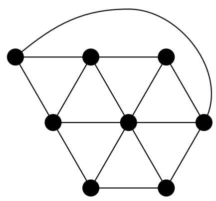
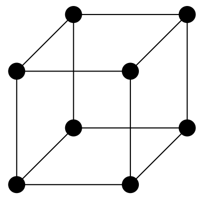
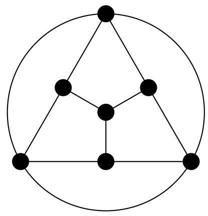
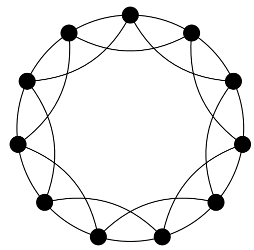
Ejercitación - Coloreo de Grafos

1. Determinar el número cromático de los siguientes grafos:

2. Determinar el número cromático de los siguientes grafos:

   a) El grafo bipartito completo $K_{m,n}$.
   b) El grafo completo K_n.
   c) C_n, el ciclo de n vértices, con $n \geqslant 3$.
   d) P_n, el camino de n vértices, con $n \geqslant 2$.

3. Para $n \geqslant 3$, el *grafo rueda*, W_n, se obtiene a partir de un ciclo de longitud n, C_n, agregando un nuevo vértice y conectándolo con cada uno de los n vértices del ciclo.

   a) Probar que W_n es un grafo planar para todo $n \geqslant 3$.
   b) Determinar el grafo dual de W_n para cada $n \geqslant 3$.
   c) ¿Qué relación hay entre $\chi(C_n)$ y $\chi(W_n)$?

4. Sea G un grafo no dirigido sin lazos con al menos una arista. Probar que G es bipartito si y solo si $\chi(G) = 2$.

5. Dar un ejemplo de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ tal que $\chi(G) = 3$ y ningún subgrafo de G sea isomorfo a K_3.

6. Un grafo G se dice k-color crítico si su número cromático es k y el número cromático de todo subgrafo propio inducido de G es menor a k. Equivalentemente, G es k-color crítico si $\chi(G) = k$ y $\chi(G - v) < k$ para todo $v \in V(G)$.

   ¿Cuáles de los grafos del ejercicio 1 son k-color crítico?

7. Sea G un grafo k-color crítico. Probar que:

   a) G es conexo.
   b) $\mathrm{gr}(v) \geqslant k - 1$ para todo $v \in V(G)$.
   c) G no tiene vértices de corte.

8. Un subconjunto de vértices de un grafo G es un conjunto *estable* (o *independiente*) si sus vértices son no adyacentes dos a dos. Se llama *número de estabilidad*, y se nota $\alpha(G)$, al cardinal máximo de un conjunto estable en G, es decir,

$$\alpha(G) = \max\{|I| : \ I \subset V, \ I \text{ estable}\}$$

   Si $|V(G)| = n$, probar que:

a) $\chi(G)\alpha(G) \geqslant n$

b) $\chi(G)(n - \delta(G)) \geqslant n$, donde $\delta(G) = \min\{\mathrm{gr}(v) : \ v \in V(G)\}$.

c) $\chi(G) \leqslant n + 1 - \alpha(G)$

9. Demostrar que si G es planar, con 8 vértices y 13 aristas, entonces G no es 2 -coloreable.

10. Probar que si G es un grafo planar entonces $\chi(G) \leqslant 6$

11. Sea G un grafo con $|V(G)| = n$ y $|E(G)| = m$. Probar:

    a) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$

    b) $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geqslant n$

12. Un *coloreo por aristas* en un grafo G es una asignación $f : E(G) \to \mathcal{C}$ (donde $\mathcal{C}$ es un conjunto de colores) tal que si e_1 y e_2 son dos aristas con un extremo en común, entonces $f(e_1) \neq f(e_2)$.

    Determinar un coloreo por aristas mínimo de los grafos K_4, $K_{3,3}$ y Petersen.

13. Describir los grafos que admiten un coloreo por aristas con exactamente dos colores.

14. Dado un grafo $G = (V, E)$, se define el *grafo de línea de* G, $L(G)$, como el grafo que tiene un vértice por cada arista de G y e_1 y e_2 son adyacentes en $L(G)$ si tienen un extremo en común.

    Probar que las aristas de G pueden ser coloreadas con k colores si y sólo si los vértices del grafo $L(G)$ pueden ser coloreados con k colores.

15. El propietario de una tienda de mascotas recibe un envío de peces tropicales. Entre las distintas especies hay algunos pares en que una es depredadora de la otra. En consecuencia, estos pares de especies deben mantenerse en peceras distintas. Construya un modelo de este problema como un problema de coloreo de grafos y describa cómo determinar el menor número de peceras necesarias para preservar todos los peces del envío.

16. Como presidenta de los comités estudiantiles, Antonieta debe programar los horarios para la reunión de 15 comités. Cada comité se reúne durante una hora a la semana. Las reuniones de dos comités con un miembro en común deben programarse a horas distintas. Modele esto como un problema de coloreo de grafos y describa cómo determinar el menor número de horas que Antonieta tiene que considerar para programar las reuniones de los 15 comités.

17. *a)* En los laboratorios químicos JJ, Juana recibe tres embarques que contienen un total de siete sustancias químicas diferentes. Asimismo, la naturaleza de estas sustancias es tal que para todo $1 \leqslant i \leqslant 5$, la sustancia i no puede almacenarse en el mismo compartimento que la sustancia $i+1$ o la $i+2$. Determine el menor número de compartimentos separados que Juana necesitará para almacenar en forma segura estas siete sustancias.

    b) Suponga que además de las condiciones del ítem anterior, los cuatro pares siguientes de las mismas siete sustancias requieren también compartimentos separados: 1 y 4, 2 y 5, 2 y 6, 3 y 6. ¿Cuál es el menor número de compartimentos de almacenamiento que necesita ahora Juana para almacenar en forma segura estas siete sustancias?

18. Se quiere organizar en Rosario un torneo de tenis donde n participantes jueguen todos contra todos. Cada tenista puede disputar a los sumo un partido por día. Los encuentros se disputarán en canchas techadas, por lo que no se suspenderá ningún encuentro por mal tiempo.

    ¿Cuántos días como mínimo son necesarios para desarrollar el torneo? Modele el problema como un problema en grafos y resuélvalo para $n = 5$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119