Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2022

Práctica 5: AUTOVECTORES Y AUTOVALORES

Salvo que se mencione lo contrario, los espacios vectoriales son considerados con sus operaciones estándares y sus bases canónicas. Dado V un espacio vectorial, denotamos con $\mathcal{L}(V)$ el espacio de las transformaciones lineales de V en sí mismo.

Introducción -Ecuación Característica

1. Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para las siguientes tranformaciones lineales:

   a) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T(u,v) = (v,u)$ para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

   b) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(u,v,w) = (2v,0,5w)$ para $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$.

   c) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que
   $$T(x_1,\cdots,x_n) = (x_1+\cdots+x_n,\cdots,x_1+\cdots+x_n), \qquad x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{R}.$$

2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Probar que, para toda $T \in \mathcal{L}(V)$ y para cada autovalor λ de T, el autoespacio asociado a λ es un subespacio vectorial de V.

3. Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para las siguientes matrices:
   $$a)\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix}10 & -9\\ 4 & -2\end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad d)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

4. En cada caso, hallar el autoespacio de A asociado a λ:
   $$a)A = \begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 9\end{bmatrix}, \lambda = 10, \qquad b)B = \begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ -1 & 1 & -3\\ 2 & 4 & 9\end{bmatrix}, \lambda = 3.$$

5. Para cada matriz dada, encontrar los autovalores para el operador T sobre $\mathbb{F}^n$ sin realizar cálculos. Describir los autovectores $v \in \mathbb{F}^n$ asociados a cada autovalor λ analizando las soluciones de la ecuación matricial $(A - \lambda I)v = 0$.
   $$a)\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix}1 & 3 & 7 & 11\\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

6. Probar que, si A es una matriz diagonal $n \times n$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, $x^i = e_i$ es un autovector asociado a $\lambda_i = A^i_i$.

7. *a)* Sea A una matriz $n \times n$ tal que la suma de las entradas de cada una de sus filas es igual a $\beta \in \mathbb{R}$. Mostrar que β es un autovalor de A.

   b) Sea A una matriz $n \times n$ tal que la suma de las entradas de cada una de sus columnas es igual a $\beta \in \mathbb{R}$. Mostrar que β es un autovalor de A.

8. Sea $A = \begin{bmatrix}5 & -2 & 6 & -1\\ 0 & 3 & h & 0\\ 0 & 0 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Calcular h tal que el autoespacio correspondiente a $\lambda = 5$ sea bidimensional.

9. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ inversible y $\lambda \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$. Probar que λ es autovalor de T si y solo si λ^{-1} es autovalor de T^{-1}.

10. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{F})$ matriz inversible y $\lambda \in \mathbb{F}$. Probar que λ es autovalor de A si y solo si λ es autovalor de A^T.

11. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con la propiedad que todo $v \in V\backslash\{0\}$ es un autovector asociado al mismo autovalor para T. Probar que T debe ser igual a un escalar por la identidad en V.

Diagonalización - Matrices Diagonalizables

12. Diagonalizar las siguientes matrices:

$$a)\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}, \qquad b)\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}, \qquad c)\begin{bmatrix}-7 & -16 & 4\\ 6 & 13 & -2\\ 12 & 16 & 1\end{bmatrix}, \qquad d)\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

13. Hallar la matriz cuyos autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ y cuyos autovectores son $x^1 = \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$ y $x^2 = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ respectivamente.

14. Sea A una matriz 3×3 con dos autovalores diferentes tales que cada autoespacio es unidimensional. Determinar si A es diagonalizable justificando la respuesta.

15. *a*) Describir una matriz 2×2 que sea inversible pero no diagonalizable.

    b) Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea diagonalizable pero no inversible.

16. Sea A una matriz triangular superior de tamaño 3×3, cuyos elementos en la diagonal son 1, 3 y 7.

    a) Justificar por qué A es diagonalizable.

    b) Determinar Λ.

17. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}.$$

    Determinar cuál(es) de ella no puede(n) diagonalizarse.

18. Si los autovalores de una matriz A de tamaño 3×3 son $1, 1$ y 2, ¿de cuál de las siguientes afirmaciones se tiene la certeza de que son verdaderas?. Justificar la respuesta.

    a) A es inversible.

    b) A es diagonalizable.

    c) A no es diagonalizable.

Potencias de matrices

19. En cada uno de los siguientes ítems, siendo $A = S\Lambda S^{-1}$, calcular A^4.

$$a)S = \begin{bmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}; \quad b)S = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}; \quad c)S = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

20. Demostrar que si S diagonaliza a A entonces S diagonaliza a A^k, para todo $k \in \mathbb{N}$.

21. Demostrar que si S diagonaliza a A y A es inversible entonces S diagonaliza a A^{-1}.