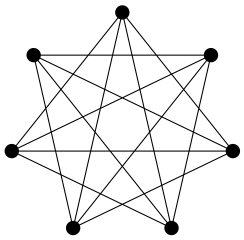
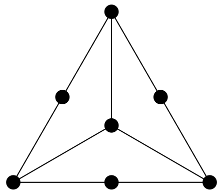
# Ejercitación - Matching

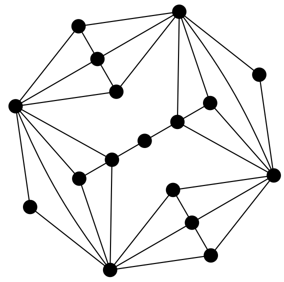
1. Las personas A, B, C, D y E son integrantes de un grupo de investigación y presentarán 4 trabajos distintos en un congreso. A, C y D son autores del trabajo 1. C y E son autores del trabajo 2. A, D y E son autores del trabajo 3. Y A, B, C y E son autores del trabajo 4. Cada trabajo será expuesto por exactamente uno de sus autores y cada persona presentará a lo sumo un trabajo.

   Modelar esta situación como un problema de asignación y hallar la cantidad máxima de trabajos que podrá presentar este grupo de investigación.

2. Hallar un matching máximo en cada uno de los siguientes grafos:







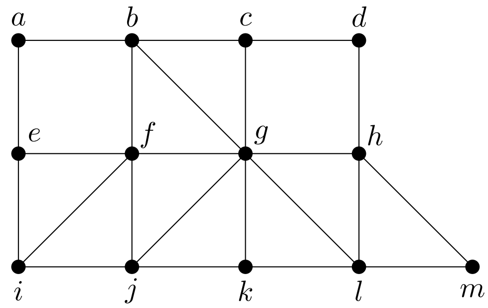
3. Sea $G$ un grafo simple de $n$ vértices. Determinar la veracidad de los siguientes enunciados:

   a) Si $S \subseteq V(G)$ es saturado por un matching de $G$ entonces $S$ es saturado por todo matching máximo de $G$.

   b) Si $M$ y $M'$ son matchings de $G$, entonces el grado de todo vértice en el subgrafo de $G$ inducido por $M \delta M'$ es a lo sumo 2.

   c) Si $G$ es un grafo hamiltoniano (i.e., tiene un ciclo hamiltoniano), entonces $G$ tiene un matching de tamaño $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

4. Sea $G = (V, E)$ el grafo de la figura y $M \subseteq E$ el matching definido por $M = \{\{a, e\}, \{c, d\}, \{h, m\}\}$. Hallar un camino $M$-aumentante y redefinir el matching a partir de dicho camino, aumentando su cardinal. Repetir el procedimiento hasta obtener un matching máximo.




5. Sean $M_1$ y $M_2$ dos matchings de un grafo simple $G$ con $|M_1| > |M_2|$. Probar que existen matchings $M_1'$ y $M_2'$ tales que $|M_1'| = |M_1| - 1$, $|M_2'| = |M_2| + 1$, $M_1' \cup M_2' = M_1 \cup M_2$ y $M_1' \cap M_2' = M_1 \cap M_2$.

6. Sea $G$ un grafo bipartito conexo con bipartición $(V_1, V_2)$ tal que $gr(v) \neq gr(w)$ para todo par de vértices $v, w \in V_1$. Demostrar que existe un matching que satura a $V_1$.

7. Sea $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{m}$ una colección de subconjuntos de un conjunto $Y$. Un *sistema de representantes (SDR)* de $\mathcal{A}$ es un conjunto finito de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m$ en $Y$, todos distintos y tales que $a_i \in A_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Demostrar que $\mathcal{A}$ tiene un SDR si y sólo si

$$\left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geqslant |S|$$

para todo $S \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$.

8. Hallar un cubrimiento por vértices mínimo para cada grafo del ejercicio 2.

9. Sea $G$ un grafo simple. Probar los siguientes enunciados:

   a) $S$ es un conjunto independiente de $G$ si y sólo si $\overline{S}$ es un cubrimiento por vértices de $G$.

   b) $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$, donde $\alpha(G)$ es el máximo cardinal de un conjunto independiente de $G$ y $\beta(G)$ es el mínimo cardinal de un cubrimiento por vértices de $G$.

10. Probar que todo árbol tiene a lo sumo un matching perfecto.

11. Para cada $k \geqslant 2$, construir un grafo simple $k$-regular sin matching perfecto.

12. Sea $G$ un grafo simple sin vértices aislados. Probar que $G$ tiene un matching $M$ tal que

$$|M| \geqslant \frac{|V(G)|}{\Delta(G) + 1}$$

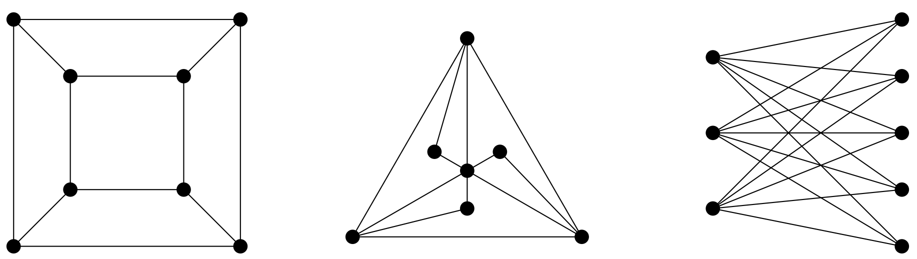
13. Un *$k$-factor* de un grafo $G$ es un subgrafo $k$-regular recubridor de $G$. Así, las aristas de un $1$-factor de un grafo $G$ forman un matching perfecto de $G$.

    Además, se dice que $G$ es $k$-factoreable si existen $k$-factores $H_1, \ldots, H_r$ con aristas disjuntas tales que

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{r} E(H_i)$$

   a) Probar que $K_{n,n}$ y $K_{2n}$ son $1$-factoreables, mientras que el grafo de Petersen no es $1$-factoreable.

   b) ¿Cuáles de los siguientes grafos admiten $2$-factores? ¿Son $2$-factoreables?



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119