Nombre y Apellido:

Examen Parcial 1

Ej. 1 (*2 puntos*). Consideremos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ las relaciones en A dadas por:

$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4)\}$

$\mathcal{S} = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,2),(4,3)\}$

$\mathcal{T} = \{(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,2)\}$

Determinar la matriz de $\mathcal{U} = C(\mathcal{S}^{-1} \cap \mathcal{R}) \circ \mathcal{T}$ y analizar si $\mathcal{U}$ es reflexiva, simétrica, antisimética y/o transitiva.

Ej. 2 (*2,5 puntos*). Sea $(X, \preceq)$, con $X \neq \emptyset$, un conjunto bien ordenado (i.e., $(X, \preceq)$ es un poset tal que todo subconjunto no vacío de X tiene un mínimo). Para cada $x \in X$, sea $s(x)$ (si existe) el elemento

$$s(x) = \text{mín}\{y \in X \,:\, x \prec y\}.$$

$s(x)$ se denomina *sucesor* de x.

a) Probar que x tiene un sucesor si y sólo si $x \neq 1 = \text{máx}\, X$, en caso de que este máximo exista.

b) Pongamos

$$X^* = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ no tiene máximo,} \\ X - \{1\} & \text{si existe } 1 = \text{máx}(X). \end{cases}$$

Probar que $s : X^* \to X$, $x \mapsto s(x)$ es una función inyectiva bien definida.

c) Un elemento $x \in X$ se denomina un *límite* si $x \neq 0$ y x no es el sucesor de ningún elemento. Probar que x es un límite si y sólo si se verifican simultáneamente:

- $I_x = \{y \in X \,:\, y \prec x\} \neq \emptyset$;
- Para cada $w \in I_x$, existe $z \in I_x$ tal que $w \prec z$.

Ej. 3 (*2,5 puntos*). Sea $m \in \mathbb{Z}$ y sea $f_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la función dada por

$$f(x) = x + m.$$

Un subconjunto A de $\mathbb{Z}$ se dice *m-periódico* si $f_m(A) = A$. Sea $B_m \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ el conjunto de conjuntos m-periódicos de $\mathbb{Z}$.

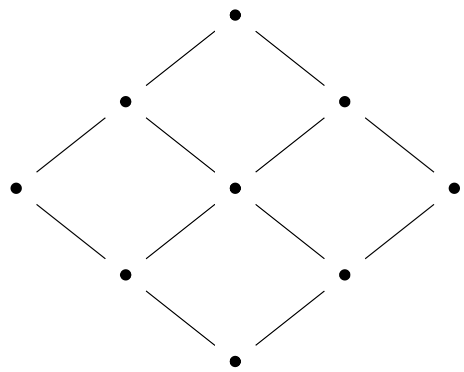
a) Dar el diagrama de Hasse de B_2 y B_3.

b) Probar que $(B_m, \subseteq)$ es un álgebra de Boole.

c) Describir los elementos atómicos de B_m.

Ej. 4 (*3 puntos*). Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.

a) El retículo L cuyo diagrama de Hasse es el siguiente es un retículo distributivo.



b) Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $B = \mathcal{P}_{fin}(X) \cup \mathcal{P}_{cof}(X)$ el álgebra de Boole de partes finitas y cofinitas de X. Sea $f : B \to \mathbf{2}$ tal que $f(A) = 0$ si A es finito y $f(A) = 1$ si A es cofinito. Entonces f es un homomorfismo de álgebras de Boole.

c) Todo subconjunto de $(\mathbb{N}, |)$ con el orden heredado tiene ínfimo.