Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

LCC - LF - LM - PM - PF

Álgebra y Geometría II

PRÁCTICA 2: Matrices y determinantes.

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

indicar cuáles de las siguientes operaciones están bien definidas y realizarlas:

a) $C + D$ *b)* $B - C + 3A$ *c)* $B + C$ *d)* $2A - \frac{1}{2}B$ *e)* $C - D + \frac{3}{2}(D + E)$
f) HJ *g)* JH *h)* FG *i)* GF *j)* $AB - BA$
k) AC *l)* $CA - AC$ *m)* $B(2C - E)$ *n)* FGJ *o)* $2BC - BE$

2. Calcular $AB - BA$, siendo $A = \begin{pmatrix} i & 2i & -i \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2-i & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i \\ -4 & 2 & 0 \\ i & -2i & 1 \end{pmatrix}$.

3. Probar las propiedades de la suma y la multiplicación por un escalar de matrices.

4. *a)* Comprobar que las identidades $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ y $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ no son ciertas para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   b) ¿Cómo podríamos formular estas identidades de manera que sean válidas para todo par de matrices cuadradas?

   c) Para qué conjunto de matrices cuadradas podemos asegurar que son válidas las identidades dadas en a)?

5. Completar la demostración de las propiedades del producto de matrices.

6. Hallar todas la matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ que conmuten con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Dada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hallar, en cada caso, todas las matrices $A \in \mathbb{F}^2$ que satisfacen la condición dada:

a) $AB = 0$, *b)* $BA = 0$, *c)* $A^2 = 0$.

8. Si A y $B \in \mathbb{F}^3$, analizar la validez o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando la respuesta:

a) Si la 1° y 3° columnas de B son iguales, también lo son la 1° y 3° columnas de AB.

b) Si la 1° y 3° filas de B son iguales, también lo son la 1° y 3° filas de AB.

c) Si la 1° y 3° filas de A son iguales, también lo son la 1° y 3° filas de AB.

9. Hallar toddas mas matrices de orden 2 tales que $A^2 = I$.

10. Con las matrices definidas en el ejercicio 1, realice los siguientes cálculos:

    a) $L = C^t D$, $M = CE^t$. Hallar la descomposicin en matrices simtricas y antisimtricas de las matrices L y M.

    b) $N = (FG)^t$ y $P = (JF - I)^t$.

11. Demostrar la unicidad en la descomposición de matrices en su forma simétrica y antisimétrica.

12. Completar la demostración relativa a las propiedades de la traza de una matriz.

13. Para cada una de las siguientes permutaciones escribirla como composición de transposiciones y encontrar su inversa y su signo.

    a) $(6, 4, 5, 1, 2, 3)$ b) $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$ c) $(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$

    d) $(2, 4, 1, 7, 3, 5, 6)$ e) $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1)$ f) $(n, n-1, n-2, \cdots, 3, 2, 1)$

    g) $(2, 3, 4, \ldots, n-2, n-1, n, 1)$

14. Mostrar que si $\{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \varnothing$ entonces $\tau_{i,j} \circ \tau_{k,\ell} = \tau_{k,\ell} \circ \tau_{i,j}$.

15. Encontrar el signo de la siguiente permutación de los días de la semana (suponemos que la semana empieza el domingo):

    `(vie, lun, dom, mie, mar, sab, jue)`

16. Dada $\sigma \in S_n^j$, encontrar $\sigma^j \in S_{n-1}$.

    a) $\sigma = (1, 3, 2, 6, 4, 5) \in S_6^1$, b) $\sigma = (3, 1, 2, 5, 4, 6) \in S_6^3$,

    c) $\sigma = \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{7,8} \in S_8^2$, d) $\sigma \in S_n^n$ (arbitraria).

17. Dada $\sigma^j \in S_{n-1}$ encontrar la correspondiente permutación $\sigma \in S_n^j$.

    a) $\sigma^1 = (6, 5, 4, 3, 2, 1) \in S_6$, b) $\sigma^7 = (6, 5, 4, 3, 2, 1) \in S_6$,

    c) $\sigma^3 = (6, 5, 4, 3, 2, 1) \in S_6$, d) $\sigma^5 = (7, 1, 3, 2, 5, 4, 6) \in S_7$.

18. *(Ejercicio para alumnos de LCC)*

    Escribir un algoritmo que reciba $\sigma \in S_n$ y devuelva $\sigma^{\sigma(1)} \in S_{n-1}$.

19. *a)* Dada $\sigma \in S_n$, mostrar que existe una matriz $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cuyas entradas son sólo ceros y unos, y tal que

    $$P_\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$$

    b) Probar que $P_\sigma \circ P_\mu = P_{\sigma \circ \mu}$ para todas $\sigma, \mu \in S_n$.

    c) Probar que $\det P_\sigma = \operatorname{sg}(\sigma)$ para toda $\sigma \in S_n$.

20. La función *permanente* se aplica a matrices $n \times n$ y se define como

    $$\operatorname{perm} A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}.$$

    Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\operatorname{perm} I = 1$.

b) $\operatorname{perm} A = \operatorname{perm} A^t$ para toda $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

c) Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tiene dos columnas iguales, entonces $\operatorname{perm} A = 0$.

d) $\operatorname{perm}(AB) = (\operatorname{perm} A)(\operatorname{perm} B)$ para todas $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

21. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $D = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & -i \\ 0 & i & 3+i \\ 1-i & 2i & 2-i \end{pmatrix}$.

c) $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$.

d) $I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

22. Hallar los valores de λ de manera que la ecuación $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ \lambda & -1 & 2x \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ tenga raíces reales iguales.

23. Analizar la relación existente entre los siguientes determinantes. Justificar la respuesta.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & \pi & 7 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & \pi & -1 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} -1 & \pi & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & \frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix}.$$

24. ¿Cuándo una matriz diagonal es inversible? En ese caso, cuál es su inversa?

25. Sin desarrollar el determinante, demostrar que $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$.

26. Indicar si las siguientes proposiciones verdaderas o falsas justificando la respuesta:

a) Si $AB = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$.

b) Si $AX = AY$, entonces $X = Y$.

c) Si A y B son invertibles, entonces $A + B$ es invertible.

27. Calcular los siguientes determinantes, transformando en ceros la mayor cantidad posible de elementos de una fila o columna:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-w \end{vmatrix}$$

28. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$.

29. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $BXA^{-1} = C$ b) $AX + 2B^t = -3C$ c) $XB = C + X$

d) $AX = C + X$ e) $AX = C + BX$ f) $\dfrac{1}{2}XA + B = \dfrac{3}{2}X - C$

30. Sean $A = M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = A - \alpha I$. Hallar los valores de α de modo que B no sea inversible.

31. Determinar, si es posible, la inversa de las siguientes matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

32. Sean A, B, C matrices de orden 3 tales que $|A^t| = 2$, $|B - I| = -3$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ indicar cáles de los siguientes determinantes se pueden calcular y, cuando sea posible, realizar el cálculo:

$$P = AC + BC, \qquad S = C^t - BC^t, \qquad T = A + A + 3A.$$

33. Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C^t = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar:

a) Una matriz X que verifique que $X + BA = A^tB^tX$.

b) Condiciones necesarias y suficientes sobre a y b de manera que la matriz $AC - D$ sea inversible.

c) Una matriz E de orden 3 tal que $det(E) = det(AB)$ y $e_{21} = e_{22} = e_{23} = 5$.