Matchings y cubrimientos

S. Bianchi P. Fekete V. Bonservizi

[1] Universidad Nacional de Rosario, Dept. de Matemática
Rosario, Argentina

8 de junio de 2020

OUTLINE

1. DEFINICIONES Y EJEMPLOS
2. MATCHING MÁXIMO
3. LA CONDICIÓN DE BERGE
4. LA CONDICIÓN DE HALL
5. TEOREMAS MIN-MAX

Outline

1. Definiciones y ejemplos
2. Matching máximo
3. La condición de Berge
4. La condición de Hall
5. Teoremas Min-Max

(1) Supongamos un conjunto n de personas a quienes hay que ubicar en habitaciones dobles.

(1) Supongamos un conjunto n de personas a quienes hay que ubicar en habitaciones dobles.
Existen siempre condiciones de compatibilidad bajo las cuales dos de ellas pueden compartir una habitación.

(1) Supongamos un conjunto n de personas a quienes hay que ubicar en habitaciones dobles.
Existen siempre condiciones de compatibilidad bajo las cuales dos de ellas pueden compartir una habitación.
Cómo resolvemos este problema?

(2) Existe n tareas a resolver y m profesionales para ejecutarlas.

(1) Supongamos un conjunto n de personas a quienes hay que ubicar en habitaciones dobles.
Existen siempre condiciones de compatibilidad bajo las cuales dos de ellas pueden compartir una habitación.
Cómo resolvemos este problema?

(2) Existe n tareas a resolver y m profesionales para ejecutarlas.
Cada persona es idónea en cierto conjunto de tareas pero posiblemente no en todas.

(1) Supongamos un conjunto n de personas a quienes hay que ubicar en habitaciones dobles.
Existen siempre condiciones de compatibilidad bajo las cuales dos de ellas pueden compartir una habitación.
Cómo resolvemos este problema?

(2) Existe n tareas a resolver y m profesionales para ejecutarlas.
Cada persona es idónea en cierto conjunto de tareas pero posiblemente no en todas.
Cómo resolvemos este problema?

(1) Supongamos un conjunto n de personas a quienes hay que ubicar en habitaciones dobles.
Existen siempre condiciones de compatibilidad bajo las cuales dos de ellas pueden compartir una habitación.
Cómo resolvemos este problema?

(2) Existe n tareas a resolver y m profesionales para ejecutarlas.
Cada persona es idónea en cierto conjunto de tareas pero posiblemente no en todas.
Cómo resolvemos este problema?

Respuesta:

(1) Supongamos un conjunto n de personas a quienes hay que ubicar en habitaciones dobles.
Existen siempre condiciones de compatibilidad bajo las cuales dos de ellas pueden compartir una habitación.
Cómo resolvemos este problema?

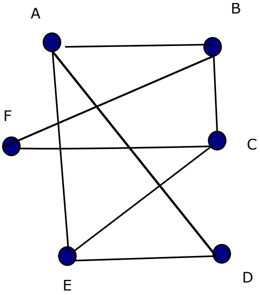
(2) Existe n tareas a resolver y m profesionales para ejecutarlas.
Cada persona es idónea en cierto conjunto de tareas pero posiblemente no en todas.
Cómo resolvemos este problema?

Respuesta:

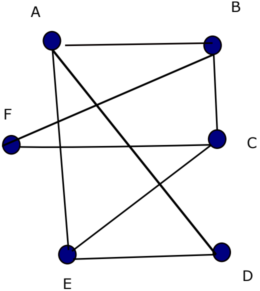
Utilizando grafos.

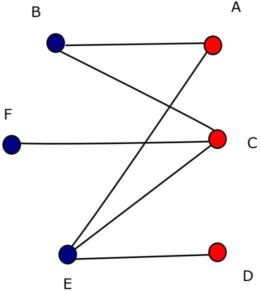
En el primer ejemplo, a cada persona la representamos con un vértices y dos vértices están conectados si existe compatibilidad entre ellos:

En el primer ejemplo, a cada persona la representamos con un vértices y dos vértices están conectados si existe compatibilidad entre ellos:



En el primer ejemplo, a cada persona la representamos con un vértices y dos vértices están conectados si existe compatibilidad entre ellos:





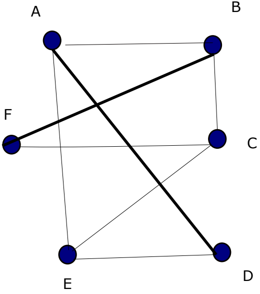
En el segundo caso, es útil un grafo bipartito, representamos tareas en una bipartición de los vértices, personas en la otra y existe una arista cuando una persona demuestra idoneidad en una tarea.

Definición Sea $G = (V, E)$ grafo no dirigido sin lazos. Un *matching* en G es un subconjunto de aristas que llamaremos $\mathscr{M}$, tal que todo par de aristas en $\mathscr{M}$ no tiene vértices en común.

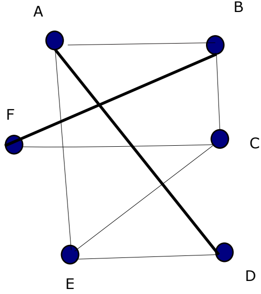
Definición Sea $G=(V,E)$ grafo no dirigido sin lazos. Un *matching* en G es un subconjunto de aristas que llamaremos $\mathscr{M}$, tal que todo par de aristas en $\mathscr{M}$ no tiene vértices en común.
Los vértices incidentes en las aristas de $\mathscr{M}$ se dicen saturados por $\mathscr{M}$. Los restantes vértices en V se dicen no saturados por $\mathscr{M}$.

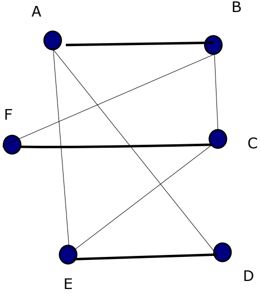
Definición Sea $G = (V, E)$ grafo no dirigido sin lazos. Un *matching* en G es un subconjunto de aristas que llamaremos $\mathscr{M}$, tal que todo par de aristas en $\mathscr{M}$ no tiene vértices en común.
Los vértices incidentes en las aristas de $\mathscr{M}$ se dicen saturados por $\mathscr{M}$. Los restantes vértices en V se dicen no saturados por $\mathscr{M}$.
Un matching es *perfecto* si todos los vértices en V están saturados por $\mathscr{M}$.

Definición Sea $G = (V, E)$ grafo no dirigido sin lazos. Un *matching* en G es un subconjunto de aristas que llamaremos $\mathscr{M}$, tal que todo par de aristas en $\mathscr{M}$ no tiene vértices en común.
Los vértices incidentes en las aristas de $\mathscr{M}$ se dicen saturados por $\mathscr{M}$. Los restantes vértices en V se dicen no saturados por $\mathscr{M}$.
Un matching es *perfecto* si todos los vértices en V están saturados por $\mathscr{M}$.



Definición Sea $G=(V,E)$ grafo no dirigido sin lazos. Un *matching* en G es un subconjunto de aristas que llamaremos $\mathscr{M}$, tal que todo par de aristas en $\mathscr{M}$ no tiene vértices en común.
Los vértices incidentes en las aristas de $\mathscr{M}$ se dicen saturados por $\mathscr{M}$. Los restantes vértices en V se dicen no saturados por $\mathscr{M}$.
Un matching es *perfecto* si todos los vértices en V están saturados por $\mathscr{M}$.

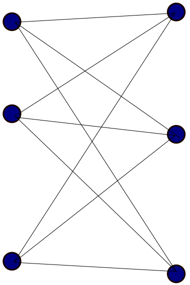




Ejemplo: Consideremos $K_{n,n}$ grafo bipartito completo donde $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Ejemplo: Consideremos $K_{n,n}$ grafo bipartito completo donde $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Ejemplo: $K_{3,3}$



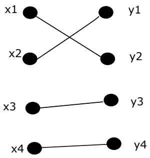
Ejemplo: Consideremos $K_{n,n}$ grafo bipartito completo donde $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.
Un matching perfecto define una biyección entre X e Y.

Ejemplo: Consideremos $K_{n,n}$ grafo bipartito completo donde $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.
Un matching perfecto define una biyección entre X e Y.
Tendremos un total de $n!$ matchings perfectos. (Ejercicio)

Ejemplo: Consideremos $K_{n,n}$ grafo bipartito completo donde $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.
Un matching perfecto define una biyección entre X e Y.
Tendremos un total de $n!$ matchings perfectos. (Ejercicio)
Podemos expresar un matching mediante una matriz $0, 1$.

Ejemplo: Consideremos $K_{n,n}$ grafo bipartito completo donde $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.
Un matching perfecto define una biyección entre X e Y.
Tendremos un total de $n!$ matchings perfectos. (Ejercicio)
Podemos expresar un matching mediante una matriz $0, 1$.
Si indexamos las filas de acuerdo al conjunto X, y las columnas de acuerdo a Y, entonces la posición ij en la matriz tendrá un 1 si hemos asignado x_i con y_j y 0 en caso contrario.

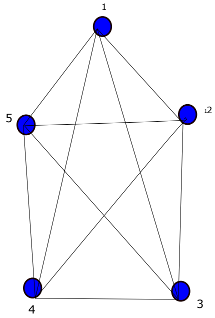
Ejemplo: Consideremos $K_{n,n}$ grafo bipartito completo donde $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$.
Un matching perfecto define una biyección entre X e Y.
Tendremos un total de $n!$ matchings perfectos. (Ejercicio)
Podemos expresar un matching mediante una matriz $0, 1$.
Si indexamos las filas de acuerdo al conjunto X, y las columnas de acuerdo a Y, entonces la posición ij en la matriz tendrá un 1 si hemos asignado x_i con y_j y 0 en caso contrario.
Ejemplo:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Consideremos K_n grafo completo de n vértices.

Ejemplo: Consideremos K_n grafo completo de n vértices.
Ejemplo: K_5



Ejemplo: Consideremos K_n grafo completo de n vértices.
Observación: Si $G = (V,E)$ es tal que $|V|$ es impar, no existe un matching perfecto en G.

Ejemplo: Consideremos K_n grafo completo de n vértices.
Observación: Si $G = (V, E)$ es tal que $|V|$ es impar, no existe un matching perfecto en G.
El número de matchings perfectos en K_{2n} es el número de maneras de ubicar de a pares a $2n$ objetos.

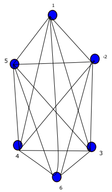
Ejemplo: Consideremos K_n grafo completo de n vértices.
Observación: Si $G = (V, E)$ es tal que $|V|$ es impar, no existe un matching perfecto en G.
El número de matchings perfectos en K_{2n} es el número de maneras de ubicar de a pares a $2n$ objetos.
Llamemos $f(n)$ al número de matchings perfectos en K_{2n}.

Ejemplo: Consideremos K_n grafo completo de n vértices.
Observación: Si $G = (V, E)$ es tal que $|V|$ es impar, no existe un matching perfecto en G.
El número de matchings perfectos en K_{2n} es el número de maneras de ubicar de a pares a $2n$ objetos.
Llamemos $f(n)$ al número de matchings perfectos en K_{2n}.
Consideremos el vértice v_{2n} de K_{2n}. Hay $2n-1$ posibles vértices que podrían asignarse a v_{2n}.

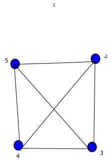
Ejemplo: Consideremos K_n grafo completo de n vértices.
Observación: Si $G = (V, E)$ es tal que $|V|$ es impar, no existe un matching perfecto en G.
El número de matchings perfectos en K_{2n} es el número de maneras de ubicar de a pares a $2n$ objetos.
Llamemos $f(n)$ al número de matchings perfectos en K_{2n}.
Consideremos el vértice v_{2n} de K_{2n}. Hay $2n-1$ posibles vértices que podrían asignarse a v_{2n}.
Por cada una de esas elecciones hay $f(n-1)$ formas de completar el matching.

Ejemplo: Consideremos K_n grafo completo de n vértices.
Observación: Si $G = (V, E)$ es tal que $|V|$ es impar, no existe un matching perfecto en G.
El número de matchings perfectos en K_{2n} es el número de maneras de ubicar de a pares a $2n$ objetos.
Llamemos $f(n)$ al número de matchings perfectos en K_{2n}.
Consideremos el vértice v_{2n} de K_{2n}. Hay $2n-1$ posibles vértices que podrían asignarse a v_{2n}.
Por cada una de esas elecciones hay $f(n-1)$ formas de completar el matching.

K_6



K_4



Entonces $f(n) = (2n-1)f(n-1)$.

Entonces $f(n) = (2n-1)f(n-1)$.
Si $f(0) = 1$, entonces

Entonces $f(n) = (2n-1)f(n-1)$.
Si $f(0) = 1$, entonces

Lemma

El número de matchings perfectos en K_{2n} es

$$f(n) = (2n-1).(2n-3)\dots.(1).$$

Entonces $f(n) = (2n-1)f(n-1)$.
Si $f(0) = 1$, entonces

LEMMA

El número de matchings perfectos en K_{2n} es

$$f(n) = (2n-1).(2n-3)\dots(1).$$

Demostración

Entonces $f(n) = (2n-1)f(n-1)$.
Si $f(0) = 1$, entonces

LEMMA

El número de matchings perfectos en K_{2n} es

$$f(n) = (2n-1).(2n-3)\ldots.(1).$$

Demostración

Ejercicio.

Entonces $f(n) = (2n-1)f(n-1)$.
Si $f(0) = 1$, entonces

LEMMA

El número de matchings perfectos en K_{2n} es

$$f(n) = (2n-1).(2n-3)\dots.(1).$$

Demostración

Ejercicio.

Observación: No siempre existe un matching perfecto en $G = (V,E)$ con $|V|$ par.

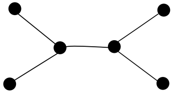
Entonces $f(n) = (2n-1)f(n-1)$.
Si $f(0) = 1$, entonces

LEMMA

El número de matchings perfectos en K_{2n} es

$$f(n) = (2n-1).(2n-3)\ldots.(1).$$

Demostración
Ejercicio.
Observación: No siempre existe un matching perfecto en $G = (V,E)$ con $|V|$ par.



Outline

1. Definiciones y ejemplos
2. Matching máximo
3. La condición de Berge
4. La condición de Hall
5. Teoremas Min-Max

DEFINICIÓN

Sea $G=(V,E)$ no dirigido y sin lazos. Un matching maximal en G es un matching que no puede aumentar en tamaño. Un matching máximo en G es un matching de mayor tamaño posible en G.

DEFINICIÓN

Sea $G=(V,E)$ no dirigido y sin lazos. Un matching maximal en G es un matching que no puede aumentar en tamaño. Un matching máximo en G es un matching de mayor tamaño posible en G.

Observación: Todo matching máximo es maximal, pero la recíproca no es cierta

Definición

Sea $G = (V, E)$ no dirigido y sin lazos. Un matching maximal en G es un matching que no puede aumentar en tamaño. Un matching máximo en G es un matching de mayor tamaño posible en G.

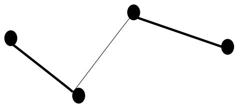
Observación: Todo matching máximo es maximal, pero la recíproca no es cierta (maximal $\neq$ máximo).

DEFINICIÓN

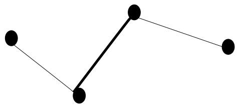
Sea $G=(V,E)$ no dirigido y sin lazos. Un matching maximal en G es un matching que no puede aumentar en tamaño. Un matching máximo en G es un matching de mayor tamaño posible en G.

Observación: Todo matching máximo es maximal, pero la recíproca no es cierta (maximal $\neq$ máximo).

Matching máximo



Matching maximal



DEFINICIÓN

Sea $G = (V,E)$ no dirigido y sin lazos y $\mathscr{M}$ un matching en G. Un camino $\mathscr{M}$-alternante en G, es un camino en G que alterna arista en $\mathscr{M}$ y en $E - \mathscr{M}$.

DEFINICIÓN

Sea $G=(V,E)$ no dirigido y sin lazos y $\mathscr{M}$ un matching en G. Un camino $\mathscr{M}$-alternante en G, es un camino en G que alterna arista en $\mathscr{M}$ y en $E-\mathscr{M}$. Un camino $\mathscr{M}$-alternante cuyos extremos son vértices no saturados por $\mathscr{M}$, se llama $\mathscr{M}$-aumentante.

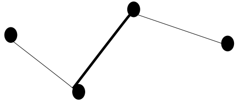
Observación:

DEFINICIÓN

Sea $G = (V,E)$ no dirigido y sin lazos y $\mathscr{M}$ un matching en G. Un camino $\mathscr{M}$-alternante en G, es un camino en G que alterna arista en $\mathscr{M}$ y en $E - \mathscr{M}$. Un camino $\mathscr{M}$-alternante cuyos extremos son vértices no saturados por $\mathscr{M}$, se llama $\mathscr{M}$-aumentante.

Observación:

Si P es $\mathscr{M}$-aumentante,

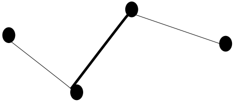


DEFINICIÓN

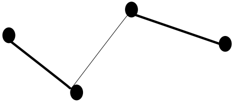
Sea $G=(V,E)$ no dirigido y sin lazos y $\mathscr{M}$ un matching en G. Un camino $\mathscr{M}$-alternante en G, es un camino en G que alterna arista en $\mathscr{M}$ y en $E-\mathscr{M}$. Un camino $\mathscr{M}$-alternante cuyos extremos son vértices no saturados por $\mathscr{M}$, se llama $\mathscr{M}$-aumentante.

Observación:

Si P es $\mathscr{M}$-aumentante,



existe $\mathscr{M}'$ con una arista más:



Observación: Si $\mathscr{M}$ es un matching máximo en G, entonces no existe un camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.

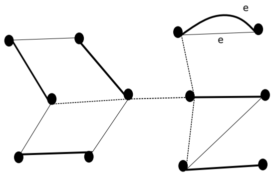
Observación: Si $\mathscr{M}$ es un matching máximo en G, entonces no existe un camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Definición: Sean G y H dos grafos tales que $V(G) = V(H) = V$. La *diferencia simétrica* denotada por $G \triangle H$, es el grafo con V como conjunto de vértices y conjunto de aristas $(E(G) \cup E(H)) - (E(G) \cap E(H))$.

Observación: Si $\mathscr{M}$ es un matching máximo en G, entonces no existe un camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.

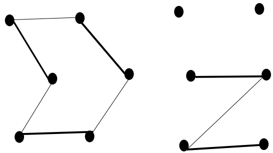
Definición: Sean G y H dos grafos tales que $V(G) = V(H) = V$. La *diferencia simétrica* denotada por $G \triangle H$, es el grafo con V como conjunto de vértices y conjunto de aristas $(E(G) \cup E(H)) - (E(G) \cap E(H))$.Si $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ son dos matchings en G, también decimos $\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}' = (\mathscr{M} \cup \mathscr{M}') - (\mathscr{M} \cap \mathscr{M}')$.

Observación: Si $\mathscr{M}$ es un matching máximo en G, entonces no existe un camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.

Definición: Sean G y H dos grafos tales que $V(G) = V(H) = V$. La *diferencia simétrica* denotada por $G \triangle H$, es el grafo con V como conjunto de vértices y conjunto de aristas $(E(G) \cup E(H)) - (E(G) \cap E(H))$.Si $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ son dos matchings en G, también decimos $\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}' = (\mathscr{M} \cup \mathscr{M}') - (\mathscr{M} \cap \mathscr{M}')$.



$\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$



$\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$

Lema Sea $G=(V,E)$ grafo no dirigido sin lazos y sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings en G. Entonces cada componente conexa de $\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$ es un ciclo par o un camino.

Lema Sea $G = (V,E)$ grafo no dirigido sin lazos y sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings en G. Entonces cada componente conexa de $\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$ es un ciclo par o un camino.

Demostración: Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings en G y $F = \mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$.

Lema Sea $G=(V,E)$ grafo no dirigido sin lazos y sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings en G. Entonces cada componente conexa de $\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$ es un ciclo par o un camino.

Demostración: Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings en G y $F=\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$.
Sea $v \in V(F)$. Como $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ son matchings, entonces existe a lo sumo una arista de $\mathscr{M}$ y a lo sumo una de $\mathscr{M}'$ incidentes en v.

Lema Sea $G=(V,E)$ grafo no dirigido sin lazos y sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings en G. Entonces cada componente conexa de $\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$ es un ciclo par o un camino.

Demostración: Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings en G y $F=\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$.
Sea $v \in V(F)$. Como $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ son matchings, entonces existe a lo sumo una arista de $\mathscr{M}$ y a lo sumo una de $\mathscr{M}'$ incidentes en v.
Entonces $(gr(v))_F \leq 2$. Es decir, cada componente conexa de F es un ciclo o un camino.

Lema Sea $G=(V,E)$ grafo no dirigido sin lazos y sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings en G. Entonces cada componente conexa de $\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$ es un ciclo par o un camino.

Demostración: Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings en G y $F=\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$.
Sea $v \in V(F)$. Como $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ son matchings, entonces existe a lo sumo una arista de $\mathscr{M}$ y a lo sumo una de $\mathscr{M}'$ incidentes en v.
Entonces $(gr(v))_F \leq 2$. Es decir, cada componente conexa de F es un ciclo o un camino.

Además cada ciclo o camino de F alterna entre aristas de $\mathscr{M}-\mathscr{M}'$ y $\mathscr{M}'-\mathscr{M}$.

Lema Sea $G=(V,E)$ grafo no dirigido sin lazos y sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings en G. Entonces cada componente conexa de $\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$ es un ciclo par o un camino.

Demostración: Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings en G y $F=\mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$.
Sea $v \in V(F)$. Como $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ son matchings, entonces existe a lo sumo una arista de $\mathscr{M}$ y a lo sumo una de $\mathscr{M}'$ incidentes en v.
Entonces $(gr(v))_F \leq 2$. Es decir, cada componente conexa de F es un ciclo o un camino.

Además cada ciclo o camino de F alterna entre aristas de $\mathscr{M}-\mathscr{M}'$ y $\mathscr{M}'-\mathscr{M}$.

Por tanto, si la componente conexa es un ciclo, se trata de un ciclo par con la misma cantidad de aristas en $\mathscr{M}$ que en $\mathscr{M}'$.

Outline

1. Definiciones y ejemplos
2. Matching máximo
3. La condición de Berge
4. La condición de Hall
5. Teoremas Min-Max

Teorema (Berge[1957]) Un matching $\mathscr{M}$ en un grafo G es un matching máximo en G si y sólo si G no tiene camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Teorema (Berge[1957]) Un matching $\mathscr{M}$ en un grafo G es un matching máximo en G si y sólo si G no tiene camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Demostración
Ya hemos observado que si $\mathscr{M}$ es máximo en G, entonces no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.

Teorema (Berge[1957]) Un matching $\mathscr{M}$ en un grafo G es un matching máximo en G si y sólo si G no tiene camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Demostración
Ya hemos observado que si $\mathscr{M}$ es máximo en G, entonces no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $\mathscr{M}$ un matching en G y supongamos que $\mathscr{M}'$ matching en G tal que $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$.

Teorema (Berge[1957]) Un matching $\mathscr{M}$ en un grafo G es un matching máximo en G si y sólo si G no tiene camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Demostración

Ya hemos observado que si $\mathscr{M}$ es máximo en G, entonces no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $\mathscr{M}$ un matching en G y supongamos que $\mathscr{M}'$ matching en G tal que $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$. Vamos a ver que existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.

Teorema (Berge[1957]) Un matching $\mathscr{M}$ en un grafo G es un matching máximo en G si y sólo si G no tiene camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Demostración

Ya hemos observado que si $\mathscr{M}$ es máximo en G, entonces no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $\mathscr{M}$ un matching en G y supongamos que $\mathscr{M}'$ matching en G tal que $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$. Vamos a ver que existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $F = \mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$.

Teorema (Berge[1957]) Un matching $\mathscr{M}$ en un grafo G es un matching máximo en G si y sólo si G no tiene camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Demostración

Ya hemos observado que si $\mathscr{M}$ es máximo en G, entonces no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $\mathscr{M}$ un matching en G y supongamos que $\mathscr{M}'$ matching en G tal que $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$. Vamos a ver que existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $F = \mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$. Por el lema anterior, las componentes conexas de F son caminos o ciclos pares.

Teorema (Berge[1957]) Un matching $\mathscr{M}$ en un grafo G es un matching máximo en G si y sólo si G no tiene camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Demostración
Ya hemos observado que si $\mathscr{M}$ es máximo en G, entonces no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $\mathscr{M}$ un matching en G y supongamos que $\mathscr{M}'$ matching en G tal que $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$. Vamos a ver que existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $F = \mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$. Por el lema anterior, las componentes conexas de F son caminos o ciclos pares.
Los ciclos pares tiene igual número de aristas en $\mathscr{M}$ que en $\mathscr{M}'$.

Teorema (Berge[1957]) Un matching $\mathscr{M}$ en un grafo G es un matching máximo en G si y sólo si G no tiene camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Demostración

Ya hemos observado que si $\mathscr{M}$ es máximo en G, entonces no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $\mathscr{M}$ un matching en G y supongamos que $\mathscr{M}'$ matching en G tal que $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$. Vamos a ver que existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $F = \mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$. Por el lema anterior, las componentes conexas de F son caminos o ciclos pares.
Los ciclos pares tiene igual número de aristas en $\mathscr{M}$ que en $\mathscr{M}'$.
Por lo tanto una de las componentes conexas de F es un camino.

Teorema (Berge[1957]) Un matching $\mathscr{M}$ en un grafo G es un matching máximo en G si y sólo si G no tiene camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Demostración

Ya hemos observado que si $\mathscr{M}$ es máximo en G, entonces no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.

Sea $\mathscr{M}$ un matching en G y supongamos que $\mathscr{M}'$ matching en G tal que $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$. Vamos a ver que existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.

Sea $F = \mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$. Por el lema anterior, las componentes conexas de F son caminos o ciclos pares.

Los ciclos pares tiene igual número de aristas en $\mathscr{M}$ que en $\mathscr{M}'$.

Por lo tanto una de las componentes conexas de F es un camino.

Además como $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$, algún camino debe ser impar y con más aristas en $\mathscr{M}'$ que en $\mathscr{M}$.

Teorema (Berge[1957]) Un matching $\mathscr{M}$ en un grafo G es un matching máximo en G si y sólo si G no tiene camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Demostración

Ya hemos observado que si $\mathscr{M}$ es máximo en G, entonces no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $\mathscr{M}$ un matching en G y supongamos que $\mathscr{M}'$ matching en G tal que $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$. Vamos a ver que existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $F = \mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$. Por el lema anterior, las componentes conexas de F son caminos o ciclos pares.
Los ciclos pares tiene igual número de aristas en $\mathscr{M}$ que en $\mathscr{M}'$.
Por lo tanto una de las componentes conexas de F es un camino.
Además como $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$, algún camino debe ser impar y con más aristas en $\mathscr{M}'$ que en $\mathscr{M}$.
Esto exige que el camino empieza y termina con una arista en $\mathscr{M}'$.

Teorema (Berge[1957]) Un matching $\mathscr{M}$ en un grafo G es un matching máximo en G si y sólo si G no tiene camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Demostración

Ya hemos observado que si $\mathscr{M}$ es máximo en G, entonces no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $\mathscr{M}$ un matching en G y supongamos que $\mathscr{M}'$ matching en G tal que $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$. Vamos a ver que existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Sea $F = \mathscr{M} \triangle \mathscr{M}'$. Por el lema anterior, las componentes conexas de F son caminos o ciclos pares.
Los ciclos pares tiene igual número de aristas en $\mathscr{M}$ que en $\mathscr{M}'$.
Por lo tanto una de las componentes conexas de F es un camino.
Además como $|\mathscr{M}'| > |\mathscr{M}|$, algún camino debe ser impar y con más aristas en $\mathscr{M}'$ que en $\mathscr{M}$.
Esto exige que el camino empieza y termina con una arista en $\mathscr{M}'$.
Es decir, este camino es $\mathscr{M}$-aumentante en G.

1 DEFINICIONES Y EJEMPLOS

2 MATCHING MÁXIMO

3 LA CONDICIÓN DE BERGE

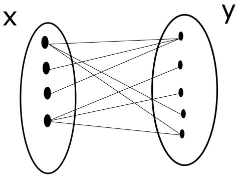
4 LA CONDICIÓN DE HALL

5 TEOREMAS MIN-MAX

Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.

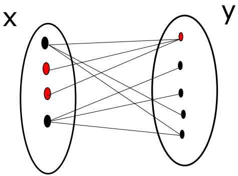
Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.
Cuándo podemos afirmar que existe un matching que satura a X?

Sea $G=(X\cup Y,E)$ grafo bipartito con $|X|<|Y|$.
Cuándo podemos afirmar que existe un matching que satura a X?
Veamos un ejemplo:



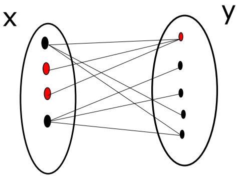
La condición de Hall

Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.
Cuándo podemos afirmar que existe un matching que satura a X?
Veamos un ejemplo:



Vemos pintados en rojo dos vértices en X que comparten un único vecino en Y.

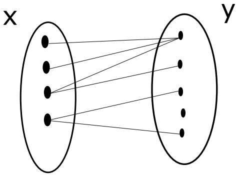
Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.
Cuándo podemos afirmar que existe un matching que satura a X?
Veamos un ejemplo:



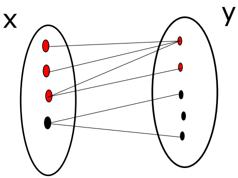
Vemos pintados en rojo dos vértices en X que comparten un único vecino en Y.
Entonces no existe un matching que sature a X.

Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.

Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.
Existe un matching que satura a X en este grafo?



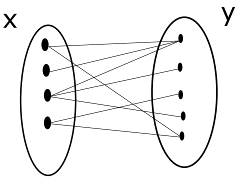
Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.
Existe un matching que satura a X en este grafo?



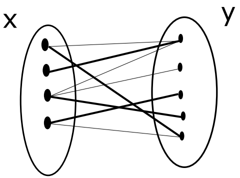
Vemos pintados en rojo tres vértices en X que comparten sólo dos vecinos en Y.
Entonces tampoco existe un matching que sature a X.

Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.

Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.
En este tercer grafo, existe un matching que satura a X?

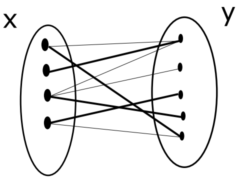


Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.
En este tercer grafo, existe un matching que satura a X?



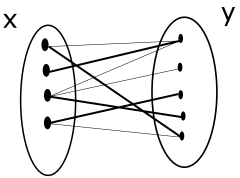
Aquí podemos identificar un matching que satura a X.

Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.
En este tercer grafo, existe un matching que satura a X?



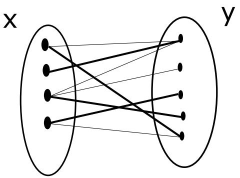
Aquí podemos identificar un matching que satura a X.
Observamos que dado cualquier subconjunto $S \subset X$, se verifica $|S| \leq |N(S)|$.

Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.
En este tercer grafo, existe un matching que satura a X?



Aquí podemos identificar un matching que satura a X.
Observamos que dado cualquier subconjunto $S \subset X$, se verifica $|S| \leq |N(S)|$.
Es decir, esta condición resulta necesaria para la existencia de un matching que satura a X.

Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito con $|X| < |Y|$.
En este tercer grafo, existe un matching que satura a X?



Aquí podemos identificar un matching que satura a X.
Observamos que dado cualquier subconjunto $S \subset X$, se verifica $|S| \leq |N(S)|$.
Es decir, esta condición resulta necesaria para la existencia de un matching que satura a X.
Vamos a ver que se trata de una condición suficiente.

Teorema (P. Hall[1935]) Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito. G tiene un matching que satura a X si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subset X$.

Teorema (P. Hall[1935]) Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito. G tiene un matching que satura a X si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subset X$.

Demostración

Necesidad Si G es un matching que satura a X, dado $S \subset X$ debe existir al menos $|S|$ vértices en Y que tengan vecinos en S.

Teorema (P. Hall[1935]) Sea $G=(X\cup Y,E)$ grafo bipartito. G tiene un matching que satura a X si y sólo si $|N(S)|\geq|S|$ para todo $S\subset X$.

Demostración

Necesidad Si G es un matching que satura a X, dado $S\subset X$ debe existir al menos $|S|$ vértices en Y que tengan vecinos en S.

Entonces vale $|N(S)|\geq|S|$.

Teorema (P. Hall[1935]) Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito. G tiene un matching que satura a X si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subset X$.

Demostración

Necesidad Si G es un matching que satura a X, dado $S \subset X$ debe existir al menos $|S|$ vértices en Y que tengan vecinos en S.

Entonces vale $|N(S)| \geq |S|$.

Suficiencia (contrarrecíproco) Supongo $\mathscr{M}$ un matching máximo en G que no satura a X.

Teorema (P. Hall[1935]) Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito. G tiene un matching que satura a X si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subset X$.
Demostración
Necesidad Si G es un matching que satura a X, dado $S \subset X$ debe existir al menos $|S|$ vértices en Y que tengan vecinos en S.
Entonces vale $|N(S)| \geq |S|$.
Suficiencia (contrarrecíproco) Supongo $\mathscr{M}$ un matching máximo en G que no satura a X.Vamos a demostrar que existe $S \subset X$ tal que $|N(S)| < |S|$.

Teorema (P. Hall[1935]) Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito. G tiene un matching que satura a X si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subset X$.
Demostración
Necesidad Si G es un matching que satura a X, dado $S \subset X$ debe existir al menos $|S|$ vértices en Y que tengan vecinos en S.
Entonces vale $|N(S)| \geq |S|$.
Suficiencia (contrarrecíproco) Supongo $\mathscr{M}$ un matching máximo en G que no satura a X.Vamos a demostrar que existe $S \subset X$ tal que $|N(S)| < |S|$.
Sea $u \in X$ vértice no saturado por $\mathscr{M}$.

Teorema (P. Hall[1935]) Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito. G tiene un matching que satura a X si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subset X$.

Demostración

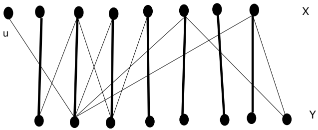
Necesidad Si G es un matching que satura a X, dado $S \subset X$ debe existir al menos $|S|$ vértices en Y que tengan vecinos en S.

Entonces vale $|N(S)| \geq |S|$.

Suficiencia (contrarrecíproco) Supongo $\mathscr{M}$ un matching máximo en G que no satura a X.Vamos a demostrar que existe $S \subset X$ tal que $|N(S)| < |S|$.

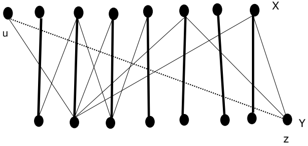
Sea $u \in X$ vértice no saturado por $\mathscr{M}$.

Ilustración:

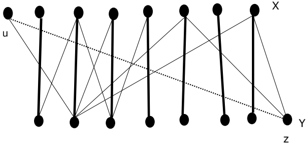


Demostración(cont.)
Es claro que todo vecino de u está saturado por $\mathscr{M}$, pues si existiera $z \in Y$ no saturado:

Demostración(cont.)
Es claro que todo vecino de u está saturado por $\mathscr{M}$, pues si existiera $z \in Y$ no saturado:



Demostración(cont.)
Es claro que todo vecino de u está saturado por $\mathscr{M}$, pues si existiera $z \in Y$ no saturado:



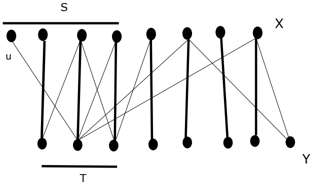
Se podría agregar la arista $\{u, z\}$ a $\mathscr{M}$ y no sería máximo.

Demostración(cont.)
Todo $y \in N(u)$ es saturado por $\mathscr{M}$.
Considero todos los caminos $\mathscr{M}$-alternantes en G que parten desde u.

Demostración(cont.)
Todo $y \in N(u)$ es saturado por $\mathscr{M}$.
Considero todos los caminos $\mathscr{M}$-alternantes en G que parten desde u.
Sea S el conjunto de vértices en X que son alcanzados por los caminos $\mathscr{M}$-alternantes que comienzan en u.

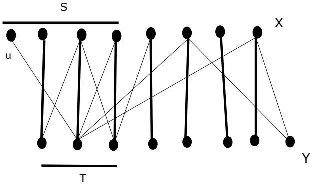
Demostración(cont.)
Todo $y \in N(u)$ es saturado por $\mathscr{M}$.
Considero todos los caminos $\mathscr{M}$-alternantes en G que parten desde u.
Sea S el conjunto de vértices en X que son alcanzados por los caminos $\mathscr{M}$-alternantes que comienzan en u.
Sea T el conjunto de vértices en Y que son alcanzados por los caminos $\mathscr{M}$-alternantes que comienzan en u.

Demostración(cont.)
Todo $y \in N(u)$ es saturado por $\mathscr{M}$.
Considero todos los caminos $\mathscr{M}$-alternantes en G que parten desde u.
Sea S el conjunto de vértices en X que son alcanzados por los caminos $\mathscr{M}$-alternantes que comienzan en u.
Sea T el conjunto de vértices en Y que son alcanzados por los caminos $\mathscr{M}$-alternantes que comienzan en u.
Ilustración:

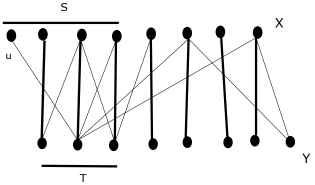


Observemos que $N(u) \subset T$.

Demostración(cont.)

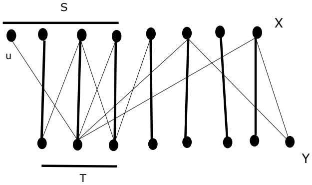


Demostración(cont.)



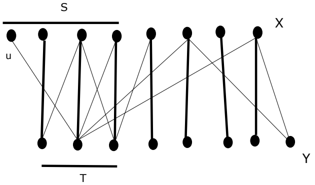
Vamos a probar que cada vértice en $S-u$ es alcanzado por una arista en $\mathscr{M}$ desde un vértice en T.

Demostración(cont.)



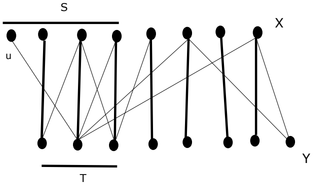
Vamos a probar que cada vértice en $S-u$ es alcanzado por una arista en $\mathscr{M}$ desde un vértice en T. Es decir, $\mathscr{M}$ *matchea* $S-u$ con T.

Demostración(cont.)



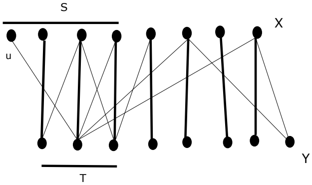
Vamos a probar que cada vértice en $S - u$ es alcanzado por una arista en $\mathscr{M}$ desde un vértice en T. Es decir, $\mathscr{M}$ *matchea* $S - u$ con T.
Como $\mathscr{M}$ es un matching máximo, no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Entonces todo vértice en T es saturado por $\mathscr{M}$.

Demostración(cont.)



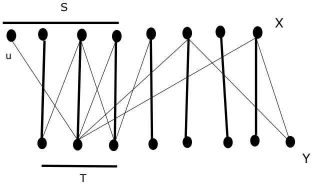
Vamos a probar que cada vértice en $S-u$ es alcanzado por una arista en $\mathscr{M}$ desde un vértice en T. Es decir, $\mathscr{M}$ *matchea* $S-u$ con T.
Como $\mathscr{M}$ es un matching máximo, no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G. Entonces todo vértice en T es saturado por $\mathscr{M}$. Por lo tanto un camino $\mathscr{M}$-alternante que llegue al vértice $y \in T$ desde u sigue via $\mathscr{M}$ hacia un vértice en S.

Demostración(cont.)



Vamos a probar que cada vértice en $S-u$ es alcanzado por una arista en $\mathscr{M}$ desde un vértice en T. Es decir, $\mathscr{M}$ *matchea* $S-u$ con T.
Como $\mathscr{M}$ es un matching máximo, no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G. Entonces todo vértice en T es saturado por $\mathscr{M}$. Por lo tanto un camino $\mathscr{M}$-alternante que llegue al vértice $y \in T$ desde u sigue via $\mathscr{M}$ hacia un vértice en S. Es decir que $|T| = |S-u|$.

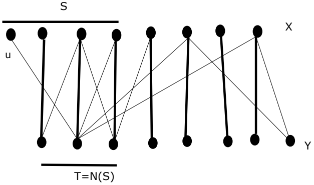
Demostración(cont.)



Vamos a probar que cada vértice en $S-u$ es alcanzado por una arista en $\mathscr{M}$ desde un vértice en T. Es decir, $\mathscr{M}$ *matchea* $S-u$ con T.
Como $\mathscr{M}$ es un matching máximo, no existe camino $\mathscr{M}$-aumentante en G.
Entonces todo vértice en T es saturado por $\mathscr{M}$. Por lo tanto un camino $\mathscr{M}$-alternante que llegue al vértice $y \in T$ desde u sigue via $\mathscr{M}$ hacia un vértice en S. Es decir que $|T| = |S-u|$.
Entonces podemos afirmar que $T \subset N(S)$.

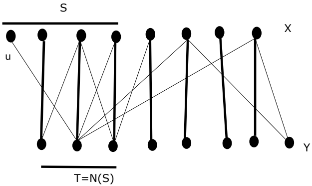
Demostración(cont.)

Probaremos que $T = N(S)$.



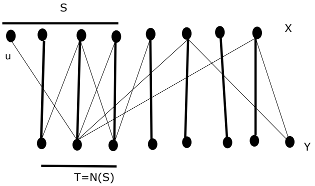
Demostración(cont.)

Probaremos que $T = N(S)$.



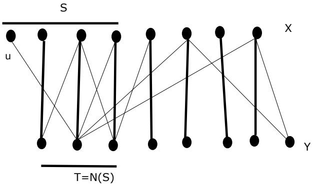
Supongo $z \in Y - T$ tiene un vecino $v \in S$.

Demostración(cont.)
Probaremos que $T = N(S)$.



Supongo $z \in Y - T$ tiene un vecino $v \in S$. Entonces $v \neq u$ (recordar que $N(u) \subset T$).

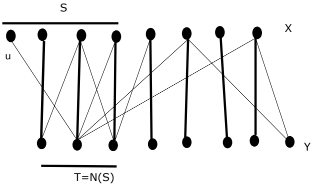
Demostración(cont.)
Probaremos que $T = N(S)$.



Supongo $z \in Y - T$ tiene un vecino $v \in S$. Entonces $v \neq u$ (recordar que $N(u) \subset T$).

La arista $\{v, z\} \notin \mathscr{M}$.

Demostración(cont.)
Probaremos que $T = N(S)$.



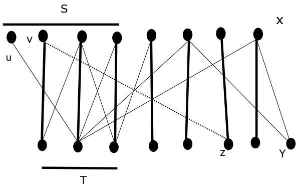
Supongo $z \in Y - T$ tiene un vecino $v \in S$. Entonces $v \neq u$ (recordar que $N(u) \subset T$).

La arista $\{v, z\} \notin \mathscr{M}$.

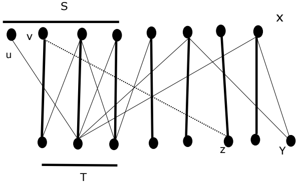
Porque $v \in S - u$ y v está saturado por $\mathscr{M}$ a través de un vértice en T.

Demostración(cont.)

Supongamos que z está saturado por $\mathscr{M}$:

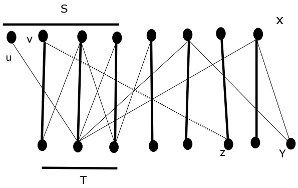


Demostración(cont.)
Supongamos que z está saturado por $\mathscr{M}$:



agregando la arista $\{v, z\}$ a un camino $\mathscr{M}$-alternante que llegue a v, conseguimos un camino $\mathscr{M}$-alternante a z.

Demostración(cont.)
Supongamos que z está saturado por $\mathscr{M}$:

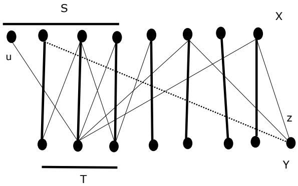


agregando la arista $\{v, z\}$ a un camino $\mathscr{M}$-alternante que llegue a v, conseguimos un camino $\mathscr{M}$-alternante a z.

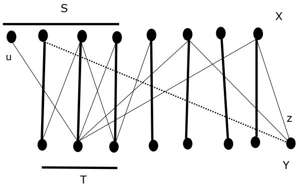
Entonces $z \in T$. Contradicción.

Demostración(cont.)

Si z no está saturado por $\mathscr{M}$,

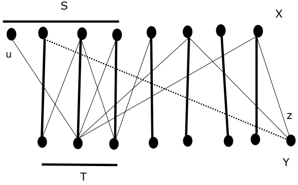


Demostración(cont.)
Si z no está saturado por $\mathscr{M}$,



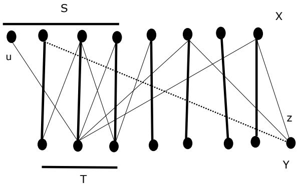
agregando la arista $\{v, z\}$ a un camino $\mathscr{M}$-alternante que llegue a v, conseguimos un camino $\mathscr{M}$-aumentante de u a z.

Demostración(cont.)
Si z no está saturado por $\mathscr{M}$,



agregando la arista $\{v, z\}$ a un camino $\mathscr{M}$-alternante que llegue a v, conseguimos un camino $\mathscr{M}$-aumentante de u a z. Contradicción ($\mathscr{M}$ es máximo).

Demostración(cont.)
Si z no está saturado por $\mathscr{M}$,



agregando la arista $\{v, z\}$ a un camino $\mathscr{M}$-alternante que llegue a v, conseguimos un camino $\mathscr{M}$-aumentante de u a z. Contradicción ($\mathscr{M}$ es máximo).
Hemos probado que $T = N(S)$ y entonces

$$|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|.$$

Sea $G=(X\cup Y,E)$ bipartito y $|X|=|Y|$.

Sea $G = (X \cup Y, E)$ bipartito y $|X| = |Y|$.

El teorema de Hall toma el nombre de *Teorema del Matrimonio* (The Marriage Theorem).

Sea $G = (X \cup Y, E)$ bipartito y $|X| = |Y|$.

El teorema de Hall toma el nombre de *Teorema del Matrimonio* (The Marriage Theorem).

Fue demostrado en el año 1917 por Frobenius:

Teorema del Matrimonio
Sea $G = (X \cup Y, E)$ bipartito. G tiene un matching perfecto si y sólo si $|X| = |Y|$ y para cualquier subconjunto $A \subset X$ existen al menos $|A|$ elementos en Y que están conectados con al menos uno de los elementos de A.

Ejercicio: Observar que en el caso en que $|X| = |Y|$, este teorema es el teorema de Hall.

Corolario

Si $k > 0$, todo grafo bipartito k-regular tiene un matching perfecto.

Corolario

Si $k > 0$, todo grafo bipartito k-regular tiene un matching perfecto.

Demostración

Sea $G = (X \cup Y, E)$ bipartito y k-regular.

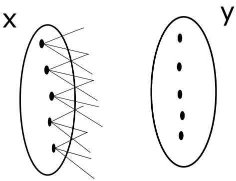
Corolario

Si $k > 0$, todo grafo bipartito k-regular tiene un matching perfecto.

Demostración

Sea $G = (X \cup Y, E)$ bipartito y k-regular.

Si contamos las aristas de acuerdo a sus extremos en X tenemos $k|X|$ aristas.



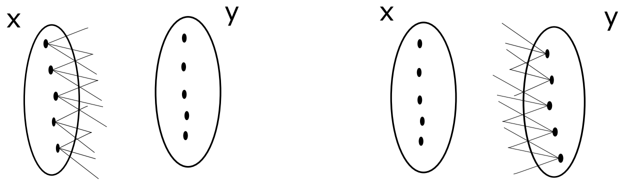
Corolario

Si $k>0$, todo grafo bipartito k-regular tiene un matching perfecto.

Demostración

Sea $G=(X\cup Y,E)$ bipartito y k-regular.

Si contamos las aristas de acuerdo a sus extremos en X tenemos $k|X|$ aristas.



Si las contamos teniendo en cuenta los extremos en Y tenemos $k|Y|$ aristas.

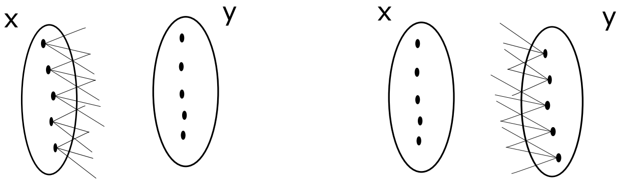
Corolario

Si $k > 0$, todo grafo bipartito k-regular tiene un matching perfecto.

Demostración

Sea $G = (X \cup Y, E)$ bipartito y k-regular.

Si contamos las aristas de acuerdo a sus extremos en X tenemos $k|X|$ aristas.



Si las contamos teniendo en cuenta los extremos en Y tenemos $k|Y|$ aristas.

Por lo tanto $k|X| = k|Y|$, es decir $|X| = |Y|$.

Demostración(cont.)
Sea $S \subset X$.

Demostración(cont.)

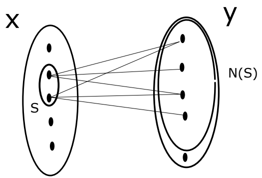
Sea $S \subset X$.

Sea m es número de aristas de S a $N(S)$.

Demostración(cont.)

Sea $S \subset X$.

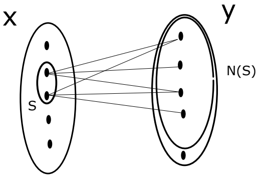
Sea m es número de aristas de S a $N(S)$.



Demostración(cont.)

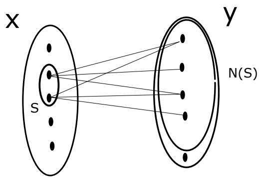
Sea $S \subset X$.

Sea m es número de aristas de S a $N(S)$.



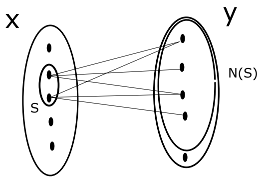
G es k-regular, entonces $m = k|S|$.

Demostración(cont.)
Sea $S \subset X$.
Sea m es número de aristas de S a $N(S)$.



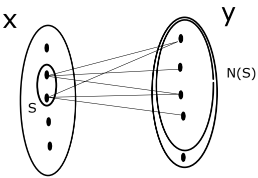
G es k-regular, entonces $m = k|S|$.
Estas m aristas son incidentes en $N(S)$ y entonces $m \leq k|N(S)|$.

Demostración(cont.)
Sea $S \subset X$.
Sea m es número de aristas de S a $N(S)$.



G es k-regular, entonces $m = k|S|$.
Estas m aristas son incidentes en $N(S)$ y entonces $m \leq k|N(S)|$.
Entonces $m = k|S| \leq k|N(S)|$, y vale $|S| \leq |N(S)|$.

Demostración(cont.)
Sea $S \subset X$.
Sea m es número de aristas de S a $N(S)$.



G es k-regular, entonces $m = k|S|$.
Estas m aristas son incidentes en $N(S)$ y entonces $m \leq k|N(S)|$.
Entonces $m = k|S| \leq k|N(S)|$, y vale $|S| \leq |N(S)|$.
Se cumple la condición de Hall, entonces existe un matching que satura a X, pero como $|X| = |Y|$, el matching es perfecto.

1. DEFINICIONES Y EJEMPLOS
2. MATCHING MÁXIMO
3. LA CONDICIÓN DE BERGE
4. LA CONDICIÓN DE HALL
5. TEOREMAS MIN-MAX

Supongamos que un grafo dado G no tiene matching perfecto y $\mathscr{M}$ es un matching en G.

Supongamos que un grafo dado G no tiene matching perfecto y $\mathscr{M}$ es un matching en G.
Pregunta: Es $\mathscr{M}$ un matching máximo en G?

Supongamos que un grafo dado G no tiene matching perfecto y $\mathscr{M}$ es un matching en G.
Pregunta: Es $\mathscr{M}$ un matching máximo en G?
El teorema de Berge permite decidir si $\mathscr{M}$ en G es máximo, probando que G no tiene un camino $\mathscr{M}$-aumentante.

Supongamos que un grafo dado G no tiene matching perfecto y $\mathscr{M}$ es un matching en G.
Pregunta: Es $\mathscr{M}$ un matching máximo en G?
El teorema de Berge permite decidir si $\mathscr{M}$ en G es máximo, probando que G no tiene un camino $\mathscr{M}$-aumentante.
Pero, explorar todos los posibles caminos $\mathscr{M}$-aumentantes en G puede tomar mucho tiempo.

Supongamos que un grafo dado G no tiene matching perfecto y $\mathscr{M}$ es un matching en G.
Pregunta: Es $\mathscr{M}$ un matching máximo en G?
El teorema de Berge permite decidir si $\mathscr{M}$ en G es máximo, probando que G no tiene un camino $\mathscr{M}$-aumentante.
Pero, explorar todos los posibles caminos $\mathscr{M}$-aumentantes en G puede tomar mucho tiempo.
Una situación similar enfrentamos cuando nos preguntamos si un grafo no es bipartito.

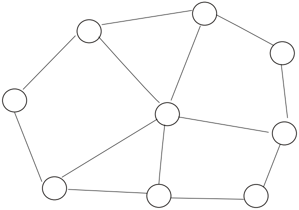
Supongamos que un grafo dado G no tiene matching perfecto y $\mathscr{M}$ es un matching en G.
Pregunta: Es $\mathscr{M}$ un matching máximo en G?
El teorema de Berge permite decidir si $\mathscr{M}$ en G es máximo, probando que G no tiene un camino $\mathscr{M}$-aumentante.
Pero, explorar todos los posibles caminos $\mathscr{M}$-aumentantes en G puede tomar mucho tiempo.
Una situación similar enfrentamos cuando nos preguntamos si un grafo no es bipartito.
En vez de explorar todas las posibles particiones de los vértices, exhibir un ciclo impar nos da la respuesta.

Supongamos que un grafo dado G no tiene matching perfecto y $\mathscr{M}$ es un matching en G.
Pregunta: Es $\mathscr{M}$ un matching máximo en G?
El teorema de Berge permite decidir si $\mathscr{M}$ en G es máximo, probando que G no tiene un camino $\mathscr{M}$-aumentante.
Pero, explorar todos los posibles caminos $\mathscr{M}$-aumentantes en G puede tomar mucho tiempo.
Una situación similar enfrentamos cuando nos preguntamos si un grafo no es bipartito.
En vez de explorar todas las posibles particiones de los vértices, exhibir un ciclo impar nos da la respuesta.
Objetivo Encontrar una estructura en G que prohiba la existencia de un matching de tamaño mayor al de $\mathscr{M}$.

Definición: Sea $G = (V, E)$. Un *cubrimiento por vértices* de G es un subconjunto $Q \subset V$ que contiene al menos uno de los extremos de cada arista en E. Se dice que los vértices en Q *cubren* a E.

Definición: Sea $G = (V, E)$. Un *cubrimiento por vértices* de G es un subconjunto $Q \subset V$ que contiene al menos uno de los extremos de cada arista en E. Se dice que los vértices en Q *cubren* a E.

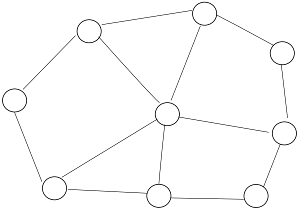
Ejemplo: Supongamos un esquema de las salas de un museo.



Se necesitan ubicar alarmas de incendio, de modo de evitar siniestros.

Definición: Sea $G=(V,E)$. Un *cubrimiento por vértices* de G es un subconjunto $Q\subset V$ que contiene al menos uno de los extremos de cada arista en E. Se dice que los vértices en Q *cubren* a E.

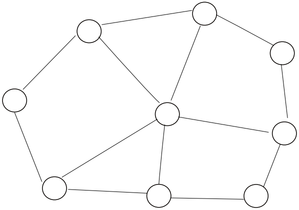
Ejemplo: Supongamos un esquema de las salas de un museo.



Se necesitan ubicar alarmas de incendio, de modo de evitar siniestros. Cada alarma puede controlar la sala en la que se encuentra y las salas contiguas.

Definición: Sea $G = (V, E)$. Un *cubrimiento por vértices* de G es un subconjunto $Q \subset V$ que contiene al menos uno de los extremos de cada arista en E. Se dice que los vértices en Q *cubren* a E.

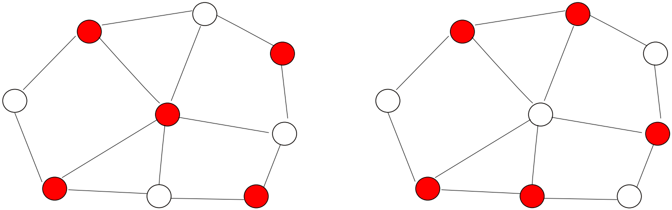
Ejemplo: Supongamos un esquema de las salas de un museo.



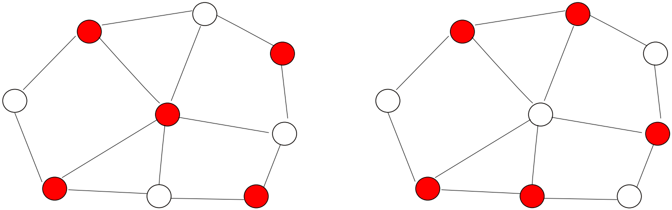
Se necesitan ubicar alarmas de incendio, de modo de evitar siniestros. Cada alarma puede controlar la sala en la que se encuentra y las salas contiguas. Se necesita ubicar la menor cantidad de alarmas posibles.

Los vértices en rojo representan dos posibles situaciones de alarmas de incendio:

Los vértices en rojo representan dos posibles situaciones de alarmas de incendio:



Los vértices en rojo representan dos posibles situaciones de alarmas de incendio:



Ambas soluciones corresponden a encontrar un cubrimiento por vértices mínimo en el grafo que representa el mapa del museo.

Observación: Sea $G=(V,E)$, $\mathscr{M}$ un matching y Q un cubrimiento por vértices en G.

Observación: Sea $G=(V,E)$, $\mathscr{M}$ un matching y Q un cubrimiento por vértices en G.
Si $v\in Q$, v no puede cubrir dos aristas en $\mathscr{M}$. Por lo tanto

$$|Q|\geq|\mathscr{M}|.$$

Observación: Sea $G = (V,E)$, $\mathscr{M}$ un matching y Q un cubrimiento por vértices en G.
Si $v \in Q$, v no puede cubrir dos aristas en $\mathscr{M}$. Por lo tanto

$$|Q| \geq |\mathscr{M}|.$$

Lema
Sea $G = (V,E)$, $\mathscr{M}$ un matching y Q un cubrimiento por vértices en G.

Observación: Sea $G = (V, E)$, $\mathscr{M}$ un matching y Q un cubrimiento por vértices en G.
Si $v \in Q$, v no puede cubrir dos aristas en $\mathscr{M}$. Por lo tanto

$$|Q| \geq |\mathscr{M}|.$$

Lema
Sea $G = (V, E)$, $\mathscr{M}$ un matching y Q un cubrimiento por vértices en G.
Si $|Q| = |\mathscr{M}|$ entonces $\mathscr{M}$ es un matching máximo y Q un cubrimiento por vértices mínimo en G.

Observación: Sea $G = (V, E)$, $\mathscr{M}$ un matching y Q un cubrimiento por vértices en G.
Si $v \in Q$, v no puede cubrir dos aristas en $\mathscr{M}$. Por lo tanto

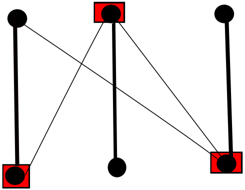
$$|Q| \geq |\mathscr{M}|.$$

Lema
Sea $G = (V, E)$, $\mathscr{M}$ un matching y Q un cubrimiento por vértices en G.
Si $|Q| = |\mathscr{M}|$ entonces $\mathscr{M}$ es un matching máximo y Q un cubrimiento por vértices mínimo en G.

Demostración: Ejercicio.

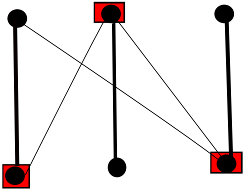
En cada uno de los grafos que siguen, los vértices recuadrados en rojo corresponden a un cubrimiento mínimo y las aristas más pronunciadas a matchings máximos.

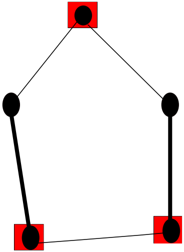
En cada uno de los grafos que siguen, los vértices recuadrados en rojo corresponden a un cubrimiento mínimo y las aristas más pronunciadas a matchings máximos.



El grafo de la izquierda es bipartito y vale $|Q| = \mathscr{M}$.

En cada uno de los grafos que siguen, los vértices recuadrados en rojo corresponden a un cubrimiento mínimo y las aristas más pronunciadas a matchings máximos.





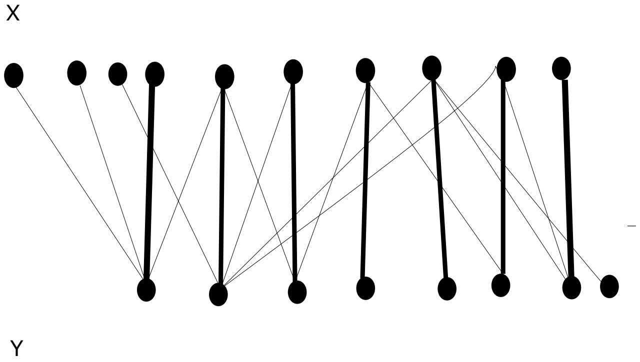
El grafo de la izquierda es bipartito y vale $|Q| = \mathscr{M}$. Para el grafo de la derecha vale $|Q| > \mathscr{M}$.

Teorema(Konig[1931], Egerváry[1931]) Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito. Entonces el tamaño del matching máximo en G es igual al tamaño del mínimo cubrimiento por vértices en G.

Teorema(Konig[1931], Egerváry[1931]) Sea $G=(X \cup Y, E)$ grafo bipartito. Entonces el tamaño del matching máximo en G es igual al tamaño del mínimo cubrimiento por vértices en G.

Demostración

Sea $G=(X \cup Y, E)$ grafo bipartito.



Teorema(Konig[1931], Egerváry[1931]) Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito. Entonces el tamaño del matching máximo en G es igual al tamaño del mínimo cubrimiento por vértices en G.

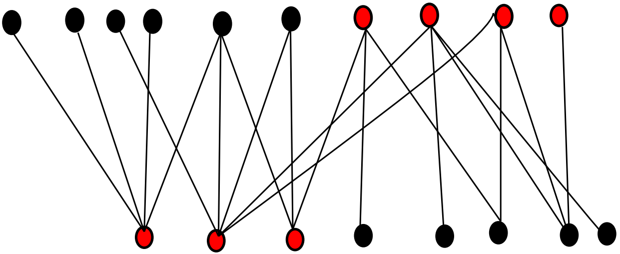
Demostración

Sea $G = (X \cup Y, E)$ grafo bipartito.

Considero Q cubrimiento por vértices en G de tamaño mínimo.

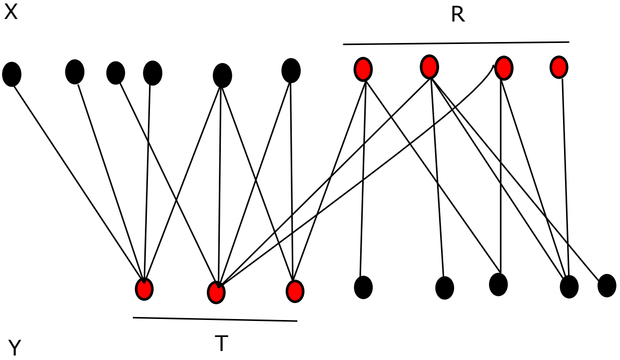
Ilustración: los vértices en rojo corresponden a un cubrimiento mínimo.

X



Demostración(cont.)

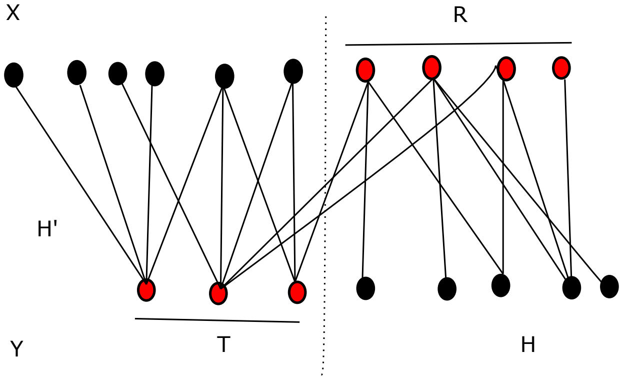
Sean $R = Q \cap X$ y $T = Q \cap Y$



Demostración(cont.)
Sean $R = Q \cap X$ y $T = Q \cap Y$
Sean H y H' los subgrafos de G inducidos por los vértices en $R \cup (Y - T)$ y $T \cup (X - R)$ respectivamente.

Demostración(cont.)
Sean $R = Q \cap X$ y $T = Q \cap Y$
Sean H y H' los subgrafos de G inducidos por los vértices en $R \cup (Y - T)$ y $T \cup (X - R)$ respectivamente. Resultan H y H' disjuntos.

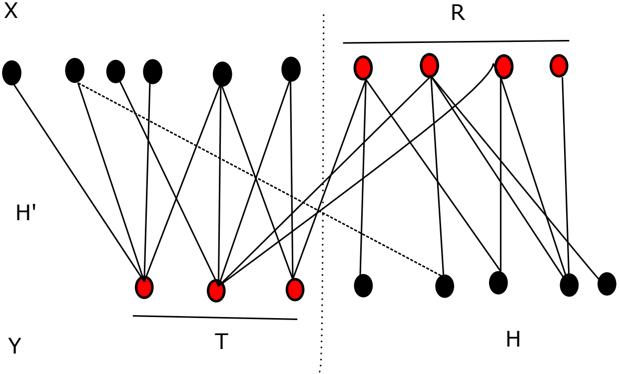
Demostración(cont.)
Sean $R = Q \cap X$ y $T = Q \cap Y$
Sean H y H' los subgrafos de G inducidos por los vértices en $R \cup (Y - T)$ y $T \cup (X - R)$ respectivamente. Resultan H y H' disjuntos.



Demostración(cont.)
Como $R \cup T$ es un cubrimiento por vértices, no puede existir una arista que conecte un vértice en $Y - T$ con otro en $X - R$.

Demostración(cont.)

Como $R \cup T$ es un cubrimiento por vértices, no puede existir una arista que conecte un vértice en $Y - T$ con otro en $X - R$.

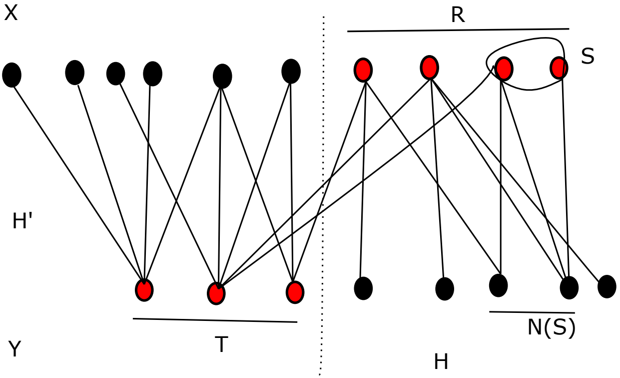


Demostración(cont.)
Como $R \cup T$ es un cubrimiento por vértices, no puede existir una arista que conecte un vértice en $Y - T$ con otro en $X - R$.
Sea $S \subset R$ y consideremos $N_H(S)$. $N_H(S) \subset Y - T$.

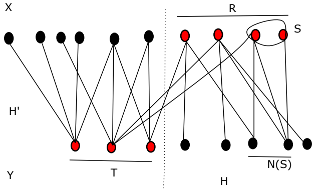
Demostración(cont.)

Como $R \cup T$ es un cubrimiento por vértices, no puede existir una arista que conecte un vértice en $Y - T$ con otro en $X - R$.

Sea $S \subset R$ y consideremos $N_H(S)$. $N_H(S) \subset Y - T$.

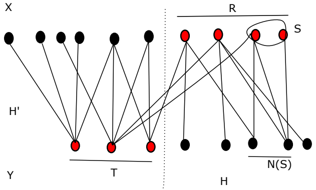


Demostración(cont.)



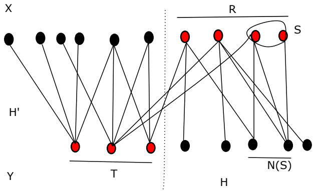
Supongo $|N_H(S)| < |S|$. Es claro que $N_H(S)$ cubre a todas las aristas que cubre S.

Demostración(cont.)



Supongo $|N_H(S)| < |S|$. Es claro que $N_H(S)$ cubre a todas las aristas que cubre S.
Sea $Q' = N_H(S) \cup (R - S) \cup T$. Sigue que Q' es un cubrimiento y $|Q'| < |Q|$.
Contradicción (Q es mínimo).

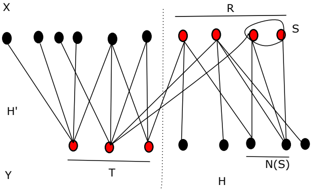
Demostración(cont.)



Supongo $|N_H(S)| < |S|$. Es claro que $N_H(S)$ cubre a todas las aristas que cubre S.
Sea $Q' = N_H(S) \cup (R - S) \cup T$. Sigue que Q' es un cubrimiento y $|Q'| < |Q|$. Contradicción (Q es mínimo).

Entonces si $S \subset R$ se verifica que $|S| \leq |N_H(S)|$.

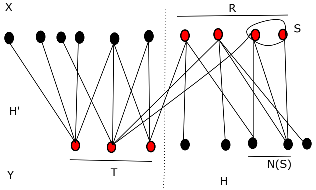
Demostración(cont.)



Supongo $|N_H(S)| < |S|$. Es claro que $N_H(S)$ cubre a todas las aristas que cubre S.
Sea $Q' = N_H(S) \cup (R - S) \cup T$. Sigue que Q' es un cubrimiento y $|Q'| < |Q|$. Contradicción (Q es mínimo).

Entonces si $S \subset R$ se verifica que $|S| \leq |N_H(S)|$.
El Teorema de Hall garantiza la existencia de un matching $\mathscr{M}$ en H que satura a R.

Demostración(cont.)

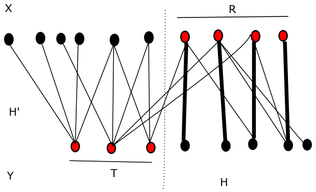


Supongo $|N_H(S)| < |S|$. Es claro que $N_H(S)$ cubre a todas las aristas que cubre S.
Sea $Q' = N_H(S) \cup (R - S) \cup T$. Sigue que Q' es un cubrimiento y $|Q'| < |Q|$. Contradicción (Q es mínimo).

Entonces si $S \subset R$ se verifica que $|S| \leq |N_H(S)|$.
El Teorema de Hall garantiza la existencia de un matching $\mathscr{M}$ en H que satura a R. Y vale $|\mathscr{M}| = |R|$.

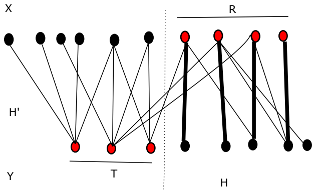
Demostración(cont.)

De acuerdo al ejemplo:



Demostración(cont.)

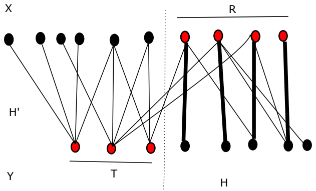
De acuerdo al ejemplo:



Aplicamos el mismo razonamiento en H'.

Demostración(cont.)

De acuerdo al ejemplo:

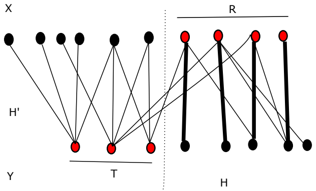


Aplicamos el mismo razonamiento en H'.

Consideramos $S \subset T$ y obtenemos $|S| \leq |N_{H'}(S)|$.

Demostración(cont.)

De acuerdo al ejemplo:



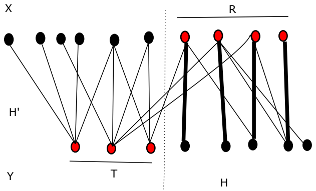
Aplicamos el mismo razonamiento en H'.

Consideramos $S \subset T$ y obtenemos $|S| \leq |N_{H'}(S)|$.

El teorema de Hall asegura que existe un matching $\mathscr{M}'$ en H' que satura a T.

Demostración(cont.)

De acuerdo al ejemplo:



Aplicamos el mismo razonamiento en H'.

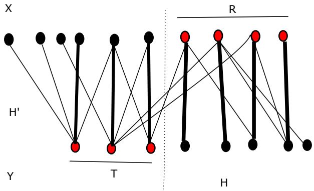
Consideramos $S \subset T$ y obtenemos $|S| \leq |N_{H'}(S)|$.

El teorema de Hall asegura que existe un matching $\mathscr{M}'$ en H' que satura a T.

Y entonces $|\mathscr{M}'| = |T|$.

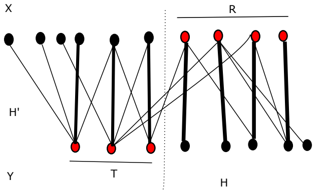
Demostración(cont.)

De acuerdo al ejemplo:



Demostración(cont.)

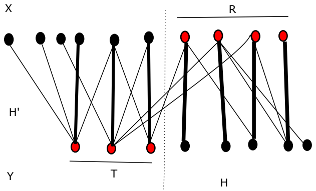
De acuerdo al ejemplo:



Conseguimos $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings disjuntos, por lo tanto $\mathscr{M} \cup \mathscr{M}'$ es un matching en G.

Demostración(cont.)

De acuerdo al ejemplo:



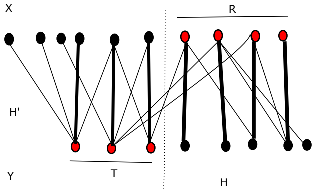
Conseguimos $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings disjuntos, por lo tanto $\mathscr{M} \cup \mathscr{M}'$ es un matching en G.

Además vale

$$|\mathscr{M} \cup \mathscr{M}'| = |R \cup T| = |Q|.$$

Demostración(cont.)

De acuerdo al ejemplo:



Conseguimos $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ dos matchings disjuntos, por lo tanto $\mathscr{M} \cup \mathscr{M}'$ es un matching en G.

Además vale

$$|\mathscr{M} \cup \mathscr{M}'| = |R \cup T| = |Q|.$$

Sigue que $\mathscr{M} \cup \mathscr{M}'$ es máximo.