



Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2021

Práctica 5: Integrales impropias.

1. Determine $\int_1^\infty x^r dx$ si $r \neq -1$.
2. Demuestre que $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ no existe (es divergente).
3. Suponga que $f(x) \geq 0$ para $x \geq a$ y que existe $\int_a^\infty f(x) dx$. Demuestre que si g es integrable en $[a, x]$ para cada x y $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo $x \geq a$, entonces existe $\int_a^\infty g(x) dx$.
4. Demuestre que existen las integrales

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx.$$

5. Halle $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ para $a > 0$.
6. Halle $\int_0^a \frac{1}{x^r} dx$ para $a > 0$ y $0 < r < 1$.
7. Halle $\int_a^0 |x|^r dx$ para $a < 0$ y $-1 < r < 0$.
8. Demuestre que $\int_0^\infty x^r dx$ nunca tiene sentido. Distinga los casos $r > 0$, $-1 < r < 0$ y $r < -1$.
9. Decida si existen las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx, \quad \int_0^\infty \frac{x}{1+x^{3/2}} dx.$$

10. Demuestre que si existe $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ entonces existe $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx$ y coincide con $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$.
Demuestre además que $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{N+1} f(x) dx$ existe y coincide con $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$.
11. Si f es continua en $[0, 1]$, calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$.
12. Si f es integrable en $[0, 1]$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe, calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$.