AUGUSTO GUIMARÃES RODRIGUES DE LIMA

DRE: 119025393

Tarefa 3

Exercício 1.1

Sabemos que o tamanho do intervalo [a, b] no passo n do algoritmo da bisseção será igual a:

$$|b - a| / 2^n$$

Sendo x_c a resposta exata e x_a o valor aproximado, o erro encontrado $|\ x_c - x_a\ |$ será dado por:

$$|\ x_c - x_a\ | \leq |b - a| / 2^n$$

Manipulando a expressão, temos:

$$2^n = |b - a| / |\ x_c - x_a\ |$$

$$\log_2 2^n = \log_2 (|b - a| / |\ x_c - x_a\ |)$$

$$n = \log_2 (|b - a| / |\ x_c - x_a\ |)$$

Agora será possível encontrar o número de passos que vão levar para o erro ser menor que 10^{-8} :

$$n = \log_2 (|b - a| / 10^{-8})$$

$$n = \log_2 (10^8 * |b - a|)$$

$$n = \log_2 10^8 + \log_2 (|b - a|)$$

Como o intervalo é definido por [0, 20], com o auxilio de uma calculadora, achamos n = 31. Portanto, precisamos de 31 passos para fazer uma aproximação com erro máximo igual 10^{-8}.

O valor aproximado foi calculado através do Julia:

3.162277666851878

Exercício 1.2

Resolução no Jupyter Notebook em anexo.

Exercício 1.3

5. a interpolação polinomial de grau 2 e estime o erro máximo.

Para fazermos um polinômio de grau 2 precisamos de 3 pontos. Vamos escolher:

$e^0 = 1 \Rightarrow \ln(1) = 0$

$e^1 = 2.718281828 \Rightarrow \ln(2.718281828) = 1$

$e^{3/2} = 4.48168907 \Rightarrow \ln(4.48168907) = 3/2$

Utilizando Julia, achamos o polinômio:

$P(x) = -0.8149755905062174 + 0.9006910895694049x - 0.08571549906318753x^2$
$P(3) = 1.1156581866333097$

Sabendo as derivadas de ln, concluímos que $M \leq 1$. Calculando o teto do erro:
$|\ln(3) - P(3)| \leq 1/6\ (3 - 1)(3 - 2.718281828)(3 - 4.48168907)$
$|\ln(3) - P(3)| \leq 0.1391395787575934$

Exercício 1.4

Utilizando os dados da tabela, montaremos um sistema linear

$P2(\pi/6) = \cos(\pi/6) = a_0 + a_1(\pi/6) + a_2(\pi/6)^2 = \sqrt{3}/2$

$P2(\pi/4) = \cos(\pi/4) = a_0 + a_1(\pi/4) + a_2(\pi/4)^2 = \sqrt{2}/2$

$P2(\pi/3) = \cos(\pi/3) = a_0 + a_1(\pi/3) + a_2(\pi/3)^2 = 1/2$

Com a ajuda do Notebook Julia, encontramos o polinômio:

$P2(x) = 1.0392981732142508 - 0.14686140578658105(x) - 0.35153865113381111(x)^2$
E achamos um valor aproximado para cos(40^o = 0,698132 radianos):

$P2(0{,}698132) = 0.7654337044271249$

Exercício 1.5

Para resolver o exercício, vamos montar um polinômio com as informações do problema:

$0 \Rightarrow 34^o$

$90 \Rightarrow 30^o$

$150 \Rightarrow 25^o$

Utilizando Julia, obtemos o polinômio:

$p(x)= 34 –0.0211111111111111(x) –0.000259259259259259 3(x)^2$

É importante lembrar que o polinômio fornece uma aproximação. O resfriamento de um corpo segue uma exponencial definida pela Lei de Resfriamento de Newton. Por isso, não achamos um valor x exato para o polinômio tal que P(x) =37. Vamos procurar então o valor que chega mais perto de 37. Para isso determinamos o x que colocado no polinômio dê o seu valor máximo. Fazendo f '(x) = 0, achamos x = – 40.71428571428569. Ou seja, o horário da morte ocorreu há aproximadamente 41 minutos antes da policia chegar (às 14h 19min).

Exercício 1.6

O enunciado nos dá o valor de 4 pontos: $A_{00} = (x_0, y_0)$, $A_{01} = (x_0, y_1)$, $A_{10} = (x_1, y_0)$ e $A_{11} = (x_1, y_1)$:

$$A_{00} = A(1, 2) = 800$$

$$A_{01} = A(1, 4) = 400$$

$$A_{10} = A(3, 2) = 600$$

$$A_{11} = A(3, 4) = 500$$

Para encontrar o f(x, y), precisamos interpolar o eixo x e y e no final substituir o que foi encontrado em y pelo o que foi encontrado em x. Interpolando no eixo x, teremos:

$$f(x, y_0) = A_{00}\,(x - x_1) / (x_0 - x_1) + A_{10}(x - x_0) / (x_1 - x_0)$$

$$f(x, y_1) = A_{01}\,(x - x_1) / (x_0 - x_1) + A_{10}(x - x_0) / (x_1 - x_0)$$

Interpolando agora no eixo y, temos:

$$f(x, y) = f(x, y_0)\,(y - y_1)/(y_0 - y_1) + f(x, y_1)\,(y - y_0)/(\,y_1 - y_0)$$

Por fim, substituindo as funções f(x, y0) e $f(x, y_1)$ em f(x, y).

$$f(x, y) = f(x, y_0)\,(y - y_1) / (y_0 - y_1) + f(x, y_1)\,(y - y_0) / (y_1 - y_0)$$

$$f(x, y) = (A_{00}\,(x - x_1) / (x_0 - x_1)+ A_{10}\,(x - x_0) / (x_1 - x_0))\,(y - y_1) / (y_0 - y_1) +$$

$$(A_{01}\,(x - x_1) / (x_0 - x_1)+ A_{11}\,(x - x_0) / (x_1 - x_0))\,(y - y_0) / (y_1 - y_0)$$

$$f(x, y) = (800\,(x - 3) / (1 - 3) + 600\,(x - 1) / (3 - 1))\,(y - 4)\,(2 - 4) +$$

$$(400\,(x - 3) / (1 - 3) + 500\,(x - 1) / (3 - 1))\,(y - 2) / (4 - 2)$$

Resolvendo a equação acima, chegaremos a nossa função f(x, y):

$f(x, y) = (200(x - 3) + 150(1 - x))(y - 4) + (100(3 - x) + 125(x - 1))(y - 2)$

$f(x, y) = (50x - 450)(y - 4) + (25x + 175)(y - 2)$

$f(x, y) = 75xy - 250x - 275y + 1450$

Agora que encontramos a função que representa o cálculo da altura, queremos o mínimo e o máximo globais. Relembrando alguns conceitos de Calculo, precisamos ver como se comportam a primeira e segunda derivada parcial da função.

Seja $D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$:

Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então f tem um mínimo em (a, b).

Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então f tem um máximo em (a, b).

Se $D < 0$, então f tem um ponto de sela em (a, b).

Se $D = 0$, então não é possível concluir nada.

Primeiro calcular a derivada de f_x:

$$f_x(a, b) = 75y - 250$$

$$y = 10/3$$

E agora calculando a derivada de f_y:

$$f_y(a, b) = 75x - 275$$

$$y = 11/3$$

Agora vamos calcular a segunda derivada D:

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$$

$$D = -5625$$

Como temos apenas um ponto crítico e o D é negativo, não existe nenhum máximo e mínimo nessa função.

Exercício 1.7

Resolução no Jupyter Notebook em anexo.