Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2021

Práctica 7: Aplicaciones del cálculo diferencial.

---

1. Represente gráficamente las siguientes funciones y halle, si es posible sus extremos relativos y absolutos.

$$
\begin{array}{rlll}
i) & f_1 : [-1,0) \longrightarrow \mathbb{R} & \text{tal que} & f_1(x) = 2 - 2x^2; \\
ii) & f_2 : (-3,1) \longrightarrow \mathbb{R} & \text{tal que} & f_2(x) = 2x^2 + 3x - 2; \\
iii) & f_3 : [0,2) \longrightarrow \mathbb{R} & \text{tal que} & f_3(x) = -x^2 + 2x - 2; \\
iv) & f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \text{tal que} & f_4(x) = x^2 + |2-4x| + 1;
\end{array}
$$

$$
v) \quad f_5(x) = \begin{cases} \cos(2x) & \text{si } x \geq 0, \\ \arctan x & \text{si } x < 0; \end{cases} \qquad vi) \quad f_6(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}|x-2| & \text{si } x > 0. \end{cases}
$$

2. Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + 1$. Determine los valores de a y b de manera que el máximo absoluto de f sea 3 y alcance el mismo en $x = 1$.

3. Determine para qué valores de a y b la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ tiene un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = -1$.

4. Sea $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Muestre que la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^k - kx$ posee un extremo relativo en $x = 1$, tratándose de un máximo relativo si $0 < k < 1$ y de un mínimo relativo si $k > 1$.

5. Halle los valores máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo indicado en cada caso:

$$
\begin{array}{rlll}
i) & f_1(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x \quad \text{en} \quad [0,3]; & ii) & f_2(x) = x^2 + \dfrac{16}{x} \quad \text{en} \quad [1,3]; \\
iii) & f_3(x) = x\sqrt{1-x} \quad \text{en} \quad [-1,1]; & iv) & f_4(x) = x - \operatorname{sen} x \quad \text{en} \quad [-\pi,\pi]; \\
v) & f_5(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x} \quad \text{en} \quad [0,2\pi]; & vi) & f_6(x) = (x-1)^{1/3} + \dfrac{1}{2}(x+1)^{2/3} \quad \text{en} \quad [-2,7].
\end{array}
$$

6. Calcule los siguientes límites:

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$, $b)$ $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x^2-13x+21}$, $c)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh}x-\operatorname{sen}x}{x^3}$,

$d)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(2x-1)e^x-x+1}{x^3}$, $e)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, $f)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{(x\ \operatorname{sen}x)^{\frac{3}{2}}}$,

$g)$ $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $h)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen}(2x)-2\operatorname{arc\,sen}x}{x^3}$, $i)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$.

$j)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(a\arctan\frac{\sqrt{x}}{a}-b\arctan\frac{\sqrt{x}}{b}\right)}{x\sqrt{x}}$, $k)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sum_{k=1}^{n}x^k-n}{x-1}$, $l)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{a^x}{x^b}$, $a>1,$,

$m)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]$, $n)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\cosh(x+1)}{e^x}$,, $o)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{x^x}-1$.

7. ¿Para qué valores de las constantes a y b es $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^{-3}\sin(3x)+a\,x^{-2}+b)=0$?

8. Halle c de modo que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=4$.

9. Represente gráficamente una función que satisfaga simultáneamente las condiciones dadas en cada caso.

   $a)$ $g(-1)=4$, $g(1)=0$, $g'(-1)=0$, $g'(1)$ no existe,
   $g'(x)>0$ si $|x|>1$, $g'(x)<0$ si $|x|<1$, $g''(x)<0$ si $|x|\neq 1$.

   $b)$ $f'(2)=0$, $f'(0)=1$, $f'(x)>0$ si $0<x<2$, $f'(x)<0$ si $x>2$,
   $f''(x)<0$ si $0<x<4$, $f''(x)>0$ si $x>4$, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}f(x)=0$,
   $f(-x)=-f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

   $c)$ Suponga que $f'(x)>g'(x)$ para todo x y que $f(a)=g(a)$. Demuestre que $f(x)>g(x)$ para $x>a$ y $f(x)<g(x)$ para $x<a$.

   Busque un ejemplo donde se muestre que lo anterior no es válido sin la hipótesis $f(a)=g(a)$.

   $d)$ Suponga que f es continua y derivable en [0,1], que $f(x)$ está en [0,1] para todo x y que $f'(x)\neq 1$ para todo $x\in[0,1]$. Demuestre que existe exactamente un $x_0\in[0,1]$ tal que $f(x)=x$.

   $e)$ Demuestre que si f y g son convexas y f es creciente, entonces $g\circ f$ es convexa.

10. Para cada una de las siguientes funciones se pide:

   a) determine el dominio de f y estudiar su paridad;

   b) determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y la existencia de extremos relativos;

   c) determine los intervalos de concavidad y de convexidad y la existencia de puntos de inflexión;

   d) analice la existencia o no de asíntotas horizontales y/o verticales para f;

   e) construya un boceto de la gráfica de f utilizando la información de los items anteriores;

   f) analice la existencia de máximo o mínimo absoluto para esta función.

$i)\ f(x) = x^3 - 4x,$ $\qquad ii)\ f(x) = (x-1)^2\,(x+2)\,,$

$iii)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5,$ $\qquad iv)\ f(x) = 2 + (x-1)^4,$

$v)\ f(x) = x + \dfrac{1}{x^2},$ $\qquad vi)\ f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)},$

$vii)\ f(x) = \dfrac{x}{1+x^2},$ $\qquad viii)\ f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9},$

$ix)\ f(x) = \operatorname{sen}^2 x,$ $\qquad x)\ f(x) = x - \operatorname{sen} x,$

$xi)\ f(x) = x\ e^x,$ $\qquad xii)\ f(x) = \ln(x^2 + x + 1).$

11. Suponga que f es una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y que $f(1) = 0$. Demuestre que $f(xy) = f(x) + f(y)$ (sin usar la función vista en apunte anterior!).

    Ayuda: Halle $g'(x)$ cuando $g(x) = f(xy)$.

12. Demuestre que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

13. Convengamos en medir las alturas hacia arriba desde el nivel del suelo. Si $s(t)$ representa la posición de un cuerpo en tiempo t al ser arrojado hacia arriba, entonces su aceleración es $s''(t) = -9,8m/s^2$.

   a) Si se lanza un cuerpo con velocidad inicial $v_0 m/s$ y a 1 metro del suelo, ¿a qué altura llegará?

   b) ¿Cuál será su velocidad al tocar el suelo? (calcule una velocidad inicial de modo que el golpe en la mano no sea muy duro, suponiendo que su mano está a 1 m del suelo...)

   c) ¿Cuánto tardará en llegar al suelo?