PRÁCTICA 1 - Números reales

1. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Utilizando los axiomas de cuerpo, demostrar las siguientes propiedades de los números reales.

   -a- $-a = (-1) \cdot a$.

   -b- El número 0 no tiene recíproco, y $1^{-1} = 1$.

   -c- $\dfrac{a}{1} = a$; y si $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$.

   -d- Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces:

   (I) $(b\ d)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$.

   (II) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{b\ d}$.

   (III) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a\ c}{b\ d}$.

   -e- Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}$.

   -f- Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

2. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Utilizando los axiomas de orden, demostrar las siguientes propiedades de los números reales.

   -a- Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

   -b- Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.

   -c- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

   -d- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

   -e- Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$ (a^2 indica el producto aa).

   -f- $1 > 0$. Es decir, $1 \in \mathbb{R}^+$.

   -g- Si $a < b$, entonces $-b < -a$.

   -h- Si $a < 0$ entonces $-a > 0$.

   -i- $ab > 0$ si y solo si a y b son los dos positivos o los dos negativos.

   -j- $a > 0$ si y solo si $\dfrac{1}{a} > 0$.

   -k- Si $0 < a < b$, entonces $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

   -l- Si $ab < 0$, entonces o bien a es positivo y b negativo o bien a es negativo y b positivo.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

3. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones o sistema de inecuaciones. Proporcionar el conjunto solución tanto en forma de intervalo como gráficamente.

(a). $4x > 8$
(b). $6y < 18$
(c). $2m \leq -6$
(d). $-r \leq -7$
(e). $3r + 1 \geq 16$
(f). $2m - 5 \geq 15$
(g). $-3(z - 6) > 2z - 5$
(h). $-2(y + 4) \leq 6y + 8$
(i). $-3 < x - 5 < 6$
(j). $-19 \leq 3x - 5 \leq -9$
(k). $-16 < 3t + 2 < -11$
(l). $-4 \leq \dfrac{2x-5}{6} \leq 5$
(m). $(x - 3)\sqrt{x + 1} \geq 0$
(n). $3x < \dfrac{1+6x}{2} < \dfrac{9x-8}{3}$
(ñ). $x \leq x + 1 \leq x + 5$
(o). $\begin{cases} 4x - 8 & > & -6, \\ \dfrac{x}{2} + 2 & > & 0. \end{cases}$
(p). $\begin{cases} 5x + \dfrac{1}{4} & \geq & 0, \\ 2x - 10 & < & 0, \\ 7x - 14 & \leq & 0. \end{cases}$
(q). $\dfrac{5}{x+3} + \dfrac{3}{x-1} < 0$
(r). $\dfrac{4x-3}{3-x} > 0$
(s). $\dfrac{4-9x}{5x+7} \leq 3$

4. -a- ¿A qué distancia está 7 de 4? ¿Y -3 de -19? ¿Y -24 de 49?
-b- Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al 3 en menos de 2.
-c- Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al -1 en menos de 4.
-d- Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al 0 en más de 1.

5. Representar en la recta numérica los siguientes conjuntos. Decidir si cada uno está acotado inferior y/o superiormente. Indicar en cada caso (si es posible) el ínfimo, supremo, mínimo y/o máximo.

(a). $|x| = 4.$
(b). $|x - 1| < 1.$
(c). $|x + 1| > 1.$
(d). $|x - 4| < 1.$
(e). $|x + 2| \geq 1.$
(f). $|x - 3| < 7.$
(g). $\left|x^2 - 3x - 2\right| \leq 2.$
(h). $\dfrac{3}{|3x+1|} \leq 2.$
(i). $\dfrac{|5x-5|}{|x+1|} \leq 0.$

6. Dados los siguientes conjuntos.

A $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$
B $= \{x \in \mathbb{R} \,/ -3 \leq x \leq 6\}$
C $= [2, 8)$
D $= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$
E $= \mathbb{Z} - \mathbb{N}$
F $= \{0\}$
G $= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = 1 - \dfrac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}\right\}$
H $= \mathbb{R} - \mathbb{Z}$
I $= \emptyset$

-a- Decidir si cada uno de los conjuntos está acotado, acotado superiormente o acotado inferiormente.
-b- En los casos en que los conjuntos están acotados superior y/o inferiormente, determinar el supremo y/o ínfimo;
-c- Establecer si los supremos e ínfimos obtenidos en el ítem anterior son máximos y mínimos, respectivamente, del conjunto considerado.

7. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Probar que A está acotado si y sólo si existe un número real positivo L tal que $|x| < L$ para todo $x \in A$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

8. Demostrar que si α y β son dos números reales tales que ambos son mínimo del mismo conjunto A, entonces $\alpha = \beta$.

9. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Se define el conjunto siguiente

$$-A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -x \in A\}\,.$$

-a- Siendo A_1, A_2 y A_3 los conjuntos encontrados en los ejercicios 5(a), 5(b) y 5(c), hallar los conjuntos $-A_1$, $-A_2$ y $-A_3$.

-b- Mostrar que $-A$ es un conjunto no vacío y que $-(-A) = A$.

-c- Hallar las condiciones bajo las cuales se tiene que $-A = A$.

-d- Mostrar que si A es un conjunto acotado superiormente (inferiormente) entonces $-A$ es un conjunto acotado inferiormente (superiormente).

-e- Mostrar que si A posee supremo entonces $-A$ posee ínfimo y se verifica que $\inf(-A) = -\sup(A)$, y análogamente, si A posee ínfimo entonces $-A$ posee supremo y se verifica que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

-f- Utilizar los resultados de los ítems anteriores para mostrar que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee ínfimo.

10. Si A es un conjunto no vacío de números reales y c es un número real, se define el conjunto

$$cA = \{cx \,:\, x \in A\}\,.$$

-a- Si $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 2\}$ y $B = [-1, 2)$, determinar $2A$ y $-3B$. Analizar las cotas superiores e inferiores de estos conjuntos.

-b- Conjeturar las relaciones entre $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(c\ A)$ e $\inf(c\ A)$.

11. Si A y B son dos conjuntos no vacíos de números reales tales que

$$a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a \leq b.$$

-a- Demostrar que el conjunto A es acotado superiormente y el conjunto B es acotado inferiormente.

-b- ¿Existe alguna relación entre el $\sup(A)$ y el $\inf(B)$? Hacer una conjetura sobre tal relación.

-c- Demostrar lo conjeturado en el ítem anterior.

12. Probar que:

-a- si $|x| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$.

-b- si $|x| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ entonces $x = 0$.