Cálculo numérico 2021.2: Resumo e Tarefa 2

João Paixão (jpaixao@dcc.ufrj.br)

1 Informações

- Você tem que fazer os 9 exercícios que estão na lista.
- Não serão aceito trabalhos atrasados durante o semestre.
- Você pode enviar as soluções dos exercícios teóricos da maneira que você achar melhor. Por exemplo, pode entregar com fotos, Latex (se você quiser aprender Latex é muito fácil: recomendo esse vídeo https://www.youtube.com/watch?v=Y1vdXYttLSA), Jupyter notebook, Word, etc.
- As resoluções e os passos nas suas resoluções precisam ser justificados e escritos em português. Não coloque só fórmulas e "matematiquês".
- Os exercícios de implementação em Julia precisam ser bem comentados.
- Você pode pensar nas resoluções com outras pessoas, mas precisa escrever sozinho as suas resoluções, implementações e comentários. Por favor inclua os nomes das pessoas com quem você trabalhou nas suas resoluções. **Resoluções copiadas serão zeradas**.
- Bibliografia: Franco, Neide Bertoldi. Cálculo numérico. Pearson, 2006.
- Bibliografia: Burden, Richard L., and J. Douglas Faires. Análise numérica. Cengage Learning, 2008.
- Bibliografia: Apostila do Collier em anexo no Google Classroom da disciplina.
- Monitor: Fillype iang Cotegipe (fillypecotegipe@poli.ufrj.br)
- Sextas 12h.

2 Método de Newton

Exercício 2.1. Explique e implemente como aproximar $\sqrt[3]{43}$ com o método de Newton em Julia e determine um chute inicial problemático.

Exercício 2.2. Dê exemplo de um função $f(x)$ tal que $f(x)$ é um polinômio de grau dois para qual o método de Newton alterna entre os valores $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2, \cdots$.

3 Cálculo com Desigualdades

Ao longo deste artigo, usamos $I = [a, b]$ para denotar um intervalo fechado limitado. Seja f uma função contínua e (diferenciável) no intervalo (a, b).

Definição 3.1 (Crescente no Intervalo)**.** f é crescente no intervalo I se para todo $c, d \in I$, se $c \leq d$, então $f(c) \leq f(d)$.

Definição 3.2 (Estritamente Crescente no Intervalo)**.** f é estritamente crescente no intervalo I se para todo $c, d \in I$, se $c < d$, então $f(c) < f(d)$.

Teorema 3.1. Se f é crescente em I, então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Prova. Cálculo I. Use a definição de derivada de cálculo I e a definição de função crescente. □

Axioma 3.1 (Axioma da Função Crescente)**.** Se para todo $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, então $f(x)$ é crescente em I.

Prova. Vamos assumir esse fato como axioma. □

Teorema 3.2 (Teorema da Corrida)**.** Se para todo $x \in I$, $f'(x) \leq g'(x)$, então para todo $x \in I$, $f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a)$.

Prova. Para todo $x \in I$,

$$
\begin{aligned}
& f'(x) \leq g'(x) \\
\Longrightarrow \quad & \quad \{ \text{ Álgebra } \} \\
& 0 \leq g'(x) - f'(x) \\
\Longrightarrow \quad & \quad \{ \text{ Definição } h(x) := g(x) - f(x) \ \} \\
& 0 \leq h'(x) \\
\Longrightarrow \quad & \quad \{ \text{ Axioma da Função Crescente } \} \\
& h(x) \text{ é crescente} \\
\Longrightarrow \quad & \quad \{ \text{ Definição de Crescente e } a \leq x \ \} \\
& h(a) \leq h(x) \\
\Longrightarrow \quad & \quad \{ \text{ Definição de } h(x) \ \} \\
& g(a) - f(a) \leq g(x) - f(x) \\
\Longrightarrow \quad & \quad \{ \text{ Álgebra } \} \\
& f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a)
\end{aligned}
$$

□

A prova do Teorema anterior fornece um exemplo de como estruturar uma prova:

Teorema 3.3. Se para todo $x \in I$ temos essa **Hipótese**, então para todo $x \in I$ temos uma **Conclusão.**

Prova. Para todo $x \in I$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Hipótese} \\
\Longrightarrow & \quad \{ \text{ Justificativa } \} \\
 & \text{Alguma coisa} \\
\Longrightarrow & \quad \{ \text{ Justificativa } \} \\
 & \text{Outra coisa} \\
\Longrightarrow & \quad \{ \text{ Justificativa } \} \\
 & \text{Conclusão}
\end{array}
$$

□

Teorema 3.4 (Teorema da Função Decrescente)**.** Prove que: Se para todo $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, então $f(x)$ é decrescente em I.

Teorema 3.5 (Teorema da Função Constante)**.** Prove que: Se para todo $x \in I$, $f'(x) = 0$, então $f(x)$ é constante em I.

Teorema 3.6 (Teorema da Função Estritamente Crescente)**.** Prove que: Se para todo $x \in I$, $f'(x) > 0$, então $f(x)$ é estritamente crescente em I.

Teorema 3.7 (Desigualdade do Valor Médio - "Teorema de Taylor de Ordem 0")**.** Se para todo $x \in I$, $f'(x) \leq M$, então para todo $x \in I$, $f(x) - f(a) \leq M(x - a)$.

Prova. Aula □

Teorema 3.8 (Desigualdade do Valor Médio)**.** Se para todo $x \in I$, $m \leq f'(x)$, então para todo $x \in I$, $m(x - a) \leq f(x) - f(a)$.

Prova. Aula □

Teorema 3.9 (Desigualdade do Valor Médio - Alternativa)**.** Se para todo $x \in I$, $m \leq f'(x) \leq M$, então para todo $x \in I$,

$$m \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq M$$

Teorema 3.10 (Desigualdade do Valor Médio com módulo)**.** Se para todo $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, então para todo $x \in I$, $|f(x) - f(a)| \leq M(x - a)$.

Prova. Aula □

4 Taylor

Teorema 4.1. [Taylor de ordem 1] Se para todo $x \in I$, $f''(x) \leq M$, então para todo $x \in I$, $f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a)) \leq M\frac{(x-a)^2}{2}$

Prova. Aula □

Exercício 4.1 (Teto para Diferenças para Frente)**.** Sabemos intuitivamente que se a e x são próximos, então $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \approx f'(a)$. Supondo que para todo $x \in [a,b]$, $f''(x) \leq M$, determine um teto para o erro dessa aproximação usando Taylor de ordem 1 (Teorema 4.1).

Teorema 4.2 (Taylor de ordem 2)**.** Se para todo $x \in I$, $f^{(3)}(x) \leq M$, então para todo $x \in I$, $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2}) \leq M\frac{(x-a)^3}{6}$.

Prova. Aula □

Teorema 4.3 (Taylor de ordem n)**.** Se para todo $x \in I$, $f^{(n+1)}(x) \leq M$, então para todo $x \in I$, $f(x) - T_n(x) \leq M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ aonde

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}.$$

Prova. Aula □

Exercício 4.2. Aproxime $sen(0.01)$ com erro máximo menor que 10^{-6}.

Exercício 4.3. Por que aproximação $sen(x) \approx x$ é muito boa para valores de x próximos de zero? Explique com um texto usando o Teorema de Taylor.

Exercício 4.4. Seja $f(x) = \ln(x)$. Aproxime $f(1.5)$ usando o polinômio de Taylor de terceira ordem com $a = 1$. Quantos dígitos corretos possui a aproximação? Quantos termos deve ter o polinômio para o erro de truncamento ser menor que 10^{-8}?

Exercício 4.5. Implemente em Julia o polinomial de Taylor para calcular $\ln(x)$ usando como exemplo vídeo começando em 1:07:44. Na sua implementação, o usuário deve poder colocar um erro máximo como entrada (dica: exercício anterior).

Exercício 4.6. Como o Teorema da Taylor em $\sin(x)$, pode te ajudar a calcular o limite

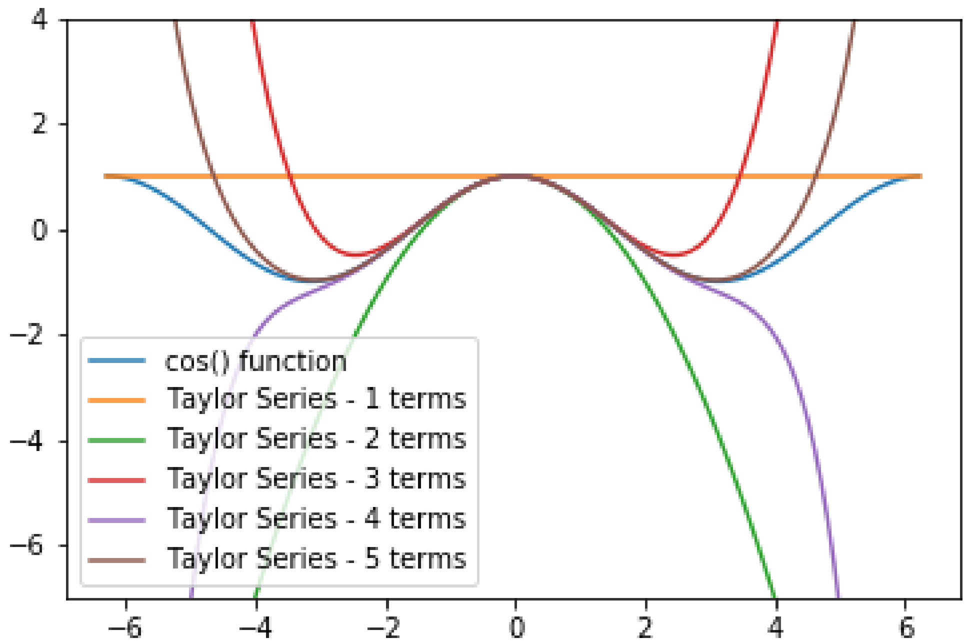
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}?$$

4.1 Visão geométrica de Taylor

Assita o vídeo do 3Blue1Brown

Teorema 4.4 (Polinômio de Taylor "parece" a função $f(x)$ no ponto $x = 0$)**.** Para todo $0 \leq k \leq n$, temos que $T_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$.

Prova. Aula 7 □



Teorema 4.5 (Polinômio de Taylor "parece" a função $f(x)$ no ponto $x = a$)**.** Para todo $0 \leq k \leq n$, temos que $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

Prova. Teorema anterior com $x = a$. □

Exercício 4.7. (Exercício de arte) Faça a figura acima em Julia usando as dicas e códigos do Abel vídeo começando em 1:07:44.