# MODELOS MULTIVARIANTES NO ESTACIONARIOS

# MODELOS MULTIVARIANTES NO ESTACIONARIOS

### CLASES 1 y 2

- 1. Cointegración
- 2. Equilibro de largo plazo
- Modelo de corrección del error
- 4. Pruebas de cointegración

# Cointegración: introducción

En la mayoría de los casos, si combinamos dos variables que son I(1), entonces la combinación será también I(1).

De manera general, si combinamos variables con diferente orden de integración, la combinación tendrá el orden de integración del mayor, esto es.,

si 
$$X_{i,t} \sim I(d_i)$$
 para i = 1,2,3,...,k

por lo que tenemos k variables y cada una es integrada de orden d<sub>i</sub>.

Definamos 
$$z_t = \sum_{i=1}^k \alpha_i X_{it}$$
 (1)

Entonces  $z_t \sim I(m \land x d_i)$ 

#### Combinaciones lineales de variables no estacionarias

Reordenando (1), podemos escribir

$$X_{it} = \sum_{i=2}^{k} \beta_i X_{it} + z_t'$$

$$\cos \beta_i = -rac{lpha_i}{lpha_1}$$
 ,  ${z_t}' = rac{z_t}{lpha_1}$ 

Esto es una ecuación de regresión.

Sin embargo, los errores tienen propiedades no deseables,  $z_t$  no es estacionaria y está correlacionada si todas las  $X_i$  son I(1).

Queremos asegurarnos que los errores sean I(0). ¿Bajo qué circunstancias esto se cumple?

#### Definición de cointegración (Engle y Granger, 1987)

Sea  $z_t$  un vector kx1 de variables, entonces los componentes de  $z_t$  están **cointegrados** de orden (d,b) si

- i) Todos los componentes de z<sub>t</sub> son I(d)
- ii) Existe al menos un vector de coeficientes  $\alpha$  tal que  $\alpha' z_t \sim I(d-b)$  Varias series de tiempo son no estacionarias pero se "mueven juntas" en el tiempo.

Si las variables están cointegradas, esto significa que una combinación lineal de ellas es estacionaria.

Pueden existir hasta r relaciones de cointegración linealmente independientes (con  $r \le k-1$ ), conocidas como vectores de cointegración; r es el rango de cointegración de  $z_t$ .

La relación de cointegración puede ser vista como una relación de largo plazo.

# Cointegración y equilibrio

Ejemplos de posibles relaciones de cointegración en finanzas:

- precios spot y futuros
- ratio de precios relativos (internos y externos y el tipo de cambio)
- precio de acciones y dividendos
- La fuerzas de mercado que operan por la condición de no arbitraje aseguran que se cumpla la relación de equilibrio.
- La no existencia de cointegración implica que las series pueden separarse sin límite en el largo plazo.

### Modelos de corrección del error (MCE)

Cuando se introdujo por primera vez el concepto de no estacionariedad, la respuesta usual era tomar la primera diferencia de las series que son I(1).

El problema con este enfoque es que los modelos en primera diferencia no tienen solución de largo plazo.

Por ej. consideremos  $y_t$ ,  $x_t$  son I(1).

El modelo que queremos estimar es

$$\Delta y_t = \beta \Delta x_t + u_t$$

Pero esto colapsa a nada en el largo plazo.

Recordemos que la definición de largo plazo que usamos es cuando

$$y_t = y_{t-1} = y$$
;  $x_t = x_{t-1} = x$ .

Por lo que todos los términos de diferencias son 0, esto es,  $\Delta y_t = 0$ ;  $\Delta x_t = 0$ .

#### **Especificando el MCE**

Una manera de solucionar este problema consiste en usar términos en diferencias y en niveles, por ejemplo:

$$\Delta y_t = \beta_1 \Delta x_t + \beta_2 (y_{t-1} - \gamma x_{t-1}) + u_t \tag{2}$$

 $y_{t-1} - \gamma x_{t-1}$  es conocido como el **término de corrección del error**.

Si las variables  $(y_t, x_t)$  están cointegradas con coeficiente de cointegración  $\gamma$ , entonces  $(y_{t-1} - \gamma x_{t-1})$  será I(0) aunque las variables que lo constituyen  $(y_t, x_t)$  son I(1).

Es válido estimar (2) por MCO.

El **teorema de la representación de Granger** muestra que cualquier relación de cointegración puede ser expresada mediante un MCE.

#### Pruebas de cointegración

El MCE puede ser generalizado para incluir más de dos variables:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \dots + \beta_k x_{kt} + u_t$$
 (3)

 $u_t$  debe ser I(0) si las variables  $y_t$ ,  $x_{2t}$ , ...  $x_{kt}$  están cointegradas.

Pero, ¿y si queremos probar que los residuos de la ecuación (3) son estacionarios? Podemos usar las pruebas DF / ADF sobre u<sub>t</sub>. Por lo que tenemos la siguiente regresión:

$$\Delta \widehat{u_t} = \psi \widehat{u_{t-1}} + v_t \qquad \text{con } v_t \sim iid.$$

Como ésta es un prueba en los residuos (que son estimados) de un modelo,  $\widehat{u_t}$ , los valores críticos deben ser cambiados.

### Pruebas de cointegración: Conclusiones

- Engle y Granger (1987) tabularon un nuevo conjunto de valores críticos por lo que la prueba es conocida como la prueba de Engle-Granger (E.G.) .
- Podemos usar la prueba esadística ADF o PP para testear la estacionariedad de  $\widehat{u_t}$  .
- ¿Cuáles son las hipótesis nula y alternativas para una prueba en los residuos de cointegración?

H<sub>0</sub>: hay una raíz unitaria en los residuos de la regresión de cointegración

H<sub>1</sub>: los residuos de la regresión de cointegración son estacionarios

# Métodos de estimación de parámetros en sistemas cointegrados: el enfoque de Engle-Granger

Existen (al menos) 3 métodos que podemos usar: Engle-Granger, Engle Yoo y Johansen.

#### 1- El método de Engle Granger de 2 etapas

#### Paso 1:

- Asegurarse que todas las variables individuales sean I(1).
- Luego estimar la regresión de cointegración usando MCO.
- Guardar los residuos de la regresión de cointegración,
- Testear si los residuos son I(0).

#### Paso 2:

- Utilizar los residuos del paso 1 rezagados como una variable en el modelo de correción del error.

$$\Delta y_t = \beta_1 \Delta x_t + \beta_2 (\widehat{u_{t-1}}) + u_t$$
 con  $\widehat{u_{t-1}} = y_{t-1} - \widehat{\gamma} x_{t-1}$ 

# Ejemplo de un modelo con series no estacionarias: relación de rezagos y adelantos entre los precios spot y futuros

Esperamos que los cambios en el precio spot de un activo financiero esté contemporánea y perfectamente correlacionado con su precio futuro y que no estén autocorrelacionados en forma cruzada (crossautocorrelated):

Es decir: 
$$corr(\Delta ln(F_t), \Delta ln(S_t)) \approx 1$$
  $corr(\Delta ln(F_t), \Delta ln(S_{t-k})) \approx 0 \quad \forall k$   $corr(\Delta ln(F_{t-j}), \Delta ln(S_t)) \approx 0 \quad \forall j$ 

Podemos probar esta idea modelando la relación de rezagos y adelantos entre las dos variables.

Veremos los trabajos de Tse (1995) y Brooks (2001).

# Datos de precios spot y futuros

- Tse (1995): 1055 observaciones diarias del índice de bolsa NSA e índices de bolsa futuros utilizando datos de diciembre de 1988 a abril de 1993.
- Brooks (2001): 13035 observaciones en un rango de 10 minutos del índice de bolsa e índices de bolsa futuros para todos los días con transacciones para el período junio 1996 a diciembre de 1997.

### Metodología

El precio futuro "justo" (fair) viene dado por:

$$F_t^* = S_t e^{(r-d)(T-t)}$$

donde  $F_t^*$  es el precio futuro "justo",  $S_t$  es el precio spot, r es una tasa continua compuesta de interés de un activo libre de riesgo, d es el retorno continuo compuesto de los dividendos derivados del índice hasta que el contrato a futuro se realiza, y (T-t) es el tiempo para desarrollar el contrato futuro. Tomando logaritmos en ambas lados de la anterior ecuación

$$f_t^* = s_t + (r - d)(T - t)$$

Primero, analizar estacionariedad de f<sub>t</sub> y s<sub>t</sub>.

# Prueba de DF en el log-precios y retornos de datos del FTSE con alta frecuencia

|  | Futuro   | Spot      |
|--|----------|-----------|
| Estadístico Dickey-Fuller datos de Log-Price | -0.1329  | -0.7335   |
| Estadístico Dickey Fuller datos de retornos  | -84.9968 | -114.1803 |

# Prueba de regresión de cointegración sobre los residuos

**Conclusión**: In  $F_t$  y In  $S_t$  no son estacionarios, pero  $\Delta lnF_t$  y  $\Delta lnS_t$  sí son estacionarios.

Sin embargo, un modelo que contiene sólo términos de primeras diferencias no tiene relaciones de largo plazo.

La solución consiste en ver si existe una relación de cointegración entre f<sub>t</sub> y s<sub>t</sub> que significa que podemos incluir correctamente variables en niveles.

Regresión de cointegración potencial:  $s_t = \gamma_0 + \gamma_1 f_t + z_t$  donde  $z_t$  es un término de perturbación.

Estime la regresión, calcule los residuos,  $\widehat{z_t}$ , y testee si son estacionarios.

# Ecuación estimada y prueba de cointegración

| Regresión de cointegración |                    |  |  |
|----------------------------|--------------------|--|--|
| Coeficiente                | Valor estimado     |  |  |
| $\gamma_{o}$               | 0.1345             |  |  |
| $\gamma_{\mathtt{1}}$      | 0.9834             |  |  |
| Prueba DF residuos         | Prueba estadística |  |  |
| $\hat{\mathcal{Z}}_t$      | -14.7303           |  |  |

# Conclusiones sobre raíces unitarias y pruebas de cointegración

Conclusión:  $\widehat{z_t}$  es estacionaria y por lo tanto tenemos una relación de cointegración entre ln  $F_t$  y ln  $S_t$ .

El paso final en el método en 2 etapas de Engle-Granger consiste en utilizar los residuos de la regresión de la primera etapa, como los términos del mecanismo de corrección de errores en la ecuación general.

El modelo general es:

$$\Delta lnS_t = \beta_0 + \delta z_{t-1} + \beta_1 \Delta lnS_{t-1} + \alpha_1 \Delta lnF_{t-1} + v_t$$

#### **MCE** estimado

| Coeficiente        | Valor estimado | Estadístico t |
|--------------------|----------------|---------------|
| $\widehat{eta_0}$  | 9,67E-06       | 1,6083        |
| δ                  | -8,34E-01      | -5,1298       |
| $\widehat{eta_1}$  | 0,1799         | 19,2886       |
| $\widehat{lpha_1}$ | 0,1312         | 20,4946       |

Miremos los signos y la significación de los coeficientes:

 $\widehat{\alpha_1}$  es positivo y altamente significativo

 $\widehat{\beta_1}$  es positivo y altamente significativo

 $\hat{\delta}$  es negativo y significativo

#### **Prediciendo retornos**

¿Es posible usar el MCE para producir mejores predicciones que usando otros modelos?

#### Comparación de precisión en estimación fuera de la muestra

|                         | MCE                 | MCE-COC             | ARIMA               | VAR                 |
|-------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| RMSE<br>MAE             | 0.0004382<br>0.4259 | 0.0004350<br>0.4255 | 0.0004531<br>0.4382 | 0.0004510<br>0.4378 |
| % Dirección<br>Correcta | 67.69%              | 68.75%              | 64.36%              | 66.80%              |

#### Algunas limitantes del enfoque de Engle-Granger

Este método sufre de los siguientes problemas:

- 1. Las pruebas de raíces unitarias y cointegración tienen bajo poder en muestras finitas.
- 2. Estamos forzados a tratar las variables de manera asimétrica y especificamos que una es la variable dependiente y las otras son variables independientes.
- **3.** No podemos realizar pruebas de hipótesis sobre la verdadera relación de cointegración estimada en la primera etapa.
- 4. Solamente permite detectar una relación (o vector) de cointergación.
- El problema 1 es un problema de bajo tamaño muestral que debería desaparecer en términos asintóticos.
- Los problemas 2 y 4 se resuelven con el enfoque de Johansen.
- El problema 3 se resuelve con el enfoque de Engle-Yoo o el de Johansen.

# Método de Engle y Yoo en 3 etapas

Uno de los problemas del método en dos etapas de EG es que no podemos hacer inferencias sobre la verdadera regresión de cointegración.

El método de Engle y Yoo (EY) en 3 etapas toma las primeras 2 etapas del método de EG.

EY agrega un tercer paso que consiste en actualizar las estimaciones del vector de cointegración y de sus errores estándares.

El problema más importante con dicha técnica es que en el caso general, donde tenemos más de dos variables que están cointegradas, habrá únicamente una relación de cointegración.

De hecho, puede haber hasta r vectores de cointegración linealmente independientes (con  $r \le g-1$ ), donde g es el número total de variables.

# Método de Engle y Yoo en 3 etapas

Por lo que, en el caso en que solo tenemos (y, x) entonces r solo puede ser 1 ó 0.

Sin embargo en el caso general puede haber más de una relación de cointegración.

Y si existen varias relaciones, ¿Cómo sabemos cuántas son o si encontramos la "óptima"?

La respuesta a esta pregunta es usar un *enfoque de sistemas de cointegración* que nos permite determinar todas las *r* relaciones de cointegración- es el método de Johansen.

# Cointegración usando el método de Johansen basado en VARs

Para usar el método de Johansen reescribimos el VAR

$$y_{t} = \beta_{1} y_{t-1} + \beta_{2} y_{t-2} + \dots + \beta_{k} y_{t-k} + u_{t}$$

$$g \times 1 \qquad g \times g \times 1 \qquad g \times 1$$

como un **VECM**, esto es

$$\Delta y_{t} = \Pi y_{t-k} + \Gamma_{1} \Delta y_{t-1} + \Gamma_{2} \Delta y_{t-2} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta y_{t-(k-1)} + u_{t}$$

$$con \Pi = \left(\sum_{j=1}^{k} \beta_{j} - I_{g}\right) \quad \text{y} \quad \Gamma_{i} = \left(\sum_{j=1}^{i} \beta_{j} - I_{g}\right)$$

 $\Pi$  es la matriz de coeficientes de largo plazo pues todos los  $\Delta y_{t-i} = 0$ .

# Revisión de algebra matricial necesaria para la prueba de Johansen

Sea  $\Pi$  una matriz cuadrada gxg y sea c un vector no nulo gx1 y  $\lambda$  denota escalares.

$$\lambda$$
 es la raíz característica de  $\Pi$  si escribimos 
$$\Pi$$
 c =  $\lambda$  c 
$$\text{gxg gx1} \quad \text{gx1}$$

También podemos escribir

$$\Pi c = \lambda I_g c$$

y por lo tanto

$$(\Pi - \lambda I_g) c = 0$$

donde I<sub>g</sub> es la matriz identidad.

# Revisión de Algebra Matricial

Dado que por definición c  $\neq$  0, para que el sistema tenga una solución cero, requerimos que la matriz  $(\Pi - \lambda I_g)$  sea singular (determinante igual a 0):

$$\left|\Pi - \lambda I_g\right| = 0$$

Por ejemplo, sea  $\Pi$  una matriz 2x 2,  $\Pi = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 

Por lo que la ecuación característica es:

$$\left|\Pi - \lambda I_g\right| = \left|\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$= \left|\begin{bmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix}\right| = (5 - \lambda)(4 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 9\lambda + 18$$

# Revisión de Algebra Matricial

Las soluciones son  $\lambda$ = 6 y  $\lambda$  = 3.

Las raíces características son conocidas también como valores propios.

El **rango** de una matriz es igual al número de filas o columnas de la matriz linealmente independientes.

Denotamos Rango( $\Pi$ ) = r

El rango de una matriz es igual al orden de la matriz cuadrada más grande que obtenemos de Π que tiene un determinante diferente de cero.

Por ejemplo, el determinante de  $\Pi$  es  $\neq$  0, por lo que tiene rango 2.

# Prueba de Johansen basada en los Valores Propios

Propiedades de los valores propios de cualquier matriz cuadrada A:

- 1. la suma de los valores propios es la traza
- 2. el producto de los valores propios es el determinante
- 3. el número de valores propios diferentes de cero es el rango

Volviendo a la prueba de Johansen, la representación VECM del modelo VAR es

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-k} + \Gamma_1 \Delta y_{t-k} + \Gamma_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta y_{t-(k-1)} + u_t$$

La prueba de cointegración entre las y's se calcula considerando el rango de la matriz  $\Pi$  a través de sus valores propios.

El rango de una matriz es igual al número de raíces características (valores propios) diferentes de cero.

# Prueba de Johansen Basada en los Valores Propios

Se ordenan los valores propios  $\lambda_i$ :

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_g$$

Si las variables no están cointegradas, el rango de  $\Pi$  no será diferente de cero, por lo tanto  $\lambda_i = 0 \ \forall$  i. Entonces si  $\lambda_i = 0$ , Ln(1- $\lambda_i$ ) = 0

Si los  $\lambda_i$ 's son raíces, deben ser menores que 1 en valor absoluto.

Si el rango ( $\Pi$ ) = 1, entonces Ln(1-  $\lambda_1$ ) será negativo y Ln(1-  $\lambda_i$ ) = 0

Si el valor propio i no es cero, entonces  $Ln(1-\lambda_i) < 0 \quad \forall i > 1$ .

# La prueba estadística de Johansen

Las pruebas estadísticas de cointegración son:

$$\lambda_{traza}(r) = -T \sum_{i=\gamma+1}^{g} ln(1 - \widehat{\lambda_i})$$

$$\gamma$$

$$\lambda_{max}(r, r+1) = -T ln(1 - \widehat{\lambda_{t+1}})$$

donde  $\widehat{\lambda_i}$  es el valor estimado para el i-ésimo valor propio ordenado de la matriz  $\Pi$ .

 $\lambda_{traza}$  traza testea la nula de que el número de vectores de cointegración es menor o igual a r contra una alternativa sin especificar.

 $\lambda_{traza}$  =0 cuando todos los  $\lambda_i$  = 0, por lo que es una prueba conjunta.

 $\lambda_{max}$  testea la nula de que el número de vectores de cointegración es r contra una alternativa de r+1.

# Decomposición de la Matriz Π

Para todo 1 < r < g,  $\Pi$  se define como el producto de dos matrices:

$$\Pi = \alpha \beta'$$
gxg gxr rxg

 $m{\beta}$  contiene el vector de cointegración mientras que  $m{\alpha}$  da la "ponderación" de cada vector de cointegración en cada ecuación.

Por ej. si g=4 y r=1,  $\alpha$  y  $\beta$  serán 4x1, y  $\Pi$ y<sub>t-k</sub> vendrá dada por:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{14} \end{pmatrix} (\beta_{11}y_1 \quad \beta_{12}y_2 \quad \beta_{13}y_3 \quad \beta_{14}y_4)$$

#### Valores críticos de Johansen

Johansen y Juselius (1990) calcularon valores críticos para los dos estadísticos. La distribución de los test estadísticos no es estándar.

Los valores críticos dependen de:

- 1. el valor g-r, que es el número de componentes no estacionarios
- 2. si se incluye constante y/o tendencia en la regresión

Si la prueba estadística es mayor que los valores críticos de las tablas de Johansen, rechazamos la hipótesis nula de que existen r vectores de cointegración en favor de la alternativa de que hay más de r.

#### La Secuencia de la Prueba de Johansen

La secuencia de la prueba bajo la hipótesis nula es r=0,1,...,g-1 por lo que las hipótesis para  $\lambda_{traza}$  son

$$egin{array}{lll} H_0: & r=0 & vs & H_1: 0 < r \leq g \\ H_0: & r=1 & vs & H_1: 1 < r \leq g \\ H_0: & r=2 & vs & H_1: 2 < r \leq g \\ & \dots & \dots & \dots \\ H_0: & r=g-1 & vs & H_1: r=g \end{array}$$

Aumentamos el valor de *r* hasta que no podamos rechazar la hipótesis nula.

### Interpretación de los Resultados de la Prueba de Johansen

Pero, ¿cómo esto corresponde a una prueba sobre el rango de la matriz  $\Pi$ ?

 $\mathbf{r}$  es el rango de  $\Pi$ .

 $\Pi$  no puede ser de rango completo (g) pues este correspondería al caso original de  $y_t$  estacionaria.

Si  $\Pi$  es de rango cero, entonces por analogía con el caso univariado,  $\Delta y_t$  depende solo de  $\Delta y_{t-1}$  y no de  $y_{t-1}$ , por lo que no hay una relación de largo plazo entre los elementos de  $y_{t-1}$ . Por lo tanto no hay cointegración.

Para  $1 < \text{rango } (\Pi) < g$ , hay múltiples vectores de cointegración.

### Prueba de Cointegración de Johansen

- EG no permite hacer pruebas de hipótesis sobre la restricción de cointegración pero Johansen sí.
- Si existen *r* vectores de cointegración, solamente esas combinaciones lineales serán estacionarias.
- Es posible hacer prueba de hipótesis sobre uno o más coeficientes de la relación de cointegración viendo la hipótesis como una restricción en la matriz  $\Pi$ .
- Todas las combinaciones lineales de los vectores de cointegración son también vectores de cointegración.
- Si el número de vectores de cointegración es alto, y la hipótesis bajo consideración es simple, es posible recombinar los vectores de cointegración para satisfacer la restricción exactamente.

# Prueba de cointegración de Johansen

A medida que la restricción se vuelve más compleja, será imposible cumplirla mediante una renormalización.

Luego de esto, si la restricción no es severa, entonces el vector de cointegración no cambiará mucho luego de imponer la restricción.

La prueba estadística para esta hipótesis es:

$$-T\sum_{i=1}^{r}[\ln(1-\lambda_{i})-\ln(1-{\lambda_{i}}^{*})]\sim\chi^{2}(m)$$

donde,

 $\lambda_i^*$  son las raíces características del modelo restringido

 $\lambda_i$  son las raíces características del modelo sin restringir

r es el número de raíces características diferentes de cero en el modelo sin restringir, y m es el número de restricciones.

#### Prueba de Cointegración de Johansen: Ejemplos

Ejemplo 1: Hamilton (1994, pp.647)

¿Se cumple la relación de PPP (purchasing power parity) para los precios y tipo de cambio de USA e Italia?

Se estimó un VAR con 12 rezagos y 189 observaciones. Los valores de la prueba de Johansen fueron:

| r | $\lambda$ max | Valores Críticos |
|---|---------------|------------------|
| 0 | 22.12         | 20.8             |
| 1 | 10.19         | 14.0             |

Conclusión: existe una relación de cointegración.

#### Prueba de Cointegración de Johansen: Ejemplos

PPP establece que el tipo de cambio entre 2 países es igual al ratio de los precios relativos.

Una condición necesaria y suficiente para PPP es que el log del tipo de cambio entre los países A y B, y el log de los precios de los países A y B estén cointegrados, con vector de cointegración [1-11].

Chen (1995) usa datos mensuales de Abril 1973 a Diciembre de 1990 para probar la hipótesis de PPP usando Johansen.

#### Pruebas de Cointegración con Datos de Europa

| Prueba de r          | r = 0  | r≤ 1   | r≤ 2 | $lpha_1$ | $\alpha_2$ |
|----------------------|--------|--------|------|----------|------------|
| cointegración entre: |        |        |      | -        | 2          |
| FRF-DEM              | 34,63* | 17,1   | 6,26 | 1,33     | -2,5       |
| FRF-ITL              | 52,69* | 15,51  | 5,43 | 0,65     | -2,52      |
| FRF-NLG              | 68,10* | 16,37  | 6,42 | 0,58     | -0,8       |
| FRF-BEF              | 52,54* | 26,09* | 3,63 | 0,78     | -1,15      |
| DEM-ITL              | 42,59* | 20,76* | 4,79 | 5,8      | -2,25      |
| DEM-NLG              | 50,25* | 17,79  | 3,28 | 0,12     | -0,25      |
| DEM-BEF              | 69,13* | 27,13  | 4,52 | 0,87     | -0,52      |
| ITL-NLG              | 37,51* | 14,22  | 5,05 | 0,55     | -0,71      |
| ITL-BEF              | 69,24* | 32,16  | 7,15 | 0,73     | -1,28      |
| NLG-BEF              | 64,52* | 21,97* | 3,88 | 1,69     | -2,17      |
| Valores críticos     | 31,52  | 17,95  | 8,18 | -        | -          |

FRF: French franc; DEM: German Mark; ITL: Italian lira; NLG: Dutch Guilder; BEF: Belgian franc. Source: Chen (1995) . Reprinted with the permission of Taylor and Francis Ltd. (www.tandf.co.uk)

# Ejemplo 3: ¿Están Cointegrados los Mercados de Bonos Internacionales?

Mills y Mills (1991). The International Transmission of Bond Market Movements. Bulletin of Economics Research.

Si los mercados financieros están cointegrados, entonces tienen una "tendencia estocástica común".

Datos diarios de cierre de retornos de bonos de gobiernos en cuatro mercados de bonos US, UK, Alemania y Japón.

Para probar cointegración, una condición n ecesaria pero no suficiente es que los rendimientos sean no estacionarios.

Las cuatro series son I(1).

#### Prueba de Cointegración entre los Rendimientos

Usan Johansen. A lo sumo pueden existir 3 vectores de cointegración linealmente independientes.

Usan el estadístico de la traza:

$$\lambda_{traza}(r) = -T \sum_{i=\nu+1}^{g} ln(1-\widehat{\lambda_i})$$
,

donde  $\lambda_i$  son los valores propios ordenados.

| Prueba de Johansen                  |             |           |         |
|-------------------------------------|-------------|-----------|---------|
| r (número de vectores de            | Estadístico | Valores c | ríticos |
| cointegración bajo H <sub>0</sub> ) |             | 10%       | 5%      |
| 0                                   | 22.06       | 35.6      | 38.6    |
| 1                                   | 10.58       | 21.2      | 23.8    |
| 2                                   | 2.52        | 10.3      | 12.0    |
| 3                                   | 0.12        | 2.9       | 4.2     |

Mills y Mills (1991).

#### Prueba de Cointegración entre los Rendimientos

Conclusión: No existen vectores de cointegración.

El trabajo estima un VAR para las primeras diferencias de los retornos:

$$\Delta X_{t} = \sum_{i=1}^{k} \Gamma_{i} \Delta X_{t-i} + \nu_{t}$$

$$\text{Donde } X_t = \begin{bmatrix} X(US) \\ X(UK) \\ X(WG) \\ X(IAP) \end{bmatrix}, \Gamma_i = \begin{bmatrix} \Gamma_{11i} & \Gamma_{12i}\Gamma_{13i} & \Gamma_{14i} \\ \Gamma_{21i} & \Gamma_{22i}\Gamma_{23i} & \Gamma_{24i} \\ \Gamma_{31i} & \Gamma_{32i}\Gamma_{33i} & \Gamma_{34i} \\ \Gamma_{41i} & \Gamma_{42i}\Gamma_{43i} & \Gamma_{44i} \end{bmatrix}, \nu_t = \begin{bmatrix} \nu_{1t} \\ \nu_{2t} \\ \nu_{3t} \\ \nu_{4t} \end{bmatrix}$$

Fijan k = 8.

## Descomposición de Varianzas para un VAR de Retornos de Bonos de Países

| Explicando     | Días     |      | Explicada po | r movimiento es |       |
|----------------|----------|------|--------------|-----------------|-------|
| movimientos en | adelante | US   | UK           | Alemania        | Japón |
| US             | 1        | 95.6 | 2.4          | 1.7             | 0.3   |
|                | 5        | 94.2 | 2.8          | 2.3             | 0.7   |
|                | 10       | 92.9 | 3.1          | 2.9             | 1.1   |
|                | 20       | 92.8 | 3.2          | 2.9             | 1.1   |
| UK             | 1        | 0.0  | 98.3         | 0.0             | 1.7   |
|                | 5        | 1.7  | 96.2         | 0.2             | 1.9   |
|                | 10       | 2.2  | 94.6         | 0.9             | 2.3   |
|                | 20       | 2.2  | 94.6         | 0.9             | 2.3   |
| Alemania       | 1        | 0.0  | 3.4          | 9 4.6           | 2.0   |
|                | 5        | 6.6  | 6.6          | 84.8            | 3.0   |
|                | 10       | 8.3  | 6.5          | 82.9            | 3.6   |
|                | 20       | 8.4  | 6.5          | 82.7            | 3.7   |
| Japón          | 1        | 0.0  | 0.0          | 1.4             | 100.0 |
|                | 5        | 1.3  | 1.4          | 1.1             | 96.2  |
|                | 10       | 1.5  | 2.1          | 1.8             | 94.6  |
|                | 20       | 1.6  | 2.2          | 1.9             | 94.2  |

Mills y Mills (1991)

#### Función de Impulso Respuesta para un VAR de retornos de Bonos de Países

| T 1 D              | e TAD et .              | 1 D 1 37' 11   |
|--------------------|-------------------------|----------------|
| Impilise Responses | for VAR of Internationa | ii Bona Yielas |

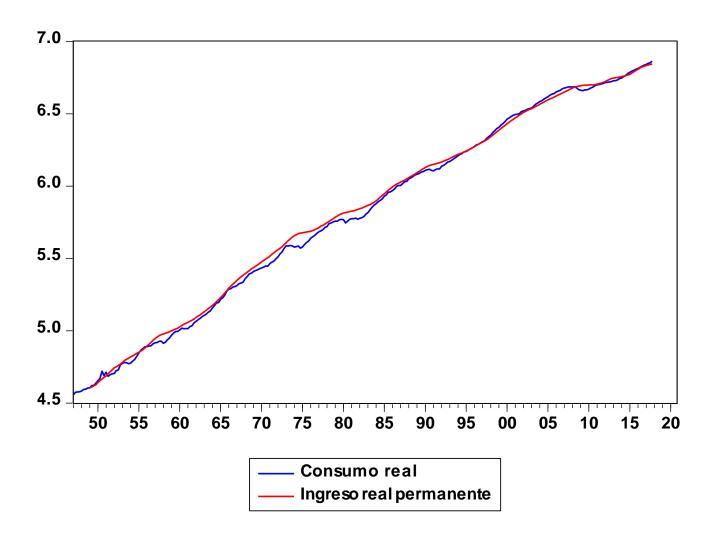
|                  | Response of US to |                        |         |        |  |
|------------------|-------------------|------------------------|---------|--------|--|
| Days after shock | US                | UK                     | Germany | Japan  |  |
| 0                | 0.98              | 0.00                   | 0.00    | 0.00   |  |
| 1                | 0.06              | 0.01                   | - 0. 10 | 0.05   |  |
| 2                | - 0.02            | 0.02                   | - 0.14  | 0.07   |  |
| 3                | 0.09              | - 0.04                 | 0.09    | 0.08   |  |
| 4                | - 0.02            | - 0.03                 | 0.02    | 0.09   |  |
| 10               | - 0.03            | - 0.01                 | - 0.02  | - 0.01 |  |
| 20               | 0.00              | 0.00                   | - 0.10  | - 0.01 |  |
|                  | Response of UK t  | o innovations in       |         |        |  |
| Days after shock | US                | UK                     | Germany | Japan  |  |
| 0                | 0.19              | 0.97                   | 0.00    | 0.00   |  |
| 1                | 0.16              | 0.07                   | 0.01    | - 0.06 |  |
| 2                | - 0.01            | - 0.01                 | - 0.05  | 0.09   |  |
| 3                | 0.06              | 0.04                   | 0.06    | 0.05   |  |
| 4                | 0.05              | - 0.01                 | 0.02    | 0.07   |  |
| 10               | 0.01              | 0.01                   | - 0.04  | - 0.01 |  |
| 20               | 0.00              | 0.00                   | - 0.01  | 0.00   |  |
|                  | •                 | nany to innovations in |         |        |  |
| Days after shock | US                | UK                     | Germany | Japan  |  |
| 0                | 0.07              | 0.06                   | 0.95    | 0.00   |  |
| 1                | 0.13              | 0.05                   | 0.11    | 0.02   |  |
| 2                | 0.04              | 0.03                   | 0.00    | 0.00   |  |
| 3                | 0.02              | 0.00                   | 0.00    | 0.01   |  |
| 4                | 0.01              | 0.00                   | 0.00    | 0.09   |  |
| 10               | 0.01              | 0.01                   | - 0.01  | 0.02   |  |
| 20               | 0.00              | 0.00                   | 0.00    | 0.00   |  |
|                  | Response of Japan |                        |         |        |  |
| Days after shock | US                | UK                     | Germany | Japan  |  |
| 0                | 0.03              | 0.05                   | 0.12    | 0.97   |  |
| 1                | 0.06              | 0.02                   | 0.07    | 0.04   |  |
| 2                | 0.02              | 0.02                   | 0.00    | 0.21   |  |
| 3                | 0.01              | 0.02                   | 0.06    | 0.07   |  |
| 4                | 0.02              | 0.03                   | 0.07    | 0.06   |  |
| 10               | 0.01              | 0.01                   | 0.01    | 0.04   |  |
| 20               | 0.00              | 0.00                   | 0.00    | 0.01   |  |

#### Función de Impulso Respuesta para un VAR de retornos de Bonos de Países

| Impulse Responses | for VAR of Internations | al Bond Yields |
|-------------------|-------------------------|----------------|

|                  | Response of US  | to innovations in      |         |        |
|------------------|-----------------|------------------------|---------|--------|
| Days after shock | US              | UK                     | Germany | Japan  |
| 0                | 0.98            | 0.00                   | 0.00    | 0.00   |
| 1                | 0.06            | 0.01                   | - 0. 10 | 0.05   |
| 2                | - 0.02          | 0.02                   | - 0.14  | 0.07   |
| 3                | 0.09            | - 0.04                 | 0.09    | 0.08   |
| 4                | - 0.02          | - 0.03                 | 0.02    | 0.09   |
| 10               | - 0.03          | - 0.01                 | - 0.02  | - 0.01 |
| 20               | 0.00            | 0.00                   | - 0.10  | - 0.01 |
|                  |                 | to innovations in      |         |        |
| Days after shock | US              | UK                     | Germany | Japan  |
| 0                | 0.19            | 0.97                   | 0.00    | 0.00   |
| 1                | 0.16            | 0.07                   | 0.01    | - 0.06 |
| 2                | - 0.01          | - 0.01                 | - 0.05  | 0.09   |
| 3                | 0.06            | 0.04                   | 0.06    | 0.05   |
| 4                | 0.05            | - 0.01                 | 0.02    | 0.07   |
| 10               | 0.01            | 0.01                   | - 0.04  | - 0.01 |
| 20               | 0.00            | 0.00                   | - 0.01  | 0.00   |
|                  | Response of Ger | many to innovations in |         |        |
| Days after shock | US              | UK                     | Germany | Japan  |
| 0                | 0.07            | 0.06                   | 0.95    | 0.00   |
| 1                | 0.13            | 0.05                   | 0.11    | 0.02   |
| 2                | 0.04            | 0.03                   | 0.00    | 0.00   |
| 3                | 0.02            | 0.00                   | 0.00    | 0.01   |
| 4                | 0.01            | 0.00                   | 0.00    | 0.09   |
| 10               | 0.01            | 0.01                   | - 0.01  | 0.02   |
| 20               | 0.00            | 0.00                   | 0.00    | 0.00   |
|                  |                 | an to innovations in   |         |        |
| Days after shock | US              | UK                     | Germany | Japan  |
| 0                | 0.03            | 0.05                   | 0.12    | 0.97   |
| 1                | 0.06            | 0.02                   | 0.07    | 0.04   |
| 2                | 0.02            | 0.02                   | 0.00    | 0.21   |
| 3                | 0.01            | 0.02                   | 0.06    | 0.07   |
| 4                | 0.02            | 0.03                   | 0.07    | 0.06   |
| 10               | 0.01            | 0.01                   | 0.01    | 0.04   |
| 20               | 0.00            | 0.00                   | 0.00    | 0.01   |

Ejemplo 4. ¿Están cointegrados el consumo privado y el ingreso permanente?



#### Datos para EEUU:

- Ingreso personal disponible en billones de US dólares, ajustado por estacionalidad.
- Gastos de consumo personal, en billones de US dólares, ajustados por estacionalidad.
- iii. Deflactor implícito en los gastos de consumo personal, ajustado por estacionalidad
- iv. Período 1949Q1-2017Q4
- v. Fuente: FRED
- Se analiza la estacionariedad de las series y la posibilidad de que exista una relación estable de equilibrio, en el largo plazo entre ellas.
- Teoría lo dice, ¿lo avalan los datos?

Null Hypothesis: LOG(I\_C\_R\_US) has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=15)

|  |           | t-Statistic | Prob.* |
|--|-----------|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic |           | -1.608058   | 0.4771 |
| Test critical values:                  | 1% level  | -3.453483   |        |
|  | 5% level  | -2.871619   |        |
|  | 10% level | -2.572213   |        |

<sup>\*</sup>MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable: D(LOG(I\_C\_R\_US))

Method: Least Squares
Date: 04/02/18 Time: 13:53
Sample (adjusted): 1947Q4 2017Q4

Included observations: 281 after adjustments

| Variable   | Coefficient  | Std. Error  | t-Statistic                             | Prob.   |
|--|--|---|---|---|
| LOG(I_C_R_US(-1))  | -0.001083  | 0.000674  | -1.608058                               | 0.1090  |
| D(LOG(I_C_R_US(-1))  | 0.054528   | 0.056971  | 0.957106                                | 0.3393  |
| D(LOG(I_C_R_US(-2))  | 0.309108   | 0.056901  | 5.432367                                | 0.0000  |
| С  | 0.011465   | 0.004091  | 2.802158                                | 0.0054  |
| R-squared Adjusted R-squared S.E. of regression Sum squared resid Log likelihood F-statistic Prob(F-statistic) | 0.119017<br>0.109476<br>0.007645<br>0.016190<br>972.7975<br>12.47387<br>0.000000 | Mean depende<br>S.D. depende<br>Akaike info cri<br>Schwarz crite<br>Hannan-Quin<br>Durbin-Watso | ent var<br>iterion<br>rion<br>n criter. | 0.008136<br>0.008101<br>-6.895356<br>-6.843564<br>-6.874584<br>2.004562 |

Null Hypothesis: D(LOG(I\_C\_R\_US)) has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=15)

|                       |                   | t-Statistic | Prob.* |
|-----------------------|-------------------|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Full | er test statistic | -8.051752   | 0.0000 |
| Test critical values: | 1% level          | -3.453483   |        |
|                       | 5% level          | -2.871619   |        |
|                       | 10% level         | -2.572213   |        |

<sup>\*</sup>MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable: D(LOG(I\_C\_R\_US),2)

Method: Least Squares Date: 04/02/18 Time: 13:53

Sample (adjusted): 1947Q4 2017Q4

Included observations: 281 after adjustments

| Variable   | Coefficient  | Std. Error   | t-Statistic                              | Prob.   |
|--|--|--|--|---|
| D(LOG(I_C_R_US(-1))) D(LOG(I_C_R_US(-1)), C  | -0.615300<br>-0.319801<br>0.005003   | 0.076418<br>0.056672<br>0.000772   | -8.051752<br>-5.643008<br>6.483737       | 0.0000<br>0.0000<br>0.0000  |
| R-squared Adjusted R-squared S.E. of regression Sum squared resid Log likelihood F-statistic Prob(F-statistic) | 0.509254<br>0.505724<br>0.007667<br>0.016341<br>971.4920<br>144.2424<br>0.000000 | Mean depende<br>S.D. depende<br>Akaike info cr<br>Schwarz crite<br>Hannan-Quin<br>Durbin-Watso | ent var<br>iterion<br>rion<br>in criter. | 2.39E-05<br>0.010905<br>-6.893181<br>-6.854338<br>-6.877603<br>2.009086 |

Null Hypothesis: LOG(I\_I\_P) has a unit root

Exogenous: Constant, Linear Trend

Lag Length: 10 (Automatic - based on SIC, maxlag=15)

|   |  | t-Statistic                                      | Prob.* |
|---|--|--|--------|
| Augmented Dickey-Fu Test critical values: | ller test statistic<br>1% level<br>5% level<br>10% level | -1.075779<br>-3.993066<br>-3.426874<br>-3.136704 | 0.9300 |

<sup>\*</sup>MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable: D(LOG(I\_I\_P))

Method: Least Squares Date: 04/02/18 Time: 13:52

Sample (adjusted): 1951Q4 2017Q4

Included observations: 265 after adjustments

| Variable   | Coefficient  | Std. Error   | t-Statistic                           | Prob.   |
|--|--|--|---------------------------------------|---|
| LOG(I_I_P(-1)) D(LOG(I_I_P(-1))) D(LOG(I_I_P(-2))) D(LOG(I_I_P(-3)))   | -0.001385  | 0.001287   | -1.075779                             | 0.2831  |
|  | 0.893302   | 0.054104   | 16.51071                              | 0.0000  |
|  | 0.125227   | 0.069936   | 1.790593                              | 0.0746  |
|  | -0.018278  | 0.069956   | -0.261281                             | 0.7941  |
| D(LOG(I_I_P(-4))) D(LOG(I_I_P(-5))) D(LOG(I_I_P(-6))) D(LOG(I_I_P(-7))) D(LOG(I_I_P(-8))) D(LOG(I_I_P(-9))) D(LOG(I_I_P(-10))) C | -0.099616  | 0.069633   | -1.430589                             | 0.1538  |
|  | -0.013420  | 0.069878   | -0.192052                             | 0.8479  |
|  | 0.085665   | 0.069397   | 1.234422                              | 0.2182  |
|  | -0.055679  | 0.065667   | -0.847904                             | 0.3973  |
|  | -0.021982  | 0.062200   | -0.353410                             | 0.7241  |
|  | -0.444476  | 0.061584   | -7.217403                             | 0.0000  |
|  | 0.464643   | 0.048987   | 9.485067                              | 0.0000  |
|  | 0.007345   | 0.005882   | 1.248646                              | 0.2130  |
| @TREND("1947Q1")  R-squared Adjusted R-squared S.E. of regression Sum squared resid Log likelihood F-statistic Prob(F-statistic) | 9.70E-06  0.882061 0.876445 0.001160 0.000339 1421.877 157.0585 0.000000 | Mean depend<br>S.D. depende<br>Akaike info cri<br>Schwarz crite<br>Hannan-Quin<br>Durbin-Watso | nt var<br>terion<br>rion<br>n criter. | 0.3714<br>0.008026<br>0.003300<br>-10.63303<br>-10.45742<br>-10.56247<br>1.875386 |

Null Hypothesis:  $D(LOG(I\_I\_P))$  has a unit root

Exogenous: Constant, Linear Trend

Lag Length: 11 (Automatic - based on SIC, maxlag=15)

|  |           | t-Statistic | Prob.* |
|--|-----------|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic |           | -3.663207   | 0.0266 |
| Test critical values:                  | 1% level  | -3.993335   |        |
|  | 5% level  | -3.427004   |        |
|  | 10% level | -3.136780   |        |

<sup>\*</sup>MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable: D(LOG(I\_I\_P),2)

Method: Least Squares
Date: 04/02/18 Time: 13:50
Sample (adjusted): 1952Q2 2017Q4
Included observations: 263 after adjustments

| Variable             | Coefficient | Std. Error        | t-Statistic | Prob.     |
|----------------------|-------------|-------------------|-------------|-----------|
| D(LOG(I_I_P(-1)))    | -0.129398   | 0.035324          | -3.663207   | 0.0003    |
| D(LOG(I_I_P(-1)),2)  | 0.060801    | 0.065212          | 0.932360    | 0.3521    |
| D(LOG(I_I_P(-2)),2)  | 0.236922    | 0.065736          | 3.604136    | 0.0004    |
| D(LOG(I_I_P(-3)),2)  | 0.137377    | 0.054021          | 2.543024    | 0.0116    |
| D(LOG(I_I_P(-4)),2)  | 0.010465    | 0.053219          | 0.196642    | 0.8443    |
| D(LOG(I_I_P(-5)),2)  | -0.023650   | 0.053161          | -0.444870   | 0.6568    |
| D(LOG(I_I_P(-6)),2)  | 0.080820    | 0.053126          | 1.521290    | 0.1295    |
| D(LOG(I_I_P(-7)),2)  | 0.047374    | 0.053080          | 0.892507    | 0.3730    |
| D(LOG(I_I_P(-8)),2)  | 0.032771    | 0.051958          | 0.630720    | 0.5288    |
| D(LOG(I_I_P(-9)),2)  | -0.438087   | 0.048327          | -9.065020   | 0.0000    |
| D(LOG(I_I_P(-10)),2) | 0.133953    | 0.055377          | 2.418920    | 0.0163    |
| D(LOG(I_I_P(-11)),2) | 0.163604    | 0.057475          | 2.846532    | 0.0048    |
| С                    | 0.001438    | 0.000430          | 3.346846    | 0.0009    |
| @TREND("1947Q1")     | -2.71E-06   | 1.18E-06          | -2.292157   | 0.0227    |
| R-squared            | 0.387291    | Mean depend       | ent var     | -3.82E-05 |
| Adjusted R-squared   | 0.355303    | S.D. depende      |             | 0.001413  |
| S.E. of regression   | 0.001135    | Akaike info cri   |             | -10.67337 |
| Sum squared resid    | 0.000321    | Schwarz criterion |             | -10.48322 |
| Log likelihood       | 1417.549    | Hannan-Quin       | n criter.   | -10.59696 |
| F-statistic          | 12.10709    | Durbin-Watso      | n stat      | 2.020604  |
| Prob(F-statistic)    | 0.000000    |                   |             |           |

Sample (adjusted): 1949Q4 2017Q4

Included observations: 273 after adjustments
Trend assumption: Linear deterministic trend
Series: LOG(I\_C\_US) LOG(I\_P\_C\_US) LOG(I\_I\_P)

Lags interval (in first differences): 1 to 2

#### Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

| Hypothesized<br>No. of CE(s) | Eigenvalue | Trace<br>Statistic | 0.05<br>Critical Value | Prob.** |
|------------------------------|------------|--------------------|------------------------|---------|
| None * At most 1 At most 2   | 0.133420   | 51.19652           | 29.79707               | 0.0001  |
|                              | 0.036560   | 12.10283           | 15.49471               | 0.1521  |
|                              | 0.007063   | 1.935028           | 3.841466               | 0.1642  |

Trace test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

#### Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

| Hypothesized<br>No. of CE(s) | Eigenvalue | Max-Eigen<br>Statistic | 0.05<br>Critical Value | Prob.** |
|------------------------------|------------|------------------------|------------------------|---------|
| None * At most 1 At most 2   | 0.133420   | 39.09369               | 21.13162               | 0.0001  |
|                              | 0.036560   | 10.16780               | 14.26460               | 0.2011  |
|                              | 0.007063   | 1.935028               | 3.841466               | 0.1642  |

Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

<sup>\*</sup> denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

<sup>\*\*</sup>MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

<sup>\*</sup> denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

<sup>\*\*</sup>MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Vector Error Correction Estimates

Date: 04/02/18 Time: 11:49

Sample (adjusted): 1949Q4 2017Q4 Included observations: 273 after adjustments

Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

| Cointegrating Eq: | CointEq1                             |  |
|-------------------|--------------------------------------|--|
| LOG(I_C_US(-1))   | 1.000000                             |  |
| LOG(I_P_C_US(-1)) | -1.030150<br>(0.01975)<br>[-52.1613] |  |
| LOG(I_I_P(-1))    | -0.991700<br>(0.02138)<br>[-46.3885] |  |
| С                 | 4.746786                             |  |

| Error Correction: | D(LOG(I_C_US))         | D(LOG(I_P_C_US))       | D(LOG(I_I_P))         |
|-------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| CointEq1          | -0.129879<br>(0.03349) | -0.007739<br>(0.01605) | 0.006651<br>(0.00529) |
|                   | [-3.87833]             | [-0.48218]             | [1.25837]             |

Vector Error Correction Estimates
Date: 04/02/18 Time: 12:21

Sample (adjusted): 1951Q2 2017Q4

Included observations: 267 after adjustments Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

Cointegration Restrictions:

B(1,1)=1, B(1,2)=-1

Convergence achieved after 6 iterations.

Restrictions identify all cointegrating vectors

LR test for binding restrictions (rank = 1):

Chi-square(1)
Probability

0.579634 0.446456

| Cointegrating Eq: | CointEq1                             |                                      |                                     |
|-------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| LOG(I_C_US(-1))   | 1.000000                             |                                      |                                     |
| LOG(I_P_C_US(-1)) | -1.000000                            |                                      |                                     |
| LOG(I_I_P(-1))    | -1.036137<br>(0.00590)<br>[-175.760] |                                      |                                     |
| C                 | 4.836496                             |                                      |                                     |
| Error Correction: | D(LOG(I_C_US))                       | D(LOG(I_P_C_US))                     | D(LOG(I_I_P))                       |
| CointEq1          | -0.101486<br>(0.02825)<br>[-3.59239] | -0.044209<br>(0.01426)<br>[-3.10033] | 0.010983<br>(0.00502)<br>[ 2.18752] |

Vector Error Correction Estimates Date: 04/02/18 Time: 13:00

Sample (adjusted): 1950Q2 2017Q4

Included observations: 271 after adjustments

Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

#### Cointegration Restrictions:

B(1,1)=1, B(1,2)=-1

Convergence achieved after 1 iterations.

Restrictions identify all cointegrating vectors

LR test for binding restrictions (rank = 1):

Chi-square(1) 2.909128 Probability 0.088079

| Cointegrating Eq:                     | CointEq1                             |                                      |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| LOG(I_C_US(-1))-<br>LOG(I_P_C_US(-1)) | 1.000000                             |                                      |
| LOG(I_I_P(-1))                        | -1.000000                            |                                      |
| С                                     | 4.623137                             |                                      |
| Error Correction:                     | D(LOG(I_C_US)-<br>LOG(I_P_C_US))     | D(LOG(I_I_P))                        |
| CointEq1                              | -0.044833<br>(0.01878)<br>[-2.38759] | -0.001577<br>(0.00323)<br>[-0.48796] |

**Vector Error Correction Estimates** 

Date: 04/02/18 Time: 13:05

Sample (adjusted): 1950Q2 2017Q4

Included observations: 271 after adjustments

Standard errors in () & t-statistics in []

Cointegration Restrictions:

B(1,1)=1, B(1,2)=-1, A(2,1)=0

Convergence achieved after 2 iterations.

Restrictions identify all cointegrating vectors

LR test for binding restrictions (rank = 1):

Chi-square(2) 3.156241 Probability 0.206363

| Cointegrating Eq:                     | CointEq1                         |                      |
|---------------------------------------|----------------------------------|----------------------|
| LOG(I_C_US(-1))-<br>LOG(I_P_C_US(-1)) | 1.000000                         |                      |
| LOG(I_I_P(-1))                        | -1.000000                        |                      |
| C                                     | 4.623137                         |                      |
| Error Correction:                     | D(LOG(I_C_US)-<br>LOG(I_P_C_US)) | D(LOG(I_I_P))        |
| CointEq1                              | -0.042151<br>(0.01796)           | 0.000000<br>(0.0000) |

[-2.34757]

[NA]

Dependent Variable: LOG(I\_C\_US)-LOG(I\_P\_C\_US)

Method: Least Squares

Date: 04/02/18 Time: 14:08

Sample (adjusted): 1949Q1 2017Q4

Included observations: 276 after adjustments

| Variable   | Coefficient  | Std. Error   | t-Statistic                           | Prob.   |
|--|--|--|---------------------------------------|---|
| C<br>LOG(I_I_P)  | -4.713399<br>1.015500  | 0.013072<br>0.002219   | -360.5650<br>457.6815                 | 0.0000<br>0.0000  |
| R-squared Adjusted R-squared S.E. of regression Sum squared resid Log likelihood F-statistic Prob(F-statistic) | 0.998694<br>0.998689<br>0.024368<br>0.162698<br>634.5773<br>209472.4<br>0.000000 | Mean depend<br>S.D. depende<br>Akaike info cri<br>Schwarz criter<br>Hannan-Quin<br>Durbin-Wats c | nt var<br>terion<br>rion<br>n criter. | 1.231751<br>0.672971<br>-4.583893<br>-4.557658<br>-4.573366<br>0.108472 |

Dependent Variable: LOG(I\_C\_US)-LOG(I\_P\_C\_US)

Method: Least Squares (Gauss-Newton / Marquardt steps)

Date: 04/02/18 Time: 14:10

Sample (adjusted): 1949Q1 2017Q4

Included observations: 276 after adjustments

 $LOG(I\_C\_US)-LOG(I\_P\_C\_US)= C(1)+LOG(I\_I\_P)$ 

|   | Coefficient  | Std. Error  | t-Statistic                | Prob.   |
|---|--|---|----------------------------|---|
| C(1)  | -4.622654  | 0.001589  | -2908.894                  | 0.0000  |
| R-squared Adjusted R-squared S.E. of regression Sum squared resid Log likelihood Durbin-Watson stat | 0.998461<br>0.998461<br>0.026401<br>0.191676<br>611.9569<br>0.091871 | Mean depend<br>S.D. depende<br>Akaike info cr<br>Schwarz crite<br>Hannan-Quin | ent var<br>iterion<br>rion | 1.231751<br>0.672971<br>-4.427224<br>-4.414107<br>-4.421960 |

Null Hypothesis: D(RESID\_COI) has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 4 (Automatic - based on SIC, maxlag=15)

|   |   | t-Statistic                                      | Prob.* |
|---|---|--|--------|
| Augmented Dickey-Ful<br>Test critical values: | ler test statistic<br>1% level<br>5% level<br>10% level | -8.310744<br>-3.454443<br>-2.872041<br>-2.572439 | 0.0000 |

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation Dependent Variable: D(RESID\_COI,2)

Method: Least Squares Date: 04/02/18 Time: 14:12

Sample (adjusted): 1950Q3 2017Q4

Included observations: 270 after adjustments

| Variable   | Coefficient  | Std. Error  | t-Statistic  | Prob.   |
|--|--|---|--|---|
| D(RESID_COI(-1)) D(RESID_COI(-1),2) D(RESID_COI(-2),2) D(RESID_COI(-3),2) D(RESID_COI(-4),2)                   | -0.896502<br>-0.093433<br>0.301364<br>0.347516<br>0.081232                       | 0.107873<br>0.095650<br>0.089636<br>0.083845<br>0.061151  | -8.310744<br>-0.976820<br>3.362102<br>4.144757<br>1.328375 | 0.0000<br>0.3296<br>0.0009<br>0.0000<br>0.1852                          |
| C  | 1.93E-05   | 0.000451  | 0.042866   | 0.9658  |
| R-squared Adjusted R-squared S.E. of regression Sum squared resid Log likelihood F-statistic Prob(F-statistic) | 0.563756<br>0.555494<br>0.007404<br>0.014472<br>944.4706<br>68.23319<br>0.000000 | Mean dependent var S.D. dependent var Akaike info criterion Schwarz criterion Hannan-Quinn criter. Durbin-Watson stat |  | 1.51E-05<br>0.011105<br>-6.951634<br>-6.871669<br>-6.919524<br>1.935944 |

Dependent Variable: D(LOG(I\_C\_US)-(LOG(I\_P\_C\_US)))

Method: Least Squares

Date: 04/02/18 Time: 14:28

Sample (adjusted): 1949Q4 2017Q4

Included observations: 273 after adjustments

HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed

bandwidth = 6.0000)

| Variable  | Coefficient  | Std. Error  | t-Statistic  | Prob.   |
|---|--|---|--|---|
| C  RESID_COI(-1)  D_L_C_R(-2)  D_L_C_R(-4)  D_L_I_R   | 0.003400<br>-0.046099<br>0.353163<br>-0.254981<br>1.479320                                   | 0.001194<br>0.021797<br>0.115083<br>0.075609<br>0.293028  | 2.848363<br>-2.114927<br>3.068778<br>-3.372380<br>5.048384 | 0.0047<br>0.0354<br>0.0024<br>0.0009<br>0.0000                                      |
| D_L_I_R(-2)   | -0.986517  | 0.285228  | -3.458700  | 0.0006  |
| R-squared Adjusted R-squared S.E. of regression Sum squared resid Log likelihood F-statistic Prob(F-statistic) Prob(Wald F-statistic) | 0.250959<br>0.236932<br>0.007130<br>0.013573<br>965.2266<br>17.89112<br>0.000000<br>0.000000 | Mean dependence S.D. dependence Akaike info crus Schwarz crite Hannan-Quin Durbin-Watso Wald F-statis | ent var<br>iterion<br>rion<br>in criter.<br>on stat        | 0.008209<br>0.008162<br>-7.027301<br>-6.947972<br>-6.995457<br>2.096573<br>17.76796 |