FCEIA - Universidad Nacional de Rosario - LCC 2025
Optimización Continua
Profesor: Alejandro G. Marchetti

Guía de Ejercicios No. 1

1. Sean $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ conjuntos convexos cerrados. Demostrar que $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ es convexo.

2. ¿En qué dominio es convexa la función $f(x) = x^2(x^2 - 1)$? ¿Es estrictamente convexa en la región especificada? Justifique su respuesta.

3. Sean $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones dos veces diferenciables. Considerar la función compuesta $f(x) = h(g(x))$. Demostrar la veracidad de las siguientes afirmaciones:
   - f es convexa en $\mathbb{R}$ si h es convexa y no decreciente, y g es convexa.
   - f es convexa en $\mathbb{R}$ si h es convexa y no creciente, y g es cóncava.

4. Sean $f_1, \dots, f_k$ funciones convexas de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Considerar la función:
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j(\mathbf{x}),$$
donde $\alpha_j > 0$ para $j = 1, \dots, k$. Mostrar que f es convexa. Ilustrar con un ejemplo. Enunciar un resultado idéntico para funciones cóncavas. Ilustrar con un ejemplo

5. Sean $f_1, \dots, f_k$ funciones convexas de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Considerar la función:
$$f(\mathbf{x}) = \max\{f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\}.$$
Mostrar que f es convexa. Ilustrar con un ejemplo. Enunciar un resultado idéntico para funciones cóncavas. Ilustrar con un ejemplo.

6. Sea $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 - y \leq 0\}$. ¿Es convexo? Justificar. Dado el punto $\mathbf{a} = (1, 0, 2)^{\mathsf{T}}$, plantear un problema de programación matemática no lineal que permita encontrar el punto $\mathbf{b} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})^{\mathsf{T}}$ en $\mathcal{S}$ que esté a distancia mínima de $\mathbf{a}$. A partir de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ explique como determinar un plano que separe $\mathbf{a}$ de $\mathcal{S}$.