Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

LCC - LF - LM - PM - PF

# Álgebra y Geometría II

## PRÁCTICA 4: Los Espacios Vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$.

1. Pruebe que $\mathbb{F}_n[x]$ es un espacio vectorial.
2. Pruebe que $\mathbb{F}^{m\times n}$ es un espacio vectorial.
3. Consideremos en $V = \mathbb{F}^3$ las operaciones definidas según:
   - Producto por escalar: $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ tal que $\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3)) = (\alpha x_1, x_2, x_3)$,
   - Suma usual: $+ : \mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ tal que $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

   Analizar si $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.
4. Consideremos en $V = \mathbb{R}^3$ las operaciones definidas según:
   - Producto por escalar usual: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3)) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$,
   - Suma: $+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3) \wedge (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$, o sea, estamos considerando una operación que le llamamos suma, y que es la conocida como producto vectorial. Probar que $(V, +, \cdot)$ NO es un espacio vectorial. Chequear los 10 axiomas y marcar cuáles no son válidos.
5. Sea $\beta = \{\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_s\}$ un subconjunto de vectores de $\mathbb{F}^n$. Probar que:
   *a)* Si $s > n$ entonces $\beta$ debe ser LD.
   *b)* Si $s < n$ entonces $\beta$ no puede generar $\mathbb{F}^n$.
   *c)* Si $s = n$ y $\beta$ es LI, entonces $\beta$ genera $\mathbb{F}^n$ y resulta ser base de $\mathbb{F}^n$.
   *d)* Si $s = n$ y $\beta$ genera $\mathbb{F}^n$, entonces $\beta$ es LI y resulta ser base de $\mathbb{F}^n$.
6. Cuáles de las siguientes son combinaciones lineales de $u = (1, -1, 3)$ *y* $v = (2, 4, 0)$?

   *a)* $(3, 3, 3)$ *b)* $(4, 2, 6)$ *c)* $(1, 5, 6)$ *d)* $(0, 0, 0)$.
7. En cada caso exprese los polinomios como combinaciones lineales de

$$p_1 = 2 + x + 4x^4, \quad p_2 = 1 - x + 3x^2 \ \ y \ \ p_3 = 3 + 2x + 5x^2$$

   *a)* $5 + 9x + 5x^2$ *b)* $2 + 6x^2$ *c)* $0$ *d)* $2 + 2x + 3x^2$
8. Determinar si los vectores dados generan $\mathbb{R}^3$
   *a)* $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 2, 0)$ $v_3 = (3, 0, 0)$.
   *b)* $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (4, 1, 2)$ $v_3 = (8, -1, 8)$.
9. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes:
   *a)* en $\mathbb{R}^3$:
      i) $(2, -1, 4)$, $(3, 6, 2)$, $(2, 10, -4)$.

ii) $(1,3,3), \quad (0,1,4), \quad (5,16,3), \quad (7,2,-1)$.

*b*) en $\mathbb{R}^4$:

i) $(1,2,1,-2), \quad (0,-2,-2,0), \quad (0,2,3,1), \quad (3,0,-3,6)$.

ii) $(4,4,0,0), \quad (0,0,6,6), \quad (-5,0,5,5)$.

10. Para qué valores de $\lambda$ los vectores que siguen forman un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^3$?
$$v_1 = \left(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad v_2 = \left(-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}\right), \quad v_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda\right).$$

11. Si $S = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores, demuestre que todo subconjunto no vacío de vectores de $S$ es linealmente independiente.

12. Si $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial $\mathbb{F}^n$, demuestre que $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}, \overline{v_{n+1}}\}$ también es linealmente dependiente, en donde $\overline{v_{n+1}} \in \mathbb{F}^n$

13. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para:

*a*) en $\mathbb{R}^3$:

i) $(1,0,0), \quad (2,2,0), \quad (3,3,3)$.

ii) $(2,-3,1), \quad (4,1,1), \quad (0,-7,1), \quad (7,2,-1)$.

14. Sea $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ una base para un espacio vectorial $\mathbb{F}^n$. Demuestre que $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}\}$ también es una base, en donde $\overline{u_1} = \overline{v_1}, \; : \overline{u_2} = \overline{v_1} + \overline{v_2} \; y \; \overline{u_3} = \overline{v_1} + \overline{v_2} + \overline{v_3}$.

15. Estudiar para qué valores de $a$ y $b$ los vectores $(3,0,a,1)$, $(1,1,0,b)$ y $(2,5,b,4)$ de $\mathbb{R}^4$ son linealmente dependientes.

16. Sea $\mathbb{F}^4$ con base $B = \{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \overline{u_4}\}$. Se definen los vectores
$$\begin{aligned} \overline{v_1} &= 2\overline{u_1} + \overline{u_2} - \overline{u_3}, \\ \overline{v_2} &= 2\overline{u_1} + \overline{u_3} + 2\overline{u_4}, \\ \overline{v_3} &= \overline{u_1} + \overline{u_2} - \overline{u_3}, \\ \overline{v_4} &= \overline{u_1} + 2\overline{u_3} + 3\overline{u_4} \end{aligned}$$
Probar que $C = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}\}$ es una base de $\mathbb{F}^4$.

17. De manera similar al ejercicio 1) se puede demostrar que el conjunto de los polinomios $\mathbb{F}[x]$ es un espacio vectorial. Demostrar que $\mathbb{F}[x]$ no puede tener dimensión finita.