Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

LM, PM, LF, PF, LCC

Álgebra y Geometría Analítica I (2021)

Segundo Parcial

Nombre y apellido: .... Fecha: ....

Resuelva los siguientes ejercicios justificando apropiadamente todas sus respuestas.

1. Consideremos en el conjunto $A = \{\text{Piedra}, \text{Papel}, \text{Tijera}\}$ la relación $x\mathcal{R}y \iff x$ no le gana a y en el juego de manos *Piedra, Papel o Tijera*, es decir,

$$\mathcal{R} = \{(\text{Piedra}, \text{Piedra}), (\text{Piedra}, \text{Papel}), (\text{Papel}, \text{Papel}), \\ (\text{Papel}, \text{Tijera}), (\text{Tijera}, \text{Tijera}), (\text{Tijera}, \text{Piedra})\}.$$

   a) Decidir si $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

   b) Definimos en A una operación $\odot$ de la siguiente manera

$$x \odot y = \begin{cases} y & \text{si } (x, y) \in \mathcal{R} \\ x & \text{si } (y, x) \in \mathcal{R} \end{cases}$$

      i) Representar $\odot$ en una tabla.

      ii) Decidir si $\odot$ tiene elemento neutro, inversos, es conmutativa o asociativa.

2. Sea $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ la función que cuenta cuántos ceros aparecen en la expresión decimal de un entero no negativo. Por ejemplo, $f(0) = 1$, $f(7) = 0$, $f(100) = 2$, $f(5020406) = 3$, etc.

   a) Mostrar que f no es inyectiva.

   b) Probar que f es sobreyectiva.

   c) Exhibir un subconjunto $A \subset \mathbb{N}_0$ tal que la restricción $f|_A : A \to \mathbb{N}_0$ sea biyectiva.

3. Sea F_n la sucesión de Fibonacci, la cual se define como

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-2} + F_{n-1},\ n \geq 2.$$

   Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i)^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$