Augusto Rabbia, Manuel Spreutels

Apartado b)

Veamos el trabajo de map, reduceS y scanS en la lista xs, de longitud n para f con un costo arbitrario:

- mapS f xs:

$$W_{mapS}(f\ n) = W(f\ x) + W_{mapS}(f\ (n-1)) + c_0 \qquad \in O\left(\sum_{x \in xs} W(f\ x\ y)\right)$$

$$S_{mapS}(f\ n) = max(S_{mapS}(f\ (n-1)),\ S(f\ x)) + c_1 \qquad \in O(n) + O\left(\max_{x \in xs} S(f\ x\ y)\right)$$

- reduceS f b xs:

Para obtener el trabajo de reduceS, necesitaremos primero encontrar el de contract

$$W_{contract}(f\ n) = W(f\ x\ y) + W_{contract}(f\ (n-2)) + c_2 \qquad \in O\left(\sum_{i=0}^{|xs|} W(f\ x_{2i}\ xs_{2i+1})\right)$$

$$W_{reduceS}(f\ n) = W_{reduceS}(f\ \lceil n/2 \rceil) + W_{contract}(f\ n) + c_3 \in O\left(\sum_{(f\ x\ y)\ \in\ O_r(f,\ b,\ xs)} W(f\ x\ y)\right)$$

Notemos que como $W_{contract}(f\ n) \in O(\sum_{i=0}^{|xs|} W(f\ x_{2i}\ xs_{2i+1}))$, se tiene que, a pesar de que $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + c \in O(lg\ n)$, la cota de crecimiento de contract hará que esta cota quede invalidada.

$$S_{contract}(f\ n) = max(S_{contract}(f\ (n-2)), S(f\ x\ y)) + c_4 \quad \in O(n) + O\left(\max_{i=0}^{|xs|} S(f\ x_{2i}\ x_{2i+1})\right)$$

$$S_{reduceS}(f\ n) = max(S_{reduceS}(f\ \lceil n/2 \rceil) + S_{contract}(f\ n)) + c_5$$

$$\in O(n) + O\left(\max_{(f\ x\ y) \in O_r(f,b,xs)} Sf\ x\ y)\right)$$

- scanS f b xs:

Para obtener el trabajo de scanS, necesitaremos primero encontrar el de expand en dos listas xs y zs, con zs de longitud n

$$W_{expand}(f\ n) = W(f\ z\ x) + W_{expand}(f\ (n-1)) + c_6 \qquad \in O\left(\sum_{i=0}^{|zs|} W(f\ zs_i\ xs_{2i+1})\right)$$

$$W_{scanS}(f\ n) = W_{contract}(f\ n) + W_{scanS}(f\ \lceil n/2 \rceil) + W_{expand}(f\ (n-1)) + c_7$$

$$\in O\left(\sum_{(f\ x\ y)\ \in\ O_s(f,b,xs)} W(f\ x\ y)\right)$$

$$S_{expand}(f\ n) = max(S_{expand}(f\ (n-1)), S(f\ z\ x)) + c_8 \quad \in O(n) + O\left(\max_{i=0}^{|zs|} S(f\ zs_i\ xs_{2i+1})\right)$$

$$S_{scanS}(f\ n) = S_{reduceS}(f\ \lceil n/2 \rceil) + S_{contract}(f\ n) + S_{expand}(f\ (n-1)) + c_9$$

$$\in O(n) + O\left(\max_{(f\ x\ y)\ \in\ O_s(f,b,xs)} S(f\ x\ y)\right)$$

Apartado d)

Para demostrar la profundidad de la función reduceS, necesitaremos primero demostrar la profundidad de contract, y para esta, la de contractAux:

- contractAux f arr n:

Sean x,y elementos del array

$S_{contractAux}(f\ n) = S(f\ x\ y) + 2.S_{nthS}(n) + k_0 \qquad \in O(S(f\ x\ y))$

D/

$$S_{contractAux}(f\ n) = S(f\ x\ y) + 2.S_{nthS}(n) + k_0 = S(f\ x\ y) + S_{nthS}(n) + k_0 \leq$$

$$\{S_{nthS}(n) \in O(1) \Rightarrow \exists d \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0, S_{nthS}(n) \leq d\}$$

$$S(f\ x\ y) + 2d + k_0 \leq$$

$$\{\text{Si c} \geq 2d + k_0, S(f\ x\ y) \geq 1\}$$

$$c.S(f\ x\ y)$$

Luego, se concluye que, tomando $c = 2d + k_0$, $n_1 = max(2, n_0)$, resulta

$$\boxed{\therefore S_{contractAux}(n) \in O(S(f\ x\ y))}$$

- contract f arr:

Por simplicidad, llamaremos $(f\ i)$ a $(f\ x_{2i}\ x_{2i+1})$, siendo x_i la i-ésima proyección del array

$S_{contract}(f\ n) = S_{lengthS}(n) + S_{tabulateS}(f\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + S_{singletonS}(n) + k_1 \qquad \in O\left(\max_{i=0}^{n-1} S(f\ i))\right)$

D/

$n = 0 : S_{contract}(f\ 0) = k_2$

$n = 1 : S_{contract}(f\ 1) = k_3 \leq c.S(f\ 0),\ si\ c \geq k_3 \geq \frac{k_3}{S(f\ 0)}$

$n \geq 2 :$

$$S_{contract}(f\ n) = S_{lengthS}(n) + S_{tabulateS}(f\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + S_{singletonS}(n) + k_1 \leq$$

$$\left\{S_{tabulateS}(f\ n) \in O(\max_{i=0}^{n-1} S(f\ i)) \Rightarrow \exists d \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, S_{tabulateS}(f\ n) \leq d.\ \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i)\right\}$$

$$S_{lengthS}(n) + d. \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) + S_{singletonS}(n) + k_1 \leq$$

$$\{S_{singletonS}(n) \in O(1) \Rightarrow \exists e \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1, S_{singletonS}(n) \leq e.\ 1\}$$

$$S_{lengthS}(n) + d. \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) + e + k_1 \leq$$

$$\{S_{lengthS}(n) \in O(1) \Rightarrow \exists h \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_2, S_{lengthS}(n) \leq h.\ 1\}$$

$$h + d.\max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) + e + k_1 \leq$$

$$\{c_0 = k_1 + h + e\}$$

$$d.\max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) + c_0 \leq$$

$$\left\{Si\ \left(\tfrac{c}{2}.\max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) \geq c_0, \tfrac{c}{2} \geq d \iff \tfrac{c}{2} \geq c_0\right), \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) \geq 1\right\}$$

$$c.\max_{i=0}^{n-1} S(f\ i)$$

Luego, tomando $c \geq 2.max(k_1, c_0, d, k_2, k_3), n_3 \geq max(1, n_0, n_1, n_2)$, concluimos

$$\boxed{\therefore S_{contract}(f\ n) \in O(\max_{i=0}^{n-1} S(f\ i))}$$

- reduceS f b arr:

$$S_{reduceS}(f\ n) = S_{reduceS}(f\ \lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + S_{lengthS}(n) + S_{contract}(f\ n) + S_{nthS}(n) + k_6$$

$$\in \mathrm{O}\left(lg(n).\max_{(f\ x\ y) \in O_r(f,b,arr)} S(f\ x\ y)\right)$$

D/

Caso Base:

$n = 2:$

$$S_{reduceS}(f\ 2) = S_{lengthS}(2) + S_{contract}(f\ 2) + S_{reduceS}(f\ 1) + k_4 =$$

$$S_{lengthS}(f\ 2) + S_{contract}(f\ 2) + (S_{singleton}(1) + S_{nthS}(1) + k_5) + k_4 \leq$$

$\{\exists g \in \mathbb{R}^+, n_3 \in \mathbb{N} / \forall n > n_3, 0 \leq S_{lengthS}(2) \leq g_0/3\ \wedge\ 0 \leq S_{singleton}(2) \leq g_0/3\ \wedge\ 0 \leq S_{lengthS}(2) \leq g_0/3, S_{contract} \in O(S(f\ x\ y))\}$

$$g_0 + g_1.S(f\ b\ x) + k_4 + k_5 =$$

$$\{\mathrm{c}_2 = g_0 + k_4 + k_5\}$$

$$c_2 + g_1.S(f\ b\ x) \leq$$

$$\{S(f\ b\ x) \geq 1\}$$

$$c_2.S(f\ b\ x) + g_1.S(f\ b\ x) = (c_2 + g_1)S(f\ b\ x)$$

$$\leq c.(lg(2).S(f\ b\ x)) = c.S(f\ b\ x)$$

que ocurrirá si $c \geq c_2 + g_1$

Paso inductivo:

$$S_{reduceS}(f\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) + S_{lengthS}(n) + S_{contract}(f\ n) + S_{nthS}(n) + k_6 \leq$$

$$\left\{ S_{contract}(f\ n) \in O(\max_{i=0}^{n-1} S(f\ i)) \Rightarrow \exists d \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, S_{contract}(f\ n) \leq d.\ \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) \right\}$$

$$S_{reduceS}(f\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) + S_{lengthS}(n) + d.\ \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) + S_{nthS}(n) + k_6 \leq$$

$$\{ S_{lengthS}(n) \in O(1) \Rightarrow \exists e \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1, S_{lengthS}(n) \leq e.\ 1 \}$$

$$S_{reduceS}(f\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) + e + d.\ \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) + S_{nthS}(n) + k_6 \leq$$

$$\{ S_{nthS}(n) \in O(1) \Rightarrow \exists g \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_2, S_{nthS}(n) \leq g.\ 1 \}$$

$$S_{reduceS}(f\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) + e + d.\ \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) + g + k_6 \leq$$

$$\{ \text{HI, } \mathrm{c}_1 = e + g + k_6 \}$$

$$c.lg(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) \max_{(f\ x\ y) \in O_r(f, b, contract\ f\ arr)} S(f\ x\ y) + d.\ \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) + c_1 \leq$$

$$\{ \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) \geq 1 \}$$

$$c.lg(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) \max_{(f\ x\ y) \in O_r(f, b, contract\ f\ arr)} S(f\ x\ y) + d.\ \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) + c_1. \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) =$$

$$c.lg(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil) \max_{(f\ x\ y) \in O_r(f, b, contract\ f\ arr)} S(f\ x\ y) + \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i).(c_1 + d) \leq$$

$$\{ \text{si } (\mathrm{c}_1 + d) \leq c, \text{ por ser } lg(n) \geq 1 \text{ y creciente} \}$$

$$c.lg(n) \max_{(f\ x\ y) \in O_r(f, b, contract\ f\ arr)} S(f\ x\ y) + c.lg(n).\ \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i) =$$

$$c.lg(n)(\max_{(f\ x\ y) \in O_r(f, b, contract\ f\ arr)} S(f\ x\ y) + \max_{i=0}^{n-1} S(f\ i)) =$$

$$\{\ O_r(f, b, contract\ f\ arr) \text{ y } (f\ i), i = 0, 1, ..., n \text{ ''componen'' } O_r(f, b, arr) \}$$

$$c.lg(n)(\max_{(f\ x\ y) \in O_r(f, b, arr)} S(f\ x\ y))$$

Luego, tomando $c \geq max(d + c_0, c_2 + g_1), n_3 \geq max(1, n_0, n_1, n_2)$, concluimos

$$\boxed{\therefore S_{reduceS}(f\ n) \in O(lg(n)(\max_{(f\ x\ y) \in O_r(f, b, arr)} S(f\ x\ y))}$$