Departamento de Ciencias de la Computación
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
(FCEIA-UNR)

Optimización Continua

Prof. Alejandro G. Marchetti

Programación Matemática Lineal

Abril de 2025

1. Introducción

La programación matemática lineal es una rama de la optimización matemática que busca maximizar o minimizar una función objetivo lineal sujeta a un conjunto de restricciones también lineales. Su importancia radica en su aplicabilidad a una amplia variedad de problemas en ciencia, ingeniería, economía y logística, permitiendo la toma de decisiones óptimas en entornos con recursos limitados. El método simplex, la dualidad y los métodos de puntos interiores son algunas de las herramientas clave en esta disciplina, que han demostrado ser eficientes incluso para problemas de gran escala.

Las aplicaciones de la programación lineal son vastas e incluyen la optimización de la producción y asignación de recursos en la industria, la gestión de carteras financieras, la planificación del transporte y logística, y la optimización de redes de suministro. En ciencias de la computación, la programación lineal se aplica en áreas como la optimización de rutas en redes (por ejemplo, en protocolos de enrutamiento en internet), la asignación eficiente de recursos en sistemas distribuidos, la planificación y programación de tareas en computación en la nube, y el aprendizaje automático, donde se usa en técnicas como el support vector machine (SVM) para la clasificación de datos. Además, su combinación con técnicas de programación entera y combinatoria permite abordar problemas complejos como la optimización en grafos y la planificación de redes de comunicación.

2. Programa Matemático Lineal en Forma Estándar

2.1. Forma Estándar

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{mín} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & & \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0, \ \dots \ , \ x_n \geq 0}
\end{array}
$$

En forma vectorial:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\
\text{s.t.} \quad & \mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

2.2. Conversión a la Forma Estándar

2.2.1. Variables de Holgura (Slack Variables)

Considere el problema:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\
\text{s.t.} \quad & \mathsf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

El problema se puede expresar en forma estándar como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & [\,\mathsf{A}\ \ \mathbf{I}\,] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

es el vector de variables de holgura.

2.2.2. Variables de Excedente (Surplus Variables)

Considere el problema:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathsf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

El problema se puede expresar en forma estándar como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & [\,\mathsf{A}\ \ -\mathbf{I}\,] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

2.2.3. Variables Libres

Si el problema lineal está dado en forma estándar excepto que una o más variables de decisión no están condicionadas a ser no negativas, el problema se puede transformar a la forma estándar utilizando una de las técnicas siguientes:

1) Si x_1 es libre podemos escribir:

$$x_1 = u_1 - v_1, \quad u_1 \geq 0,\ v_1 \geq 0$$

Sustituir x_1 por $u_1 - v_1$ en todas partes. La redundancia introducida no afecta la solución del problema original.

2) Si x_1 es libre, podemos eliminar x_1 junto con una de las restricciones, por ejemplo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \qquad \text{con} \ \ a_{i1} \neq 0$$

Luego x_1 se puede expresar como una combinación lineal de las otras variables más una constante. Esta expresión se puede reemplazar en el problema de optimización.

Ejemplo 1 *Considere el siguiente problema:*

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{mín} & x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6
\end{array}$$
$$x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

x_1 *es libre,* $x_1 = 5 - 2x_2 - x_3$

Reemplazando:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{mín} & x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_2 & + & x_3 & = & 4
\end{array}$$
$$x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

3. Ejemplos de Programas Matemáticos Lineales

3.1. El Problema de la Dieta

El problema de la dieta consiste en determinar la dieta más económica que satisfaga los requerimientos nutricionales básicos para una buena alimentación. Supongamos que hay n alimentos diferentes disponibles en el mercado. El alimento i cuesta c_i por unidad. Existen m ingredientes nutricionales básicos. Para una dieta balanceada, cada individuo debe recibir al menos b_j unidades del nutriente j por día. Cada unidad del alimento i contiene a_{ji} unidades del nutriente j. Denotando x_i el número de unidades del alimento i en la dieta, el problema consiste en seleccionar los valores de x_i, $i = 1, \ldots, n$, que minimicen el costo total

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ \ldots \ + c_nx_n,$$

sujeto a las restricciones nutricionales

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m
\end{array}$$

y las restricciones

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0, \ \ldots \ , \ x_n \geq 0$$

3.2. El Problema de Transporte

Se desea transportar cierto producto desde m puertos de embarque hasta n puertos de destino. Se dispone en los puertos de embarque de las cantidades $a_1, a_2, \ldots, a_m$, y se deben recibir en los puertos de destino las cantidades $b_1, b_2, \ldots, b_n$, de modo que la cantidad total embarcada sea igual a la cantidad total recibida, es decir

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

El transporte de una unidad de producto desde el origen i hasta el destino j tiene un costo igual a c_{ij}. El problema del transporte consiste en determinar las cantidades de producto x_{ij} a embarcar desde cada origen i hasta cada destino j, minimizando el costo total de trasporte.

Para formular este problema como un programa matemático lineal construimos el siguiente arreglo:

$$
\begin{array}{|cccc|c}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & a_1 \\
x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & a_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & a_m \\
\hline
b_1 & b_2 & \dots & b_m &
\end{array}
$$

La fila i de este arreglo define las variables asociadas al origen i, mientras que la columna j define las variables asociadas al destino j. El problema de programación lineal queda formulado como:

$$
\begin{array}{lll}
\min\limits_{\mathbf{x}} & \sum\limits_{ij} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{s.t.} & \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, m \\
& \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & \text{para} \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& x_{ij} \geq 0 & \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n
\end{array}
$$

4. Soluciones Básicas

Dado

$$
\begin{array}{ll}
\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \\
\mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}
\end{array}
$$

Supóngase

$$\text{rango}(\mathsf{A}) = m \qquad \text{(Hipótesis de rango máximo)}$$

Reacomodando las columnas de A hacemos

$$\mathsf{A} = [\ \mathsf{B} \ \ \mathsf{N}\ ]$$

tal que $\mathsf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es no singular y $\mathsf{N} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$. Luego

$$[\ \mathsf{B} \ \ \mathsf{N}\ ] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

de donde

$$\mathbf{x}_B = \mathsf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathsf{B}^{-1}\mathsf{N}\mathbf{x}_N$$

Haciendo arbitrariamente $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, tenemos

$$\mathbf{x}_B = \mathsf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Luego, $\mathbf{x}_B$ es una *solución básica* del sistema con respecto a la base B. Los componentes de $\mathbf{x}_B$ son las *variables básicas*.

- Si una o más variables básicas en una solución básica son iguales a cero, se dice que dicha solución es una *solución básica degenerada.*
- Si $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$, luego
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
es una *solución básica factible* del sistema.
- Si $\mathbf{x}_B > \mathbf{0}$, luego $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B;\ \mathbf{0}]$ es una *solución básica factible no degenerada.*

5. Teorema Fundamental de la Programación Matemática Lineal

La solución óptima de un programa lineal (de existir) corresponde siempre a una solución básica factible.

Teorema 1 *Dado un programa lineal en forma estándar:*

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

con $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$*, y* $\operatorname{rank}(\mathsf{A}) = m$*, luego*

I*) Si exist una solución factible, existe una solución básica factible.*

II*) Si existe una solución óptima factible, existe una solución óptima básica factible.*

Demostración.

Demostración de (I): $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \dots\ ,\ \mathbf{a}_n$ son las columnas de A. Suponga que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathsf{T}}$ es una solución factible. Luego

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Suponga que p de las variables x_i son mayores que cero,

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b} \tag{1}$$

Existen dos casos que corresponden al hecho que los vectores $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \dots\ ,\ \mathbf{a}_p$ sean linealmente independientes o linealmente dependientes.

Caso 1: Suponga que $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \dots\ ,\ \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes. Luego, $p \leq m$. Si $p = m$, la solución es básica y la demostración está completa. Si $p < m$, luego como $\operatorname{rank}(\mathsf{A}) = m$, se pueden hallar $m - p$ vectores de los $n - p$ vectores restantes tales que se obtengan m vectores linealmente independientes. Asignando el valor cero a las correspondientes $m - p$ variables obtenemos una solución básica factible (degenerada).

Caso 2: Suponga que $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \dots\ ,\ \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes. Luego existen constantes $y_1, y_2, \dots, y_p$, de las cuales podemos suponer que al menos una es positiva, tales que

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_p\mathbf{a}_p = \mathbf{0} \tag{2}$$

Multiplicando (2) por ε y restando de (1) obtenemos:

$$(x_1 - \varepsilon y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2 - \varepsilon y_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_p - \varepsilon y_p)\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

Esta ecuación es válida para todo ε, y para cada ε los componentes $x_i - \varepsilon y_i$ corresponden a una solución del sistema de igualdades lineales, aunque pueden violar la condición de factibilidad $x_i - \varepsilon y_i \geq 0$. Para $\varepsilon = 0$ tenemos la solución factible original. A medida que aumentamos ε los distintos componentes aumentan, disminuyen, o permanecen constantes, dependiendo de si y_i es negativo, positivo, o cero.

Como al menos un y_i es positivo, al menos un componente va a disminuir al aumentar ε. Aumentamos ε hasta el primer punto en que un componente (o más de uno) llegue a cero. Concretamente, fijamos

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{x_i}{y_i} : \; y_i > 0 \right\}$$

Tenemos ahora una solución factible con al menos $p - 1$ variables mayores a cero.

Repitiendo este procedimiento en caso de ser necesario, podemos eliminar variables positivas hasta tener una solución factible con las columnas correspondientes a variables positivas linealmente independientes. En este punto aplica el Caso 1.

Demostración de (II): Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ una solución óptima factible. Suponga que p de las variables x_i son mayores que cero. Nuevamente tenemos dos casos posibles.

Caso 1: Los vectores $\mathbf{a}_1, \; \mathbf{a}_2, \; \ldots \;, \; \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes. El análisis es idéntico al Caso 1 anterior.

Caso 2: Los vectores $\mathbf{a}_1, \; \mathbf{a}_2, \; \ldots \;, \; \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes. Debe mostrarse que para cualquier ε la solución $\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y}$ con $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_p, 0, 0, \ldots, 0]^\mathsf{T}$ es óptima. Para demostrar esto, note que el valor de la solución $\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y}$ es

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{y}$$

Para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeño, $\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y}$ es una solución factible para valores positivos o negativos de ε. Luego, concluimos que $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{y} = 0$. De lo contrario, podría determinarse un ε pequeño y de signo apropiado tal que $\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y}$ sea factible con $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{y} < \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, lo cual violaría la hipótesis de la optimalidad de $\mathbf{x}$.

Esto implica que si tenemos una solución factible que es óptima, luego la solución básica factible obtenida en el Caso 2 anterior también es óptima. $\square$

6. Correspondencia entre Soluciones Básicas Factibles y Puntos Extremos

Definición 1 (Punto Extremo) *Sea $\mathcal{S}$ convexo en $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ es un punto extremo de $\mathcal{S}$ si no existen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}$ tales que $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2$ para algún $\alpha \in (0, 1)$.*

Es decir que $\mathbf{x}$ es un punto extremo de $\mathcal{S}$ si $\mathbf{x}$ no se puede representar como combinación convexa de dos puntos distintos pertenecientes a $\mathcal{S}$.

El siguiente teorema establece que un punto de la región factible de un programa lineal es una solución básica factible del sistema de ecuaciones algebraicas que definen dicha región factible si y solo si es un punto extremo de la misma.

Teorema 2 *Sea $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $\operatorname{rank}(\mathsf{A}) = m$ y sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Sea $\mathcal{K}$ el polítipo convexo:*

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; \mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Un vector $\mathbf{x}$ *es un punto extremo de* $\mathcal{K}$ *si y solo si* $\mathbf{x}$ *es una solución básica factible de*

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Demostración. Suponga primero que $\mathbf{x} = [x_1, x_2 \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0]^\mathsf{T}$ es una solución básica factible. Luego

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_m$ son columnas linealmente independientes de A. Suponga que $\mathbf{x}$ puede expresarse como combinación convexa de $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{K}$, es decir

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{z}, \quad \alpha \in (0,1), \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{z}.$$

Dado que todas las componentes de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ son no negativas, y $\alpha \in (0,1)$ se cumple que los últimos $n-m$ componentes de $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ son cero. Luego

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1\mathbf{a}_1 & + & y_2\mathbf{a}_2 & + & \ldots & + & y_m\mathbf{a}_m & = & \mathbf{b} \\ z_1\mathbf{a}_1 & + & z_2\mathbf{a}_2 & + & \ldots & + & z_m\mathbf{a}_m & = & \mathbf{b} \end{array}$$

Dado que $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_m$ son linealmente independientes, $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$ y $\mathbf{x}$ es un punto extremo de $\mathcal{K}$.

Supongamos ahora que $\mathbf{x}$ es un punto extremo de $\mathcal{K}$. Supongamos que los componentes no nulos de $\mathbf{x}$ son los primeros k componentes. Luego

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1\mathbf{a}_1 & + & x_2\mathbf{a}_2 & + & \ldots & + & x_k\mathbf{a}_k & = & \mathbf{b} \end{array}$$

con $x_i > 0$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Para demostrar que $\mathbf{x}$ es una solución básica factible, debemos mostrar que $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k$ son linealmente independientes. Lo hacemos por contradicción. Supongamos que $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k$ son linealmente dependientes. Luego existe un vector $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_k, 0, 0, \ldots, 0]^\mathsf{T}$ tal que

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1\mathbf{a}_1 & + & y_2\mathbf{a}_2 & + & \ldots & + & y_k\mathbf{a}_k & = & \mathbf{0} \end{array}$$

Dado que $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, luego existe ε con $|\varepsilon|$ suficientemente pequeño tal que

$$\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

Luego tenemos

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{y}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y})$$

que expresa $\mathbf{x}$ como combinación convexa de dos vectores distintos en $\mathcal{K}$. Esto no es posible ya que $\mathbf{x}$ es un punto extremo. Luego, $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k$ son linealmente independientes y $\mathbf{x}$ es una solución básica factible (si $k < m$ entonces es una solución básica factible degenerada). □

Corolario 1 *Si un polítopo convexo* $\mathcal{K} \neq \emptyset$*, luego tiene al menos un punto extremo.*

Corolario 2 *Si existe una solución óptima finita a un programa lineal, luego existe una solución óptima finita que es un punto extremo de la región factible.*

Corolario 3 *La región factible $\mathcal{K}$ de un programa lineal tiene un número finito de puntos extremos.*

Corolario 4 *Si el polítopo convexo $\mathcal{K}$ es acotado, luego $\mathcal{K}$ es un poliedro convexo, es decir, $\mathcal{K}$ consiste de puntos que son combinaciones convexas de un número finito de puntos.*

Ejemplo 2 *Considere la región factible en $\mathbb{R}^3$ definida por:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Esta región está ilustrada en la Figura 1. Posee tres puntos extremos correspondientes a las tres soluciones básicas de $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

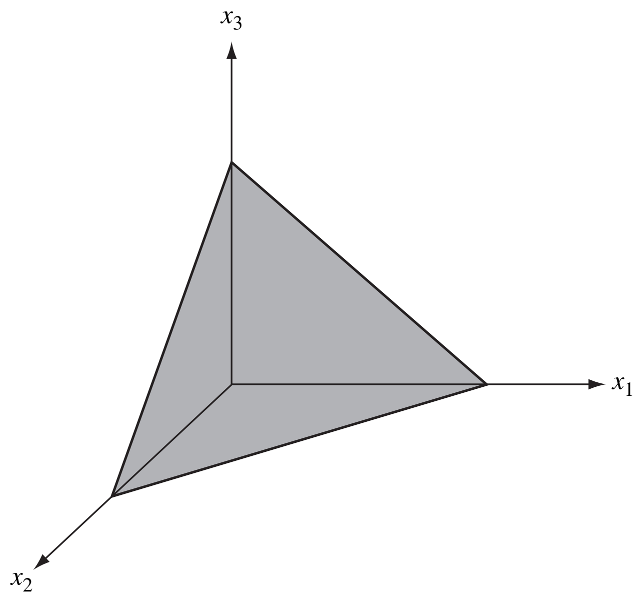

Figura 1: Región factible para el Ejemplo 2.

Ejemplo 3 *Considere la región factible en $\mathbb{R}^3$ definida por:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 = 1$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Esta región está ilustrada en la Figura 2. Posee dos puntos extremos correspondientes a las dos soluciones básicas de factibles. Notar que el sistema de ecuaciones posee tres soluciones básicas, $[2,\ 1,\ 0]^\mathsf{T}$, $[0{,}5,\ 0,\ 0{,}5]^\mathsf{T}$, y $[0,\ 1/3,\ 2/3]^\mathsf{T}$, de las cuales la primera no es factible y las dos últimas son factibles.

7. Fundamentos del Método Simplex

La idea del método simplex es partir de una solución básica factible de las restricciones de un problema lineal en forma estándar, y proceder a otra solución básica factible con menor valor de la función objetivo. Repitiendo el proceso hasta alcanzar el mínimo. El método simplex fué inventado en 1947 por George Dantzig.

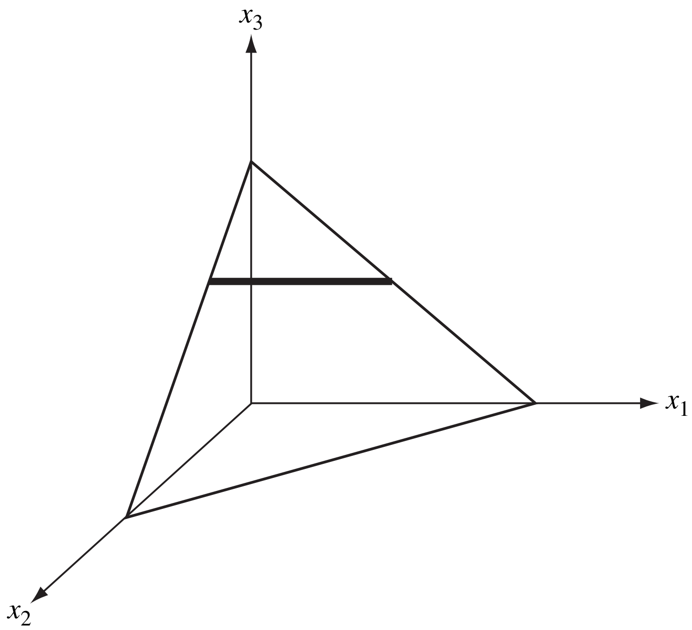

Figura 2: Región factible para el Ejemplo 3.

7.1. Elementos Pivote

Para comprender el método simplex, es importante analizar primero el proceso de pivoteo en un conjunto de ecuaciones lineales.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{3}$$

donde $m \leq n$. En forma matricial:

$$\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Si las primeras m columnas de A son linealmente independientes, podemos convertir el sistema lineal (3) en la siguiente forma canónica:

$$\begin{array}{cccccccccccc} x_1 & & & + & y_{1,m+1}x_{m+1} & + & y_{1,m+2}x_{m+2} & + & \dots & + & y_{1,n}x_n & = & y_{1o} \\ & x_2 & & + & y_{2,m+1}x_{m+1} & + & y_{2,m+2}x_{m+2} & + & \dots & + & y_{2,n}x_n & = & y_{2o} \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & x_m & + & y_{m,m+1}x_{m+1} & + & y_{m,m+2}x_{m+2} & + & \dots & + & y_{m,n}x_n & = & y_{mo} \end{array} \tag{4}$$

Para esta representación canónica del sistema, se dice que las variables $x_1, x_2, \dots, x_m$ son variables básicas, y las variables restantes son no básicas. La solución básica correspondiente es:

$$x_1 = y_{1o},\ x_2 = y_{2o},\ \dots\ ,\ x_m = y_{mo},\ x_{m+1} = 0,\ \dots\ ,\ x_n = 0$$

o en notación vectorial:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_o \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}_o \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-m}$$

En realidad, relajamos nuestra definición y consideramos que un sistema se encuentra en forma canónica si de entre las n variables, existen m variables básicas con la propiedad de que cada una de ellas aparece en un única ecuación, y su coeficiente en dicha ecuación es unitario. Esto es equivalente a afirmar que un sistema se encuentra en forma canónica si por reordenamiento de las ecuaciones y las variables toma la forma del sistema (4).

Por practicidad, representamos el sistema (4) en forma tabular:

$$\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & y_{1,m+1} & y_{1,m+2} & \cdots & y_{1,n} & y_{1o} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & y_{2,m+1} & y_{2,m+2} & \cdots & y_{2,n} & y_{2o} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & y_{m,m+1} & y_{m,m+2} & \cdots & y_{m,n} & y_{mo} \end{array} \tag{5}$$

Un sistema en forma canónica posee una base asociada. Dado un sistema en forma canónica, el pivoteo consiste en obtener un nuevo sistema en forma canónica correspondiente a una nueva base, convirtiendo una variable básica en no básica, y una variable no básica en básica.

Suponga que en el sistema canónico (4) queremos reemplazar la variable básica x_p, $1 \leq p \leq m$, por la variable no básica x_q. Esto es posible si y solo si $y_{p,q} \neq 0$. Se logra dividiendo la fila p por y_{pq} para obtener un coeficiente unitario para x_q en la ecuación p, y luego restando múltiples apropiados de la fila p de cada una de las otras filas de modo de obtener un coeficiente zero para x_q en todas las demás ecuaciones. Esto transforma la columna q del tableau en un vector unitario con un uno en el componente p y zeros en todos los demás componentes, y no afecta las columnas de las demás variables básicas. Denotando por y'_{ij} a los coeficientes del nuevo sistema en forma canónica, tenemos

$$\begin{cases} y'_{ij} = y_{ij} - \dfrac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq}, & i \neq p \\ y'_{pj} = \dfrac{y_{pj}}{y_{pq}}. \end{cases} \tag{6}$$

Las ecuaciones (6) son las ecuaciones de pivoteo que aparecen frecuentemente en programación lineal. El elemento y_{pq} es el *elemento pivote.*

Ejemplo 4 *Considere el sistema en forma canónica:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & + & x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 5 \\ & x_2 & & + & 2x_4 & - & 3x_5 & + & x_6 & = & 3 \\ & & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & - & x_6 & = & -1 \end{array}$$

cuyas variables básicas son x_1, x_2 y x_3. La solución básica correspondiente a esta base es:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0$$

Supongamos que queremos hallar una nueva solución básica con las variables básicas x_2, x_3 y x_4. En forma tabular tenemos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	0	1	1	−1	5
0	1	0	2	−3	1	3
0	0	1	−1	2	−1	−1

El círculo indica el elemento pivote correspondiente al reemplazo de x_1 por x_4 como variable básica. Luego de pivotear obtenemos el tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	0	1	1	−1	5
−2	1	0	0	−5	3	−7
1	0	1	0	3	−2	4

A partir de esta nueva forma canónica obtenemos la siguiente nueva solución básica:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -7, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 5, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0$$

x_4 es la variable entrante (variable que entra a la base).

x_1 es la variable saliente (variable que sale de la base).

7.2. Puntos Extremos Adjacentes

La operación de pivoteo permite pasar de una solución básica a otra, reemplazando una variable básica por una no básica.

La pregunta es: ¿Cómo pasar de una solución básica factible a otra solución básica factible?

7.2.1. Hipótesis de No Degeneración

Muchos argumentos de la programación lineal se simplifican introduciendo la siguiente hipótesis.

Hipótesis de No Degeneración: Toda solución básica factible de $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, es una solución básica factible no degenerada.

Esta hipótesis se realiza por conveniencia, ya que el método simplex se puede modificar para incluir la posibilidad de degeneración.

7.2.2. Determinación de un Vector Saliente

Dado un vector entrante a la base, queremos determinar un vector saliente tal que la nueva solución básica sea factible.

Supóngase que contamos con la solución básica factible

$$\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ 0,\ 0,\ \ldots\ ,\ 0)^{\mathsf{T}}$$

o, equivalentemente, la representación

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b} \tag{7}$$

Bajo la suposición de solución no degenerada, $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Queremos ingresar el vector $\mathbf{a}_q$, $q > m$, dentro de la base. Podemos representar $\mathbf{a}_q$ en términos de la base actual como:

$$\mathbf{a}_q = y_{1q}\mathbf{a}_1 + y_{2q}\mathbf{a}_2 + \cdots + y_{mq}\mathbf{a}_m \tag{8}$$

Multiplicando (8) por $\varepsilon \geq 0$ y restando de (7) tenemos:

$$(x_1 - \varepsilon y_{1q})\mathbf{a}_1 + (x_2 - \varepsilon y_{2q})\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_m - \varepsilon y_{mq})\mathbf{a}_m + \varepsilon\mathbf{a}_q = \mathbf{b}$$

Para $\varepsilon = 0$ tenemos la solución básica factible inicial. A medida que ε aumenta, los coeficientes de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, aumentan o disminuyen. Si alguno disminuye, podemos fijar ε igual al primer valor en que uno o más coefficientes se hacen cero. Es decir,

$$\varepsilon = \min_i \left\{ \frac{x_i}{y_{iq}} : \ y_{iq} > 0 \right\} \tag{9}$$

Para este valor de ε tenemos una nueva solución básica factible donde $\mathbf{a}_q$ reemplaza al vector $\mathbf{a}_p$, donde p corresponde al índice que minimiza (9).

- Si el mínimo en (9) se logra para más de un índice i al mismo tiempo, luego obtenemos una solución básica factible degenerada.
- Si ninguno de los y_{iq} es positivo, entonces los coeficientes $x_i - \varepsilon y_{iq}$ pueden ser arbitrariamente grandes, lo cual significa que $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ tiene un conjunto factible no acotado.

En resúmen: Dada una solución básica factible y un vector arbitrario $\mathbf{a}_q$, ocurre ya sea:

a) Existe una nueva solución básica factible con $\mathbf{a}_q$ en su base y uno de los vectores originales removido.

b) La región factible es no acotada.

Ejemplo 5 *Considere el sistema*

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{b}$
1	0	0	2	4	6	4
0	1	0	1	2	3	3
0	0	1	−1	2	1	1

con base $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ *y solución básica factible* $\mathbf{x} = (4,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$. *Suponga que queremos ingresar* $\mathbf{a}_4$ *a la base. Para ello, determinamos*

$$\varepsilon = \min_i \left\{ \frac{x_i}{y_{iq}} : \ y_{iq} > 0 \right\}$$

Calculamos los cocientes

$$\frac{4}{2} = 2, \quad \frac{3}{1} = 3$$

y seleccionamos el más pequeño. Luego, $\varepsilon = 2$ *y* $p = 1$. *El elemento pivote es* 2.

Pivoteando, obtenemos la nueva tabla en forma canónica:

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{b}$
1/2	0	0	1	2	3	2
−1/2	1	0	0	0	0	1
1/2	0	1	0	4	4	3

La nueva solución básica factible $\mathbf{x} = (0,\ 1,\ 3,\ 2,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$

7.3. Determinación de Soluciones Básicas Factibles de Menor Costo

En la última sección mostramos cómo es posible pivotear de una solución básica factible a otra (o determinar que el conjunto solución es no acotado) seleccionando arbitrariamente una columna sobre la cual pivotear y luego seleccionando apropiadamente el elemento pivote sobre dicha columna. La idea del método simplex es seleccionar la columna entrante de modo que la nueva solución básica factible tenga menor valor de la función objetivo que la solución anterior. En el método simplex, primero se determina la columna entrante tal que se reduzca el valor de la función objetivo, y luego se determina la columna saliente tal que se mantenga la factibilidad.

Suponga que partimos de la solución básica factible

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathsf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = (y_{1o}, y_{2o}, \ldots, y_{mo}, 0, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$$

correspondiente a la tabla en forma canónica:

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\ldots$	$\mathbf{a}_m$	$\mathbf{a}_{m+1}$	$\mathbf{a}_{m+2}$	$\ldots$	$\mathbf{a}_n$	$\mathbf{b}$
1	0	$\ldots$	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	$\cdots$	$y_{1,n}$	y_{1o}
0	1	$\ldots$	0	$y_{2,m+1}$	$y_{2,m+2}$	$\cdots$	$y_{2,n}$	y_{2o}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\ldots$	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	$\cdots$	$y_{m,n}$	y_{mo}

El valor de la función objetivo correspondiente a cualquier solución $\mathbf{x}$ es

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{10}$$

y el valor de la solución básica es

$$z_0 = \mathbf{c}_\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathbf{x}_\mathsf{B}, \quad \text{con} \quad \mathbf{c}_\mathsf{B} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^\mathsf{T}$$

Asignando valores arbitrarios a las variables no básicas $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, podemos calcular las variables restantes como:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_{1o} - \sum_{j=m+1}^{n} y_{1j}x_j \\ x_2 &= y_{2o} - \sum_{j=m+1}^{n} y_{2j}x_j \\ &\vdots \\ x_m &= y_{mo} - \sum_{j=m+1}^{n} y_{mj}x_j \end{aligned}$$

Usando estas expresiones podemos eliminar $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ de la fórmula general (10). Haciendo esto, obtenemos

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = z_0 &+ (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + (c_{m+2} - z_{m+2})x_{m+2} + \ldots \\ &\cdots + (c_n - z_n)x_n \end{aligned} \tag{11}$$

donde

$$z_j = y_{1j}c_1 + y_{2j}c_2 + \cdots + y_{mj}c_m, \qquad m+1 \le j \le n$$

Esta ecuación es la relación fundamental que se requiere para determinar la columna pivote. Esta ecuación nos da el valor de la función objetivo z para cualquier solución de $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en términos de las variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$. A partir de ella, podemos determinar si existe alguna ventaja en cambiar la solución básica al introducir una variable no básica. Por ejemplo, si en (11) $c_j - z_j < 0$ para algún j, $m+1 \leq j \leq m$, luego aumentando x_j desde cero se disminuye la función objetivo, y se obtiene por tanto una mejor solución.

Veamos otra derivación de la ecuación (11). Sea $\mathbf{y}_i$ la columna i de la tabla en forma canónica. Luego cualquier solución satisface

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_m\mathbf{e}_m = \mathbf{y}_0 - x_{m+1}\mathbf{y}_{m+1} - x_{m+2}\mathbf{y}_{m+2} - \cdots - x_n\mathbf{y}_n$$

Haciendo el producto punto con $\mathbf{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}}$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i = \mathbf{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_0 - \sum_{j=m+1}^{n} z_j x_j,$$

donde $z_j = \mathbf{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_j$. Sumando $\sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$ en ambos lados,

$$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j)x_j$$

al igual que la equación (11).

Teorema 3 (Mejora de una Solución Básica Factible) *Dada una solución básica factible no degenerada con valor de la función objetivo z_0, suponga que para algún j, $c_j - z_j < 0$. Luego existe una solución factible con valor de la función objetivo $z < z_0$. Si la columna $\mathbf{a}_j$ puede ser sustituida por algún vector en la base original para dar una nueva solución básica factible, esta nueva solución tendrá $z < z_0$. Si $\mathbf{a}_j$ no se puede sustituir para dar una nueva solución básica factible, luego la región factible es no acotada y el valor de la función objetivo puede hacerse arbitrariamente pequeño (hacia $-\infty$).*

Demostración. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$ la solución básica factible con valor z_0 y suponga que $c_{m+1} - z_{m+1} < 0$. Luego se pueden obtener soluciones factibles $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m, x'_{m+1}, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$ con $x'_{m+1} > 0$. Sustituyendo esta solución en (11) obtenemos

$$z - z_0 = (c_{m+1} - z_{m+1})x'_{m+1} < 0,$$

y por lo tanto $z < z_0$. Claramente queremos que x'_{m+1} sea lo mayor posible. A medida que se aumenta x'_{m+1}, los demás componentes aumentan, permanecen constantes o disminuyen. Luego, podemos aumentar x'_{m+1} hasta que algún $x'_i = 0$, $i \leq m$, en cuyo caso obtenemos una nueva solución básica factible. Si ninguno de los x'_i disminuye, entonces x'_{m+1} puede aumentarse indefinidamente indicando una región factible no acotada y un valor de la función objetivo sin cota inferior. □

Teorema 4 (Condición de Optimalidad) *Si para alguna solución básica factible $c_j - z_j \geq 0$ para todo j, luego dicha solución básica factible es óptima.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la ecuación (11). Cualquier otra solución factible debe tener $x_i \geq 0$ para todo i, y por lo tanto el valor z de la función objetivo satisfacerá $z - z_0 \geq 0$. □

Debido a que las constantes $c_j - z_j$ juegan un rol central en el desarrollo del método simplex, es conveniente introducir la notación abreviada

$$r_j = c_j - z_j$$

y referirnos a r_j como los *coeficientes de costo relativo* o *coefficientes de costo reducido*. Estos coeficientes miden el costo de una variable en relación a una determinada base.

8. Forma Tabular del Método Simplex

Asumiremos que comenzamos con una solución básica factible y la tabla correspondiente a $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en forma canónica. Mas adelante se describirá un método para obtener una solución básica factible inicial.

Además de empezar con $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en forma canónica, agregamos en una fila inferior los coeficientes de costo relativo y el negativo del costo actual. Si asumimos que las variables básicas son $x_1, x_2, \ldots, x_m$, el tableau simplex inicial toma la siguiente forma:

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\ldots$	$\mathbf{a}_m$	$\mathbf{a}_{m+1}$	$\mathbf{a}_{m+2}$	$\ldots$	$\mathbf{a}_n$	$\mathbf{b}$
1	0	$\ldots$	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	$\ldots$	$y_{1,n}$	y_{1o}
0	1	$\ldots$	0	$y_{2,m+1}$	$y_{2,m+2}$	$\ldots$	$y_{2,n}$	y_{2o}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\ldots$	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	$\ldots$	$y_{m,n}$	y_{mo}
0	0	$\ldots$	0	r_{m+1}	r_{m+2}	$\ldots$	r_n	z'_0

donde $z'_0 = -z_0$. La solución básica factible es

$$\mathbf{x} = (y_{1o},\ y_{2o},\ \ldots\ ,\ y_{mo},\ 0,\ 0,\ \ldots\ 0)^{\mathsf{T}}, \quad \text{con } \ y_{io} \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

El valor correspondiente de la función objetivo es z_0. Tenemos

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} r_j x_j \tag{12}$$

Podemos considerar a z como una variable adicional y a

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n - z = 0$$

como una ecuación adicional. De este modo tendremos un sistema de $n + 1$ variables básicas, pero podemos hacer que z sea siempre una de ellas. Inicialmente, incluimos una última fila con los costos c_i y un lado derecho igual a cero:

x_1	x_2	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	$\ldots$	x_n	z'	$\mathbf{b}$
1	0	$\ldots$	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	$\ldots$	$y_{1,n}$	0	y_{1o}
0	1	$\ldots$	0	$y_{2,m+1}$	$y_{2,m+2}$	$\ldots$	$y_{2,n}$	0	y_{2o}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\ldots$	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	$\ldots$	$y_{m,n}$	0	y_{mo}
c_1	c_2	$\ldots$	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	$\ldots$	c_n	1	0

donde $z' = -z$. Realizando operaciones de pivoteo, los elementos de la última fila correspondientes a variables básicas se reducen a cero:

x_1	x_2	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	$\ldots$	x_n	z'	$\mathbf{b}$
1	0	$\ldots$	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	$\ldots$	$y_{1,n}$	0	y_{1o}
0	1	$\ldots$	0	$y_{2,m+1}$	$y_{2,m+2}$	$\ldots$	$y_{2,n}$	0	y_{2o}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\ldots$	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	$\ldots$	$y_{m,n}$	0	y_{mo}
0	0	$\ldots$	0	r_{m+1}	r_{m+2}	$\ldots$	r_n	1	z'_0

Esto es equivalente a transformar la última fila a la forma

$$r_{m+1}x_{m+1} + r_{m+2}x_{m+2} + \cdots + r_n x_n - z = -z_0$$

Esta ecuación es equivalente a (12). En la práctica, no es necesario agregar la columna correspondiente a z', ya que sería siempre $(0,\ 0,\ \ldots\ ,\ 0,\ 1)^{\mathsf{T}}$.

El algoritmo simplex puede resumirse en los siguientes pasos:

- *Paso 0:* Construya la tabla en forma canónica correspondiente a una solución básica factible.
- *Paso 1:* Si todos los $r_j \geq 0$, detenerse. La solución básica factible actual es la óptima.
- *Paso 2:* Seleccione q tal que $r_q < 0$ para determinar la variable no básica entrante.
- *Paso 3:* Calcule los y_{io}/y_{iq} para $y_{iq} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Si ningún $y_{iq} > 0$ detenerse, el problema es no acotado. En caso contrario seleccione p como el índice i correspondiente al y_{io}/y_{iq} mínimo.
- *Paso 4:* Utilizar el elemento pq como pivote. Actualizar todas las filas incluyendo la última. Regresar al paso 1.

El proceso se detiene sólo si se llega al óptimo o se descubre que el sistema es no acotado.

Ejemplo 6

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{mín} & -3x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 6
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Introduciendo variables de holgura, tenemos el tableau inicial

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{b}$
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
−3	−1	−3	0	0	0	0

El problema ya se encuentra en forma canónica con las tres variables de holgura sirviendo como variables básicas. En este punto tenemos $r_j = c_j - z_j = c_j$, con $z_j = \mathbf{c}_{\mathsf{B}}^{\mathsf{T}}\mathbf{a}_j = 0$, ya que los costos de las variables de holgura son iguales a cero, es decir, $\mathbf{c}_{\mathsf{B}} = \mathbf{0}$.

Paso 2: La aplicación del criterio para seleccionar la columna sobre la cual pivotear nos muestra que cualquiera de las primeras tres columnas produciría una solución mejorada. Seleccionamos la columna 1, es decir, x_1 será la variable no básica entrante a la base.

Paso 3: Calculamos los cocientes

$$\frac{2}{2} = 1, \quad \frac{5}{1} = 5, \quad \frac{6}{2} = 3$$

y seleccionamos el más pequeño. Luego, el elemento pivote es 2.

Paso 4: Actualización del tableau por pivoteo,

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{b}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	4
0	1	0	-1	0	1	4
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	3

Paso 2: Seleccionamos x_3 como variable entrante a la base.

Paso 3: Calculamos los cocientes

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \quad \frac{4}{\frac{5}{2}} = \frac{8}{5},$$

y seleccionamos el más pequeño. Luego, el elemento pivote es $\frac{5}{2}$.

Paso 4: Actualización del tableau por pivoteo,

$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{b}$
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
0	1	0	-1	0	1	4
0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{27}{5}$

La última fila no tiene elementos no negativos. Luego, la solución óptima es:

$$x_1 = \frac{1}{5}, \; x_2 = 0, \; x_3 = \frac{8}{5}, \; x_4 = 0, \; x_5 = 0, \; x_6 = 4$$

y el valor óptimo de la función objetivo es $-\frac{27}{5}$.

9. Método de las Dos Etapas

Primera etapa: Determinación de una solución básica factible inicial mediante la introducción de variables artificiales.

Segunda etapa: Método de simplex.

9.1. Variables Artificiales

Queremos encontrar una solución básica factible inicial de

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{13}$$

Considerar el siguiente problema artificial:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{s.t.} \quad & \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{14}$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\mathsf{T}$ es el vector de variables artificiales.

Si existe una solución factible de (13) luego el problema (14) tiene valor mínimo de cero para $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Notar que el problema (14) ya está en forma canónica con solución básica factible $\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

Aplicamos el método de simplex al problema (14) hasta obtener una solución básica factible que no contenga ninguna variable artificial y_i.

Ejemplo 7 *Resolver el siguiente problema utilizando el método simplex de las dos etapas.*

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{mín} & 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Primera etapa: *Encontrar una solución básica factible de*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Introducimos las variables artificiales $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, y la función objetivo $y_1 + y_2$. Construimos el tableau inicial:

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
2	1	2	1	0	4
3	3	1	0	1	3
0	0	0	1	1	0

Actualizamos la última fila para iniciar el método de simplex.

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
2	1	2	1	0	4
3	3	1	0	1	3
-5	-4	-3	0	0	-7

Primera tabla

Ingresamos x_1 a la base tomando el elemento 3 como pivote.

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
0	-1	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	2
1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
0	1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	-2

Segunda tabla

Ingresamos x_3 a la base tomando el elemento $\frac{4}{3}$ como pivote.

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	$\mathbf{b}$
0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	1	1	0

Tabla final

Hallamos la siguiente solución básica factible del problema original:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{3}{2}$$

cuyas variables básicas son x_1 y x_3.

Segunda etapa: *Resolver el problema original mediante el método simplex. Construimos la siguiente tabla inicial correspondiente a la solución básica factible obtenida:*

x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$
0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
4	1	1	0

Tabla inicial

Actualización de la última fila:

x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$
0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
0	$-\frac{13}{4}$	0	$-\frac{7}{2}$

Primera tabla

Ingresamos x_2 a la base tomando el elemento $\frac{5}{4}$ como pivote.

x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$
$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{9}{5}$
$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{2}{5}$
$\frac{13}{5}$	0	0	$-\frac{11}{5}$

Tabla final

La solución óptima es $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{9}{5}$.

10. Forma Matricial del Método de Simplex

$$\mathsf{A} = [\mathsf{B}\ \mathsf{N}] \qquad \begin{array}{l} \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ \mathsf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m} \\ \mathsf{B} \text{ no singular.} \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathsf{B} \\ \mathbf{x}_\mathsf{N} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_\mathsf{B} \\ \mathbf{c}_\mathsf{N} \end{bmatrix}$$

Programa lineal en forma estándar:

$$\begin{array}{lccccc} \text{mín} & \mathbf{c}_\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathbf{x}_\mathsf{B} & + & \mathbf{c}_\mathsf{N}^\mathsf{T}\mathbf{x}_\mathsf{N} & & \\ \text{s.t.} & \mathsf{B}\mathbf{x}_\mathsf{B} & + & \mathsf{N}\mathbf{x}_\mathsf{N} & = & \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x}_\mathsf{B} \geq \mathbf{0}, & \mathbf{x}_\mathsf{N} \geq \mathbf{0} & & \end{array}$$

Solución básica factible correspondiente a la base B:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\mathsf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{con } \mathbf{x}_\mathsf{B} = \mathsf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0} \quad (\mathbf{x}_\mathsf{N} = \mathbf{0})$$

Para cualquier valor de $\mathbf{x}_\mathsf{N}$:

$$\mathbf{x}_\mathsf{B} = \mathsf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathsf{B}^{-1}\mathsf{N}\mathbf{x}_\mathsf{N}$$

Sustituyendo en la función objetivo:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_\mathsf{B}^\mathsf{T}\left(\mathsf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathsf{B}^{-1}\mathsf{N}\mathbf{x}_\mathsf{N}\right) + \mathbf{c}_\mathsf{N}^\mathsf{T}\mathbf{x}_\mathsf{N} \\ &= \mathbf{c}_\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}^{-1}\mathbf{b} + \left(\mathbf{c}_\mathsf{N}^\mathsf{T} - \mathbf{c}_\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{N}\right)\mathbf{x}_\mathsf{N} \\ &= z_0 + \left(\mathbf{c}_\mathsf{N}^\mathsf{T} - \mathbf{c}_\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{N}\right)\mathbf{x}_\mathsf{N} \end{aligned}$$

Luego

$$\mathbf{r}_\mathsf{N}^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\mathsf{N}^\mathsf{T} - \mathbf{c}_\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{N}$$

es el vector de coeficientes de costos relativos que se usan para determinar qué vector ingresar a la base.

Podemos escribir la tabla de simplex en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^\mathsf{T} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathsf{B} & \mathsf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_\mathsf{B}^\mathsf{T} & \mathbf{c}_\mathsf{N}^\mathsf{T} & 0 \end{array}\right]$$

que en general no está en forma canónica. Convirtiendo a la forma canónica, obtenemos:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathsf{I} & \mathsf{B}^{-1}\mathsf{N} & \mathsf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{c}_\mathsf{N}^\mathsf{T} - \mathbf{c}_\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{N} & -\mathbf{c}_\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right]$$