Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

**ANÁLISIS MATEMÁTICO II**

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2021

# Unidad 5: Integrales Impropias

Cuando en la Unidad 1 definimos la integrabilidad de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ consideramos antes que nada dos condiciones:

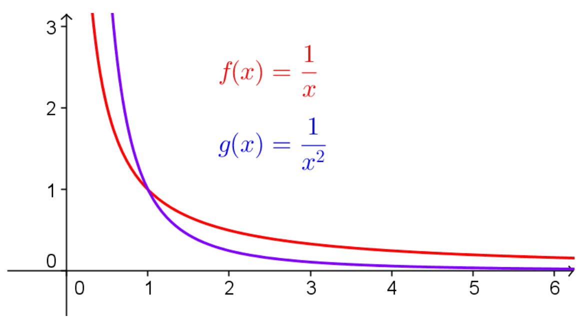
1. que el dominio de $f$ sea un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$;

2. que $f$ sea una función acotada en su dominio.

Veremos en esta unidad que ambas condiciones pueden ser debilitadas, dando lugar a un nuevo tipo de integrales, denominadas *integrales imprópias*.

Consideremos algunos ejemplos.

Sean $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$.




Para cada $x > 1$, las funciones $f$ y $g$ son continuas, y por lo tanto integrables, en el intervalo $[1, x]$. Además tenemos

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln(x), \quad \int_1^x g(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = -\left.\frac{1}{t}\right|_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

Tanto $f$ como $g$ son funciones acotadas en $[1, \infty)$. Sin embargo, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \int_1^x g(t)dt = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Por lo tanto tendrá sentido definir una "integral entre $1$ e $\infty$" de $g$, pero esto no será posible para $f$.

Estos ejemplos motivan la siguiente definición

**Definición 49:** Sea $f$ una función integrable en $[a, x]$ para cada $x > a$. Si existe

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt = I$$

denominamos a este límite *integral impropia de $f$ en $[a, \infty)$* y la denotamos

$$\int_a^\infty f(x)dx = I.$$

Se dice también en este caso que la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ es *convergente*. En caso que el límite anterior sea $\pm\infty$ o no exista, suele decirse que la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ es *divergente*.

Si $f$ es integrable en $[x, a]$ para cada $x < a$ y existe el límite

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt = I'$$

denominamos a este límite *integral impropia de $f$ en $(-\infty, a]$* y la denotamos

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = I'.$$

Se dice también en este caso que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$ es *convergente*. En caso que el límite anterior sea $\pm\infty$ o no exista, suele decirse que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$ es *divergente*.

Si $f$ es integrable en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ y existen las integrales impropias de $f$ en $(-\infty, 0]$ y en $[0, \infty)$ denotamos por

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx.$$

Volviendo a los ejemplos anteriores, tenemos que

$$\int_1^\infty g(x)dx = 1$$

pero la integral impropia de $f$ en $[1, \infty)$ es divergente.

**Observación 50:** Antes de continuar, hagamos una observación sobre las integrales impropias en $(-\infty, \infty)$. Consideremos la función $f(x) = x$. Entonces $f$ es integrable en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$. Consideremos la integral de $f$ en intervalos de la forma $[-x, x]$. Tenemos:

$$\int_{-x}^x f(t)dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \int_{-x}^x f(t)dt = 0.$$

Esto nos puede hacer pensar que existe la integral impropia $\int_{-\infty}^\infty x dx = 0$. Sin embargo esto es **falso**, pues un simple cálculo muestra que las integrales impropias de $f$ en $[0, \infty)$ y en $(-\infty, 0]$ son ambas divergentes.

**Observación 51:** Si existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$, una condición necesaria para que exista la integral impropia de $f$ en $[a, \infty)$ es

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Dejamos la prueba de este resultado como **ejercicio**.

**Ejemplo 52:** Analicemos la existencia de las integrales impropias de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

con $p \in \mathbb{Q}^+$. Ya hemos visto que para $p = 1$ la integral impropia de $f$ en $[1, \infty)$ es divergente.

Para $p \neq 1$, tenemos para cada $x > 1$,

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{x^{p-1}} - 1\right)$$

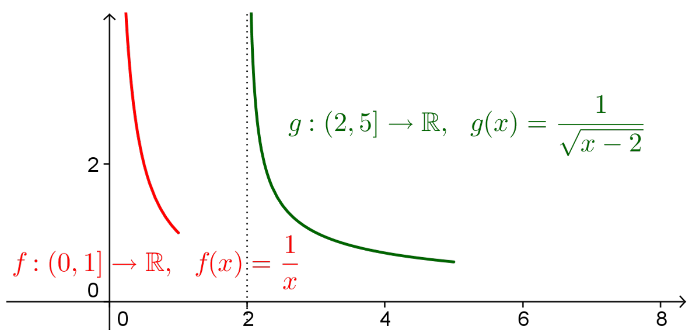
Tendremos por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p < 1. \end{cases}$$

Por lo tanto existe la integral impropia de $f$ en $[1, \infty)$ solo si $p > 1$. Si $p < 1$ la integral impropia es divergente.

Analicemos un segundo caso en el que será posible definir integrales impropias. La función $f$ podría no ser acotada en un intervalo $(a, b]$ o $[a, b)$ por tener en $a$ o en $b$ respectivamente una asíntota vertical.

Consideremos por ejemplo las funciones $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g : (2, 5] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.




Es fácil ver que $f$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y $g$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$. Por lo tanto no tiene sentido definir las integrales usuales

$$\int_0^1 f(x)dx, \quad \int_2^5 g(x)dx$$

pues ni $f$ ni $g$ son acotadas en estos intervalos.

Sin embargo $f$ es integrable en cualquier intervalo de la forma $[x, 1]$ con $0 < x < 1$ y $g$ es integrable en cualquier intervalo de la forma $[x, 5]$ con $2 < x < 5$. En esos casos tenemos

$$\int_x^1 f(t)dt = -\ln(x), \qquad \int_x^5 g(t)dt = 2(\sqrt{3} - \sqrt{x-2})$$

Tendremos por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 f(t)dt = \infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \int_x^5 g(t)dt = 2\sqrt{3}.$$

Conluimos que no será posible definir una integral impropia de $f$ entre $0$ y $1$ pero sí será posible dar una noción de integral de $g$ entre $2$ y $5$.

**Definición 53:** Sea $f$ una función integrable en $[x,b]$ para cada $a<x<b$ tal que $f$ tiene una asíntota vertical en $x=a$. Si existe

$$\lim_{x\to a^+}\int_x^a f(t)dt = I$$

denominamos a este límite *integral impropia de $f$ en $(a,b]$* y la denotamos

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

En caso que este límite sea $\pm\infty$, decimos que la integral impropia de $f$ en $(a,b]$ es *divergente*.

Si $f$ una función integrable en $[a,x]$ para cada $a<x<b$ y $f$ tiene una asíntota vertical en $x=b$, si existe

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt = I'$$

denominamos a este límite *integral impropia de $f$ en $[a,b)$* y la denotamos

$$\int_a^b f(x)dx = I'.$$

En caso que este límite sea $\pm\infty$, decimos que la integral impropia de $f$ en $[a,b)$ es *divergente*.

Si $a<c<b$, $f$ tiene una asíntota vertical en $x=c$ y existen las integrales impropias de $f$ en $[a,c)$ y en $(c,b]$, denominamos *integral impropia de $f$ en $(a,b)$* a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Ejemplo 54:** En este ejemplo veremos lo importante de no aplicar a ciegas la regla de Barrow. Consideremos la función $f(x)=\frac{1}{x-1}$ y supongamos que queremos calcular $\int_0^3 f(x)dx$. Una primitiva de $f$ está dada por

$$\int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1|$$

lo que nos puede inducir a pensar que

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1|\,|_0^3 = \ln(2)-\ln(1)=\ln(2).$$

Sin embargo esto es un error. La función $f$ tiene una asíntota vertical en $x=1\in[0,3]$. Tenemos

$$\lim_{x\to 1^-}\int_1^x f(t)dt = \lim_{x\to 1^-}\ln(1-x|) = -\infty$$

con lo cual la integral impropia de $f$ en $[0,1)$ es divergente y entonces no existe la integral impropia de $f$ en $[0,3]$ (no necesitamos verificar si existe la integral impropia de $f$ en $(1,3]$).