Álgebra Lineal - LCC - LM - PM **2022**

Práctica 3: TRANSFORMACIONES LINEALES

Definiciones y propiedades elementales

1. Para cada una de las siguientes funciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinar si se trata de una transformación lineal y en caso afirmativo, obtener $nul(T)$ y $img(T)$.

   a) $T((x, y)^T) = (y, x)^T$.

   b) $T((x, y)^T) = (x^2, y^2)^T$.

   c) $T((x, y)^T) = (x, -y)^T$.

   d) $T((x, y)^T) = (x, 0)^T$.

2. Sean $T_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T_1((x, y, z)^T) = (x, y, 0)^T$ y $T_2((x, y, z)^T) = (x, y, y)^T$. Hallar $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$.
   Analizar si son epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o ninguna de ellas.

3. Definimos $\mathbb{R}_n[x] = \{p : p\, polinomio\, a\, coeficientes\, reales\, grad(p) \leq n,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$. Sea

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \mapsto & T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d). \end{array}$$

   a) Probar que T es lineal.

   b) Hallar una base para $nul(T)$ y una para $img(T)$.

   c) Determinar si T es un isomorfismo.

4. Sea $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_0 + a_1(x + 1) + \cdots + a_n(x + 1)^n$. Probar que T es isomorfismo.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (x + y, x + z, \alpha(v))^T$, donde $v = (x, y, z)^T$ y $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Determinar, si es posible, α de modo que T resulte lineal.

6. Determinar, si existe, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que verifique: $T((1, -1, 1)^T) = (1, 0)^T$ y $T((1, 1, 1)^T) = (0, 1)^T$.

7. Definimos $I : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ tal que $I(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ e $I_a^b : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $I_a^b(f)(x) = \int_a^b f(x)\, dx$.
   Probar que I y I_a^b son transformaciones lineales.

El álgebra de las transformaciones lineales

8. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W : T\, transformación\, lineal\}$. Probar que para $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$

   a) $\{v \in V : T_1(v) = T_2(v)\} \underset{s.e.v.}{\subset} V$.

   b) Si $V = \langle U \rangle$ y $T_1(u) = T_2(u), \forall u \in U$, entonces $T_1(v) = T_2(v), \forall v \in V$.

9. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Probar que:

   a) Si T inyectiva, entonces T transforma conjuntos de vectores $l.i.$ de V en conjuntos de vectores $l.i.$ de W.

   b) Si T sobreyectiva, entonces T transforma conjuntos generadores de vectores de V en conjuntos generadores de vectores de W.

   c) T isomorfismo si y solo si T transforma bases de V en bases de W.

10. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que existe una aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que tanto $nul(T)$ como $img(T)$ son subespacios de dimensión finita. Probar que V también debe ser de dimensión finita.

11. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que:

a) $T \circ S$ es inversible si y solo si S y T son inversibles.

b) Para I, la función identidad en V, $T \circ S = I$ si y solo si $S \circ T = I$.

12. Sea $\mathbb{C}$ el espacio vectorial de los números complejos sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales. Describir explícitamente un isomorfismo de este espacio con $\mathbb{R}^2$.

13. Una matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ con entradas en $\mathbb{C}$ tal que $A = \overline{A}^T$, i.e. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, para todos $i, j = 1, \cdots, n$, se dice *Hermitiana*.

    Sea W el conjunto de todas las matrices Hermitianas 2×2.

    a) Verificar que W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

    b) Verificar que la aplicación
    $$(x, y, z, t) \mapsto \begin{bmatrix} t + x & y + iz \\ y - iz & t - x \end{bmatrix}$$
    es un isomorfismo de $\mathbb{R}^4$ en W.

14. Mostrar que $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$.

15. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Probar que V y W son isomorfos si y solo si $\dim V = \dim W$.

Representación de transformaciones lineales por matrices

16. La matriz
    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$
    produce una transformación llamada *esfuerzo constante*, que deja fijo al *eje* y. Hacer un bosquejo para indicar qué ocurre cuando se aplica dicha transformación a los vectores $(1, 0)$, $(2, 0)$ y $(-1, 0)$. ¿Cómo se transforma el *eje* x?

17. *a*) Encontrar la *matriz de permutación cíclica* A de tamaño 4×4 que transforma el vector (x_1, x_2, x_3, x_4) en (x_2, x_3, x_4, x_1).

    b) ¿Cuál es la transformación asociada a A^2?

18. *a*) Encontrar la matriz A de tamaño 4×3 que representa el *desplazamiento derecho* que transforma (x_1, x_2, x_3) en $(0, x_1, x_2, x_3)$.

    b) Calcular la matriz B de tamaño 3×4 que representa el *desplazamiento izquierdo* que transforma (x_1, x_2, x_3, x_4) en (x_2, x_3, x_4).

    c) Obtener AB y BA sin realizar el producto de matrices.

19. Sea $V = \mathbb{R}^n$, fijamos la base canónica $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Para cada $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hallar A_i tal que $A_i x = T_i(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \cdots, 4$.

    a) $T_1(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

    b) $T_2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

    c) $T_3(x) = c \cdot x, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

    d) Sean p, q enteros distintos entre 1 y n inclusives,
    $$T_4(x) = y, \text{ donde } y = (y_k)_{k=1}^n \text{ con } y_k = \begin{cases} x_k & \text{para } k \neq p, \quad k \neq q \\ x_p & \text{para } k = q \\ x_q & \text{para } k = p \end{cases}$$

20. Consideremos la base canónica de $V = \mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que aplica los vectores e_1 y e_2 como sigue:
    $$T(e_1) = e_1 + e_2, \qquad T(e_2) = 2 \cdot e_1 - e_2.$$
    Obtener:

a) $T(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$ y $T^2(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$,

b) las matrices asociadas a T y T^2 en la base $\mathcal{B}$,

c) $T(v), \forall v \in V$.

21. Sea $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} / T_w(z) = z + w\bar{z}$, donde $w = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

    a) Considerar $w = 1 + i$ y calcular $T_w(2 + 3i)$.

    b) Comprobar que T_w es una transformación lineal entre espacios vectoriales.

    c) Si $\mathcal{B} = \{1, i\}$ es base de $\mathbb{C}$, hallar la matriz de T_w en dicha base.

    d) Probar que T_w es isomorfismo si y solo si $a^2 + b^2 \neq 1$.

22. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que

$$T((0,0,1)^T) = (2,3,5)^T, \qquad T((0,1,1)^T) = (1,0,0)^T, \qquad T((1,1,1)^T) = (0,1,-1)^T.$$

    a) Probar que con esta información es posible obtener $T(v), \forall v \in \mathbb{R}^3$.

    b) Determinar, fijada la base canónica en $\mathbb{R}^3$, la matriz de T.

    c) Utilizando *b*), obtener $\dim(nul(T))$ y $rang(T)$.

    d) Determinar si T es inversible.

23. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

    a) Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'$ es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

    b) Si $\mathcal{B} = \{(1,0,-1), (1,1,1), (1,0,0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(0,1), (1,0)\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa a al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

24. Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{K}^n$ y sea A la matriz de T relativa a la base estándar de $\mathbb{K}^n$. Sea W el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los vectores columnas de A. ¿Qué relación existe entre W y T?

25. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{K}$ y sean S y T operadores lineales sobre V. Probar que existen dos bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ en V tales que $[S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}'}$ si y solo si existe un operador lineal inversible U sobre V tal que $T = USU^{-1}$.

Funcionales lineales

26. En $\mathbb{R}^3$, sean $v_1 = (1,0,1)^T$, $v_2 = (0,1,2)^T$ y $v_3 = (-1,-1,0)^T$.

    a) Si f es un funcional lineal sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = 1$, $f(v_2) = -1$ y $f(v_3) = 3$ y si $v = (a,b,c)^T$, hallar $f(v)$.

    b) Describir explícitamente un funcional lineal f sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$.

    c) Sea f cualquier funcional lineal tal que $f(v_1) = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$. Si $v = (2,3,-1)^T$, muestre que $f(v) \neq 0$.

27. Sea $\mathcal{B} = \{(1,0,-1)^T, (1,1,1)^T, (2,2,0)^T\}$ una base de $\mathbb{C}^3$. Hallar la base dual de $\mathcal{B}$.

28. Sean $v_1 = (1,0,-1,2)^T$ y $v_2 = (2,3,1,1)^T$ y sea $W = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$. ¿Qué funcionales lineales de la forma $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ están en el anulador de W?.

29. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y sean

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

    Sea W el subespacio de V que consiste de todas las matrices A tales que $AB = 0$. Sea f, un funcional lineal sobre V que está en el anulador de W. Supongamos que $f(I) = 0$ (I matriz identidad) y $f(C) = 3$. Hallar $f(B)$.

30. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita.

a) Probar que $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.

b) Probar que $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

31. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V. Si f es un funcional lineal sobre W, demostrar que existe un funcional lineal g sobre V tal que $g(v) = f(v), \forall v \in W$.

32. Sea $v \in V$ espacio vectorial, entonces v induce un funcional lineal L_v en V^* definido por

$$\begin{array}{rccc} L_v : & V^* & \to & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & L_v(f) = f(v) \end{array}$$

a) Mostrar que L_v es lineal.

b) Probar que si V es de dimensión finita y $v \neq 0$, entonces existe un funcional lineal f tal que $f(v) \neq 0$.

c) Probar que si V es de dimensión finita, la aplicación $v \mapsto L_v$ es un isomorfismo de V en V^{**}. V^{**} se conoce como el *doble dual de* V.

d) Probar que si L es un funcional lineal sobre el espacio dual V^* del espacio vectorial V de dimensión finita, entonces existe un único vector $v \in V$ tal que $L(f) = f(v)$ para todo $f \in V^*$.

e) Mostrar que en un espacio vectorial V de dimensión finita, toda base de V^* es la dual de alguna base de V.