Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

LM, PM, LF, PF, LCC

Álgebra y Geometría Analítica I (2021)

Examen Final

Copiar y completar la siguiente información en la primera hoja de trabajo.

Nombre y apellido: .... Fecha: ....
Condición: Regular ☐ Libre ☐
En caso de ser Regular, ¿aprobó todos los TPs? Sí ☐ No ☐

Parte Práctica

1. (Sólo para alumnos con al menos un TP **no aprobado**). Probar que la proposición $p \to [q \to (p \wedge q)]$ es una tautología usando equivalencias lógicas (sin usar tablas de verdad).

2. Pruebe que la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$ donde $a\mathcal{R}b$ sii $\exists\, n \in \mathbb{N}_0$ tal que $a = nb$, es de orden.
   a) Grafique el diagrama de Hasse de $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ considerando el conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 36\}$.
   b) Determine los conjuntos de cotas inferiores y de cotas superiores del conjunto ordenado $(\{2, 4, 6\}, \mathcal{R})$ y si existen, el supremo y el ínfimo.
   c) Determine los conjuntos de cotas inferiores y de cotas superiores del conjunto ordenado $(\{2, 3, 4, 6\}, \mathcal{R})$ y si existen, el supremo y el ínfimo.

3. Dada la función
   $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ donde $h(n, x) = (1 - x, n + 1)$.
   a) Determine $h(3, 1)$, $\quad h(\{(0, x) \ : x \in \mathbb{R}\})$
   b) Determine $h^{-1}(\{(3, 1), (4, 0)\})$.
   c) Determine si es inyectiva y/o sobreyectiva. En caso de ser biyectiva, halle su función inversa. Justifique.

4. *a*) Probar que $A(-1, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(2, 5)$ y $D(3, 3)$ son vértices de un rectángulo.
   b) Determinar las coordenadas del punto de intersección de sus diagonales.
   c) Obtener la distancia entre el punto A y la recta determinada por los puntos B y C.

5. Probar que $(n^2)! \geq 2^n$ para todo $n \geq 2$.

6. (Sólo para alumnos LIBRES) Sean A, B y C conjuntos, mostrar que

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

Parte Teórica

7. Demuestre la versión del teorema de De Moivre que se enuncia como sigue:

$$\forall t \in \mathbb{R} \; y \; \forall n \in \mathbb{N}_o \; : \quad (\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt)$$