UFRJ

AUGUSTO GUIMARÃES RODRIGUES DE LIMA

DRE: 119025393

Exercício 2.1. Explique e implemente como aproximar $\sqrt[3]{43}$ com o método de Newton em Julia e determine um chute inicial problemático.

Queremos:

$$x = \sqrt[3]{43}$$

Podemos reescrever como:

$$x^3 = 43$$

Pensando o problema na forma de uma função, temos:

$$f(x) = x^3 – 43 = 0$$

f(x) vale 0 quando x é igual a raiz cubica de 43. Analisando de forma geométrica, podemos traçar uma reta r tangente a f(x) no ponto $(x_1, f(x_1))$. x_1 é um “chute”, um valor próximo a solução (escolheremos o 3 como chute inicial porque é o número natural que elevado ao cubo mais se aproxima de 43). Essa reta r cruza o eixo OX no ponto x_2 (bastante próximo de x) dado por:

$$x_2 = x_1 – f(x_1)/ f\,'(x_1)$$

$$x_2 = x_1 – (x_1^3 – 43)/(3x_1^2)$$

$$x_2 = 3– (27 – 43)/(27) = 3,\ 5925925925925926$$

Dessa forma obtemos um valor aproximado para a solução. A cada iteração, atualizamos o valor do “chute” e obtemos um valor mais próximo para a raiz cúbica de 43.

Exercício 2.2. Dê exemplo de uma função f(x) tal que f(x) é um polinômio de grau dois para qual o método de Newton alterna entre os valores x0 = 1, x1 =2, x2 = 1, x3 = 2, ⋯

Supondo que $f(x) = x^2 + ax + b$, aplicando o método de Newton para este polinômio, temos:

$$h(x) = x – (x^2 + ax + b)/(2x + a) = (2x^2 + ax – x^2 – ax – b) /(2x + a)\ =$$

$$(x^2 - b) / (2x + a)$$

Queremos:

$$h(1) = (1 - b) / (2 + a) = 2$$

$$h(2) = (4 - b) / (4 + a) = 1$$

Montando o sistema:

$$2a + b = -3$$

$$a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$a = -3 \text{ e } b = 3$$

Temos então:

$$x^2 - 3x + 3$$

Exercício 4.1 (Teto para Diferenças para Frente). Sabemos intuitivamente que se a e x são próximos, então $f(x) - f(a) / (x - a) \approx f'(a)$. Supondo que para todo $x \in [a, b]$, $f''(x) \leq M$, determine um teto para o erro dessa aproximação usando Taylor de ordem 1 (Teorema 4.1).

Queremos achar um teto de erro Z para a expressão:

$$f'(a) - (f(x) - f(a))/(x - a) \leq Z$$

Pelo Teorema 4.1, temos:

$$|f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))| \leq M (x-a)^2 /2$$

Trabalhando com $-(f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))$:

$$-f(x) + (f(a) + f'(a)(x - a)) \leq M (x-a)^2 /2$$

Dividindo por $(x-a)$:

$$f'(a) - (f(x) - f(a))/(x - a) \leq M (x-a) /2$$

Portanto, o teto é igual a $M (x-a) /2$

Exercício 4.2. Aproxime sen (0.01) com erro máximo menor que 10^{-6}

Começaremos derivando o sen(x):

$f(x) = \text{sen}(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\text{sen}(x)$

$f^{(3)} = -\cos(x)$

Como o erro máximo deve ser menor do que 10^{-6} aplicaremos o Teorema de Taylor de ordem 3:

$$f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a) + (f''(a)(x-a)^2)/2 + (f'''(a)(x-a)^3)/6) \leq M(x-a)^4/24$$

a = 0

$$f(x) - (\text{sen}(0) + \cos(0)(x) - (\text{sen}(0)x^2)/2 - (\cos(0)x^3)/6) \leq M(x-a)^4/24$$

$$f(x) - (0 + x - 0 - x^3/6) \leq x^4/24$$

Então:

$$\text{sen}(0{,}01) - (0 + 0{,}01 - 0 - (0{,}01)^3/6) \leq 10^{-8}/24$$

Ou seja, um valor aproximado com erro menor que 10^{-6} é 0,0099998333

Exercício 4.3. Por que aproximação sen(x) ≈ x é muito boa para valores de x próximos de zero? Explique com um texto usando o Teorema de Taylor.

O polinômio de Taylor de f(x) desenvolvido numa vizinhança de x = a aproxima a função nesta vizinhança. Utilizando o Teorema de Taylor para f(x) = sen(x) em torno de x = 0, temos:

$$p(x) = f(0) + f'(0)x^1/1! + f''(0)x^2/2! + f^{(3)}(0)x^3/3! + f^{(4)}(0)x^4/4! + \ldots + fn(0)x^n/n!$$

As derivadas se repedem em quatro em quatro

$$p(x) = 0 + x^1 + 0x^2/2 + (-1)x^3/6 + 0x^4/24 + \ldots + fn(0)x^n/n!$$

$$p(x) = x - x^3/6 + \ldots + fn(0)x^n/n!$$

As derivadas utilizadas são praticamente zero quando x assume valores próximos a 0 (os números são muito pequenos porque x está sendo elevado a um número natural no numerador e há um fatorial no denominador). Dessa forma, a aproximação sen(x) ≈ x é muito boa para valores de x próximos de zero.

Exercício 4.4. Seja f(x) = ln(x). Aproxime f(1.5) usando o polinômio de Taylor de terceira ordem com a = 1. Quantos dígitos corretos possui a aproximação? Quantos termos deve ter o polinômio para o erro de truncamento ser menor que 10^{-8}?

Aplicando o Teorema de Taylor, temos:

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2 + f^{(3)}(a)(x-a)^3/6$$

a = 1

$p(x) = \ln(1) + \ln'(1)(x-1) + \ln''(1)(x-1)^2/2 + \ln^{(3)}(1)(x-1)^3/6$

$p(x) = 0 + (x-1) - (x-1)^2/2 + 2(x-1)^3/6$

$p(x) = (x-1) + (-1)(x^2 - 2x + 1)/2 + (2)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)/6$

$p(x) = (6x - 6 - 3x^2 + 6x - 3 + 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2)/6$

$p(x) = (2x^3 - 9x^2 + 18x - 11)/6$

$p(x) = x^3/3 - 3x^2/2 + 3x - 11/6$

Calculando f(1,5) e p(1,5), temos:

$f(1.5) = \ln(1,5) = 0,4054651081$

$p(1.5) = (1,5)^3/3 - 3(1,5)^2/2 + 3(1,5) - 11/6 = 1,125 - 3,375 + 4,5 - 1.8333333333 = 0,4166666667$

Encontramos uma aproximação com apenas dois dígitos corretos.

Para acharmos a quantidade de termos, vamos usar como base um exemplo similar apresentado na apostila do professor Collier (página 55)

As derivadas de ln são do tipo:

$$((-1)^{n-1}(n-1)!)/x^n$$

Levando em conta que x^n é decrescente quando x > 1, obtemos:

$$|f^{(n+1)}(x)| <= ((-1)^n(n)!)/x^{n+1}$$

onde $M_{n+1} < n!$. Logo, o teorema de Taylor nos garante que:

$$|f(x) - Pn(x)| <= (n!(x-a)^{n+1})/(n+1)!$$

a = 1

$$|f(x) - Pn(x)| <= ((x-1)^{n+1})/(n+1)$$

Para x = 1,5

$$|f(x) - Pn(x)| <= ((0,5)^{n+1})/(n+1)$$

O valor de n desejado deve, portanto, satisfazer:

$$((0,5)^{n+1})/(n+1) < 10^{-8}$$

Testando os valores com o auxilio de uma calculadora, encontramos n = 22.

Exercício 4.6. Como o Teorema da Taylor em sin(x), pode te ajudar a calcular o limite

$$\lim_{x\to 0}(\sin(x) - x)/x^3?$$

Usando a serie de Taylor, temos:

$$\text{sen}(x) = x + (-1)x^3/3! + x^5/5! \ldots$$

Usando os dois primeiros termos:

$$\text{sen}(x) = x + (-1)x^3/3!$$

$$(\text{sen}(x) - x)/\, x^3 = -1/3!$$

Agora que já aproximamos a função, vamos calcular o limite:

$$\lim_{x\to 0}(\sin(x) - x)/x^3 = \lim_{x\to 0} -1/3!$$

Esse limite é bem mais fácil de calcular:

$$\lim_{x\to 0} -1/3! = -1/6$$

Exercício 4.7 (Exercício de arte) Faça a figura acima em Julia usando as dicas e códigos do Abel