



FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA  
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LCC - LF - LM - PM - PF

Álgebra y Geometría Analítica II - Examen Final - 15/12/21

Apellido y nombre:

Carrera:

Legajo:

## PARTE PRÁCTICA

1. Determine cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra **EXAMEN**. ¿Cuántas de estas palabras empiezan con una vocal?
2. Pruebe que si  $A$  y  $B$  son matrices invertibles del mismo orden y  $A + B$  es invertible, entonces

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B.$$

Sugerencia: en el segundo miembro de la igualdad escriba a las matrices  $A$  y  $B$  como  $(A^{-1})^{-1}$  y  $(B^{-1})^{-1}$ .

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 5y + \alpha z = 0 \\ y + \alpha z = \alpha - 1 \\ \alpha y + z = 2 - 2\alpha \end{cases}$$

Halle los valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  para los cuales se tiene que el sistema es: i) compatible determinado, ii) compatible indeterminado y iii) incompatible.

4. Determine la ecuación del plano que contiene a la recta determinada por la intersección de los planos  $\pi_1 : x - z = 1$  y  $\pi_2 : y + 2z = 2$  y que es perpendicular al plano  $x + y - 2z = 1$ .

## Complemento para alumnos libres

5. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justifique.

a) El área del triángulo determinado por los puntos  $A(1, 4, 6)$ ,  $B(-2, 5, -1)$  y  $C(1, -1, 1)$  es  $\frac{5\sqrt{82}}{2}$ .

b) Si  $(a, b, c)$  es un punto del paraboloides hiperbólico de ecuación  $z = y^2 - x^2$ , entonces la recta dada por

$$\begin{cases} x = a + t \\ y = b + t \\ z = c + 2(b - a)t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

está contenida en el paraboloides.

- 
- c) Es posible elegir 10 puntos en el interior de un cuadrado de lado 1 de modo tal que la distancia entre dos puntos cualesquiera sea mayor que  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .
6. Determine la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la recta que pasa por el foco de la parábola de ecuación  $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$  y por el centro de la elipse de ecuación  $x^2 + 4y^2 + 8y = 0$ .
-

---

## PARTE TEÓRICA

1. En los siguientes items, indique la veracidad o falsedad de los enunciados **justificando** adecuadamente.

a) Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}_0$ . Entonces  $(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$ .

b) Dos rectas en el espacio no se intersecan si y sólo si los vectores direcciones de cada una de ellas son paralelos.

c) El determinante de una matriz que se obtiene intercambiando dos columnas es el opuesto del determinante de la matriz original.

d) Si  $S \subset \mathbb{F}^n$  es tal que  $|S| = n$  y es linealmente independiente entonces  $S$  es base de  $\mathbb{F}^n$ .

2. Defina y caracterice las matrices inversibles. Enuncie tres propiedades relativas a matrices inversibles y pruebe una. De un ejemplo de matriz cuadrada no inversible.

3. Defina el lugar geométrico del plano conocido como hipérbola. Desarrolle esta definición para obtener las ecuaciones de una hipérbola con eje focal paralelo al eje  $x$ .

4. Considere las siguientes ecuaciones de lugares geométricos del espacio e identifíquelos:

i)  $\frac{(x-6)^2}{3} - (y+1)^2 - \frac{z^2}{3} = 1$ .

ii)  $-x + 3(y+4) - 2(z-5) = 0$ .

iii) 
$$\begin{cases} x &= \sin \alpha, \\ y &= \cos \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ z &= \alpha. \end{cases}$$

iv)  $\frac{(x)^2}{3} - (y+3)^2 - (z-4) = 0$ .

v)  $\frac{(x)^2}{3} - (y+3)^2 - (z-4)^2 = 0$ .

vi) 
$$\begin{cases} x &= -1 + 3s - t, \\ y &= -1 - 1t, \\ z &= s - t. \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R},$$

vii) eje  $y \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, z = 3\}$ .

viii) eje  $x \cup$  eje  $y$ .

---