Métodos Numéricos - LCC 2022
Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Brian Luporini
Práctica 3: Resolución de ecuaciones no lineales

---

1) Determine gráficamente valores aproximados de las primeras tres raíces positivas de la función $f(x) = \cos(x)\cosh(x) + 1$. (Recordar que $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$).

2) Usuando el método de la bisección, hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones con una precisión de 10^{-2}

a) $\sin x = \dfrac{x^2}{2}$ b) $e^{-x} = x^4$ c) $\log x = x - 1$.

3) Aplicar el método de la secante para hallar la raíz no nula de $f(x) = \frac{x^2}{4} - \sin x$.

4) ¿Qué se obtiene al aplicar reiteradamente a un valor cualquiera la función coseno? Formalizar lo que sucede.

5) Consideramos la iteración $x_{k+1} = 2^{x_k - 1}$ para resolver la ecuación $2x = 2^x$. Determinar para que valores iniciales x_0 la iteración converge y en ese caso cual es el límite.

6) Convertir la ecuación $x^2 - 5 = 0$ en el problema de punto fijo $x = x + c(x^2 - 5) := g(x)$, con c constante positiva. Elegir un valor adecuado de c que asegure la convergencia de $x_{n+1} = x_n + c(x_n^2 - 5)$ a $z = -\sqrt{5}$.

7) Dada la profundidad h y el período T de una ola, su longitud de onda l surge de la relación de dispersión $w^2 = gd\tanh(hd)$, donde $w = \frac{2\pi}{T}$ es una pulsación, g es la aceleración de la gravedad, y $d = \frac{2\pi}{l}$ es el número de onda. Conociendo $g = 9.8\ \frac{m}{s^2}$ y $h = 4\ m$, se desea calcular cuál es la longitud de onda correspondiente a una ola con $T = 5\ s$. Construir un algoritmo en Scilab que efectúe los siguientes cálculos:

a) Utilizar un método de punto fijo para calcular la solución con un dígito de precisión, partiendo de $d = 1$.

b) Utilizar el método de Newton para calcular la solución con 4 dígitos de precisión, partiendo del resultado obtenido en a).

8) Se quiere calcular la solución de la ecuación $e^x = 3x$, usando la iteración simple de punto fijo con diferentes funciones de iteración:

i) $g_1(x) = \dfrac{e^x}{3}$ ii) $g_2(x) = \dfrac{e^x - x}{2}$ iii) $g_3(x) = \log(3x)$ iv) $g_4(x) = e^x - 2x$

¿Cuáles son útiles para calcular la solución de la ecuación?

9) Efectuar cinco iteraciones del método de Newton para el siguiente sistema:

$$0 = 1 + x^2 - y^2 + e^x \cos y$$

$$0 = 2xy + e^x \sin y$$

utilizando como valor inicial $x_0 = -1$ y $y_0 = 4$.

10) Resolver el sistema

$$0 = x^2 + xy^3 - 9$$

$$0 = 3x^2 y - 4 - y^3$$

usando el método de Newton para cada uno de los siguientes valores iniciales:

a) $(1.2,\ 2.5)$ b) $(-2,\ 2.5)$ c) $(-1.2,\ -2.5)$ d) $(2,\ -2.5)$.

11) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, una función definida en el dominio bidimensional. Las siguientes condiciones son suficientes para un mínimo local estricto de f:

$$(i) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}\right] = \mathbf{0} \quad \text{(gradiente nulo)}$$

$$(ii) \quad \text{matriz hessiana } \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \text{ definida positiva.}$$

Se desea hallar los valores de x_1 y x_2 que minimizan la función

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2^2 + e^{2x_1^2 + x_2^2}.$$

a) Partiendo del punto inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1, \ 1]^\mathsf{T}$, hallar mediante el método de Newton un punto que satisfaga la condición (i). Utilizar como criterio de finalización $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2 \leq 10^{-12}$.

b) Corroborar que el punto hallado en el item a) es un mínimo (local) de f verificando el cumplimiento de la condición (ii).

12) La presión requerida para sumergir un objeto grande y pesado en un terreno suave y homógeneo que se encuentra sobre una base dura, puede predecirse a partir de la presión requerida para sumergir objetos más pequeños en el mismo suelo.

En particular la presión p necesaria para sumergir una lámina circular de radio r una distancia d en un terreno suave, donde la base dura yace a una distancia $D > d$, puede aproximarse por una ecuación de la forma

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r,$$

donde $k_i, i = 1, 2, 3$ dependen de d, pero no de r.

Recordar que la presión se obtiene de dividir la fuerza aplicada y el área correspondiente.

a) Encontrar los valores de k_i, $i = 1, 2, 3$, si se supone que una lámina circular de radio 1 pulgada requiere una presión de 10 libras/pulgada^2, para sumergirse 1 pie en un terreno suave, una lámina de radio 2 pulgadas requiere una presión de 12 libras/pulgada^2 para sumergirse 1 pie, y una lámina de 3 pulgadas de radio requiere 15 libras/pulgada^2 de presión para sumergirse esa distancia.

b) Usando los cálculos realizados en a), predecir el radio mínimo de una lámina circular que deberá sostener una carga de 500 libras de fuerza sumergiéndose menos de 1 pie.