Trabajo práctico 3 Análisis Matemático II

Guillermo Pereyra, Augusto Rabbia

Noviembre 2021

1 Ejercicio 11, práctica 7

Suponga que f es una función tal que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ para todo $x > 0$ y que $f(1) = 0$.
Demuestre que $f(xy) = f(x) + f(y)$
Definamos $g(x) = f(xy)$. Derivando g(x):

$$g'(x) = f'(xy) = \frac{1}{xy} \cdot (xy)' = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

Luego, tenemos que $g'(x) = f'(x)$. Por lo tanto, $g(x) = f(x) + C$.
Evaluando ambas funciones en el valor arbitrario 1:
$f(1) = 0$ por hipótesis
$g(1) = f(1y) = f(y)$

Entonces, $g(x) = f(x) + f(y)$
Y como $g(x) = f(xy)$,

$$\therefore f(xy) = f(x) + f(y)$$

2 Ejercicio 4, práctica 8

Sea la funcion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Obtenga el polinomio de Taylor de grado 9 de f alrededor del origen.

Sabiendo que:

$$P_{2n+1,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Explicado en el ejercicio 3 a de la practica 8

Luego para n = 4

$$P_{2\cdot 4+1,0}(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = \frac{(-1)^0}{(2\cdot 0+1)!} x^{2\cdot 0+1} + \frac{(-1)^1}{(2\cdot 1+1)!} x^{2\cdot 1+1} + \frac{(-1)^2}{(2\cdot 2+1)!} x^{2\cdot 2+1} +$$

$$\frac{(-1)^3}{(2\cdot 3+1)!} x^{2\cdot 3+1} + \frac{(-1)^4}{(2\cdot 4+1)!} x^{2\cdot 4+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

En un entorno al rededor de 0, se cumple que:

$$sen(x) \approx P_{9,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

Entonces dividiendo ambos terminos por x, sabiendo que $x \neq 0$:

$$\frac{sen(x)}{x} \approx \frac{P_{9,0}(x)}{x} = \frac{x}{x} - \frac{x^3}{x \cdot 3!} + \frac{x^5}{x \cdot 5!} - \frac{x^7}{x \cdot 7!} + \frac{x^9}{x \cdot 9!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!}$$

Como el seno de x es una funcion par va a ser un polinomio a potencias pares, por lo tanto las potencias de x a la 9 no va a figurar

b) Calcule $f^{(9)}(0)$

Para calcularlo, debemos pensarlo como el numero que acompaña al termino del polinomio de grado 9, es decir $\dfrac{1}{9!}$

$$1 - \frac{0^2}{3!} + \frac{0^4}{5!} - \frac{0^6}{7!} + \frac{0^8}{9!} = 1$$

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}$$

$$\frac{sen(x)}{x}$$