Diseño de filtros digitales TIIR basados en el microcontrolador STM32F429ZI

A. Riedinger
Universidad Tecnológica Nacional
Departamento de Electrónica
Cátedra de Teoría de Circuitos II
Bahía Blanca, Argentina
Email: ariedinger4@duck.com

Índice

I. Introducción:

Un filtro es un sistema, que dependiendo de algunos parámetros, realiza un proceso de discriminación de una señal de entrada obteniendo variaciones en su salida. Los filtros digitales tienen como entrada una señal digital y a su salida tienen otra señal digital, pudiendo haber cambiado en amplitud, frecuencia o fase dependiendo de las características del filtro.

El filtrado digital es parte del procesado de señal digital. Se le da la denominación de digital más por su funcionamiento interno que por su dependencia del tipo de señal a filtrar, así podríamos llamar filtro digital tanto a un filtro que realiza el procesado de señales digitales como a otro que lo haga de señales analógicas.

El filtrado digital consiste en la realización interna de un procesado de datos de entrada. El valor de la muestra de la entrada actual y algunas muestras anteriores (que previamente habían sido almacenadas) son multiplicadas, por unos coeficientes definidos. También podría tomar valores de la salida en instantes pasados y multiplicarlos por otros coeficientes. Finalmente todos los resultados de todas estas multiplicaciones son sumados, dando una salida para el instante actual. Esto implica que internamente tanto la salida como la entrada del filtro serán digitales, por lo que puede ser necesario una conversión analógico-digital o digital-analógico para uso de filtros digitales en señales analógicas.

Los filtros digitales se usan frecuentemente para tratamiento digital de la imagen o para tratamiento del sonido digital.

I-A. *Tipos de filtros:*

Hay varios tipos de filtros así como distintas clasificaciones para estos filtros:

- De acuerdo con la parte del espectro que dejan pasar y atenúan hay:
  - Filtros pasa alto.
  - Filtros pasa bajo.
  - Filtros pasa banda.
    - Banda eliminada.
    - Multibanda.
    - Pasa todo.
    - Resonador.
    - Oscilador.
    - Filtro peine (Comb filter).
    - Filtro ranura o filtro rechaza banda (Notch filter).
- De acuerdo con su orden:
  - Primer orden.
  - Segundo orden o superior.
- De acuerdo con el tipo de respuesta ante la entrada unitaria:
  - FIR (Respuesta Finita al Impulso o *Finite Impulse Response*).
  - IIR (Respuesta Infinita al Impulso o *Infinite Impulse Response*).
  - TIIR (Respuesta Infinita Truncada al Impulso o *Truncated Infinite Impulse Response*).
- De acuerdo con la estructura con que se implementa:
  - Directa.
  - Transpuesta.
  - Cascada.
  - Fase lineal.
  - Laticce.

I-B. *Comparación entre los distintos tipos de filtros:*

Los filtros IIR son ampliamente utilizados debido a su bajo costo computacional. Los filtros FIR, en cambio, permiten la posibilidad de implementar filtros lineales digitales con un retraso de grupo constante para todas las frecuencias. La contrapartida es que, para alcanzar funciones de transferencia de magnitud similar, los filtros FIR requieren un orden mucho mayor que su contraparte IIR. Por ejemplo, La contrapartida es que, para alcanzar funciones de transfer de magnitud similar, los filtros FIR requieren un orden mucho mayor que su contraparte IIR. Por ejemplo, un filtro general FIR de orden N requieren $N+1$ múltiplos y N sumandos.

En ciertos casos, sin embargo, es posible diseñar filtros FIR con costo computacional comparable al de los filtros IIR mientras se mantienen las ventajas que proporcionan los filtros FIR. Este tipo de filtros FIR puede ser implementado de forma eficiente mediante secuencias truncadas de bajo orden de filtros IIR. A este tipo de filtros se los conoce como filtro TIIR.

I-C. *Expresión general de un filtro digital:*

En muchas aplicaciones del procesado de señales es necesario diseñar dispositivos o algoritmos que realicen operaciones sobre las señales y que los englobaremos bajo la denominación genérica de sistemas.

Un sistema opera sobre una señal de entrada o excitación según una regla preestablecida, para generar otra señal llamada salida o respuesta del sistema a la excitación propuesta y que puede simbolizarse:

$$y[n] = T(x[n]) \tag{1}$$

donde T simboliza la transformación, operador o procesado realizado por el sistema sobre la señal x para producir la señal y (ver Fig. 1). Una de las motivaciones más fuertes para el desarrollo de herramientas generales para el análisis y diseño de sistemas es que proviniendo a menudo de aplicaciones muy diferentes tienen descripciones matemáticas similares.

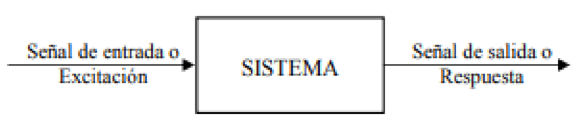

Figura 1: Esquema de sistema, señal de entrada y respuesta o salida del sistema

Existen varias maneras de representar un sistema, ya que muchos sistemas reales están construidos como interconexiones de varios subsistemas, tal como se grafica en la Fig. 2.

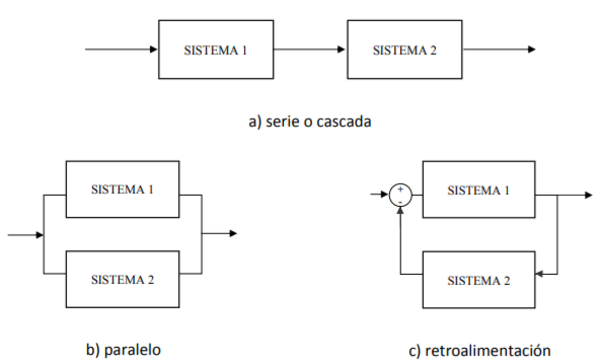

Figura 2: Interconexión de sistemas

Existen dos métodos básicos para el análisis del comportamiento o respuesta de un sistema lineal a una determinada entrada. Un primer camino se basa en obtener la solución de la ecuación entrada-salida del sistema que en general tiene la forma de las ecuaciones en diferencias lineales a coeficientes constantes a_m, b_k:

$$\sum_{m=0}^{N_a-1} a_m y[n-m] = \sum_{k=0}^{N_b-1} b_k x[n-k] \tag{2}$$

siendo N_a y N_b los órdenes máximos de las diferencias en la ecuación correspondiente a la entrada y a la saldia del sistema.

El segundo método para el análisis del comportamiento del sistema reside en la aplicación del principio de superposición y consiste en descomponer la señal de entrada en una suma pesada de señales elementales las cuales se escogen de manera que sea conocida la respuesta del sistema a las mismas. Siguiendo esta línea, una señal a tiempo discreto puede visualizarse como una secuencia pesada de impulsos unitarios:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \tag{3}$$

Aplicando la propiedad de superposición de los SLIT (Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo) (Oppenheim y Willsky, 1983), se puede determinar la salida del sistema ante una cierta entrada de la siguiente manera:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] \tag{4}$$

siendo $h[n]$ la respuesta o salida del sistema ante una entrada equivalente a un impulso unitario $\delta[n]$ denominada *respuesta al impulso del sistema*. El segundo miembro de la expresión representa el producto de convolución de la señal de entrada $x[n]$ y la respuesta al impulso del sistema $h[n]$; esto es:

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \tag{5}$$

Tanto en el caso continuo como en el caso discreto, la respuesta al impulso del sistema LTI presenta las siguientes propiedades:

- Sin memoria: $h[n] = 0$ para $n \neq 0$.
- Causal: $h[n] = 0$ para $n < 0$.
- Invertible: dado $h[n]\ \exists\, h'[n]\ :\ h[n] * h'[n] = \delta[n]$.
- Estable: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

Existen otras formas de representar un filtro, todas estas equivalentes a la respuesta al impulso unitario de sistema SLIT, sin embargo muchas veces conviene más una u otra representación. En el caso aplicar la transformada Z, a la 2 se obtiene la función de transferencia del sistema (Oppenheim y Willsky, 1983; Proakis y Manolakis; 1996; Oppenheim y Schafer, 1999):

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N_b-1} b_k z^{-k}}{\sum_{m=0}^{N_a-1} a_m z^{-m}} \tag{6}$$

donde $z = A\exp(j\Omega)$ es la variable compleja en forma polar. Particularmente si el modulo $A = 1$, la expresión de la

Ec. 6 se reduce a la respuesta en recuencia del sistema a través de la transformada de Fourier a tiempo discreto (Oppenheim y Willsky, 1983; Proakis y Manolakis; 1996; Oppenheim y Schafer, 1999):

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_b-1} b_k x[n-k] - \sum_{m=1}^{N_a-1} a_m y[n-m] \tag{7}$$

donde los coeficientes a_m y b_k son los coeficientes que definen el filtro, por lo tanto el diseño consiste en calcularlos. Como regla general se suele dejar el término $a_0 = 1$.

I-D. Definición de filtros FIR e IIR:

Un filtro FIR causal de orden N convencional se puede representar según:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N} h_k x[n-k] \tag{8}$$

Donde la función de transferencia tiene la siguiente forma:

$$H_{FIR}(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \ldots + h_N z^{-N} = z^{-N} C(z) \tag{9}$$

Y se define a $C(z)$ como el polinomio de orden N formado por los coeficientes h_k.

En cambio, un filtro IIR causal de orden P tiene la relación:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{P} a_k - y[n-k] + \sum_{l=0}^{P} b_l x[n-l] \tag{10}$$

Con la función transferencia correspondiente es:

$$H_{IIR}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_P z^{-P}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_P z^{-P}} = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{11}$$

Por tanto, $A(z)$ y $B(z)$ serán:

$$A(z) = z^P + a_1 z^{P-1} + \ldots + a_P \tag{12}$$

$$B(z) = b_0 z^P + b_1 z^{P-1} + \ldots + b_P \tag{13}$$

Y pueden ser asumidos como los polinomios de grado P en z.

El retardo de grupo se define como:

$$\tau_d(\omega) = -\frac{d \ \arg\{H(e^{j\omega})\}}{d\omega} \tag{14}$$

El retardo de grupo a frecuencia normalizada $\omega = {}^{2\pi f}/_{f_s}$; donde f_s es la frecuencia de muestreo; es el número de muestras con retraso experiezadas por la amplitud de la envolvente de banda ancha centrada en ω.

Un filtro de fase linear es aquel cuya respuesta en fase a una determinada frecuencia es una función lineal de la frecuencia; esto es, $\arg\{H(e^{j\omega})\} = K1\omega + K2$ para constantes $K1$ y $K2$. A partir de esta propiedad, se nota inmediatamente que el retardo de grupo es constante a todas las frecuencias. Filtro con una respuesta en fase lineal son usualmente los buscados, debido a que no poseen distorsión temporal dependiente de la frecuencia. Un filtro IIR con polos distintos de cero puede tener una fase lineal. Sin embargo, un filtro FIR con coeficiente $h_0, \ldots, h_N$ tiene fase lineal si existe un φ tal que para todo $k \in \{0, \ldots, N\}$:

$$h_{N-k} = e^{j\varphi} h_k^* \tag{15}$$

Esto es, si los coeficientes invertidos son conjugados complejos de la próxima secuencia sumados a una constante de cambio de fase, el retardo de grupo será entonces:

$$\tau_d(f) = \frac{N}{2} \tag{16}$$

I-E. Filtros IIR truncados (TIIR):

Considere un filtro FIR con una secuencia geométricamente truncada $h_0, h_0 p, \ldots, h_0 p^N$ como respuesta al impulso. Este filtro tiene la misma respuesta al impulso para los primeros $N+1$ términos que un filtro IIR de un solo polo con función de transferencia

$$H_{IIR}(z) = \frac{h_0}{1 - pz^{-1}} \tag{17}$$