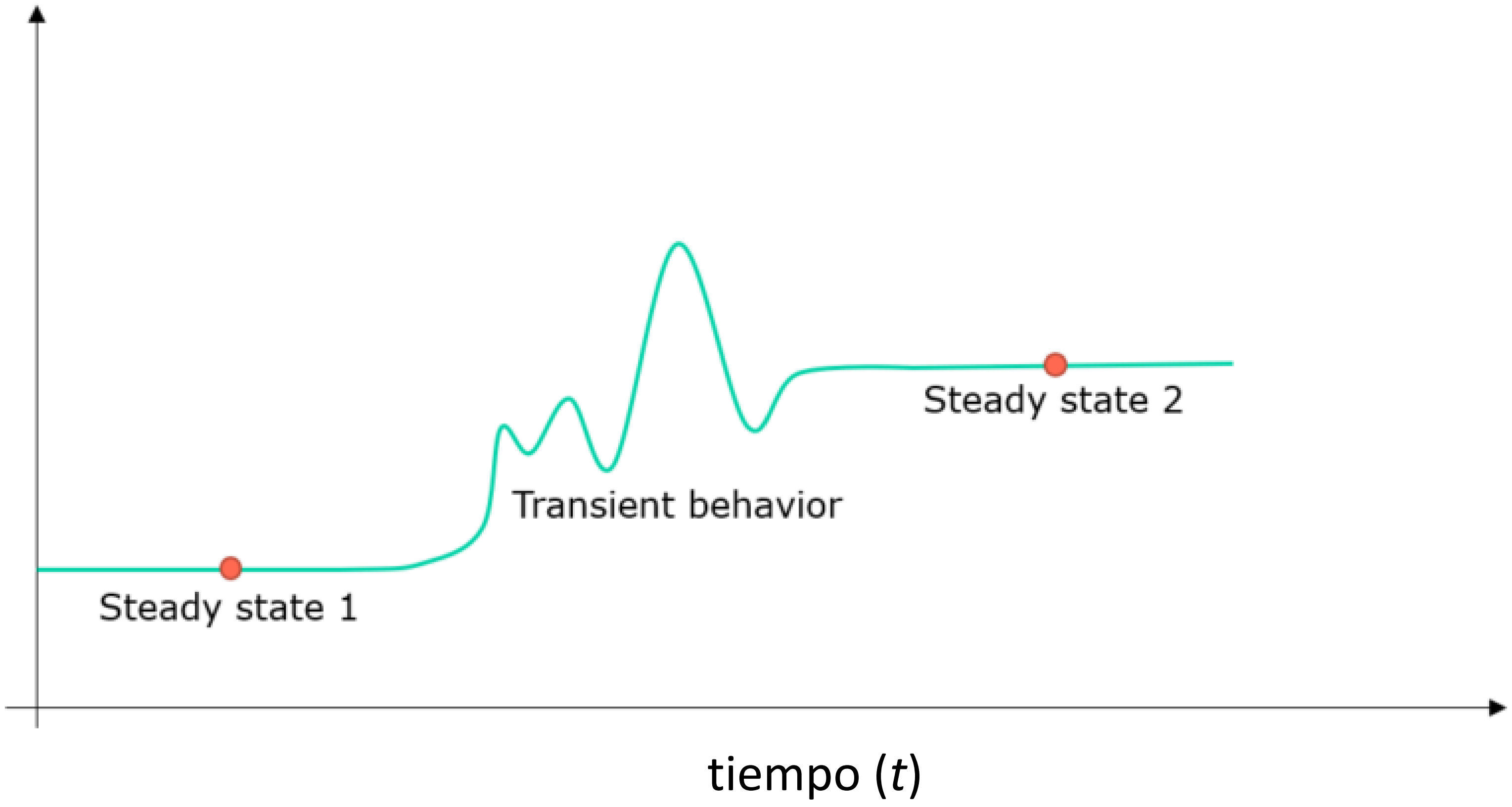


Las variables de estado representan el conjunto mínimo de cantidades que describen completamente el estado de un sistema dinámico (modelo dinámico de un sistema) en un instante dado, permitiendo predecir su evolución futura.

Sistemas Dinámicos

Estado estacionario: estado de equilibrio que se produce en un sistema cuando no varían sus variables de estado.

Estado transitorio: el sistema cambia sus variables y aún no ha alcanzado un estado estable.



Sistemas Dinámicos

Sistemas modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias

Ordinary Differential Equations (ODE)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ son las variables de estado.

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ son las variables de entrada.

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ son las variables de salida.

$\mathbf{f}$ es un sistema de n_x ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sistemas Dinámicos

Sistemas modelados por ecuaciones diferenciales y algebraicas

Differential Algebraic Equations (DAE)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t)), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t)), = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t))$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ son las variables de estado.

$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$ son las variables algebraicas.

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ son las variables de entrada.

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ son las variables de salida.

$\mathbf{f}$ es un sistema de n_x ecuaciones diferenciales ordinarias.

$\mathbf{h}$ es un sistema de n_z ecuaciones algebraicas.

Optimización Dinámica

Problemas de Control Óptimo

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad J = \Phi(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \; dt$$

Funcional de costo a minimizar

$$\text{s.t.} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Dinámica del sistema (ec. diferenciales)

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq \mathbf{0}, \qquad \forall t \in [0, T]$$

Restricciones de trayectoria

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}(T)) \leq \mathbf{0}$$

Restricciones terminales

Esta formulación se aplica a diversos problemas en **ingeniería, economía y robótica**, como la **optimización de trayectorias, control de procesos y problemas de mínimo tiempo o mínimo consumo de energía**.

Libros

Autores	Año	Título de la obra	Editorial o Revista	Ejemplares disponibles
Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, y C. M. Shetty	2006	Nonlinear Programming. Theory and Algorithms	John Wiley and Sons	
David G. Luenberger	1984	Linear and Nonlinear Programming	Addison-Wesley	
Stephen Boyd y Lieven Vandenberghe	2008	Convex Optimization	Cambridge University Press	
M. L. Bynum, G. A. Hackebeil, W. E. Hart, C. D. Laird, B. L. Nicholson, J. D. Siirola, J.-P. Watson, D. L. Woodruff	2020	Pyomo. Optimization Modeling in Python	Springer	