CAMINOS Y CICLOS HAMILTONIANOS

S. Bianchi P. Fekete F. Domingo

[1] Deptartamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
UNR

18 de agosto de 2021

Outline

OUTLINE

Sea $G = (V,E)$ grafo o multigrafo con $|V| \geq 3$.

Sea $G=(V,E)$ grafo o multigrafo con $|V|\geq 3$.

Recordar

- $\{a,b\}\subset V$, P camino simple a-b en G (P no repite vértices ni aristas y $a\neq b$).

Sea $G=(V,E)$ grafo o multigrafo con $|V|\geq 3$.

Recordar

- $\{a,b\}\subset V$, P camino simple a-b en G (P no repite vértices ni aristas y $a\neq b$).
- C ciclo en G (camino simple cerrado con al menos 3 aristas).

Sea $G = (V,E)$ grafo o multigrafo con $|V| \geq 3$.

Recordar

- $\{a,b\} \subset V$, P camino simple a-b en G (P no repite vértices ni aristas y $a \neq b$).
- C ciclo en G (camino simple cerrado con al menos 3 aristas).

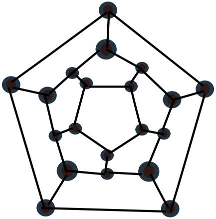
Ejemplo: Juego ideado por Sir William R. Hamilton (1805-1865)

Sea $G = (V, E)$ grafo o multigrafo con $|V| \geq 3$.

Recordar

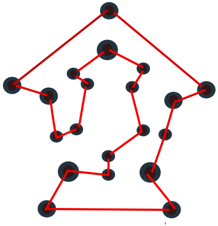
- $\{a, b\} \subset V$, P camino simple a-b en G (P no repite vértices ni aristas y $a \neq b$).
- C ciclo en G (camino simple cerrado con al menos 3 aristas).

Ejemplo: Juego ideado por Sir William R. Hamilton (1805-1865)

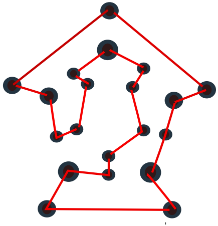


Solución

Solución



Solución



DEFINICIÓN

Si $G = (V, E)$ es un grafo o un multigrafo con $|V| \geq 3$, decimos que G tiene un ciclo hamiltoniano si existe en G un ciclo que contiene cada vértice de V.
Un camino hamiltoniano es un camino simple de G que contiene todos sus vértices.

Sea $G = (V, E)$.

Recordar

Sea $G = (V, E)$.

Recordar

- $\{a, b\} \subset V$, un a-b recorrido euleriano en G utiliza todas las aristas en E exactamente una vez.

Sea $G = (V, E)$.

Recordar

- $\{a, b\} \subset V$, un a-b recorrido euleriano en G utiliza todas las aristas en E exactamente una vez.
- Un circuito euleriano en G es un circuito en G que utiliza todas las aristas en E exactamente una vez.

Sea $G=(V,E)$.

Recordar

- $\{a,b\} \subset V$, un a-b recorrido euleriano en G utiliza todas las aristas en E exactamente una vez.
- Un circuito euleriano en G es un circuito en G que utiliza todas las aristas en E exactamente una vez.

Teorema de Euler

Un grafo tiene un circuito euleriano si y sólo si todos los vértices tienen grado par.

Sea $G = (V, E)$.

Recordar

- $\{a, b\} \subset V$, un a-b recorrido euleriano en G utiliza todas las aristas en E exactamente una vez.
- Un circuito euleriano en G es un circuito en G que utiliza todas las aristas en E exactamente una vez.

TEOREMA DE EULER

Un grafo tiene un circuito euleriano si y sólo si todos los vértices tienen grado par.

No existe resultado similar para determinar la existencia de un ciclo hamiltoniano en un grafo.

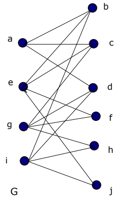
Ejemplo 1 Grafo completo K_n.

Ejemplo 1 Grafo completo K_n.
Es fácil ver que cualquier permutación en los vértices de $V(K_n)$ induce un ciclo hamiltoniano.

Ejemplo 1 Grafo completo K_n.
Es fácil ver que cualquier permutación en los vértices de $V(K_n)$ induce un ciclo hamiltoniano. Cuántos ciclos hamiltonianos distintos tiene K_n? Cuántos caminos hamiltonianos distintos? (ejercicio).

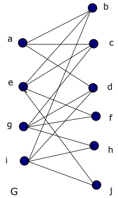
Ejemplo 1 Grafo completo K_n.
Es fácil ver que cualquier permutación en los vértices de $V(K_n)$ induce un ciclo hamiltoniano. Cuántos ciclos hamiltonianos distintos tiene K_n? Cuántos caminos hamiltonianos distintos? (ejercicio).

Ejemplo 2



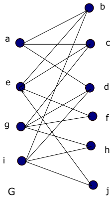
$V(G) = V_1 \cup V_2$, con $V_1 = \{a, e, g, i\}$ y $V_2 = \{b, c, d, f, h, j\}$. No existen arcos $\{u, w\}$ con $u, v \in V_i$ con $i = 1, 2$.

Ejemplo 1 Grafo completo K_n.
Es fácil ver que cualquier permutación en los vértices de $V(K_n)$ induce un ciclo hamiltoniano. Cuántos ciclos hamiltonianos distintos tiene K_n? Cuántos caminos hamiltonianos distintos? (ejercicio).
Ejemplo 2



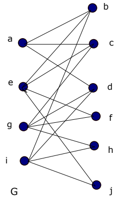
$V(G) = V_1 \cup V_2$, con $V_1 = \{a, e, g, i\}$ y $V_2 = \{b, c, d, f, h, j\}$. No existen arcos $\{u, w\}$ con $u, v \in V_i$ con $i = 1, 2$. G es *bipartito*.

Ejemplo 1 Grafo completo K_n.
Es fácil ver que cualquier permutación en los vértices de $V(K_n)$ induce un ciclo hamiltoniano. Cuántos ciclos hamiltonianos distintos tiene K_n? Cuántos caminos hamiltonianos distintos? (ejercicio).
Ejemplo 2



$V(G) = V_1 \cup V_2$, con $V_1 = \{a, e, g, i\}$ y $V_2 = \{b, c, d, f, h, j\}$. No existen arcos $\{u, w\}$ con $u, v \in V_i$ con $i = 1, 2$. G es *bipartito*.
Si existiera un camino hamiltoniano, debería existir una secuencia alternada de vértices en V_1 y V_2.

Ejemplo 1 Grafo completo K_n.
Es fácil ver que cualquier permutación en los vértices de $V(K_n)$ induce un ciclo hamiltoniano. Cuántos ciclos hamiltonianos distintos tiene K_n? Cuántos caminos hamiltonianos distintos? (ejercicio).
Ejemplo 2



$V(G) = V_1 \cup V_2$, con $V_1 = \{a, e, g, i\}$ y $V_2 = \{b, c, d, f, h, j\}$. No existen arcos $\{u, w\}$ con $u, v \in V_i$ con $i = 1, 2$. G es *bipartito*.
Si existiera un camino hamiltoniano, debería existir una secuencia alternada de vértices en V_1 y V_2. Pero $|V_1| = 4$ y $|V_2| = 6$. No existe camino (o ciclo) hamiltoniano en G.

Observaciones

Si C es un ciclo hamiltoniano en G y $e \in C$, entonces $C - e$ es un camino hamiltoniano en G.

Observaciones

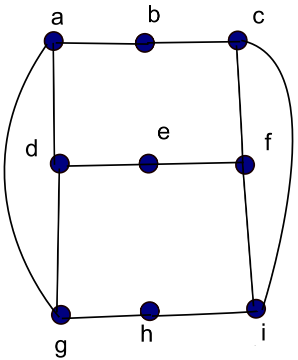
Si C es un ciclo hamiltoniano en G y $e \in C$, entonces $C - e$ es un camino hamiltoniano en G.

G puede tener un camino hamiltoniano y no tener un ciclo hamiltoniano. Veamos el siguiente grafo:

Observaciones

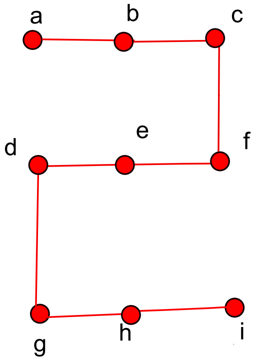
Si C es un ciclo hamiltoniano en G y $e \in C$, entonces $C - e$ es un camino hamiltoniano en G.

G puede tener un camino hamiltoniano y no tener un ciclo hamiltoniano. Veamos el siguiente grafo:



Las aristas $\{a,b\},\{b,c\},\{c,f\},\{f,e\},\{e,d\},\{d,g\},\{g,h\},\{h,i\}$ forman un camino hamiltoniano en G.

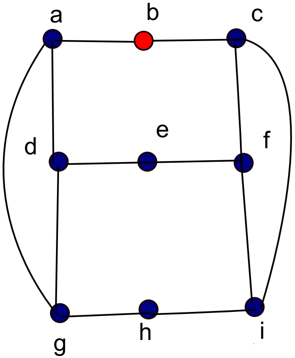
Las aristas $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, f\}, \{f, e\}, \{e, d\}, \{d, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}$ forman un camino hamiltoniano en G.



Vemos que $|V(G)| = 9$, si G tiene un ciclo hamiltoniano entonces éste tiene 9 aristas.

Vemos que $|V(G)| = 9$, si G tiene un ciclo hamiltoniano entonces éste tiene 9 aristas.
Comencemos en el vértice b y veamos si es posible construir un ciclo hamiltoniano.

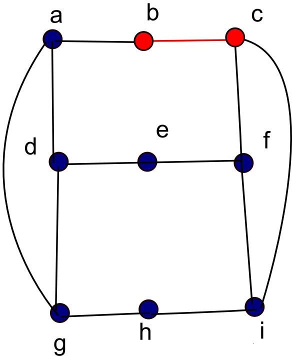
Vemos que $|V(G)| = 9$, si G tiene un ciclo hamiltoniano entonces éste tiene 9 aristas.
Comencemos en el vértice b y veamos si es posible construir un ciclo hamiltoniano.



Debido a la simetría del grafo, es lo mismo utilizar la arista $\{a, b\}$ o la arista $\{b, c\}$.

Debido a la simetría del grafo, es lo mismo utilizar la arista $\{a, b\}$ o la arista $\{b, c\}$. Utilizamos la última.

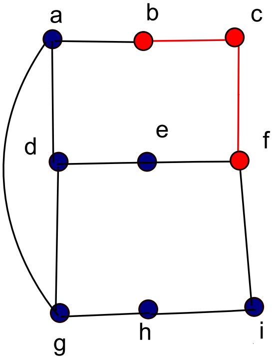
Debido a la simetría del grafo, es lo mismo utilizar la arista $\{a, b\}$ o la arista $\{b, c\}$. Utilizamos la última.



Ahora podemos usar la arista $\{c, i\}$ o la arista $\{c, f\}$.

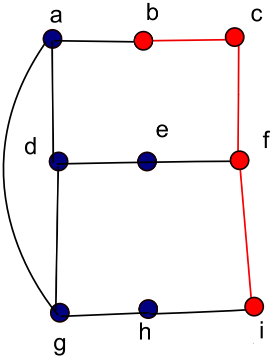
Ahora podemos usar la arista $\{c, i\}$ o la arista $\{c,f\}$. Utilizamos la última por simetría y eliminamos $\{c, i\}$ como posibilidad de elección para el ciclo.

Ahora podemos usar la arista $\{c,i\}$ o la arista $\{c,f\}$. Utilizamos la última por simetría y eliminamos $\{c,i\}$ como posibilidad de elección para el ciclo.



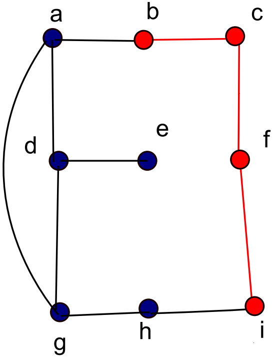
Como necesitamos incorporar el vértice i en el ciclo y la arista $\{c, i\}$ ya no está disponible, utilizamos la arista $\{f, i\}$.

Como necesitamos incorporar el vértice i en el ciclo y la arista $\{c, i\}$ ya no está disponible, utilizamos la arista $\{f, i\}$.



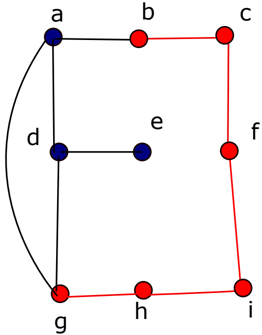
Como necesitamos incorporar el vértice i en el ciclo y la arista $\{c,i\}$ ya no está disponible, utilizamos la arista $\{f,i\}$.
Quitamos la arista $\{e,f\}$ porque no participará del ciclo.

Como necesitamos incorporar el vértice i en el ciclo y la arista $\{c,i\}$ ya no está disponible, utilizamos la arista $\{f,i\}$.
Quitamos la arista $\{e,f\}$ porque no participará del ciclo.



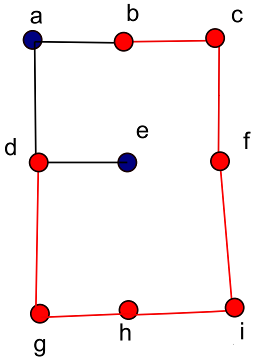
Las únicas opciones son agregar las aristas $\{i,h\}$ y $\{h,g\}$.

Las únicas opciones son agregar las aristas $\{i, h\}$ y $\{h, g\}$.



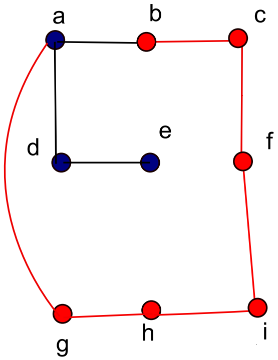
Si elegimos la arista $\{g,d\}$, eliminamos $\{g,a\}$. Resulta que no podemos volver al vértice b sin dejar fuera del ciclo al vértice e.

Si elegimos la arista $\{g, d\}$, eliminamos $\{g, a\}$. Resulta que no podemos volver al vértice b sin dejar fuera del ciclo al vértice e.

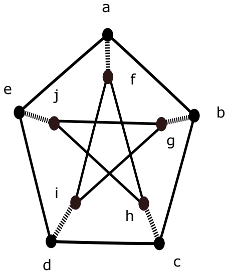


Si elegimos la arista $\{g,a\}$, eliminamos $\{g,d\}$. Nuevamente que no podemos volver al vértice b de partida sin dejar fuera del ciclo a los vértices d y e.

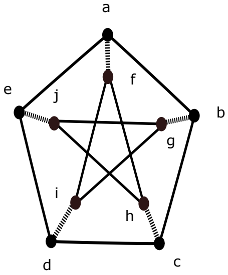
Si elegimos la arista $\{g,a\}$, eliminamos $\{g,d\}$. Nuevamente que no podemos volver al vértice b de partida sin dejar fuera del ciclo a los vértices d y e.



En la clase pasada vimos que en este grafo (conocido como el *grafo de Petersen*),

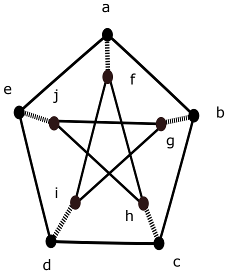


En la clase pasada vimos que en este grafo (conocido como el *grafo de Petersen*),



existe un camino simple que recorre todos los vértices del grafo :
$\{a,f\},\{f,h\},\{h,c\},\{c,b\},\{b,g\},\{g,j\},\{j,e\},\{e,d\},\{d,i\}$.

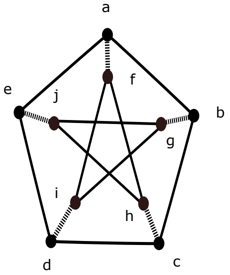
En la clase pasada vimos que en este grafo (conocido como el *grafo de Petersen*),



existe un camino simple que recorre todos los vértices del grafo :
$\{a,f\},\{f,h\},\{h,c\},\{c,b\},\{b,g\},\{g,j\},\{j,e\},\{e,d\},\{d,i\}$.

Es decir existe un camino hamiltoniano.

En la clase pasada vimos que en este grafo (conocido como el *grafo de Petersen*),



existe un camino simple que recorre todos los vértices del grafo :
$\{a,f\},\{f,h\},\{h,c\},\{c,b\},\{b,g\},\{g,j\},\{j,e\},\{e,d\},\{d,i\}$.

Es decir existe un camino hamiltoniano.

Pero no existe ningún ciclo hamiltoniano (ejercicio).

SUGERENCIAS PARA ENCONTRAR UN CIRCUITO HAMILTONIANO

Sea $G = (V, E)$,

Sugerencias para encontrar un circuito hamiltoniano

Sea $G = (V, E)$,

- Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces para todo $v \in V$ vale $\deg(v) \geq 2$.

Sugerencias para encontrar un circuito hamiltoniano

Sea $G = (V, E)$,

- Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces para todo $v \in V$ vale $\deg(v) \geq 2$.
- Si $a \in V$ y $\deg(a) = 2$, entonces las dos aristas incidentes en a deben participar del ciclo hamiltoniano.

Sugerencias para encontrar un circuito hamiltoniano

Sea $G = (V, E)$,

- Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces para todo $v \in V$ vale $\deg(v) \geq 2$.
- Si $a \in V$ y $\deg(a) = 2$, entonces las dos aristas incidentes en a deben participar del ciclo hamiltoniano.
- Si $a \in V$ y $\deg(a) > 2$, una vez que el ciclo ha pasado por a se desestiman las aristas que no fueron utilizadas.

SUGERENCIAS PARA ENCONTRAR UN CIRCUITO HAMILTONIANO

Sea $G = (V, E)$,

- Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces para todo $v \in V$ vale $\deg(v) \geq 2$.
- Si $a \in V$ y $\deg(a) = 2$, entonces las dos aristas incidentes en a deben participar del ciclo hamiltoniano.
- Si $a \in V$ y $\deg(a) > 2$, una vez que el ciclo ha pasado por a se desestiman las aristas que no fueron utilizadas.
- Un ciclo hamiltoniano en G no es un ciclo hamiltoniano de un subgrafo G' de G a menos que G' sea un subgrafo por aristas.

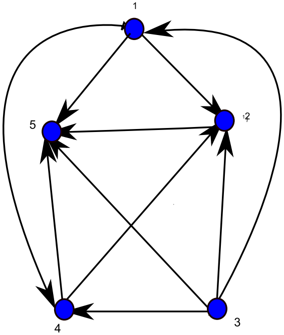
OUTLINE

Grafo dirigido completo

Sea K_n^* un grafo dirigido completo, que tiene n vértices y para cualquier par de $\{x,y\} \subset V$ se verifica que exactamente una de las arista (x,y) o (y,x) es una arista en K_n^*.

Sea K_n^* un grafo dirigido completo, que tiene n vértices y para cualquier par de $\{x,y\} \subset V$ se verifica que exactamente una de las arista (x,y) o (y,x) es una arista en K_n^*.
Veamos un ejemplo: K_5^*

Sea K_n^* un grafo dirigido completo, que tiene n vértices y para cualquier par de $\{x,y\} \subset V$ se verifica que exactamente una de las arista (x,y) o (y,x) es una arista en K_n^*.
Veamos un ejemplo: K_5^*



TEOREMA

K_n^* contiene un camino hamiltoniano (dirigido).

Demostración: Sea $m \geq 2$ y P_m un camino simple con $m-1$ aristas $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{m-1}, v_m)$ en K_n^*.

TEOREMA

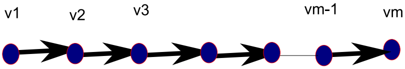
K_n^* contiene un camino hamiltoniano (dirigido).

Demostración: Sea $m \geq 2$ y P_m un camino simple con $m-1$ aristas $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{m-1}, v_m)$ en K_n^*.
(porqué puedo asegurar que existe un tal camino?)

TEOREMA

K_n^* contiene un camino hamiltoniano (dirigido).

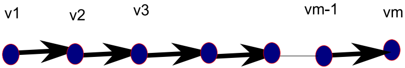
Demostración: Sea $m \geq 2$ y P_m un camino simple con $m-1$ aristas $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{m-1}, v_m)$ en K_n^*.
(porqué puedo asegurar que existe un tal camino?)



Teorema

K_n^* contiene un camino hamiltoniano (dirigido).

Demostración: Sea $m \geq 2$ y P_m un camino simple con $m-1$ aristas $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{m-1}, v_m)$ en K_n^*.
(porqué puedo asegurar que existe un tal camino?)



Si $m = n$ el teorema está demostrado.

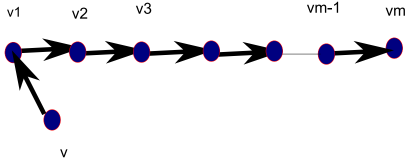
Suponemos que $m < n$ y por lo tanto existe $v \in V$ que no pertenece a P_m.

Suponemos que $m < n$ y por lo tanto existe $v \in V$ que no pertenece a P_m.

Si (v, v_1) es una arista de K_n^* entonces agregamos (v, v_1) al comienzo de P_m y conseguimos un nuevo camino simple con m aristas.

Suponemos que $m < n$ y por lo tanto existe $v \in V$ que no pertenece a P_m.

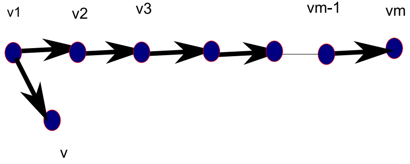
Si (v, v_1) es una arista de K_n^* entonces agregamos (v, v_1) al comienzo de P_m y conseguimos un nuevo camino simple con m aristas.



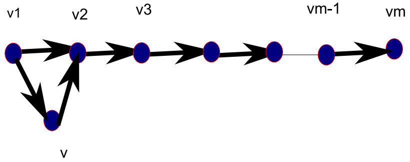
Si (v, v_1) no es arista de K_n^* entonces (v_1, v) es una arista de K_n^*.

Grafo dirigido completo

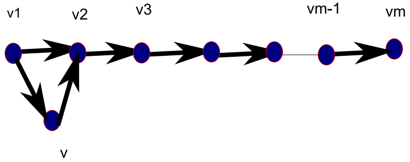
Si (v, v_1) no es arista de K_n^* entonces (v_1, v) es una arista de K_n^*.



Si (v, v_1) no es arista de K_n^* entonces (v_1, v) es una arista de K_n^*.
Si (v, v_2) está en K_n^*,

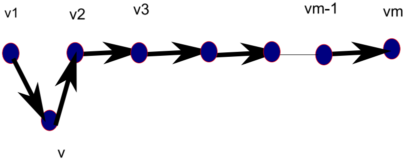


Si (v, v_1) no es arista de K_n^* entonces (v_1, v) es una arista de K_n^*.
Si (v, v_2) está en K_n^*,



Entonces quitamos (v_1, v_2) a P_m y agregamos en su lugar las aristas (v_1, v) y (v, v_2). Obtenemos un camino con m aristas.

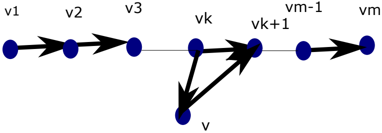
Entonces quitamos (v_1, v_2) a P_m y agregamos en su lugar las aristas (v_1, v) y (v, v_2). Obtenemos un camino con m aristas.



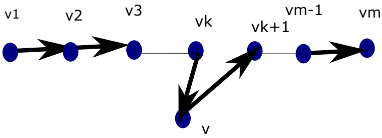
Al continuar este proceso, tenemos dos posibilidades:

Al continuar este proceso, tenemos dos posibilidades:

(1) para algún k con $1 \leq k \leq m-1$ las aristas (v_k, v) y (v, v_{k+1}) están en K_n^*,

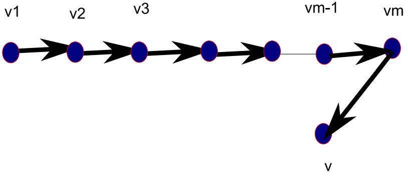


Al continuar este proceso, tenemos dos posibilidades:
(1) para algún k con $1 \leq k \leq m-1$ las aristas (v_k, v) y (v, v_{k+1}) están en K_n^*, y reemplazamos la arista (v_k, v_{k+1}) en P_m por estas dos, y obtenemos un camino simple de longitud m

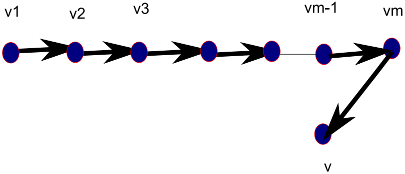


Grafo dirigido completo

(2) (v_m, v) está en K_n^* y la agregamos al final de P_m y conseguimos también un camino simple con m aristas.

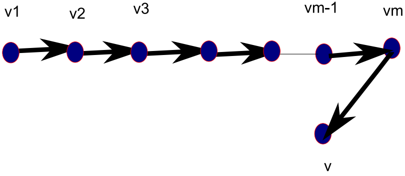


(2) (v_m, v) está en K_n^* y la agregamos al final de P_m y conseguimos también un camino simple con m aristas.



Si $m = n$ entonces el teorema está demostrado.

(2) (v_m, v) está en K_n^* y la agregamos al final de P_m y conseguimos también un camino simple con m aristas.



Si $m = n$ entonces el teorema está demostrado.
Caso contrario aplicamos el mismo procedimiento al camino de $m+1$ vértices P_{m+1}.

$\star$

Condición necesaria para la existencia de ciclo hamiltoniano

Teorema

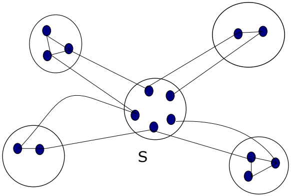
Sea $G=(V,E)$ grafo no dirigido. Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces dado $S\subset V$ el grafo $G-S$ tiene a lo sumo $|S|$ componentes conexas.

Condición necesaria para la existencia de ciclo hamiltoniano

Teorema

Sea $G=(V,E)$ grafo no dirigido. Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces dado $S \subset V$ el grafo $G-S$ tiene a lo sumo $|S|$ componentes conexas.

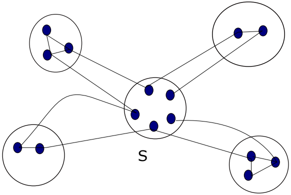
Demostración



TEOREMA

Sea $G = (V,E)$ grafo no dirigido. Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces dado $S \subset V$ el grafo $G - S$ tiene a lo sumo $|S|$ componentes conexas.

Demostración



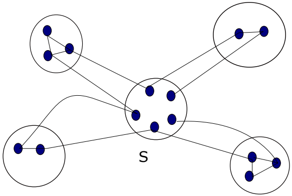
Si existe un ciclo hamiltoniano, éste al abandonar una componente conexa de $G - S$ a través de S, utiliza distintos vértices de S.

Condición necesaria para la existencia de ciclo hamiltoniano

Teorema

Sea $G=(V,E)$ grafo no dirigido. Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces dado $S \subset V$ el grafo $G-S$ tiene a lo sumo $|S|$ componentes conexas.

Demostración

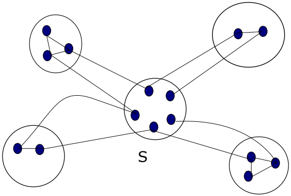


Si existe un ciclo hamiltoniano, éste al abandonar una componente conexa de $G-S$ a través de S, utiliza distintos vértices de S. Por lo tanto S tiene al menos tantos vértices como $\kappa(G-S)$.

TEOREMA

Sea $G = (V, E)$ grafo no dirigido. Si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces dado $S \subset V$ el grafo $G - S$ tiene a lo sumo $|S|$ componentes conexas.

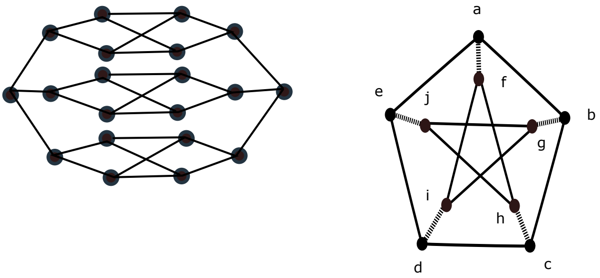
Demostración



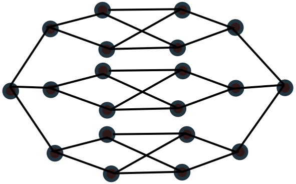
Si existe un ciclo hamiltoniano, éste al abandonar una componente conexa de $G - S$ a través de S, utiliza distintos vértices de S. Por lo tanto S tiene al menos tantos vértices como $\kappa(G - S)$. Es decir $\kappa(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subset V$ no vacío.

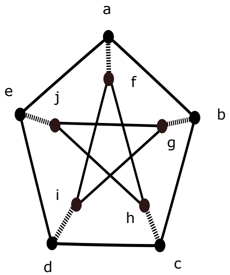
Veamos los siguientes grafos

Veamos los siguientes grafos



Veamos los siguientes grafos

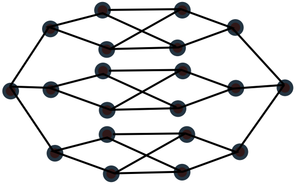


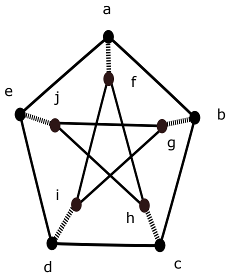


El grafo de la izquierda no satisface la condición necesaria, por lo tanto no admite un ciclo hamiltoniano.

Condición necesaria para la existencia de ciclo hamiltoniano

Veamos los siguientes grafos

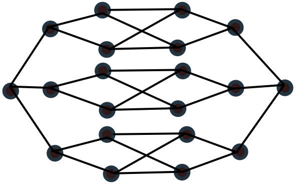


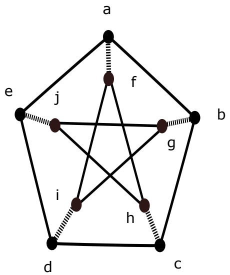


El grafo de la izquierda no satisface la condición necesaria, por lo tanto no admite un ciclo hamiltoniano.

El grafo de Petersen (que no admite ciclo hamiltoniano) satisface la condición necesaria (ejercicio).

Veamos los siguientes grafos





El grafo de la izquierda no satisface la condición necesaria, por lo tanto no admite un ciclo hamiltoniano.

El grafo de Petersen (que no admite ciclo hamiltoniano) satisface la condición necesaria (ejercicio). Vemos que esta condición no es suficiente.

Condición suficiente para la existencia de un camino hamiltoniano

Teorema

Sea $G=(V,E)$ grafo sin lazos, $n=|V|\geq 2$. Si $\deg(x)+\deg(y)\geq n-1$ para todo par $\{x,y\}\subset V$ entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Demostración:

Suponemos G_1 y G_2 dos componentes conexas de G con $n_i=|V(G_i)|$ $i=1,2$.

Condición suficiente para la existencia de un camino hamiltoniano

Teorema

Sea $G = (V, E)$ grafo sin lazos, $n = |V| \geq 2$. Si $\deg(x) + \deg(y) \geq n - 1$ para todo par $\{x, y\} \subset V$ entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Demostración:

Suponemos G_1 y G_2 dos componentes conexas de G con $n_i = |V(G_i)|$
$i = 1, 2$.

Sean $u \in V(G_1)$ y $v \in V(G_2)$.

Condición suficiente para la existencia de un camino hamiltoniano

Teorema

Sea $G = (V, E)$ grafo sin lazos, $n = |V| \geq 2$. Si $\deg(x) + \deg(y) \geq n - 1$ para todo par $\{x, y\} \subset V$ entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Demostración:

Suponemos G_1 y G_2 dos componentes conexas de G con $n_i = |V(G_i)|$ $i = 1, 2$.

Sean $u \in V(G_1)$ y $v \in V(G_2)$.

Sigue que $\deg(u) \leq n_1 - 1$, $\deg(v) \leq n_2 - 1$ y $\deg(u) + \deg(v) \leq (n_1 + n_2) - 2 \leq n - 2$. Esto contradice la hipótesis del teorema.

Condición suficiente para la existencia de un camino hamiltoniano

Teorema

Sea $G = (V,E)$ grafo sin lazos, $n = |V| \geq 2$. Si $\deg(x) + \deg(y) \geq n-1$ para todo par $\{x,y\} \subset V$ entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Demostración:

Suponemos G_1 y G_2 dos componentes conexas de G con $n_i = |V(G_i)|$ $i = 1,2$.

Sean $u \in V(G_1)$ y $v \in V(G_2)$.

Sigue que $\deg(u) \leq n_1 - 1$, $\deg(v) \leq n_2 - 1$ y $\deg(u) + \deg(v) \leq (n_1 + n_2) - 2 \leq n - 2$. Esto contradice la hipótesis del teorema.

G es conexo.

Condición suficiente para la existencia de camino hamiltoniano

Sea $m \geq 2$ y P_m el camino simple $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$ de longitud $m-1$.

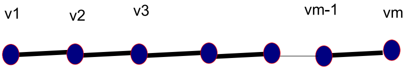
Condición suficiente para la existencia de camino hamiltoniano

Sea $m \geq 2$ y P_m el camino simple $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$ de longitud $m-1$.
(porque se puede asegurar existe tal camino?)

Condición suficiente para la existencia de camino hamiltoniano

Sea $m \geq 2$ y P_m el camino simple $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$ de longitud $m-1$.

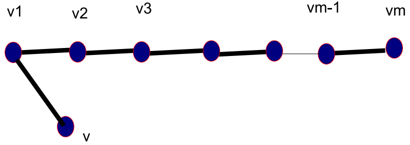
(porque se puede asegurar existe tal camino?)



Condición suficiente para la existencia de camino hamiltoniano

Si existe $v \neq v_i$ con $i = 2\ldots, m$ tal que $v \in N(v_1)$ entonces agrego la arista $\{v, v_1\}$ a P_m y así obtengo un camino de longitud $m+1$.

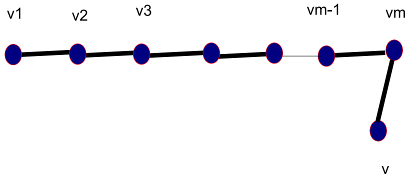
Si existe $v \neq v_i$ con $i = 2\ldots,m$ tal que $v \in N(v_1)$ entonces agrego la arista $\{v, v_1\}$ a P_m y así obtengo un camino de longitud $m+1$.



Del mismo modo, si existe $v \neq v_i$ con $i = 1\ldots,m-1$ tal que $v \in N(v_m)$, entonces agrego la arista $\{v_m, v\}$ a P_m y también consigo un camino de longitud $m+1$.

Condición suficiente para la existencia de camino hamiltoniano

Del mismo modo, si existe $v \neq v_i$ con $i = 1\ldots,m-1$ tal que $v \in N(v_m)$, entonces agrego la arista $\{v_m, v\}$ a P_m y también consigo un camino de longitud $m+1$.



Repito este procedimiento todas las veces que sea posible.

Condición suficiente para la existencia de camino hamiltoniano

Repito este procedimiento todas las veces que sea posible.

Si al cabo del proceso se tiene que el camino tiene longitud $n-1$ entonces se trata de un camino hamiltoniano.

Condición suficiente para la existencia de camino hamiltoniano

Repito este procedimiento todas las veces que sea posible.

Si al cabo del proceso se tiene que el camino tiene longitud $n-1$ entonces se trata de un camino hamiltoniano.

En caso contrario, hemos construido un camino P_m de la forma

$$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$$

y todo $v \in V$ que no pertenece al camino, no es vecino ni de v_1 ni de v_m.

Condición suficiente para la existencia de camino hamiltoniano

Afirmación Si $m < n$ entonces los vértices en P_m inducen un ciclo.

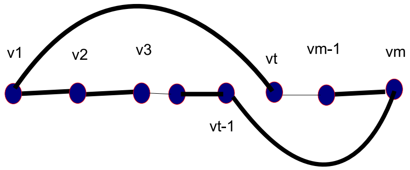
Afirmación Si $m < n$ entonces los vértices en P_m inducen un ciclo.
Si v_1 y v_m son adyacentes es claro que
$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}, \{v_m, v_1\}$ es un ciclo.

Afirmación Si $m < n$ entonces los vértices en P_m inducen un ciclo.
Si v_1 y v_m son adyacentes es claro que
$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}, \{v_m, v_1\}$ es un ciclo.
Supongamos que no son adyacentes y sea $S = N(v_1)$.

Afirmación Si $m < n$ entonces los vértices en P_m inducen un ciclo.
Si v_1 y v_m son adyacentes es claro que
$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}, \{v_m, v_1\}$ es un ciclo.
Supongamos que no son adyacentes y sea $S = N(v_1)$. Es claro que
$S \subset \{v_2, \ldots, v_{m-1}\}$ y si llamamos $k = |S|$ entonces $k < m - 1$.

Afirmación Si $m < n$ entonces los vértices en P_m inducen un ciclo.
Si v_1 y v_m son adyacentes es claro que
$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}, \{v_m, v_1\}$ es un ciclo.
Supongamos que no son adyacentes y sea $S = N(v_1)$. Es claro que
$S \subset \{v_2, \ldots, v_{m-1}\}$ y si llamamos $k = |S|$ entonces $k < m - 1$.
Si existe $v_t \in S$ tal que $v_{t-1} \in N(v_m)$, entonces conseguimos el ciclo de la figura:

Afirmación Si $m < n$ entonces los vértices en P_m inducen un ciclo.
Si v_1 y v_m son adyacentes es claro que
$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}, \{v_m, v_1\}$ es un ciclo.
Supongamos que no son adyacentes y sea $S = N(v_1)$. Es claro que
$S \subset \{v_2, \ldots, v_{m-1}\}$ y si llamamos $k = |S|$ entonces $k < m - 1$.
Si existe $v_t \in S$ tal que $v_{t-1} \in N(v_m)$, entonces conseguimos el ciclo de la figura:



Condición suficiente para la existencia de camino hamiltoniano

Ahora si para cada $v_t \in S$ ocurre que $v_{t-1} \notin N(v_m)$, sigue que $\deg(v_m) \leq (m-1) - k$ ya que $|S| = k$.

Ahora si para cada $v_t \in S$ ocurre que $v_{t-1} \notin N(v_m)$, sigue que $\deg(v_m) \leq (m-1) - k$ ya que $|S| = k$.
entonces tenemos

$$\deg(v_1) + \deg(v_m) = k + \deg(v_m) \leq k + (m-1) - k = m - 1 < n - 1.$$

Esto último contradice la hipótesis $\deg(v_1) + \deg(v_m) \geq n - 1$.

Ahora si para cada $v_t \in S$ ocurre que $v_{t-1} \notin N(v_m)$, sigue que $\deg(v_m) \leq (m-1) - k$ ya que $|S| = k$.
entonces tenemos

$$\deg(v_1) + \deg(v_m) = k + \deg(v_m) \leq k + (m-1) - k = m - 1 < n - 1.$$

Esto último contradice la hipótesis $\deg(v_1) + \deg(v_m) \geq n - 1$.
La afirmación queda demostrada.

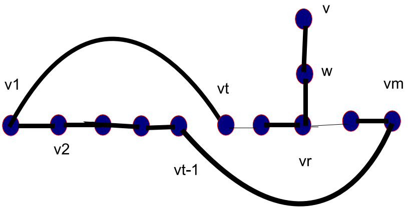
Ahora sabemos que los vértices en P_m inducen un ciclo y además que existe $v \in V$ que no pertenece a P_m.

Ahora sabemos que los vértices en P_m inducen un ciclo y además que existe $v \in V$ que no pertenece a P_m.
G es conexo, por lo tanto existe un camino simple desde v a un vértice de P_m.

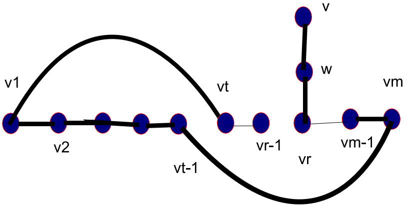
Ahora sabemos que los vértices en P_m inducen un ciclo y además que existe $v \in V$ que no pertenece a P_m.
G es conexo, por lo tanto existe un camino simple desde v a un vértice de P_m.
Sea v_r el primer vértice en P_m de ese camino simple. Veamos en la figura:

Condición suficiente para la existencia de camino hamiltoniano

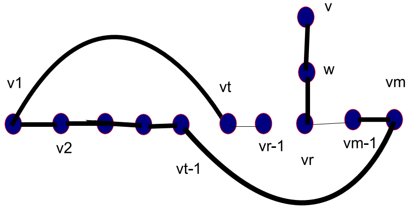
Ahora sabemos que los vértices en P_m inducen un ciclo y además que existe $v \in V$ que no pertenece a P_m.
G es conexo, por lo tanto existe un camino simple desde v a un vértice de P_m.
Sea v_r el primer vértice en P_m de ese camino simple. Veamos en la figura:



Si quitamos la arista $\{v_{r-1}, v_r\}$ (o $\{v_1, v_r\}$ si $r = t$) como indica la figura

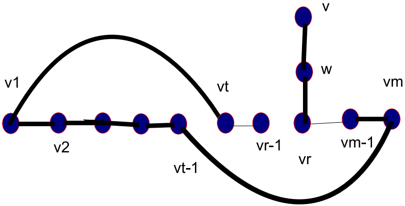


Si quitamos la arista $\{v_{r-1}, v_r\}$ (o $\{v_1, v_r\}$ si $r = t$) como indica la figura



Obtenemos un camino más largo que P_m.

Si quitamos la arista $\{v_{r-1}, v_r\}$ (o $\{v_1, v_r\}$ si $r = t$) como indica la figura



Obtenemos un camino más largo que P_m. Aplicamos el mismo procedimiento sobre este nuevo camino simple hasta incluir a todos los vértices en V.

$\star$

Condición suficiente para la existencia de ciclo hamiltoniano

Teorema

Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido sin lazos con $|V|=n\geq 3$. Si $\deg(x)+\deg(y)\geq n$ para todo par $x,y\in V$ no adyacentes entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

Teorema

Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido sin lazos con $|V|=n\geq 3$. Si $\deg(x)+\deg(y)\geq n$ para todo par $x,y\in V$ no adyacentes entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

Demostración

Supongamos que G no tiene un ciclo hamiltoniano.

Condición suficiente para la existencia de ciclo hamiltoniano

Teorema

Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido sin lazos con $|V|=n\geq 3$. Si $\deg(x)+\deg(y)\geq n$ para todo par $x,y\in V$ no adyacentes entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

Demostración

Supongamos que G no tiene un ciclo hamiltoniano.

Agregamos aristas a G de modo de obtener un subgrafo H de K_n que satisfaga la condición:

Condición suficiente para la existencia de ciclo hamiltoniano

Teorema

Sea $G = (V,E)$ un grafo no dirigido sin lazos con $|V| = n \geq 3$. Si $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ para todo par $x, y \in V$ no adyacentes entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

Demostración

Supongamos que G no tiene un ciclo hamiltoniano.

Agregamos aristas a G de modo de obtener un subgrafo H de K_n que satisfaga la condición:

H no tiene ciclo hamiltoniano pero para toda arista $e \in E(K_n) - E(H)$ se tiene que $H + e$ tiene ciclo hamiltoniano.

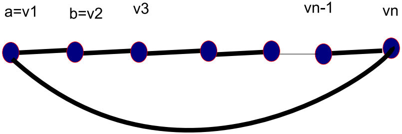
Condición suficiente para la existencia de ciclo hamiltoniano

Sea $e = \{a, b\}$ una arista que no está en H. Sigue $H + e$ tiene un ciclo hamiltoniano que llamamos C.

Condición suficiente para la existencia de ciclo hamiltoniano

Sea $e = \{a, b\}$ una arista que no está en H. Sigue $H + e$ tiene un ciclo hamiltoniano que llamamos C.

Numeramos los vértices de H (y de G) sobre el ciclo como sigue:

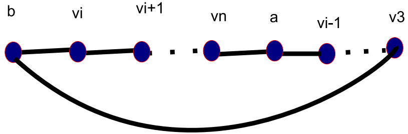


Afirmación: Para cualquier $i = 3, \ldots, n$ si la arista $\{b, v_i\}$ está en H entonces $\{a, v_{i-1}\}$ no está en H.

Afirmación: Para cualquier $i = 3, \ldots, n$ si la arista $\{b, v_i\}$ está en H entonces $\{a, v_{i-1}\}$ no está en H.
Supongamos que para algún $i = 3, \ldots, n$ las aristas $\{b, v_i\}$ y $\{a, v_{i-1}\}$ están en H. Entonces obtenemos el ciclo hamiltoniano

Afirmación: Para cualquier $i = 3, \ldots, n$ si la arista $\{b, v_i\}$ está en H entonces $\{a, v_{i-1}\}$ no está en H.

Supongamos que para algún $i = 3, \ldots, n$ las aristas $\{b, v_i\}$ y $\{a, v_{i-1}\}$ están en H. Entonces obtenemos el ciclo hamiltoniano



se encuentra en H. Lo cual contradice la condición impuesta sobre H y la afirmación queda demostrada.

Entonces para cada $i = 3, \ldots, n$, a lo sumo una de las aristas $\{b, v_i\}$ y $\{a, v_{i-1}\}$ está en H.

Condición suficiente para la existencia de ciclo hamiltoniano

Entonces para cada $i = 3, \ldots, n$, a lo sumo una de las aristas $\{b, v_i\}$ y $\{a, v_{i-1}\}$ está en H.
En consecuencia
$$\deg_H(a) + \deg_H(b) < n.$$

Entonces para cada $i = 3, \ldots, n$, a lo sumo una de las aristas $\{b, v_i\}$ y $\{a, v_{i-1}\}$ está en H.
En consecuencia

$$\deg_H(a) + \deg_H(b) < n.$$

Es claro que $\deg_H(v) \geq \deg(v)$ para cualquier $v \in V$ y entonces

$$\deg(a) + \deg(b) < n.$$

Entonces para cada $i = 3, \ldots, n$, a lo sumo una de las aristas $\{b, v_i\}$ y $\{a, v_{i-1}\}$ está en H.
En consecuencia

$$\deg_H(a) + \deg_H(b) < n.$$

Es claro que $\deg_H(v) \geq \deg(v)$ para cualquier $v \in V$ y entonces

$$\deg(a) + \deg(b) < n.$$

Por hipótesis $\deg(a) + \deg(b) \geq n$ puesto que no son adyacentes. Por lo tanto G contiene un ciclo hamiltoniano.

Condición suficiente para la existencia de ciclo hamiltoniano

Entonces para cada $i = 3, \ldots, n$, a lo sumo una de las aristas $\{b, v_i\}$ y $\{a, v_{i-1}\}$ está en H.
En consecuencia

$$\deg_H(a) + \deg_H(b) < n.$$

Es claro que $\deg_H(v) \geq \deg(v)$ para cualquier $v \in V$ y entonces

$$\deg(a) + \deg(b) < n.$$

Por hipótesis $\deg(a) + \deg(b) \geq n$ puesto que no son adyacentes. Por lo tanto G contiene un ciclo hamiltoniano.

Corolario

Si $G = (V, E)$ grafo no dirigido sin lazos tal que $|V| = n$, $n \geq 3$ y $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

Entonces para cada $i = 3, \ldots, n$, a lo sumo una de las aristas $\{b, v_i\}$ y $\{a, v_{i-1}\}$ está en H.
En consecuencia

$$\deg_H(a) + \deg_H(b) < n.$$

Es claro que $\deg_H(v) \geq \deg(v)$ para cualquier $v \in V$ y entonces

$$\deg(a) + \deg(b) < n.$$

Por hipótesis $\deg(a) + \deg(b) \geq n$ puesto que no son adyacentes. Por lo tanto G contiene un ciclo hamiltoniano.

COROLARIO

Si $G = (V, E)$ grafo no dirigido sin lazos tal que $|V| = n$, $n \geq 3$ y $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

Demostración Ejercicio.

Outline

Supongamos un número de ciudades y las correspondientes distancias entre ellas. El *problema del viajante* o TSP (*Travelling salesman problem*) consiste en encontrar un ciclo que incluya a las n ciudades y que recorra la menor distancia posible.

Supongamos un número de ciudades y las correspondientes distancias entre ellas. El *problema del viajante* o TSP (*Travelling salesman problem*) consiste en encontrar un ciclo que incluya a las n ciudades y que recorra la menor distancia posible.
Este es uno de los problemas más importantes en *Optimización Combinatoria*.

Supongamos un número de ciudades y las correspondientes distancias entre ellas. El *problema del viajante* o TSP (*Travelling salesman problem*) consiste en encontrar un ciclo que incluya a las n ciudades y que recorra la menor distancia posible.
Este es uno de los problemas más importantes en *Optimización Combinatoria*.
El origen del problema tiene como protagonista al viajante de comercio que debe visitar un número determinado de ciudades y luego regresar a su casa recorriendo la menor distancia, empleando el menor tiempo o el menor costo posible.

Supongamos un número de ciudades y las correspondientes distancias entre ellas. El *problema del viajante* o TSP (*Travelling salesman problem*) consiste en encontrar un ciclo que incluya a las n ciudades y que recorra la menor distancia posible.
Este es uno de los problemas más importantes en *Optimización Combinatoria*.
El origen del problema tiene como protagonista al viajante de comercio que debe visitar un número determinado de ciudades y luego regresar a su casa recorriendo la menor distancia, empleando el menor tiempo o el menor costo posible.
Existen otros problemas, que si bien tienen distinta índole admiten formulaciones similares.

Supongamos un número de ciudades y las correspondientes distancias entre ellas. El *problema del viajante* o TSP (*Travelling salesman problem*) consiste en encontrar un ciclo que incluya a las n ciudades y que recorra la menor distancia posible.
Este es uno de los problemas más importantes en *Optimización Combinatoria*.
El origen del problema tiene como protagonista al viajante de comercio que debe visitar un número determinado de ciudades y luego regresar a su casa recorriendo la menor distancia, empleando el menor tiempo o el menor costo posible.
Existen otros problemas, que si bien tienen distinta índole admiten formulaciones similares. Por ejemplo, el problema de una máquina agujereadora que debe realizar miles de agujeros en una placa de circuitos electrónicos y regresar al lugar de partida.

Supongamos un número de ciudades y las correspondientes distancias entre ellas. El *problema del viajante* o TSP (*Travelling salesman problem*) consiste en encontrar un ciclo que incluya a las n ciudades y que recorra la menor distancia posible.
Este es uno de los problemas más importantes en *Optimización Combinatoria*.
El origen del problema tiene como protagonista al viajante de comercio que debe visitar un número determinado de ciudades y luego regresar a su casa recorriendo la menor distancia, empleando el menor tiempo o el menor costo posible.
Existen otros problemas, que si bien tienen distinta índole admiten formulaciones similares. Por ejemplo, el problema de una máquina agujereadora que debe realizar miles de agujeros en una placa de circuitos electrónicos y regresar al lugar de partida. En este caso, la cantidad de tiempo necesario para desplazar el cabezal de la máquina entre un agujero y el siguiente, es crucial para determinar el tiempo necesario para concluir una placa de circuitos.

El TSP está relacionado con los circuitos hamiltonianos. Más aún, un tour entre las n ciudades que debe visitar el viajante es precisamente un ciclo hamiltoniano en el grafo completo determinado por las n ciudades.

El problema del viajante

El TSP está relacionado con los circuitos hamiltonianos. Más aún, un tour entre las n ciudades que debe visitar el viajante es precisamente un ciclo hamiltoniano en el grafo completo determinado por las n ciudades.
El problema de la existencia de un ciclo hamiltoniano en un grafo puede reducirse al problema del viajante.

El TSP está relacionado con los circuitos hamiltonianos. Más aún, un tour entre las n ciudades que debe visitar el viajante es precisamente un ciclo hamiltoniano en el grafo completo determinado por las n ciudades.

El problema de la existencia de un ciclo hamiltoniano en un grafo puede reducirse al problema del viajante.

Sea G un grafo con n nodos. Definimos la distancia entre dos nodos de la siguiente manera: si los nodos son adyacentes la distancia es 1, si no lo son la distancia es 2.

El TSP está relacionado con los circuitos hamiltonianos. Más aún, un tour entre las n ciudades que debe visitar el viajante es precisamente un ciclo hamiltoniano en el grafo completo determinado por las n ciudades.
El problema de la existencia de un ciclo hamiltoniano en un grafo puede reducirse al problema del viajante.
Sea G un grafo con n nodos. Definimos la distancia entre dos nodos de la siguiente manera: si los nodos son adyacentes la distancia es 1, si no lo son la distancia es 2.
Si el grafo G contiene un ciclo hamiltoniano, entonces se trata de un tour de longitud n para el TSP. Si el grafo no contiene un ciclo hamiltoniano, el tour más corto para el TSP tiene distancia mayor o igual a $n+1$.

El TSP está relacionado con los circuitos hamiltonianos. Más aún, un tour entre las n ciudades que debe visitar el viajante es precisamente un ciclo hamiltoniano en el grafo completo determinado por las n ciudades.
El problema de la existencia de un ciclo hamiltoniano en un grafo puede reducirse al problema del viajante.
Sea G un grafo con n nodos. Definimos la distancia entre dos nodos de la siguiente manera: si los nodos son adyacentes la distancia es 1, si no lo son la distancia es 2.
Si el grafo G contiene un ciclo hamiltoniano, entonces se trata de un tour de longitud n para el TSP. Si el grafo no contiene un ciclo hamiltoniano, el tour más corto para el TSP tiene distancia mayor o igual a $n+1$.
Esto asegura que un algoritmo que resuelva en forma eficiente el TSP brinda un criterio eficiente que determina si un grafo dado tiene un ciclo hamiltoniano.

El TSP está relacionado con los circuitos hamiltonianos. Más aún, un tour entre las n ciudades que debe visitar el viajante es precisamente un ciclo hamiltoniano en el grafo completo determinado por las n ciudades.
El problema de la existencia de un ciclo hamiltoniano en un grafo puede reducirse al problema del viajante.
Sea G un grafo con n nodos. Definimos la distancia entre dos nodos de la siguiente manera: si los nodos son adyacentes la distancia es 1, si no lo son la distancia es 2.
Si el grafo G contiene un ciclo hamiltoniano, entonces se trata de un tour de longitud n para el TSP. Si el grafo no contiene un ciclo hamiltoniano, el tour más corto para el TSP tiene distancia mayor o igual a $n+1$.
Esto asegura que un algoritmo que resuelva en forma eficiente el TSP brinda un criterio eficiente que determina si un grafo dado tiene un ciclo hamiltoniano.
Hasta el momento no existe un algoritmo eficiente que resuelva el TSP.