2) Generalize a propriedade submultiplicativa para norma induzida.

Definição de norma induzida é:

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta} \quad (*)$$

Fazendo para $(A \cdot B)$ temos:

$$\|A \cdot B\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \neq \vec{0}} \frac{\|ABx\|_\alpha}{\|x\|_\beta} \rightsquigarrow \|AB\|_{\alpha,\beta} \geq \frac{\|ABx\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$$

Ao remover o supremo da expressão $(*)$ e aplicando em B

$$\|A\|_{\alpha,\beta} \geq \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$$

$$\|B\|_{\alpha,\beta} \geq \frac{\|Bx\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$$

Multiplicando as desigualdades $\rightarrow \|A\|_{\alpha,\beta} \cdot \|B\|_{\alpha,\beta} \geq \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta} \cdot \frac{\|Bx\|_\alpha}{\|x\|_\beta}$

$$\rightarrow \|A\|_{\alpha,\beta} \cdot \|B\|_{\alpha,\beta} \geq \frac{\|A \cdot B \cdot x\|_\alpha}{\|x\|_\beta} \cdot \frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta} \geq \frac{\|A \cdot B \cdot x\|}{\|x\|_\beta} = \|A \cdot B\|_{\alpha,\beta}$$