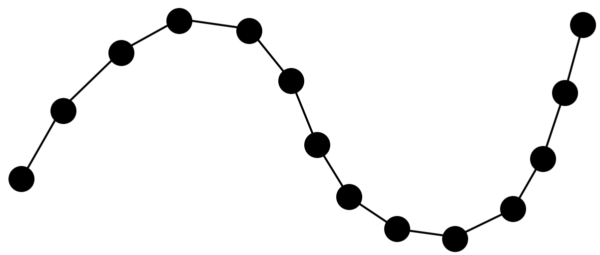
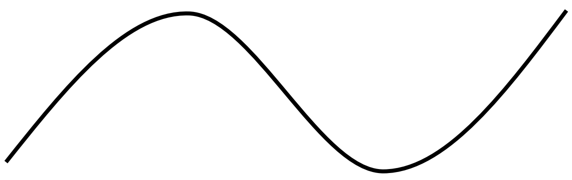
# Computação Gráfica
## Curvas e Superfícies

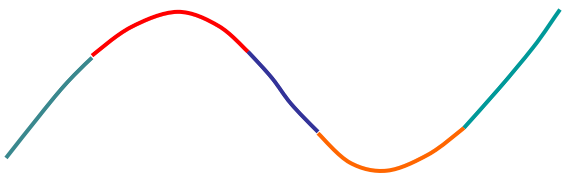
Luis Rivera

# Modelagem de Curvas

- Conjunto de pontos
  - Utiliza área de armazenamento
  - Segmentos de retas entre pontos
    - Curva aproximada...
- Curva analítica
  - Utiliza de 1 ou mais equações
  - Exata e compacta
  - Não usa área de armazenamento
  - Facilita cálculo de novos pontos
  - fácil transformação geométrica
  - Paramétricas e no paramétricas



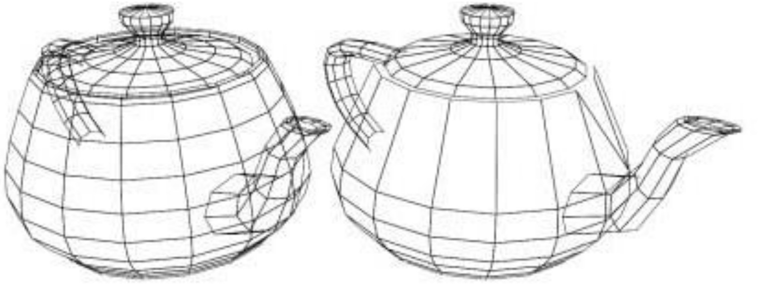




- $y = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$
- $f(t) = (2t^3+t^2-4, 3t^3-2t-3)$

# Curvas em Objetos

- Representação simplificada de objetos
  - Contornos
    - Bezier: Projectos Renault
  - Definição de malhas
  - Características internas
    - Contornos de sombras
    - Arrugas, etc.
- Formas de objetos
  - Letras
  - Objetos irregulares



# Curvas e Superfícies Paramétricas

- Comum usar CURVA PARAMÉTRICA
  - Fácil desenho da curva/superfície (aproximada)
  - Fácil segmentar
    - Segmento a ser usado
  - Manipulação algébrica mais simples
- Curva em 3D
  - $C(t) = [C_x(t)\ C_y(t)\ C_z(t)]^T$
- Superfície em 3D
  - $S(u, v) = [S_x(u, v)\ \ S_y(u, v)\ \ S_z(u, v)]^T$

No-paramétrica:

- Explícita: $F(x) = y$
  - $y^2 = 4 - x^2$
- Implícita: $F(x,y) = 0$
  - $y^2 + x^2 - 4 = 0$

Paramétrica:

$F(t) = (f_x(t), f_y(t))$

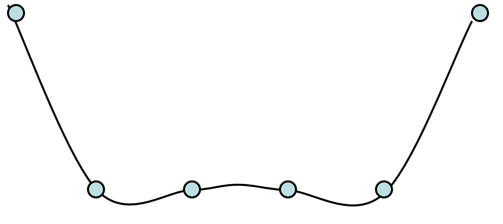
$f_x(t) = 2\cos(t)$

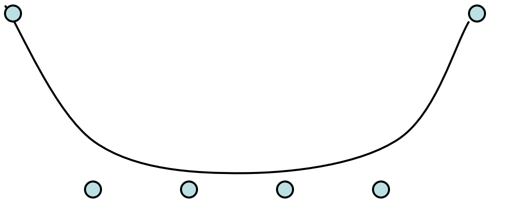
$f_y(t) = 2\mathrm{sen}(t)$

# Interpolação x Aproximação

- Curva suave passando por um conjunto de pontos dados (pontos de controle)
  - Se polinomial, pode-se usar *interpolação polinomial Lagrangeana*

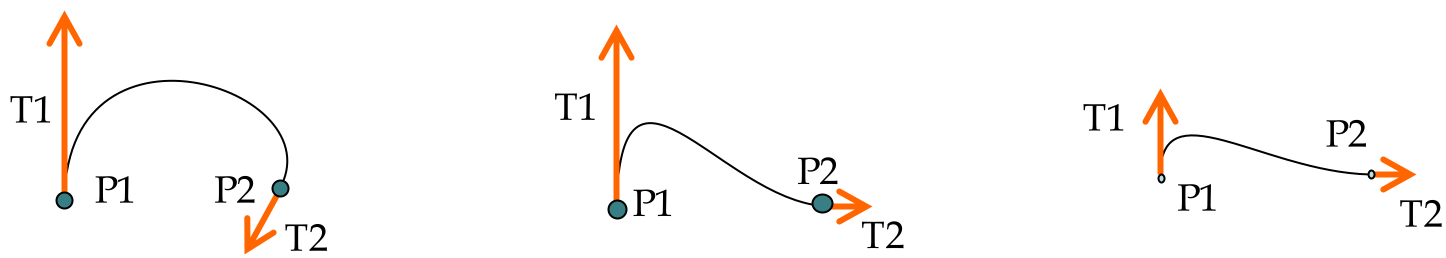
- Curva suave passando "perto" dos pontos dados (*aproximações*)
  - Splines





# Curvas de Hermite

- Curva definida por:
  - P1 y P2 = Pontos extremos (inicial e final)
  - T1 y T2 = Tangentes associadas aos pontos extremos




$P(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$

$P(t) = [t^3 \;\; t^2 \;\; t \;\; 1]\, C$

$P'(t) = 3\,a\,t^2 + 2\,b\,t + c$

$P'(t) = [3t^3 \;\; 2t \;\; 1 \;\; 0]\, C$

Para $0 \le t \le 1$

$P(0) = d = P1$

$P(1) = a + b + c + d = P2$

$P'(0) = c = T1$

$P'(1) = 3\,a + 2\,b + c = T2$

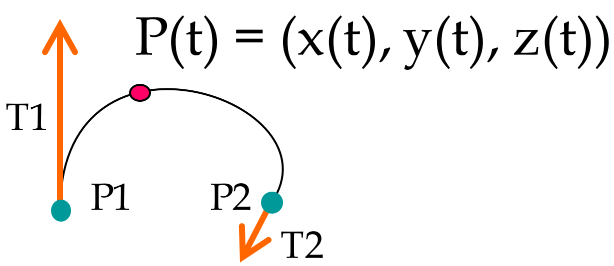
Resolvendo

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

# Curvas de Hermite
## (dedução)

Seja P(t) = [ x(t), y(t), z(t) ] um ponto da curva




➔

$$\begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cx & Cy & Cz \end{bmatrix}$$

# Curvas de Hermite
## (dedução)

Condições:

P(0) = P1 = [0 0 0 1] [ Cx Cy Cz ]

P(1) = P2 = [1 1 1 1] [ Cx Cy Cz ]

P'(0) = T1 = [0 0 1 0] [Cx Cy Cz ]

P'(1) = T2 = [3 2 1 0] [Cx Cy Cz ]

$$\begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ T1 \\ T2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cx & Cy & Cz \end{bmatrix}$$

$P = H\,C \Rightarrow C = H^{-1}\,P$

$$C = \begin{bmatrix} Cx & Cy & Cz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ T1 \\ T2 \end{bmatrix}$$

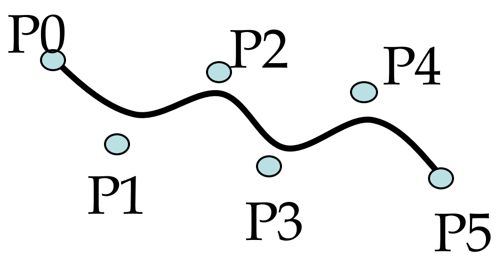
# Curva de Bezier

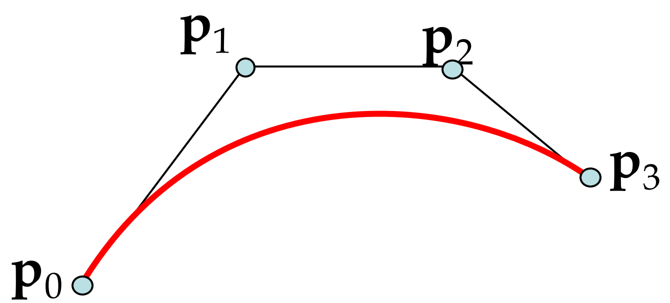
- Usa K pontos de controle
  - $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$
  - Curva cúbica usa $P_0, P_1, P_2, P_3$ (por segmento)
  - Relacionado com Hermite
    - Tangentes nos extremos
    - $T_1 = P_1 - P_0$ y $T_2 = P_3 - P_2$
- Definida por

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i . B_{i,n}(t), \text{ para } 0 \le t \le 1$$

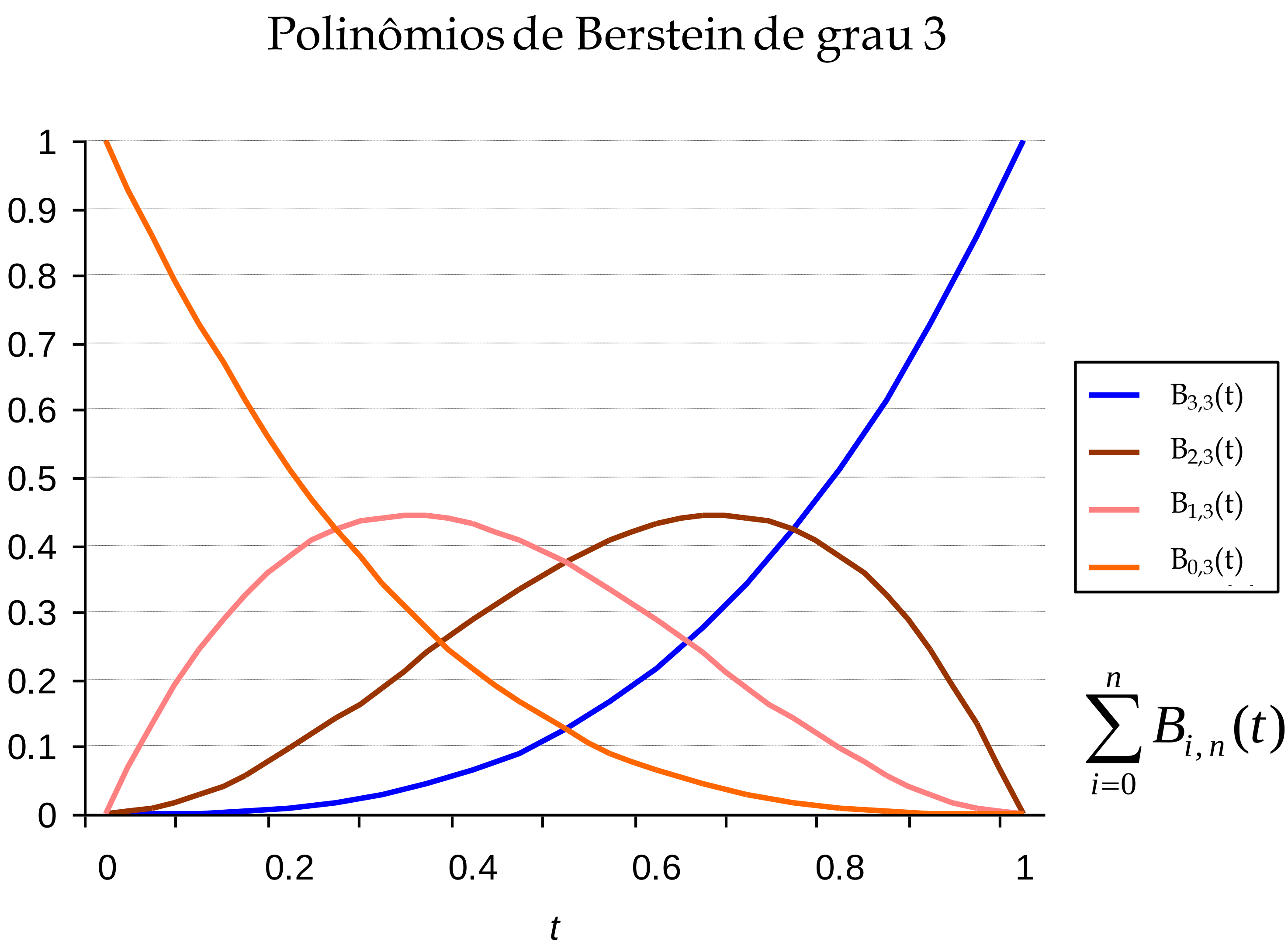
Pol. de Berstein

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$



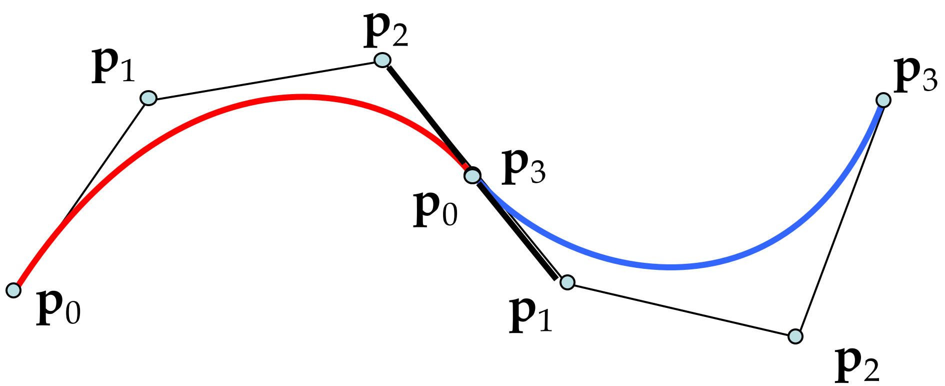
# Polinômios de Bernstein



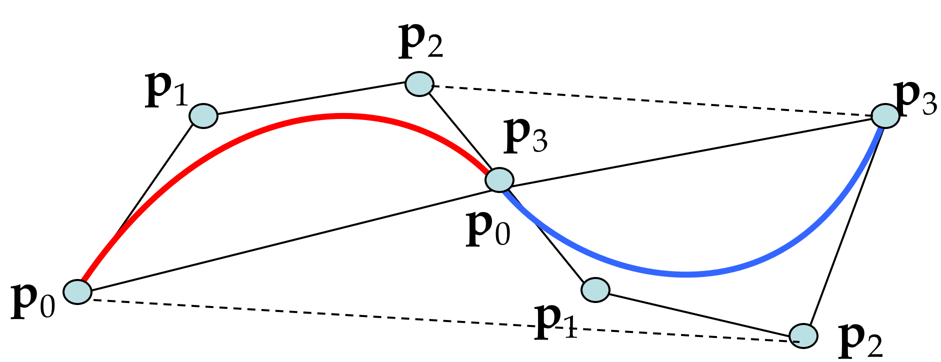

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1$$

# Curvas Bézier
## (Propriedades)

- Continuidade $C^0$: $\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_0$
- Continuidade $C^1$: $C^0$ e $\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ de primeiro = $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ do segundo
- Continuidade $C^2$: $C^1$ e + restrições sobre $\mathbf{p}_1$ da primeira e $\mathbf{p}_2$ da segunda




- Fechado Convexo



# Base Bézier
## (Forma matricial)

- Um segmento de curva cúbica, para $0 \leq t \leq 1$

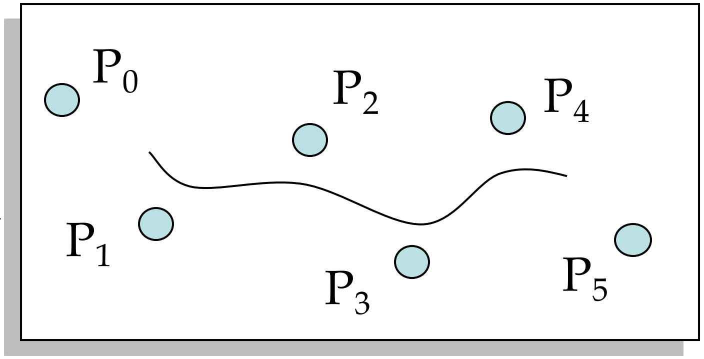
$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

# Splines

- A base de Bézier não é apropriada para modelagem de curvas longas
  - Bézier única: suporte não local
  - Trechos conectados: restrições não são naturais

- Base alternativa: B-Splines
  - Polígonos de controle sem restrições adicionais
  - Suporte local
    - Alteração de um vértice afeta apenas na vecindade
  - Existem muitos tipos de Splines
    - Una B-spline uniforme de grau $d$ tem continuidade $C^{d-1}$

# Curvas B-Splines




- Combinação linear de:
  - Pontos de controle $P_0, P_1, \ldots, P_n$
  - Funções bases de ordem k

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i . B_{i,k}(t), \text{ para } 0 \le t \le 1$$

Onde Cox de Boor

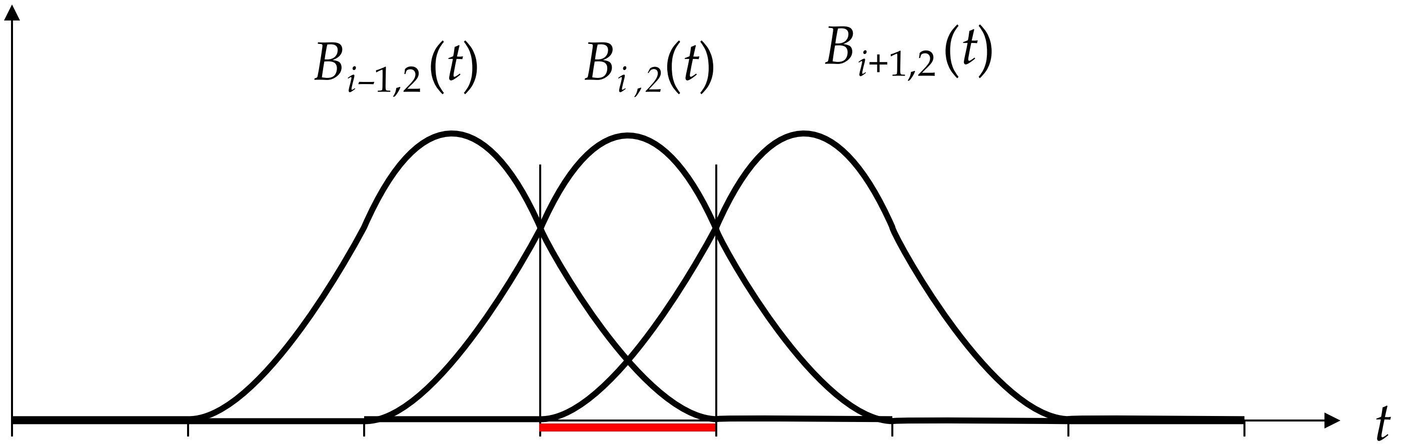
$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, \text{ para } t_i \le t \le t_{i+1} \\ 0, \text{ em outros intervalos} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(t) = \left( \frac{1 - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \right) B_{i,k-1}(t) + \left( \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right) B_{i+1,k-1}(t)$$

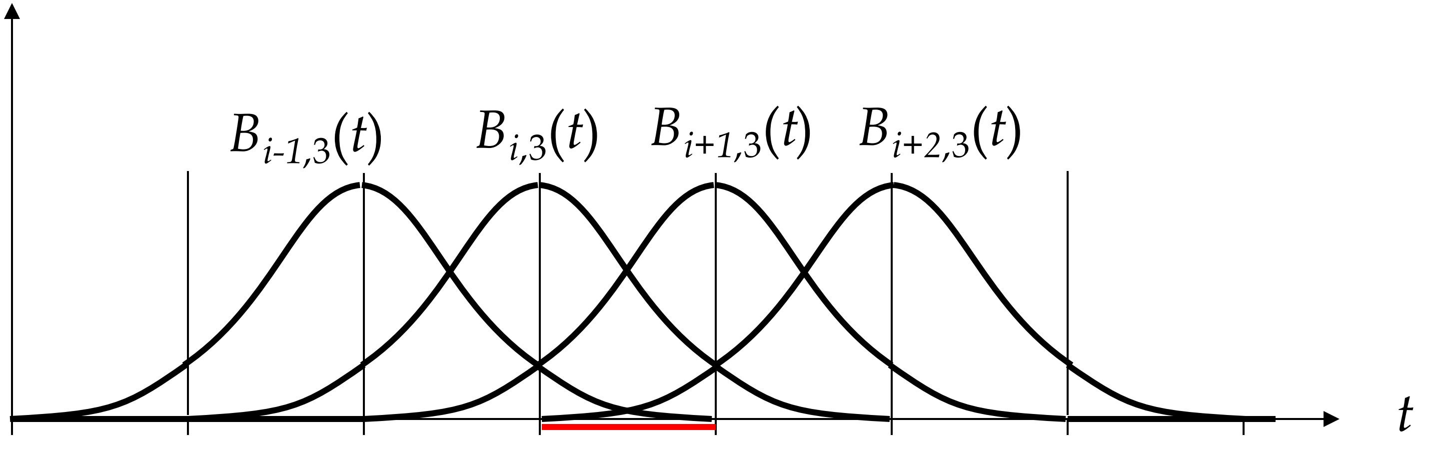
- Curva não passa pelos pontos de controle

# Curvas B-Spline

- Função base B-spline quadrática periódica




- Função base B-spline cúbica periódica

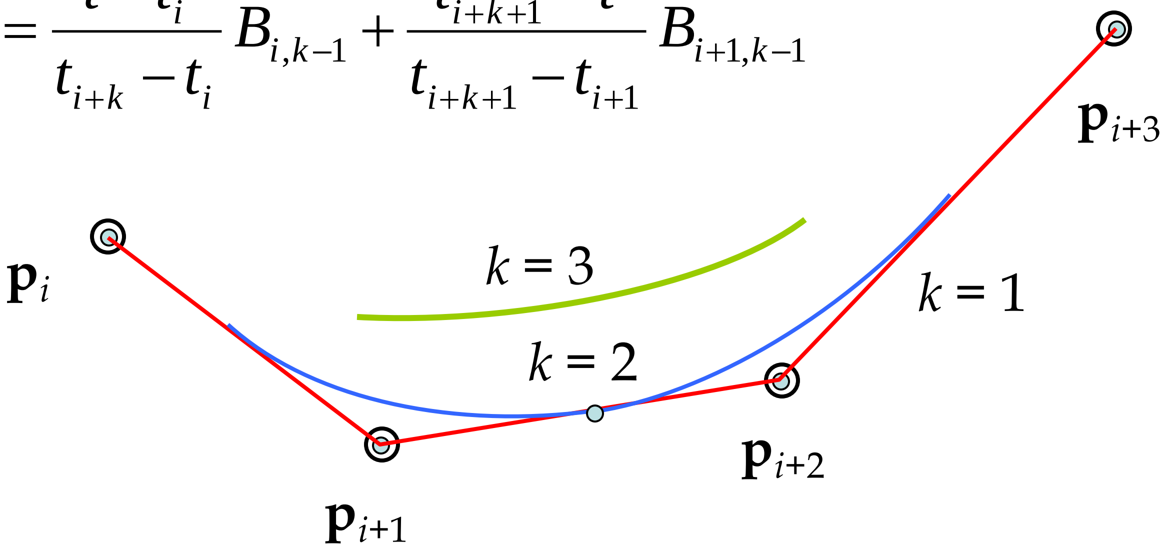


# Recurrencia Cox-de Boor

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{m} B_{i,k}(t)\mathbf{p}_i$$

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para}\, t_i \leq t < t_{i+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1} + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}$$



# Propriedades das B-Splines

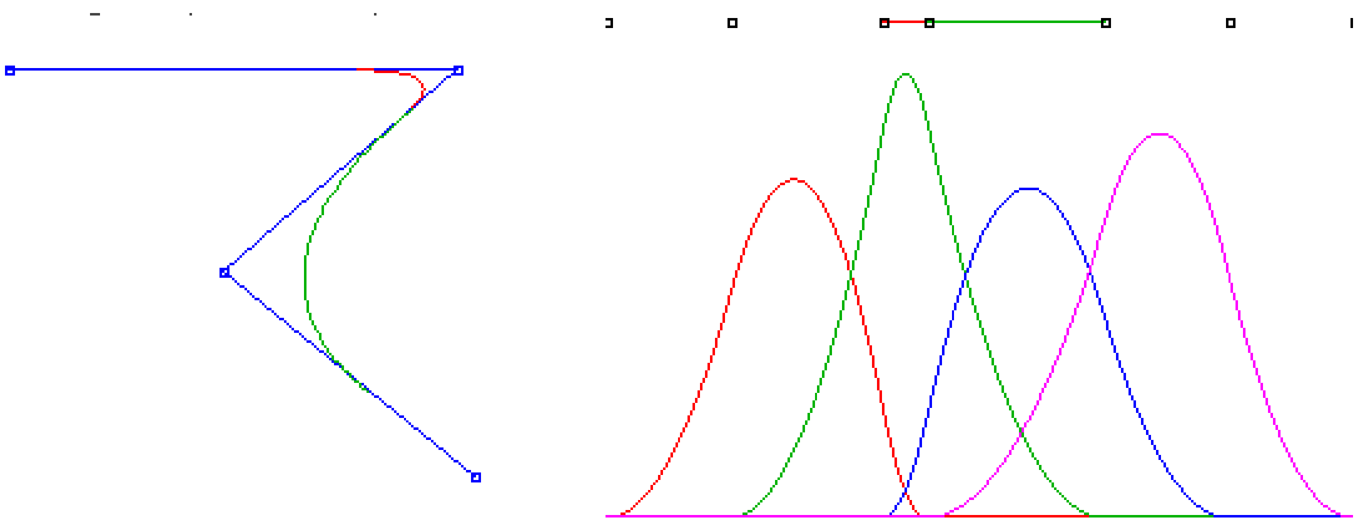
- Dados $n$+1 pontos ($\mathbf{p}_0 \ldots \mathbf{p}_n$) , é composta de ($n$-$d$+1) curvas Bézier de grau $d$ unidas com continuidade $d$-1 nos $n$+$d$+1 nós $t_0$ , $t_1$ , ... , $t_{n+d+1}$
- Cada ponto da curva é afetado por $d$+1 pontos de controle
- Cada ponto de controle afeta $d$+1 segmentos
- Curva restrita ao fecho convexo do polígono de controle

Forma Matricial

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i-1} \\ \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_{i+1} \\ \mathbf{p}_{i+2} \end{bmatrix}, \text{ para } 0 \le t \le 1$$

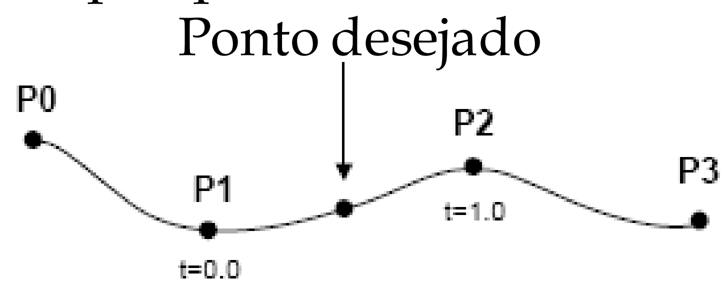
# Efeito dos Nodos

- Os intervalos entre nodos influencían a importância dos pontos de controle
  - Exemplo: B-spline Quádrica



# Catmull-Rom Spline

- Interpolação local de B-Splines
- A curva passa por pontos de controle



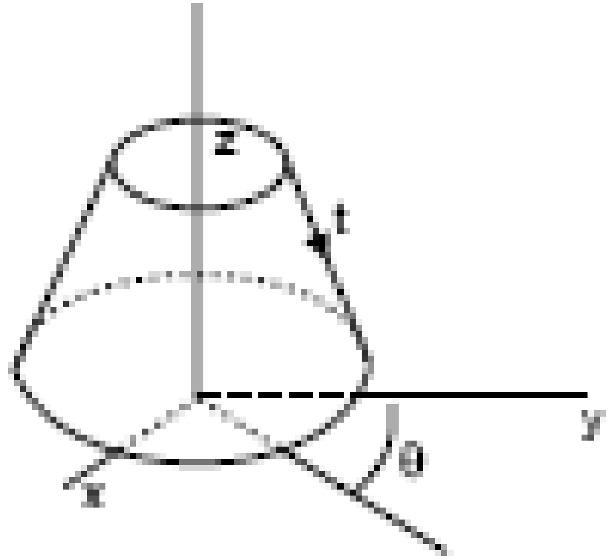

- Um ponto é calculado em função dos pontos de controle adjacentes

$$q(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

# Superfícies

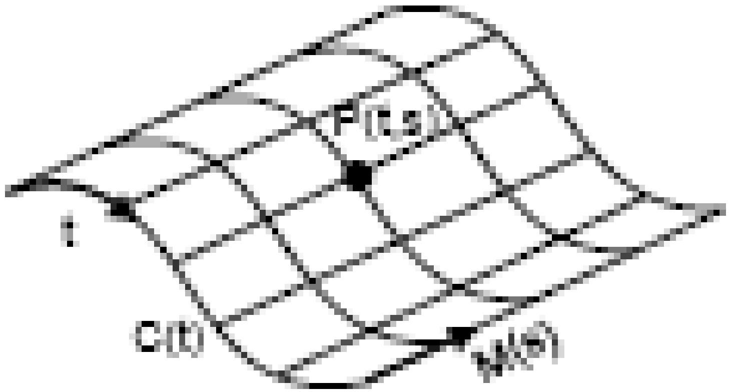
# Representação de Superficies (superficies de revolução)

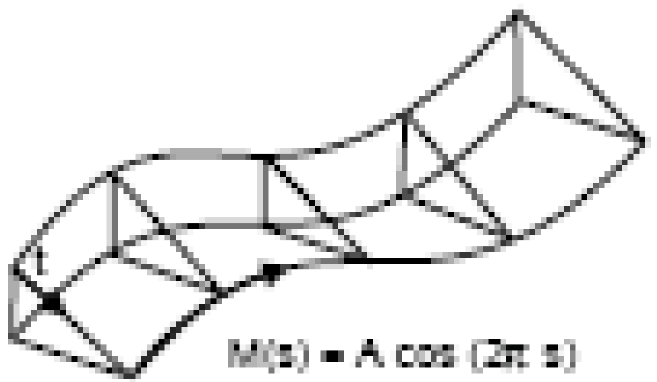
- Rotação de uma curva plana em torno de um eixo
- Ponto da superficie de revolução descrito por
  - P(t, ang)
- Podem ser obtidas por qualquer tipo de curva



# Representação de Superficies
## (superficies de deslocamento)

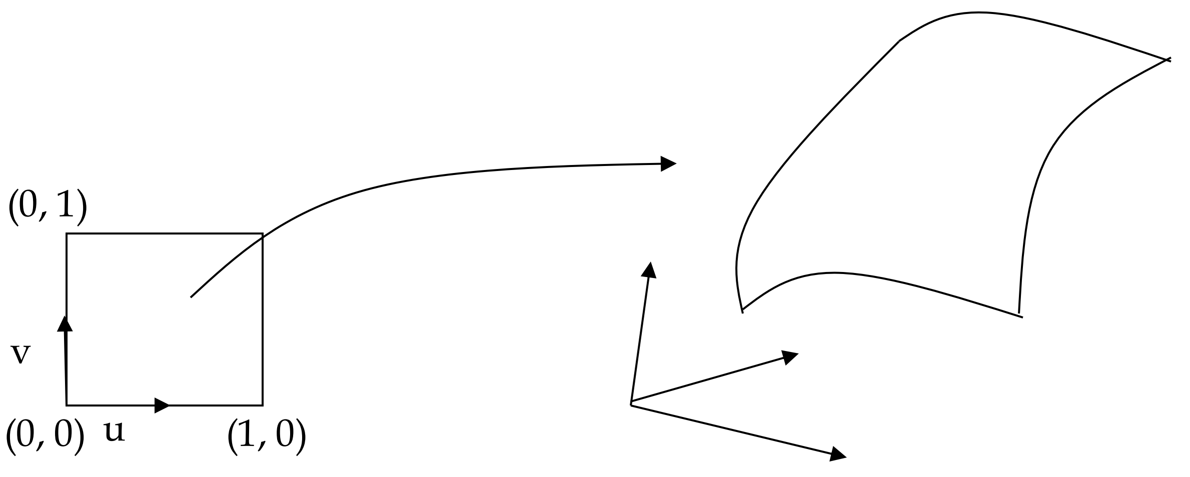
- Denominada "sweeping" (barredura)
- Movimento de uma curva ou figura plana ao longo de um caminho
- Podem ser obtenidas por qualquer tipo de curva



# Representação de Superficies
## (interpolação Bi-cúbica)

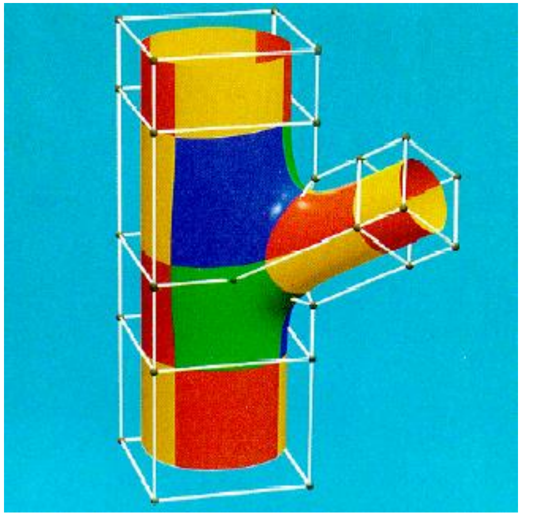
- São formas paramétricas
- Qualquer ponto do interior é definido univocamente
- Cada pedaço (patch) gerada por uma fórmula



# Superficies Paramétricas

**Superficie produto tensor**: polinomial bivariante expressado em términos de funções bases univariante.

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} V_{i,j} B_j(v) B_i(u) = S(u,v)$$



Representação matricial

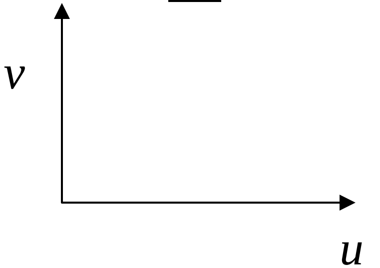
$$B(u)V\ B(v)^T = S(u,v)$$

Em função de bases bivariantes

$$\sum_{i,j} V_{i,j} B_{i,j}(v,u) = S(u,v)$$

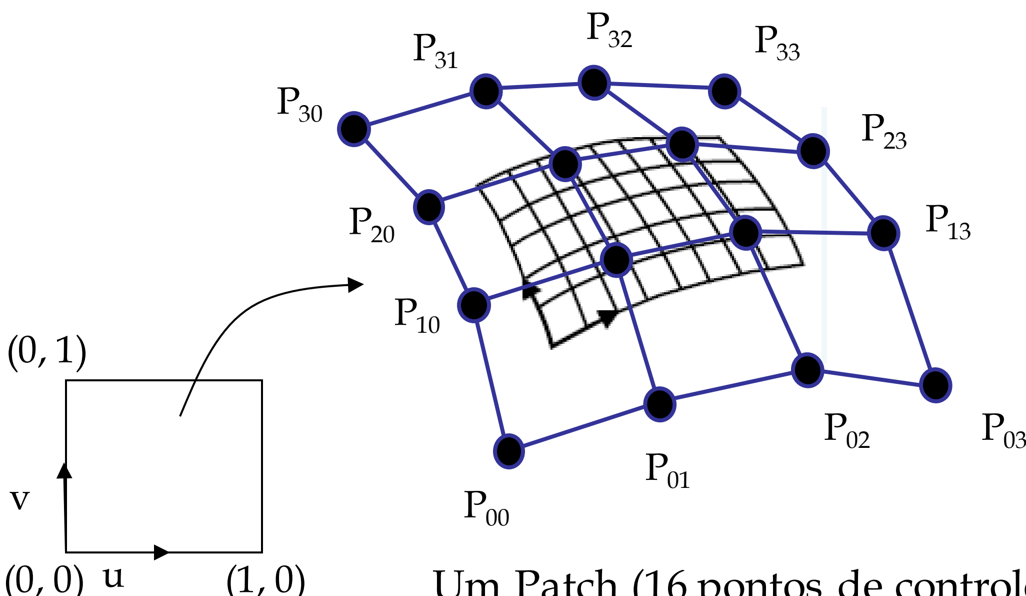
Notação matricial

$$\mathbf{B}(v,u)\mathbf{V} = S(u,v)$$

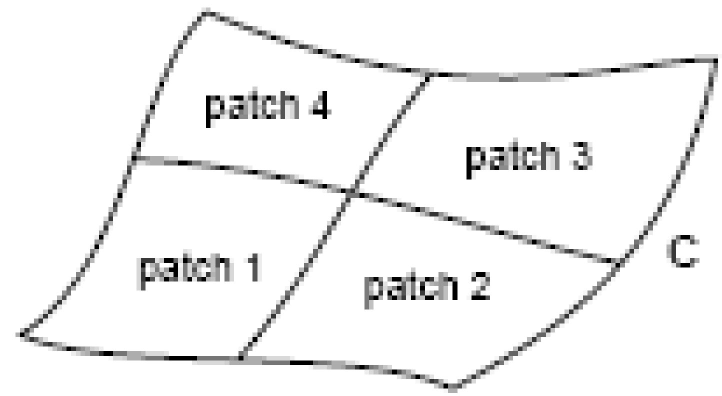


# Superficies Paramétricas

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} P_{i,j} B_j(v) B_i(u) = S(u,v)$$




Um Patch (16 pontos de controle)




Patches adjacentes

# Superficies de Hermite

- Extesão da formulação de Hermite
- Interior gerada pelas funções combinadas (blending function)

$$P(u,v) = S\ H\ G_H\ H^T T^T$$

onde $S = [u^3, u^2, u, 1]$, $T = [v^3, v^2, v, 1]$, H matriz de Hermite (matriz das curvas) e $G_H$

$$G_H = \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & \frac{\partial P}{\partial u}(0,0) & \frac{\partial P}{\partial u}(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & \frac{\partial P}{\partial u}(1,0) & \frac{\partial P}{\partial u}(1,1) \\ \frac{\partial P}{\partial v}(0,0) & \frac{\partial P}{\partial v}(0,1) & \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial u}(0,0) & \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial u}(0,1) \\ \frac{\partial P}{\partial v}(1,0) & \frac{\partial P}{\partial v}(1,1) & \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial u}(1,0) & \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial u}(1,1) \end{bmatrix}$$

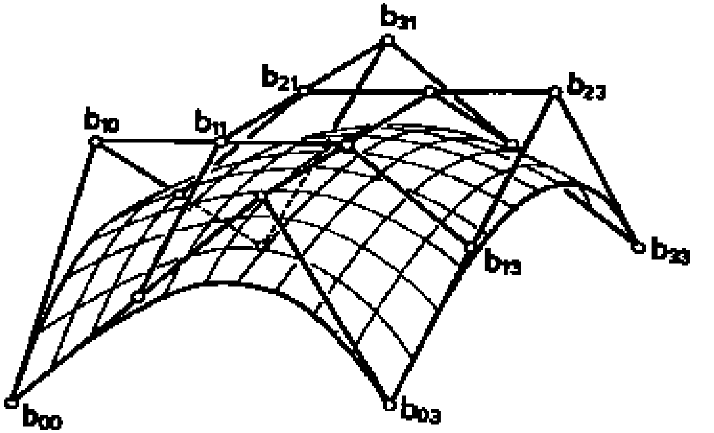
# Superficies Bézier

- Extensão das curvas de Bezier

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{i,j}B_{i,n}(u)B_{j,m}(v) \qquad 0\le u,v\le 1$$

onde $B_{i,j}$ é matriz de vértices de controle, $B_{i,n}(u)$ e $B_{j,m}(v)$ são funções de Berstein

$$S(u,v)=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix} M_B G_B M_B^T \begin{bmatrix}v^3\\ v^2\\ v\\ 1\end{bmatrix}$$




$$M_B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad G_B=\begin{bmatrix}P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3}\\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3}\\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3}\\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3}\end{bmatrix}$$

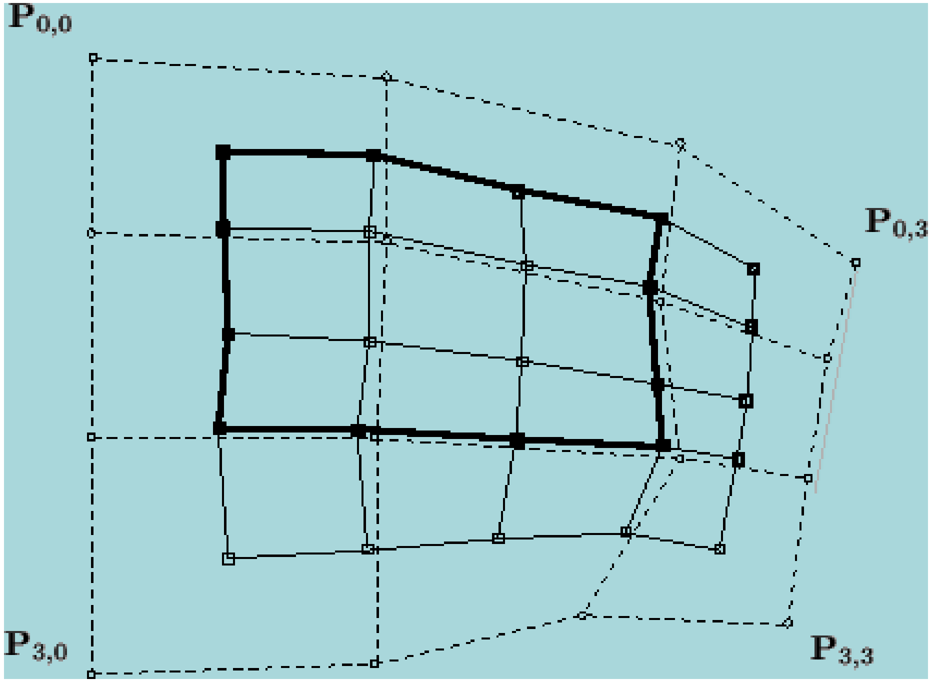
# Superficies B-Spline

- Extensão das curvas B-Spline

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,1} & \mathbf{P}_{0,2} & \mathbf{P}_{0,3} \\ \mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_{1,1} & \mathbf{P}_{1,2} & \mathbf{P}_{1,3} \\ \mathbf{P}_{2,0} & \mathbf{P}_{2,1} & \mathbf{P}_{2,2} & \mathbf{P}_{2,3} \\ \mathbf{P}_{3,0} & \mathbf{P}_{3,1} & \mathbf{P}_{3,2} & \mathbf{P}_{3,3} \end{bmatrix}$$

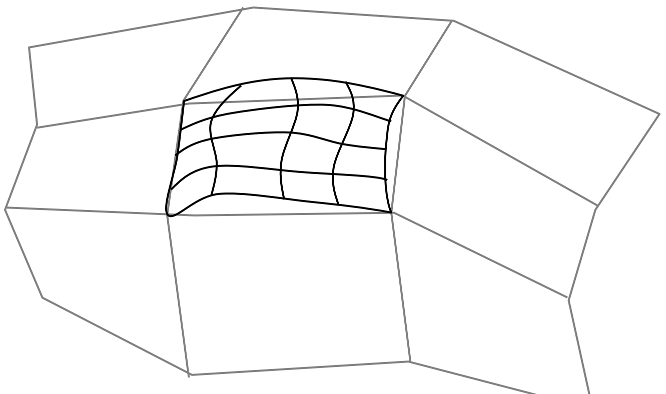
$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$



# Superficies Catmull-Rom Spline

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,1} & \mathbf{P}_{0,2} & \mathbf{P}_{0,3} \\ \mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_{1,1} & \mathbf{P}_{1,2} & \mathbf{P}_{1,3} \\ \mathbf{P}_{2,0} & \mathbf{P}_{2,1} & \mathbf{P}_{2,2} & \mathbf{P}_{2,3} \\ \mathbf{P}_{3,0} & \mathbf{P}_{3,1} & \mathbf{P}_{3,2} & \mathbf{P}_{3,3} \end{bmatrix}$$



$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$