6) O pré-condicionador acelera as soluções do sistema linear?

- Vamos comparar o raio espectral $(\rho(M^{-1}N))$ do método com e sem o pré-condicionador

No Jacobi sem pré-condicionador, temos:

$$Ax = b, \quad \text{com} \quad A = L + D + U$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)}), \quad \text{com} \quad M = D \text{ e } N = -(L+U)$$

Usando pré-condicionador, temos:

$$K^{-1}Ax = K^{-1}b$$

No Método de Jacobi

$$K^{-1}x^{(k+1)} = K^{-1}(D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)}))$$

Substituindo o Pré-condicionador de Jacobi na qual $K = D$, temos:

$$D^{-1}x^{(k+1)} = D^{-1}(D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)}))$$

Fazendo a multiplicação por D em ambos os lados

$$x^{(k+1)} = DD^{-1}(D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)})), \quad \text{dado que } DD^{-1} = I$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)}).$$

Logo, $M = D$ e $N = -(L+U)$

Como o raio espectral para com e sem pré-condicionador são iguais, isso demonstra que o pré-condicionador de Jacobi no Método de Jacobi não acelera o método

7)

Dado: $\bar{A} = C^{-1} A C^{-1}$

$\bar{x} = Cx$

$\bar{b} = C^{-1} b$

$C^{-2} = M^{-1}$

Algoritmo: Gradiente para $\bar{A}\bar{x} = b$

In: $\bar{A}$ (matriz), $\bar{b}$ (vetor), escalar α

Out: x (uma aproximação da solução para $\bar{A}\bar{x} = \bar{b}$

Escolher $x \in \mathbb{R}^n$

$\bar{r} = \bar{b} - \bar{A}\bar{x}$

Enquanto ($\bar{r} < \varepsilon$)

$\bar{x} = \bar{x} + \alpha(\bar{b} - \bar{A}\bar{x})$

$\bar{r} = \bar{b} - \bar{A}\bar{x}$

Fim-enquanto

Return x

Dado: $r \leftarrow \bar{b} - \bar{A}\bar{x}$;

$$C^{-1}b - C^{-1}AC^{-1}Cx = C^{-1}b - C^{-1}Ax = C^{-1}(b - Ax) = C^{-1}r,$$

Fazendo $\bar{r} = C^{-1}r$, temos:

$$C^{-1}\bar{r} = C^{-1}b - C^{-1}Ax = C^{-1}(b - Ax) \leftrightarrow r = b - Ax$$

$\bar{x} \leftarrow \bar{x} + \alpha(\bar{b} - \bar{A}\bar{x}) \Rightarrow Cx = Cx + \alpha(C^{-1}b - C^{-1}AC^{-1}Cx) \Rightarrow$

$\Rightarrow Cx = Cx + \alpha(C^{-1}b - C^{-1}Ax) \Rightarrow Cx = Cx + \alpha C^{-1}b - \alpha C^{-1}Ax$

Multiplicando por C^{-1} pela direita, temos:

$x \leftarrow x + \alpha C^{-2}b - \alpha C^{-2}Ax$, logo

$x \leftarrow x + \alpha(M^{-1}b - M^{-1}Ax)$

Algoritmo: Gradiente para com Pré-Condicionador
In: A (matriz), M (matriz), vetor b, escolar α
Out: x (aproximação da solução de $Ax=b$)

Escolha $x \in \mathbb{R}^n$.
$r = b - Ax$
Enquanto ($r < \varepsilon$)
$x = x + \alpha(M^{-1}b - M^{-1}Ax)$
$r = b - Ax$
end
Return x