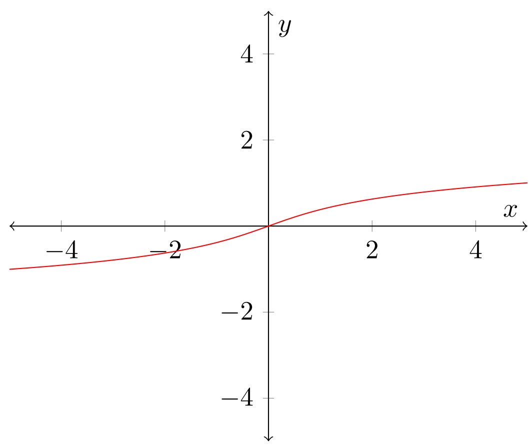
Trabajo práctico 2 Análisis Matemático II

Guillermo Pereyra, Augusto Rabbia

Septiembre 2021

1 Ejercicio 1, práctica 3

Sea la función $f(x) = ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$: determine el dominio y pruebe que f es una funcion impar



$$Dom(ln) = (0; +\infty) \quad \Rightarrow \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0 \quad \iff \quad \sqrt{x^2+1} > x$$
$$\iff \quad x^2 + 1 > x^2 \quad \iff \quad 1 > x^2 - x^2 \quad \iff \quad 1 > 0$$
$$\therefore x + \sqrt{x^2+1} > 0$$

$$*\sqrt{x^2+1} > 0$$

$$x^2 + 1 > 0 \quad \iff \quad x^2 > -1$$

Sabiendo que:

$$x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > -1$$
$$\therefore \mathrm{x}^2 + 1 > 0$$

$$\boxed{\therefore Dom(f) = \mathbb{R}}$$

Una funcion es impar $\iff f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = ln\left((-x) + \sqrt{(-x)^2 + 1}\right)$$
$$f(-x) = ln\left((-x) + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$-f(x) = -ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Suponiendo que la funcion es impar, entonces $-f(x) = f(-x)$

$\therefore ln\left((-x) + \sqrt{x^2+1}\right) = -ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
Derivando ambos términos:

$$(-f(x))' = \left(-ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' = -\left(ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' *$$

$$* \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = x' + \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = 1 + \left(\left(x^2+1\right)^{1/2}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{\therefore (-f(x))' = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$(f(-x))' = \left(ln\left((-x) + \sqrt{(-x)^2+1}\right)\right)' = \left(ln\left((-x) + \sqrt{x^2+1}\right)\right)'$$

$$\frac{1}{(-x) + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left((-x) + \sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{(-x) + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x^2+1\right)' - 1\right)$$

$$\frac{1}{(-x) + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1\right) = \frac{1}{(-x) + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\frac{2x - 2\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$\frac{\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{(-x) + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} \cdot ((-x) + \sqrt{x^2+1})} = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} \cdot -(x - \sqrt{x^2+1})} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{\therefore (f(-x))' = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

Sabiendo que:
$-f(x) = -ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
$f(-x) = ln\left((-x) + \sqrt{x^2+1}\right)$
Y vemos que $(f(-x))' = (-f(x))'$.
Como su derivada es la misma, por el teorema de Lagrange, difieren únicamente en una constante.
Ahora evaluando las funciones en el valor arbitrario 0:
$-f(0) = -ln\left(0 + \sqrt{0^2+1}\right) = -ln(1) = 0$
$f(-0) = f(0) = ln\left(0 + \sqrt{0^2+1}\right) = ln(1) = 0$
Por lo tanto, las funciones son iguales.
$\therefore f$ es una funcion impar

2 Ejercicio 8, práctica 4

Demuestre que:

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2} dx = \pi$$

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2} dx$$

Utilizamos el método de sustitución:

$$u = \frac{x}{h} \iff x = u \cdot h$$

$$du = \frac{dx}{h} \iff dx = du \cdot h$$

$$x = 1 \iff u = \frac{1}{h}$$

$$x = -1 \iff u = -\frac{1}{h}$$

Entonces:

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}} \frac{h \cdot h}{h^2+(u \cdot h)^2} du = \lim_{h\to 0^+} \int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}} \frac{h^2}{h^2+u^2 \cdot h^2} du = \lim_{h\to 0^+} \int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}} \frac{1}{1+u^2} du = \lim_{h\to 0^+} arctan(u)\Big|_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}}$$

$$\lim_{h\to 0^+} arctan\left(\frac{x}{h}\right)\Big|_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0^+} arctan\left(\frac{\frac{1}{h}}{h}\right) - arctan\left(\frac{-\frac{1}{h}}{h}\right) = \lim_{h\to 0^+} arctan\left(\frac{1}{h^2}\right) - arctan\left(-\frac{1}{h^2}\right)$$

$$\lim_{h\to 0^+} arctan\left(\underbrace{\frac{1}{h^2}}_{\infty}\right) - arctan\left(\underbrace{\frac{-1}{h^2}}_{-\infty}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\boxed{\therefore \lim_{x\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2} dx = \pi}$$