Nombre y Apellido:

Examen Parcial 2

Ej. 1. Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Se dice que H es un *subgrupo característico* de G si para cada automorfismo $\varphi : G \to G$ se verifica que $\varphi(H) \subset H$.

a) Probar que si H es un subgrupo característico de un grupo G entonces $H \lhd G$.

Sugerencia. Probar primero que para cada $a \in G$, $f_a : G \to G$ tal que $f_a(g) = aga^{-1}$ es un automorfismo de G.

b) Sea H un subgrupo característico de un grupo G y sea $\varphi : G \to G$ un automorfismo. Probar que φ se induce a un automorfismo $\overline{\varphi} : G/H \to G/H$ y que la asignación $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ es un homomorfismo de $Aut(G)$ en $Aut(G/H)$.

c) Considerar el grupo producto $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Encontrar un subgrupo normal de G que no sea un subgrupo característico (lo que prueba que la recíproca del item **a** es falsa).

Ej. 2. Sea Rel tal que ob Rel es la clase de todos los conjuntos y mor Rel son las relaciones entre conjuntos, es decir, $\mathcal{R} \in \mathrm{Hom}(A, B)$ si $\mathcal{R}$ es una relación binaria de A en B. La composición de morfismos es la composición de relaciones. Dando por sabido que la composición de relaciones es asociativa:

a) Dar explicitamente las funciones dom, codom y el morfismo identidad id_A para cada objeto A de Rel y probar que Rel es una categoría.

b) Determinar, si existen, los objetos iniciales, terminales y nulos de Rel.

c) Determinar qué morfismos son isomorfismos en Rel.

Ej. 3. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente la respuesta.

a) Un *anillo* es un conjunto R con dos operaciones denotadas $+$ y $\cdot$ tales que $(R, +)$ es un grupo abeliano, cuyo neutro se denota por 0, $(R, \cdot)$ es un semigrupo, y vale

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

para cada $a, b, c \in R$. Si $(R, +, \cdot)$ es un anillo, 0 es un elemento absorvente de $(R, \cdot)$.

b) Sea $f : G \to G$ un homomorfismo de grupos y sea $x \in G$ un elemento de orden finito. Entonces el orden de $f(x)$ divide al orden de x.

c) Sea M un monoide y $\mathscr{C}_M$ la categoría asociada. En $\mathscr{C}_M$ existen ecualizadores de todo par de morfismos.

d) Si $\mathscr{C}$ es una categoría con coproductos, entonces $A + B \simeq B + A$.