A. Desigualdades lineales

- vectores
- producto interno y normas
- igualdades lineales e hiperplanos
- desigualdades lineales y hemiespacios
- Politopos

Vectores

vector columna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- $x_i \in \mathbb{R}$: componente o elemento i de $\mathbf{x}$

algunos vectores especiales:

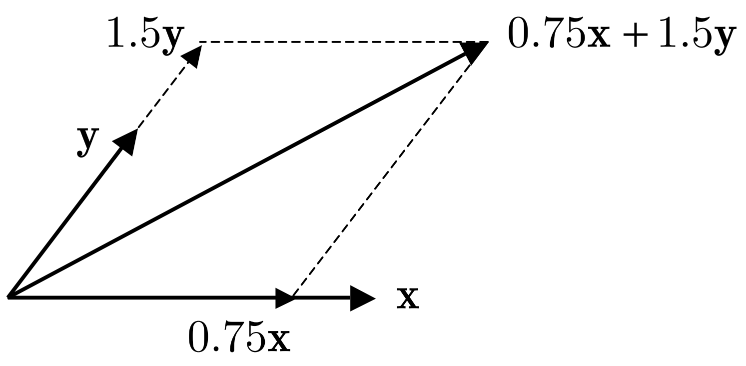
- $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (vector zero): $x_i = 0, \quad i = 1, \cdots, n$
- $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ (vector uno): $x_i = 1, \quad i = 1, \cdots, n$
- $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ (vector unitario i): $x_i = 1, \quad x_k = 0$ para $k \neq i$

multiplicación de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

suma y resta de dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix}$$



Producto interno

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{y}$$

propiedades importantes

- $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

función lineal: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es lineal, i.e.

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$$

si y solo si $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$ para algún vector $\mathbf{a}$

Norma Euclidiana

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se define la norma (Euclidiana) como

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$$

$\|\mathbf{x}\|$ mide la longitud del vector (desde el origen)

propiedades importantes

- $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ (homogeneidad)
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (desigualdad del triángulo)
- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ (no negatividad)
- $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

distancia entre vectores: $\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

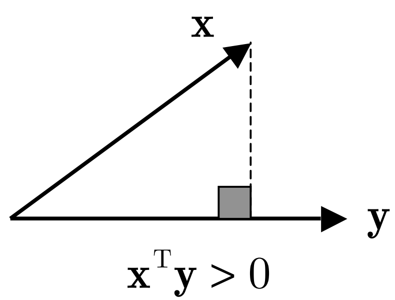
Producto interno y ángulo

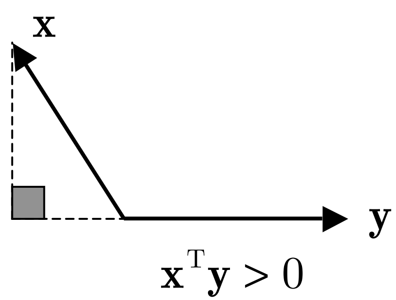
ángulo entre vectores en $\mathbb{R}^n$:

$$\theta = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos^{-1} \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$$

i.e., $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos\theta$

- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ alineados: $\theta = 0$; $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$
- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ opuestos: $\theta = \pi$; $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = -\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$
- $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ortogonales: $\theta = \pi/2$ o $-\pi/2$; $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = 0$ (se escribe $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$)
- $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} > 0$ significa $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es agudo
- $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} < 0$ significa $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es obtuso



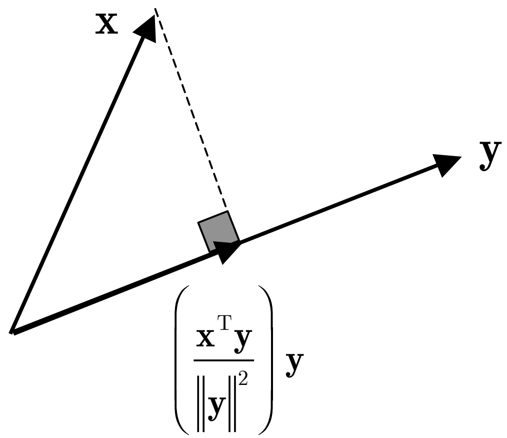


Producto interno

Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left|\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\right| \leq \left\|\mathbf{x}\right\|\left\|\mathbf{y}\right\|$$

proyección de $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$



la proyección está dada por

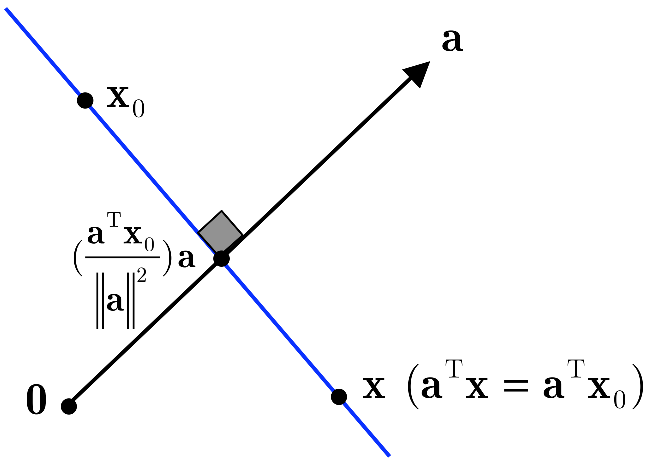
$$\left(\frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}}{\left\|\mathbf{y}\right\|^{2}}\right)\mathbf{y}$$

Hiperplanos

hiperplano en $\mathbb{R}^n$:

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b\} \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$$

- conjunto solución de la ecuación lineal $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ con al menos un $a_i \neq 0$
- conjunto de vectores que conforman un producto interno constante con el vector $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ (el vector normal)



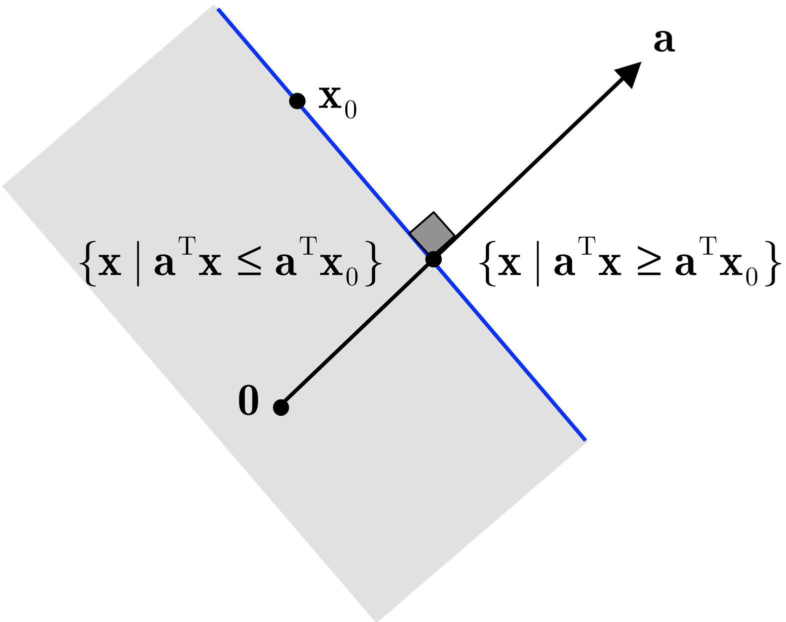
en $\mathbb{R}^2$: una linea; en $\mathbb{R}^3$: un plano,...

Hemiespacios

hemiespacio (cerrado) en $\mathbb{R}^n$:

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq b\} \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$$

- conjunto solución de la ecuación lineal $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b$ con al menos un $a_i \neq 0$
- $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ es el vector (saliente) normal



- $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} < b\}$ es un hemiespacio abierto hiperplano en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

intersección de m hyperplanos, con vectores normales $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})^{\mathrm{T}}$ $(\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0})$

en notación matricial:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

con

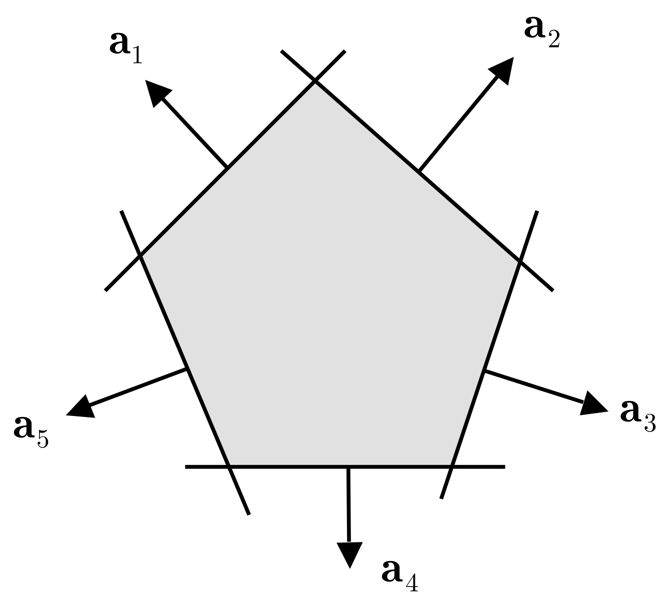
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Politopos

solución de un sistema de desigualdades lineales:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

intersección de m hemiespacios, con vectores normales $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})^{\mathrm{T}}$ $(\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0})$



Politopos

en notación matricial:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ implica desigualdad de componente a componente, i.e, para $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{y} \leq \mathbf{z} \quad \Leftrightarrow \quad y_i \leq z_i, \;\; i = 1, \cdots n$$