GRAFOS PLANARES Parte II

S. Bianchi P. Fekete V: Bonservizi

[1] Universidad Nacional de Rosario, Dept. de Matemática
Rosario, Argentina

5 de abril de 2020

Outline

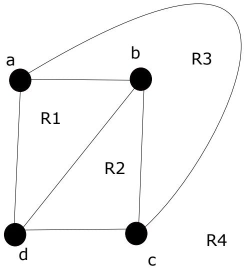
1. TEOREMA DE EULER

2. EL GRAFO DUAL

Dado un grafo planar, en su inmersión en el plano, podemos definir regiones del plano, delimitadas por las aristas, que por su disposición, sólo se intersectan en los vértices.

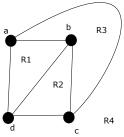
Dado un grafo planar, en su inmersión en el plano, podemos definir regiones del plano, delimitadas por las aristas, que por su disposición, sólo se intersectan en los vértices.

Por ejemplo, el siguiente grafo define 4 regiones, 3 de ellas finitas y una infinita.

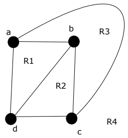


Veamos,

Veamos,

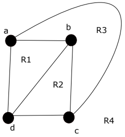


Veamos,



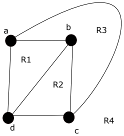
La región R_1 está delimitada por las aristas $\{a,b\}$, $\{a,d\}$ y $\{b,d\}$.

Veamos,



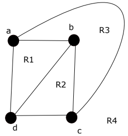
La región R_1 está delimitada por las aristas $\{a,b\}$, $\{a,d\}$ y $\{b,d\}$.
La región R_2 está delimitada por las aristas $\{b,c\}$, $\{c,d\}$ y $\{b,d\}$.

Veamos,



La región R_1 está delimitada por las aristas $\{a,b\}$, $\{a,d\}$ y $\{b,d\}$.
La región R_2 está delimitada por las aristas $\{b,c\}$, $\{c,d\}$ y $\{b,d\}$.
La región R_3 está delimitada por las aristas $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ y $\{b,c\}$.

Veamos,



La región R_1 está delimitada por las aristas $\{a,b\}$, $\{a,d\}$ y $\{b,d\}$.
La región R_2 está delimitada por las aristas $\{b,c\}$, $\{c,d\}$ y $\{b,d\}$.
La región R_3 está delimitada por las aristas $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ y $\{b,c\}$.
La región R_4 es la región exterior a la región delimitada por las aristas $\{a,d\}$, $\{a,c\}$ y $\{d,c\}$.

TEOREMA

Sea $G = V,E)$ grafo o multigrafo plano y conexo con $n = |V|$ y $m = |E|$. Sea r el número de regiones en el plano determinadas por G mediante su representación planar (inmersión). Entonces

$$n - m + r = 2.$$

TEOREMA

Sea $G = V, E)$ grafo o multigrafo plano y conexo con $n = |V|$ y $m = |E|$. Sea r el número de regiones en el plano determinadas por G mediante su representación planar (inmersión). Entonces

$$n - m + r = 2.$$

Demostración

Por inducción sobre $m = |E|$.

TEOREMA

Sea $G = V,E)$ grafo o multigrafo plano y conexo con $n = |V|$ y $m = |E|$. Sea r el número de regiones en el plano determinadas por G mediante su representación planar (inmersión). Entonces

$$n - m + r = 2.$$

Demostración

Por inducción sobre $m = |E|$.

Si $m = 0$ entonces como G es conexo, entonces es isomorfo a un grafo con un único vértice. Es decir $n = 1$.

TEOREMA

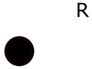
Sea $G = V,E)$ grafo o multigrafo plano y conexo con $n = |V|$ y $m = |E|$. Sea r el número de regiones en el plano determinadas por G mediante su representación planar (inmersión). Entonces

$$n - m + r = 2.$$

Demostración

Por inducción sobre $m = |E|$.

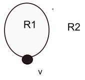
Si $m = 0$ entonces como G es conexo, entonces es isomorfo a un grafo con un único vértice. Es decir $n = 1$.



Sigue que $r = 1$ y vale $1 - 0 + 1 = 2$.

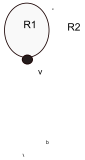
Si $m = 1$ entonces el grafo G tiene una única arista, llamémosla e, y es isomorfo a:

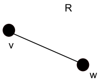
Si $m = 1$ entonces el grafo G tiene una única arista, llamémosla e, y es isomorfo a:



- cuando e es un lazo entonces $r = 2$, $n = 1$ y vale $1 - 1 + 2 = 2$

Si $m = 1$ entonces el grafo G tiene una única arista, llamémosla e, y es isomorfo a:





- cuando e es un lazo entonces $r = 2$, $n = 1$ y vale $1 - 1 + 2 = 2$
- caundo e es una arista incidente a dos vértices distintos, vale $r = 1$ y $n = 2$ y sigue que $2 - 1 + 1 = 2$.

Hipótesis inductiva

Si G es un grafo planar convexo con m aristas y $m \leq k$ entonces vale $n - m + r = 2$.

Hipótesis inductiva
Si G es un grafo planar convexo con m aristas y $m \leq k$ entonces vale $n - m + r = 2$.

Sea $G = (V, E)$ grafo planar con r regiones n vértices y $m + 1$ aristas. Y sea $e = \{u, v\} \in E$.

Hipótesis inductiva
Si G es un grafo planar convexo con m aristas y $m \leq k$ entonces vale $n - m + r = 2$.

Sea $G = (V, E)$ grafo planar con r regiones n vértices y $m + 1$ aristas. Y sea $e = \{u, v\} \in E$.

Consideramos el grafo $H = G - e$
(si G es un multigrafo y e se repite, entonces la eliminamos una sola vez).

Hipótesis inductiva
Si G es un grafo planar convexo con m aristas y $m \leq k$ entonces vale $n - m + r = 2$.

Sea $G = (V, E)$ grafo planar con r regiones n vértices y $m+1$ aristas. Y sea $e = \{u, v\} \in E$.

Consideramos el grafo $H = G - e$
(si G es un multigrafo y e se repite, entonces la eliminamos una sola vez).

Es claro que $V(H) = n$ y $E(H) = m - 1$.

Hipótesis inductiva
Si G es un grafo planar convexo con m aristas y $m \leq k$ entonces vale $n - m + r = 2$.

Sea $G = (V, E)$ grafo planar con r regiones n vértices y $m + 1$ aristas. Y sea $e = \{u, v\} \in E$.

Consideramos el grafo $H = G - e$
(si G es un multigrafo y e se repite, entonces la eliminamos una sola vez).

Es claro que $V(H) = n$ y $E(H) = m - 1$.

Si llamamos r_H al número de regiones planas de H, por hipótesis de inducción vale

$$n - (m - 1) + r_H = 2$$

.

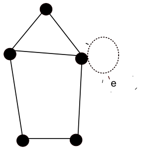
Teorema de Euler para grafos planares

Tenemos distintos casos que analizar:

Tenemos distintos casos que analizar:

caso 1: H es conexo.

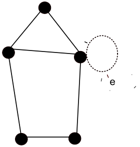
Si la arista e es un lazo como se ve en las figuras:

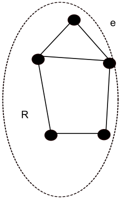


Tenemos distintos casos que analizar:

caso 1: H es conexo.

Si la arista e es un lazo como se ve en las figuras:

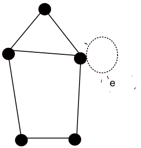


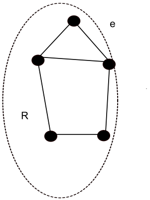


Tenemos distintos casos que analizar:

caso 1: H es conexo.

Si la arista e es un lazo como se ve en las figuras:

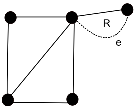




observamos que el número de regiones planas de H disminuye en una unidad respecto al número de G, es decir $r_H = r - 1$.

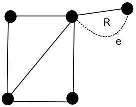
Si e no es un lazo, entonces:

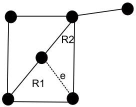
Si e no es un lazo, entonces:



- en este caso e es doble y la quitamos una sola vez,

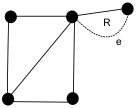
Si e no es un lazo, entonces:

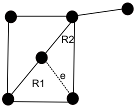




- en este caso e es doble y la quitamos una sola vez,
- en este otro caso e es una arista simple.

Si e no es un lazo, entonces:





- en este caso e es doble y la quitamos una sola vez,
- en este otro caso e es una arista simple.

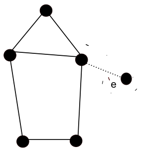
Pero en cualquier caso el número de regiones en H disminuye en una unidad. Entonces hasta ahora tenemos que $n-(m-1)+r_H=2$ o equivalentemente $n-(m-1)+r-1=2$. Esto último es $n-m+r=2$.

caso 1: H no es conexo.

Como ejemplos, vemos las siguientes figuras

caso 1: H no es conexo.

Como ejemplos, vemos las siguientes figuras



caso 1: H no es conexo.
Como ejemplos, vemos las siguientes figuras

Es claro que H tiene en cualquier caso dos componentes conexas, H_1 y H_2. Alguna de estas componentes podría ser un sólo vértices como muestra la figura de la izquierda.

Sean n_i, m_i y r_i el número de vértices, de aristas y de regiones planas del grafo H_i para $i = 1, 2$.

Sean n_i, m_i y r_i el número de vértices, de aristas y de regiones planas del grafo H_i para $i = 1, 2$.

Por hipótesis de inducción vale $n_i - m_i + r_i = 2$ para $i = 1, 2$.

Sean n_i, m_i y r_i el número de vértices, de aristas y de regiones planas del grafo H_i para $i = 1,2$.

Por hipótesis de inducción vale $n_i - m_i + r_i = 2$ para $i = 1,2$.

Por otra parte es claro que $n_1 + n_2 = n$, $m_1 + m_2 = m - 1$ y

Sean n_i, m_i y r_i el número de vértices, de aristas y de regiones planas del grafo H_i para $i = 1, 2$.

Por hipótesis de inducción vale $n_i - m_i + r_i = 2$ para $i = 1, 2$.

Por otra parte es claro que $n_1 + n_2 = n$, $m_1 + m_2 = m - 1$ y

$$r_1 + r_2 = r_H = r + 1,$$

Esto se debe a que H_1 y H_2 tienen cada uno una región infinita.

Sean n_i, m_i y r_i el número de vértices, de aristas y de regiones planas del grafo H_i para $i = 1, 2$.

Por hipótesis de inducción vale $n_i - m_i + r_i = 2$ para $i = 1, 2$.

Por otra parte es claro que $n_1 + n_2 = n$, $m_1 + m_2 = m - 1$ y

$$r_1 + r_2 = r_H = r + 1,$$

Esto se debe a que H_1 y H_2 tienen cada uno una región infinita.

Sigue que $(n_1 + n_2) - (m_1 + m_2) + (r_1 + r_2) = 4$ y equivalentemente $n - (m - 1) + r + 1 = 4$. Es decir

$$n - m + r = 2.$$

$\star$

Sea $G = (V, E)$ grafo o multigrafo planar y consideremos su inmersión planar.

Sea $G = (V, E)$ grafo o multigrafo planar y consideremos su inmersión planar.

DEFINICIÓN:

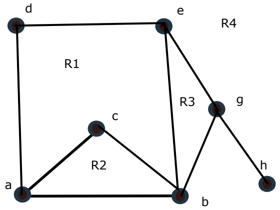
Dada R una región de G, el grado de R que se denota por $grad(R)$, es el número de aristas recorridas en un camino cerrado (más corto) por las aristas de la frontera de R.

Sea $G=(V,E)$ grafo o multigrafo planar y consideremos su inmersión planar.

DEFINICIÓN:

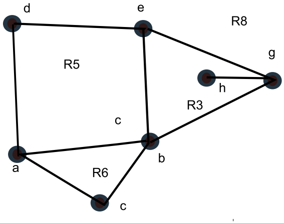
Dada R una región de G, el grado de R que se denota por $grad(R)$, es el número de aristas recorridas en un camino cerrado (más corto) por las aristas de la frontera de R.

Si $G=(V,E)$ es el grafo de la figura, entonces esta inmersión planar tiene 4 regiones:

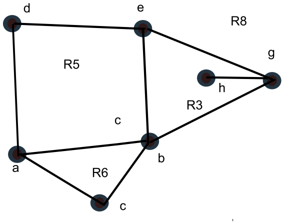


y $grad(R_1)=5$, $grad(R_2)=3$, $grad(R_3)=3$ y $grad(R_4)=7$.

Si consideramos esta otra inmersión planar de G,

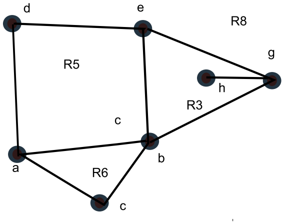


Si consideramos esta otra inmersión planar de G,



entonces $grad(R_5) = 4$, $grad(R_6) = 3$, $grad(R_7) = 5$ y $grad(R_8) = 6$.

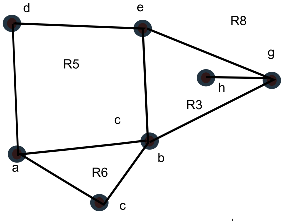
Si consideramos esta otra inmersión planar de G,



entonces $grad(R_5) = 4$, $grad(R_6) = 3$, $grad(R_7) = 5$ y $grad(R_8) = 6$.

Además vale $\sum_{i=1}^{4} grad(R_i) = \sum_{i=5}^{8} grad(R_i) = 18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot |E|$.

Si consideramos esta otra inmersión planar de G,



entonces $grad(R_5) = 4$, $grad(R_6) = 3$, $grad(R_7) = 5$ y $grad(R_8) = 6$.
Además vale $\sum_{i=1}^{4} grad(R_i) = \sum_{i=5}^{8} grad(R_i) = 18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot |E|$.
En general, si G es planar y r es su número de regiones planas, vale

$$\sum_{i=1}^{r} grad(R_i) = 2 \cdot |E|.$$

COROLARIO

Sea $G = (V, E)$ grafo planar, conexo, sin lazos y sin aristas múltiples con $|V| = n$, $|E = m > 2$ y r regiones. Entonces

$$3r \leq 2m \text{ y } m \leq 3n - 6.$$

COROLARIO

Sea $G=(V,E)$ grafo planar, conexo, sin lazos y sin aristas múltiples con $|V|=n$, $|E=m>2$ y r regiones. Entonces

$$3r \leq 2m \text{ y } m \leq 3n-6.$$

Demostración:

Como G no es un multigrafo, entonces $grad(R) \geq 3$.

COROLARIO

Sea $G=(V,E)$ grafo planar, conexo, sin lazos y sin aristas múltiples con $|V|=n$, $|E=m>2$ y r regiones. Entonces

$$3r \leq 2m \text{ y } m \leq 3n-6.$$

Demostración:

Como G no es un multigrafo, entonces $grad(R) \geq 3$.

Entonces $2|E|=2m=\sum_{i=1}^{r} grad(R_i) \geq 3r$. Es decir

$$2m \geq 3r.$$

COROLARIO

Sea $G=(V,E)$ grafo planar, conexo, sin lazos y sin aristas múltiples con $|V|=n$, $|E=m>2$ y r regiones. Entonces

$$3r \leq 2m \text{ y } m \leq 3n-6.$$

Demostración:

Como G no es un multigrafo, entonces $grad(R) \geq 3$.

Entonces $2|E| = 2m = \sum_{i=1}^{r} grad(R_i) \geq 3r$. Es decir

$$2m \geq 3r.$$

Aplicamos el Teorema de Euler, $2 = n-m+r \leq n-m+\frac{2}{3}m = n-\frac{1}{3}m$. Sigue que

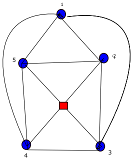
$$6 \leq 3n-m.$$

K_5 NO ES PLANAR

Recordemos el grafo K_5 y nuestros intentos de conseguir una inmersión en el plano:

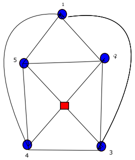
K_5 NO ES PLANAR

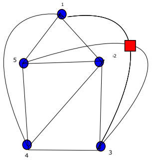
Recordemos el grafo K_5 y nuestros intentos de conseguir una inmersión en el plano:



K_5 NO ES PLANAR

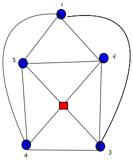
Recordemos el grafo K_5 y nuestros intentos de conseguir una inmersión en el plano:

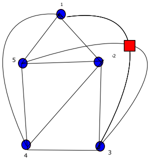


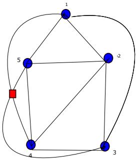


K_5 NO ES PLANAR

Recordemos el grafo K_5 y nuestros intentos de conseguir una inmersión en el plano:







K_5 NO ES PLANAR

K_5 NO ES PLANAR

K_5 es conexo y sin lazos. Además $n = 5$ y $m = 10$.

K_5 NO ES PLANAR

K_5 es conexo y sin lazos. Además $n = 5$ y $m = 10$.

Si K_5 es planar, entonces debe satisfacer la desigualdad $m \leq 3n - 6$.

K_5 NO ES PLANAR

K_5 es conexo y sin lazos. Además $n = 5$ y $m = 10$.

Si K_5 es planar, entonces debe satisfacer la desigualdad $m \leq 3n - 6$.

Pero, vemos que

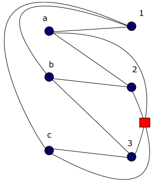
$$10 > 15 - 6$$

Esto prueba que K_5 no es planar.

$K_{3,3}$ NO ES PLANAR

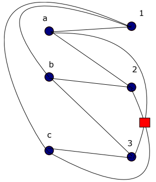
$K_{3,3}$ NO ES PLANAR

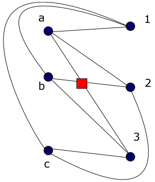
Recordemos los distintos intentos de inmersión planar para $K_{3,3}$:



$K_{3,3}$ NO ES PLANAR

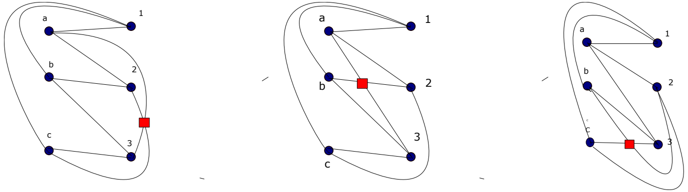
Recordemos los distintos intentos de inmersión planar para $K_{3,3}$:





$K_{3,3}$ NO ES PLANAR

Recordemos los distintos intentos de inmersión planar para $K_{3,3}$:



$K_{3,3}$ NO ES PLANAR

$K_{3,3}$ NO ES PLANAR

$K_{3,3}$ no contiene lazos y es conexo. Además $n = 6$ y $m = 9$.

$K_{3,3}$ NO ES PLANAR

$K_{3,3}$ no contiene lazos y es conexo. Además $n = 6$ y $m = 9$.

Vemos que satisface la desigualdad $m = 9 \leq 3n - 6 = 18 - 6 = 12$. Pero esto no asegura que $K_{3,3}$ es planar.

$K_{3,3}$ NO ES PLANAR

$K_{3,3}$ no contiene lazos y es conexo. Además $n = 6$ y $m = 9$.

Vemos que satisface la desigualdad $m = 9 \leq 3n - 6 = 18 - 6 = 12$. Pero esto no asegura que $K_{3,3}$ es planar.

Si suponemos que $K_{3,3}$ es planar, entonces aplicando el Teorema de Euler ($n - m + r = 2$), obtenemos $6 - 9 + r = 2$. Es decir $r = 5$.

$K_{3,3}$ NO ES PLANAR

$K_{3,3}$ no contiene lazos y es conexo. Además $n = 6$ y $m = 9$.

Vemos que satisface la desigualdad $m = 9 \leq 3n - 6 = 18 - 6 = 12$. Pero esto no asegura que $K_{3,3}$ es planar.

Si suponemos que $K_{3,3}$ es planar, entonces aplicando el Teorema de Euler ($n - m + r = 2$), obtenemos $6 - 9 + r = 2$. Es decir $r = 5$.

Por otra parte sabemos que $18 = \sum_{i=1}^{r} grad(R_i)$.

$K_{3,3}$ NO ES PLANAR

$K_{3,3}$ no contiene lazos y es conexo. Además $n = 6$ y $m = 9$.

Vemos que satisface la desigualdad $m = 9 \leq 3n - 6 = 18 - 6 = 12$. Pero esto no asegura que $K_{3,3}$ es planar.

Si suponemos que $K_{3,3}$ es planar, entonces aplicando el Teorema de Euler ($n - m + r = 2$), obtenemos $6 - 9 + r = 2$. Es decir $r = 5$.

Por otra parte sabemos que $18 = \sum_{i=1}^{r} grad(R_i)$.

Observemos que $grad(R) \geq 4$ en cualquier región de $K_{3,3}$.
Entonces $\sum_{i=1}^{r} grad(R_i) \geq 4 \cdot 5 = 20$. Por lo tanto $K_{3,3}$ no es planar.

OUTLINE

Construcción del grafo dual

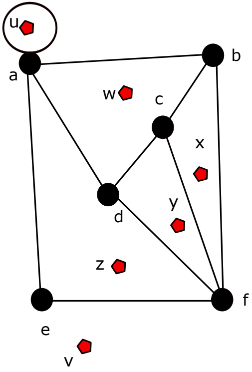
Finalizando con grafos planares, veremos el concepto de grafo dual.

Finalizando con grafos planares, veremos el concepto de grafo dual.

La construcción del grafo dual de un grafo planar o multigrafo planar depende de su inmersión en el plano.
Consideremos el grafo $G = (V,E)$ con $V = \{a,b,c,d,e,f\}$ de la figura

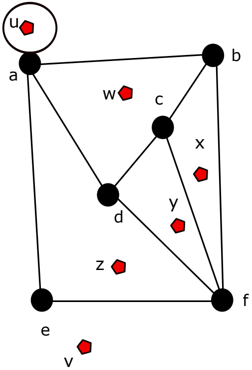
Finalizando con grafos planares, veremos el concepto de grafo dual.

La construcción del grafo dual de un grafo planar o multigrafo planar depende de su inmersión en el plano.
Consideremos el grafo $G = (V,E)$ con $V = \{a,b,c,d,e,f\}$ de la figura



Finalizando con grafos planares, veremos el concepto de grafo dual.

La construcción del grafo dual de un grafo planar o multigrafo planar depende de su inmersión en el plano.
Consideremos el grafo $G = (V,E)$ con $V = \{a,b,c,d,e,f\}$ de la figura

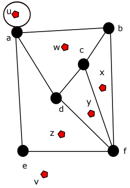


A cada región se le asocia un nodo (en rojo).

Se construye el grafo G^d cuyo conjunto de vértices es $\{u, v, w, x, y, z\}$. Dos vértices son adyacentes en G^d si las regiones en G que representan comparten una arista en E.

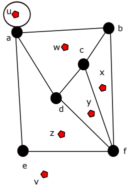
Se construye el grafo G^d cuyo conjunto de vértices es $\{u, v, w, x, y, z\}$. Dos vértices son adyacentes en G^d si las regiones en G que representan comparten una arista en E.

Veamos,



Se construye el grafo G^d cuyo conjunto de vértices es $\{u, v, w, x, y, z\}$. Dos vértices son adyacentes en G^d si las regiones en G que representan comparten una arista en E.

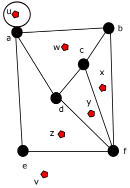
Veamos,



$\{u, v\}$ es una arista de G^d porque la región asociada a u comparte la arista $\{a, a\}$ con la región externa asociada al nodo v.

Se construye el grafo G^d cuyo conjunto de vértices es $\{u, v, w, x, y, z\}$. Dos vértices son adyacentes en G^d si las regiones en G que representan comparten una arista en E.

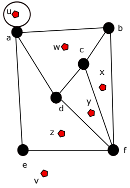
Veamos,



$\{u, v\}$ es una arista de G^d porque la región asociada a u comparte la arista $\{a, a\}$ con la región externa asociada al nodo v.

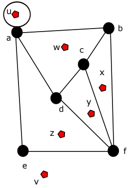
También $\{z, v\}$, ya que la región externa identificada con v comparte la arista $\{a, e\}$ con la región que representa z.

Se construye el grafo G^d cuyo conjunto de vértices es $\{u,v,w,x,y,z\}$. Dos vértices son adyacentes en G^d si las regiones en G que representan comparten una arista en E.
Veamos,



$\{u,v\}$ es una arista de G^d porque la región asociada a u comparte la arista $\{a,a\}$ con la región externa asociada al nodo v.
También $\{z,v\}$, ya que la región externa identificada con v comparte la arista $\{a,e\}$ con la región que representa z.
Pero también la arista la arista $\{e,f\}$ es compartida por esas mismas dos regiones.

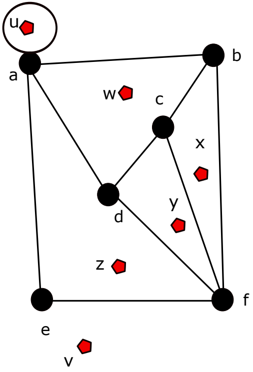
Se construye el grafo G^d cuyo conjunto de vértices es $\{u, v, w, x, y, z\}$. Dos vértices son adyacentes en G^d si las regiones en G que representan comparten una arista en E.
Veamos,



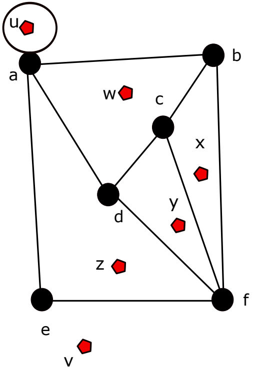
$\{u, v\}$ es una arista de G^d porque la región asociada a u comparte la arista $\{a, a\}$ con la región externa asociada al nodo v.
También $\{z, v\}$, ya que la región externa identificada con v comparte la arista $\{a, e\}$ con la región que representa z.
Pero también la arista la arista $\{e, f\}$ es compartida por esas mismas dos regiones.
Por lo tanto $\{z, v\}$ es arista doble en G^d. Es decir G^d resulta ser un multigrafo.

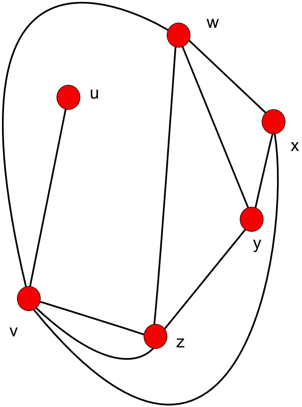
Así siguiendo, el grafo G^d correspondiente al grafo G que se consigue a partir de la construcción es el que aparece a la derecha y se lo llama grafo dual de G:

Así siguiendo, el grafo G^d correspondiente al grafo G que se consigue a partir de la construcción es el que aparece a la derecha y se lo llama grafo dual de G:



Así siguiendo, el grafo G^d correspondiente al grafo G que se consigue a partir de la construcción es el que aparece a la derecha y se lo llama grafo dual de G:





Veamos algunas propiedades del grafo dual:

Veamos algunas propiedades del grafo dual:

Cada arista de G se corresponde con una arista de G^d. (En el ejemplo la arista $\{a,b\}$ se corresponde con la arista $\{v,w\}$)

Veamos algunas propiedades del grafo dual:

Cada arista de G se corresponde con una arista de G^d. (En el ejemplo la arista $\{a,b\}$ se corresponde con la arista $\{v,w\}$)

G^d podría ser un multigrafo (visto en el ejemplo).

Veamos algunas propiedades del grafo dual:

Cada arista de G se corresponde con una arista de G^d. (En el ejemplo la arista $\{a,b\}$ se corresponde con la arista $\{v,w\}$)

G^d podría ser un multigrafo (visto en el ejemplo).

Un lazo en G resulta un pendiente en G^d.

Veamos algunas propiedades del grafo dual:

Cada arista de G se corresponde con una arista de G^d. (En el ejemplo la arista $\{a,b\}$ se corresponde con la arista $\{v,w\}$)

G^d podría ser un multigrafo (visto en el ejemplo).

Un lazo en G resulta un pendiente en G^d.

El grado de un vértice en G^d es el número de aristas en la frontera del camino cerrado de la región que representa en G.

Veamos algunas propiedades del grafo dual:

Cada arista de G se corresponde con una arista de G^d. (En el ejemplo la arista $\{a,b\}$ se corresponde con la arista $\{v,w\}$)

G^d podría ser un multigrafo (visto en el ejemplo).

Un lazo en G resulta un pendiente en G^d.

El grado de un vértice en G^d es el número de aristas en la frontera del camino cerrado de la región que representa en G.

G^d es un grafo dual de G, pues G podría tener varios grafos duales (se verá en la práctica).

Recordar $\kappa(G)$ es el número de componentes conexas de G.

Recordar $\kappa(G)$ es el número de componentes conexas de G.

DEFINICIÓN

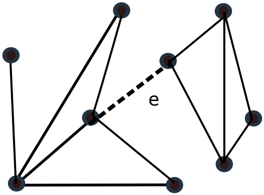
Sea $G = (V,E)$ grafo o multigrafo no dirigido. $E' \subset E$ es un conjunto de corte si $G - E' = G'$ satisface $\kappa(G) < \kappa(G')$ y para cualquier $E'' \subsetneq E'$ entonces $G'' = G - E''$ satisface $\kappa(G) = \kappa(G'')$.

Recordar $\kappa(G)$ es el número de componentes conexas de G.

DEFINICIÓN

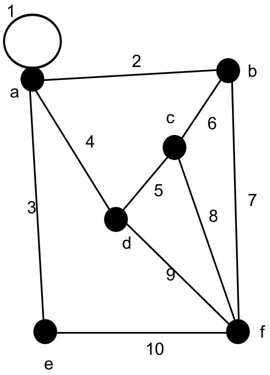
Sea $G = (V, E)$ grafo o multigrafo no dirigido. $E' \subset E$ es un conjunto de corte si $G - E' = G'$ satisface $\kappa(G) < \kappa(G')$ y para cualquier $E'' \subsetneq E'$ entonces $G'' = G - E''$ satisface $\kappa(G) = \kappa(G'')$.

Es decir, si G es conexo, un conjunto de corte es un conjunto minimal de aristas de desconexión.
Vemos el siguiente ejemplo

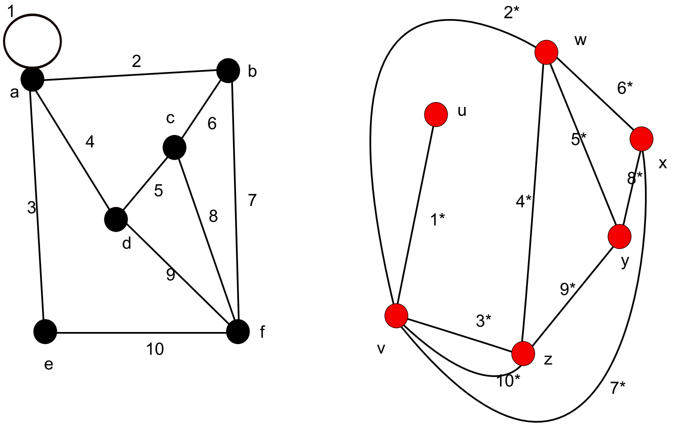


Numeramos las aristas del grafo del ejemplo anterior y su dual

Numeramos las aristas del grafo del ejemplo anterior y su dual



Numeramos las aristas del grafo del ejemplo anterior y su dual



Observemos que :

Observemos que :

- Las aristas $6, 7, 8$ en G determinan un ciclo y se corresponden con las aristas $6^*, 7^*, 8^*$ en G^d y resultan un conjunto de corte.

Observemos que :

- Las aristas $6, 7, 8$ en G determinan un ciclo y se corresponden con las aristas $6^*, 7^*, 8^*$ en G^d y resultan un conjunto de corte.
- Las aristas $2, 4, 10$ en G determinan un conjunto de corte y se corresponden con las aristas $2^*, 4^*, 10^*$ en G^d y resultan un ciclo.

En general, dado un grafo planar G y un dual G^d se tiene:

Observemos que :

- Las aristas $6, 7, 8$ en G determinan un ciclo y se corresponden con las aristas $6^*, 7^*, 8^*$ en G^d y resultan un conjunto de corte.
- Las aristas $2, 4, 10$ en G determinan un conjunto de corte y se corresponden con las aristas $2^*, 4^*, 10^*$ en G^d y resultan un ciclo.

En general, dado un grafo planar G y un dual G^d se tiene:

Observemos que :

- Las aristas $6, 7, 8$ en G determinan un ciclo y se corresponden con las aristas $6^*, 7^*, 8^*$ en G^d y resultan un conjunto de corte.
- Las aristas $2, 4, 10$ en G determinan un conjunto de corte y se corresponden con las aristas $2^*, 4^*, 10^*$ en G^d y resultan un ciclo.

En general, dado un grafo planar G y un dual G^d se tiene:

- Los ciclos (conjunto de corte) de $n \geq 3$ nodos en G se corresponde con los conjuntos de corte (ciclos) de n aristas en G^d.

Observemos que :

- Las aristas $6,7,8$ en G determinan un ciclo y se corresponden con las aristas $6^*,7^*,8^*$ en G^d y resultan un conjunto de corte.
- Las aristas $2,4,10$ en G determinan un conjunto de corte y se corresponden con las aristas $2^*,4^*,10^*$ en G^d y resultan un ciclo.

En general, dado un grafo planar G y un dual G^d se tiene:

- Los ciclos (conjunto de corte) de $n \geq 3$ nodos en G se corresponde con los conjuntos de corte (ciclos) de n aristas en G^d.
- Un lazo en G corresponde a un conjunto de corte en G^d de una arista.

Observemos que :

- Las aristas $6, 7, 8$ en G determinan un ciclo y se corresponden con las aristas $6^*, 7^*, 8^*$ en G^d y resultan un conjunto de corte.
- Las aristas $2, 4, 10$ en G determinan un conjunto de corte y se corresponden con las aristas $2^*, 4^*, 10^*$ en G^d y resultan un ciclo.

En general, dado un grafo planar G y un dual G^d se tiene:

- Los ciclos (conjunto de corte) de $n \geq 3$ nodos en G se corresponde con los conjuntos de corte (ciclos) de n aristas en G^d.
- Un lazo en G corresponde a un conjunto de corte en G^d de una arista.
- Un conjunto de corte de una arista en G corresponde a un lazo en G^d.

Observemos que :

- Las aristas $6, 7, 8$ en G determinan un ciclo y se corresponden con las aristas $6^*, 7^*, 8^*$ en G^d y resultan un conjunto de corte.
- Las aristas $2, 4, 10$ en G determinan un conjunto de corte y se corresponden con las aristas $2^*, 4^*, 10^*$ en G^d y resultan un ciclo.

En general, dado un grafo planar G y un dual G^d se tiene:

- Los ciclos (conjunto de corte) de $n \geq 3$ nodos en G se corresponde con los conjuntos de corte (ciclos) de n aristas en G^d.
- Un lazo en G corresponde a un conjunto de corte en G^d de una arista.
- Un conjunto de corte de una arista en G corresponde a un lazo en G^d.
- Un conjunto de corte de dos aristas en G corresponde a un crcuito de dos aristas en G^d.

Observemos que :

- Las aristas $6,7,8$ en G determinan un ciclo y se corresponden con las aristas $6^*,7^*,8^*$ en G^d y resultan un conjunto de corte.
- Las aristas $2,4,10$ en G determinan un conjunto de corte y se corresponden con las aristas $2^*,4^*,10^*$ en G^d y resultan un ciclo.

En general, dado un grafo planar G y un dual G^d se tiene:

- Los ciclos (conjunto de corte) de $n \geq 3$ nodos en G se corresponde con los conjuntos de corte (ciclos) de n aristas en G^d.
- Un lazo en G corresponde a un conjunto de corte en G^d de una arista.
- Un conjunto de corte de una arista en G corresponde a un lazo en G^d.
- Un conjunto de corte de dos aristas en G corresponde a un crcuito de dos aristas en G^d.
- Un circuito de dos aristas en G corresponde a un conjunto de corte dos aristas en G^d.

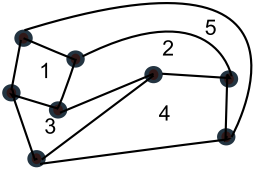
EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

Colorear las regiones de un mapa de modo que dos países limítrofes reciban distintos colores.

El problema del cartógrafo

Colorear las regiones de un mapa de modo que dos países limítrofes reciban distintos colores.

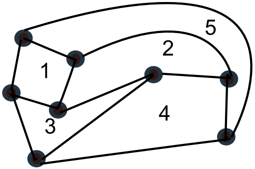
Veamos este ejemplo, un mapa con 5 países:



EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

Colorear las regiones de un mapa de modo que dos países limítrofes reciban distintos colores.

Veamos este ejemplo, un mapa con 5 países:



No se considera la región exterior, por lo tanto este es un subgrafo planar.

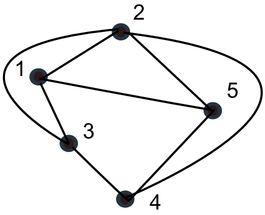
EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

Colorear las regiones de un mapa de modo que dos países limítrofes reciban distintos colores.

EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

Colorear las regiones de un mapa de modo que dos países limítrofes reciban distintos colores.

Un grafo dual correspondiente es:

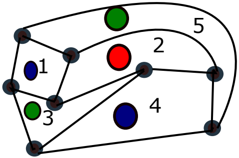


EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

Colorear los vértices del grafo dual de modo que dos vértices adyacentes reciban distintos colores.

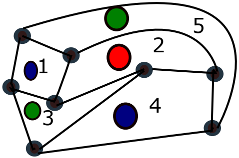
EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

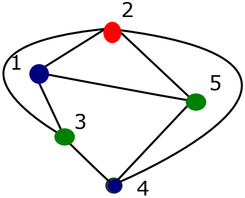
Colorear los vértices del grafo dual de modo que dos vértices adyacentes reciban distintos colores.



El problema del cartógrafo

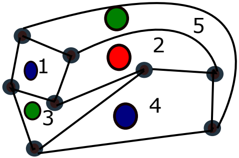
Colorear los vértices del grafo dual de modo que dos vértices adyacentes reciban distintos colores.

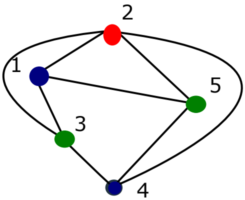




EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

Colorear los vértices del grafo dual de modo que dos vértices adyacentes reciban distintos colores.





Problemas de coloreo (veremos más adelante).