MODELOS MULTIVARIANTES NO ESTACIONARIOS

MODELOS MULTIVARIANTES NO ESTACIONARIOS

CLASE 4

1. Cointegración no lineal

Cointegración no lineal

Existen varias formas de cointegración no lineal:

- Cointegración umbral (threshold)
- Cointegración con cambio de régimen
- Cointegración periódica
- Cointegración estacional

Cointegración umbral

- El concepto de **cointegración umbral** fue introducido en el trabajo seminal de Balke y Fomby (1997) como una manera práctica de combinar simultáneamente la posibilidad de cointegración y no linealidad en el largo plazo.

- Estos autores plantean la cuestión de que el movimiento hacia la relación de equilibrio entre un conjunto de variables no ocurra en cada momento del tiempo debido a la existencia de **costos de ajuste** en las decisiones de los agentes económicos.

- Ello implica que existirá un **ajuste discontinuo** hacia la relación de equilibrio, de tal manera que, sólo en el caso de que la desviación temporal del equilibrio superase un cierto **umbral crítico** los beneficios del ajuste serán mayores que los costos y, en este caso, los agentes económicos moverán el sistema hacia el equilibrio a largo plazo.

Cointegración umbral

- El concepto de cointegración umbral caracteriza un ajuste discreto, de tal manera que la relación de cointegración entre un conjunto de variables sólo aparece dentro de un cierto rango, aunque el sistema alcanzará rápidamente el equilibrio a largo plazo si se supera ese umbral crítico.

- Hansen y Seo (2002) proponen un modelo de vectores de corrección de errores (VECM) en el que existe una relación de cointegración entre dos variables y un efecto umbral bajo la forma de un término de corrección de error. Además, desarrollan un test del multiplicador de Lagrange (LM) para contrastar la presencia de un efecto umbral en la relación de cointegración.

Cointegración umbral

- El sistema tiene dos regímenes, dependiendo de si la desviación del equilibrio a largo plazo entre las variables (definida por el término de corrección de error) es igual o está por debajo, o por encima del valor crítico umbral:

- $$\Delta X_t = \left[c_1 + \sum_{j=1}^{p} \phi_{1j} \Delta X_{t-j} + \alpha_1 w_{t-1}(\beta)\right] d_{1,t}(\beta,\gamma) + \left[c_2 + \sum_{j=1}^{p} \phi_{2j} \Delta X_{t-j} + \alpha_2 w_{t-1}(\beta)\right] d_{2,t}(\beta,\gamma) + u_t$$

donde X_t es un sistema de dimensión *p* de variables I(1) cointegradas con un vector de cointegración β (p×1), $w_t(\beta) = \beta_0\ x_t$ es un término de corrección de error I(0), $d_{1,t}(\beta, \gamma) = I(w_{t-1}\ (\beta) \leq \gamma)$ es el primer régimen, $d_{2,t(}\beta, \gamma) = I(w_{t-1}(\beta) > \gamma)$ es el segundo régimen, y *γ* representa el parámetro crítico umbral.

Cointegración umbral

- En uno de los regímenes (si las desviaciones del equilibrio son iguales o más bajas que el parámetro umbral estimado) no habrá una tendencia en X_t a volver hacia el equilibrio a largo plazo, es decir, las variables no estarían cointegradas.

- Por el contrario, en el otro régimen del VECM (si las desviaciones son mayores que el parámetro umbral estimado) aparece una tendencia de las variables X_t a volver hacia el equilibrio, por lo que las variables del sistema estarían cointegradas.

- Hansen y Seo (2002) proponen dos estadísticos LM consistentes con posibles problemas de heteroscedasticidad para contrastar la hipótesis nula de cointegración lineal (no existe efecto umbral), frente a la alternativa de cointegración umbral o no lineal.

Cointegración umbral

- Si se conoce a priori el vector de cointegración ($\beta = \beta_0$) , el contraste es:

$$\sup LM^o = sup_{\gamma_L \leq \gamma \leq \gamma_U} LM(\beta_o, \gamma)$$

- Si el verdadero valor del vector de cointegración no es conocido a priori y debe ser estimado simultáneamente ($\beta = \tilde{\beta}$):

$$\sup LM \quad = sup_{\gamma_L \leq \gamma \leq \gamma_U} LM\left(\tilde{\beta}, \gamma\right)$$

- En ambos contrastes el procedimiento preasigna un valor mínimo de observaciones de la muestra disponible que entrarán en cada uno de los regímenes dentro del intervalo [γ_L, γ_U],

Cointegración umbral

- Se elige el par del parámetro de cointegración y del parámetro umbral $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ que minimiza el $log\left|\overline{\Omega(\beta,\gamma)}\right|$donde $\overline{\Omega}$ es la matriz estimada de varianzas de los residuos.

- En otros casos, no solamente el proceso de ajuste de CP hacia el equilibrio es no lineal, sino que la propia relación de equilibrio de LP puede presentar no linealidad, en función del tamaño de una variable estacionaria umbral con respecto a un valor umbral.

- Test de cointegración umbral, Gonzalo y Pitarakis (2006)

  $\mathrm{H_0}$: $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + u_t$

  $\mathrm{H_1}$: $y_t = (\alpha_0 + \alpha_1 x_t) + (\lambda_0 + \lambda_1 x_t) I(q_{t-d} > \gamma) + u_t,$

Cointegración umbral

- con $x_t = x_{t-1} + v_t$, u_t, v_t son vectores de (px1) de perturbaciones estacionarias, q_{t-d} es una variable umbral estacionaria rezagada d períodos, $I(q_{t-d} > \gamma)$ es una función indicador igual a uno si $q_{t-d} > \gamma$, cero en el resto de los casos.

- El estadístico propuesto es:

$$LM_T(\gamma) = \frac{1}{\widetilde{\sigma_0}^2} u' M X_\gamma \left(X_\gamma{}' M X_\gamma \right)^{-1} X_\gamma{}' M u$$

Donde $M = I - X(X'X)^{-1}X'$, X contiene todos los valores de x_t mientras que X_γ contiene todos los valores de x_t que cumplen el criterio $q_t > \gamma$ en el modelo no lineal, T es el tamaño de la muestra total, *u* es el residuo , $\widetilde{\sigma_0}^2$ es la varianza residual del modelo lineal.

Cointegración umbral

- El estadístico $LM_T(\Upsilon)$ se calcula para todos los valores posibles de la variable umbral. Se emplea un parámetro que asegure un número mínimo de observaciones en cada lado del umbral.

- El estadístico está dado por

$$\sup LM = sup_{\gamma \in \Gamma} LM_T(\gamma)$$

Cointegración umbral

- Goetz et al (2008) proponen un procedimiento en tres etapas para la estimación de la cointegración umbral.

Paso 1: Determinar el orden de integración de las series (deben ser I(1) para poder aplicar el siguiente paso).

Paso 2: Testear la H_o de cointegración lineal vs. Cointegración umbral, utilizando el test sup LM propuesto por Gonzalo y Pitarakis (2006).

Paso 3: Estimar un ECM irrestricto, incluyendo las variables dummy definidas por la función indicador $\mathrm{I}(q_{t-d} > \gamma)$, correspondiente al umbral determinado por el test supLM.

Cointegración umbral

- La especificación ECM sería:

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 * I(q_{t-d} > \gamma) + \sum_{m=1}^{K} (\beta_{1m}\Delta x_{t-m+1} + \delta_{1m}\Delta x_{t-m+1} * I(q_{t-d} > \gamma)) + \sum_{n=1}^{L} (\beta_{2n}\Delta y_{t-n} + \delta_{2m}\Delta y_{t-n} * I(q_{t-d} > \gamma)) + \beta_3 y_{t-1} + \delta_3 y_{t-1} * I(q_{t-d} > \gamma) + \beta_4 x_{t-1} + \delta_4 x_{t-1} * I(q_{t-d} > \gamma) + \varepsilon_t$$

Cointegración umbral

- Goetz y von Cramon-Taubadel (2008) aplican un modelo de cointegración umbral al precio de las manzanas en el mercado mayorista de Hamburgo y Munich.

- Identifican cuatro regímenes de transmisión de precios caracterizados por diferentes relaciones de equilibrio y procesos de ajuste de corto plazo.

- Argumentan que este enfoque es particularmente apropiado para capturar efectos de umbral estacionales irregulares, típicos en las frutas frescas y vegetales.

Cointegración umbral

- Hipótesis: la relación de equilibrio entre los precios en Hamburgo y Munich presenta efectos de umbral, siendo la participación de las manzanas alemanas en el total del comercio mayorista (que incluye manzanas importadas) la variable umbral. La relación de largo plazo se mueve entre regímenes en función de esa variable umbral.

- La transmisión de precios es estacional pero el patrón estacional es irregular de año en año, dependiendo del tiempo y las cosechas en las diferentes regiones que están vinculadas a través del comercio.

Cointegración con cambio de régimen

- Gregory y Hansen (1996) han desarrollado una prueba de cointegración basada en los residuos, cuyo objetivo es establecer un nuevo test de cointegración con la posibilidad de un cambio de régimen.

  Gregory, A. W. & Hansen, B. E. (1996), "Residual-based tests for cointegration in models with regime shifts", Journal of Econometrics 70(1), 99-126.

- El propósito del artículo donde se desarrolla dicha prueba es diseñar un test de ADF y de Phillips donde se permita establecer hipótesis alternativas distintas a la cointegración tradicional, es decir, hipótesis que incluyan cointegración en presencia de cambios estructurales en los vectores de cointegración a lo largo del tiempo, corrigiendo los problemas de falta de potencia en este tipo de escenarios de las pruebas anteriormente mencionadas.

Cointegración con cambio de régimen

- **Modelo 1** - En el modelo estándar de cointegración, se tienen dos series de datos observadas:

$$y_{1t} = \mu + \alpha^T y_{2t} + \varepsilon_t, \quad \text{con t = 1, 2, …, n.}$$

donde y_{1t} y y_{2t} son integradas de orden uno y ε_t es integrada de orden cero. Si este modelo captura la relación de largo plazo se creería que μ y α^T son invariantes en el tiempo.

- Para modelar un *cambio estructural desconocido*, el cual podría ser un cambio en la pendiente y/o intercepto del vector de cointegración, los autores proponen varios modelos alternativos.

- $\varphi_{i\tau} = \begin{cases} 0 & si\ t \leq [n\ \tau] \\ 1 & si\ t > [n\ \tau] \end{cases}$ donde el parámetro desconocido $\tau \in (0,1)$ muestra la ubicación temporal del punto de quiebre y $[\quad]$ representa la parte entera.

Cointegración con cambio de régimen

- **Modelo 2** – Cambio en el nivel de la relación de cointegración (C)

$$y_{1t} = \mu_1\mu + \mu_2\varphi_{it} + \alpha^T y_{2t} + \varepsilon_t, \quad \text{con t = 1, 2, …, n.}$$

- **Modelo 3** – Cambio en el nivel, con tendencia (C/T)

$$y_{1t} = \mu_1\mu + \mu_2\varphi_{it} + \beta\ t + \alpha^T y_{2t} + \varepsilon_t, \quad \text{con t = 1, 2, …, n.}$$

- **Modelo 4** – Cambio en la pendiente (C/S)

$$y_{1t} = \mu_1\mu + \mu_2\varphi_{it} + \alpha^T y_{2t} + \alpha^T y_{2t}\varphi_{it} + \varepsilon_t, \quad \text{con t = 1, 2, …, n.}$$

Cointegración con cambio de régimen

- Los autores plantean testear:

H_0: las variables están cointegradas (modelo 1)

H_1: hay cointegración con quiebre estructural (según modelo 2, 3 ó 4)

- Pasos

1- Según sea H_1, para cada τ se estiman los modelos 2-4 por OLS y se guardan los residuos $\widehat{\varepsilon_{t\tau}}$ (recordar que dependen de la elección del punto de quiebre τ).

2 - Calcular estadísticos en base a los residuos estimados, para realizar:

- Test de Phillips
- ADF

3 - Comparar con los valores críticos fueron tabulados por Gregory y Hansen.

Cointegración con cambio de régimen

- **Test de Phillips (1987)**- Usa una versión corregida por sesgo del coeficiente de correlación serial de primer orden

$$Z_{\propto}(\tau) = n(\widehat{\rho_t}^* - 1)$$

$$Z_t(\tau) = (\widehat{\rho_t}^* - 1)/\widehat{s_t}$$

donde

$$\widehat{\rho_t^*} = \sum_{t=1}^{n-1} \left(\widehat{e_{t\tau}}\widehat{e_{t+1\,\tau}} - \widehat{\lambda_\tau}\right) \Big/ \sum_{t=1}^{n-1} \widehat{e_{t\tau}}^2$$

$$\widehat{\lambda_\tau} = \sum_{j=1}^{M} w\left(\frac{j}{M}\right)\widehat{\gamma_\tau}(j)\,, \qquad \text{con} \qquad \widehat{\gamma_\tau}(j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\widehat{v_{t-j\tau}} - \widehat{v_{t\tau}}\right)$$

$M = M(n)$ es el número del ancho de banda seleccionado, w(.) es el peso del kernel

$$\widehat{v_{t\tau}} = \widehat{e_{t\tau}} - \widehat{\rho_\tau}\widehat{e_{t-1\,\tau}} \qquad \widehat{s_\tau}^2 = \widehat{\sigma_\tau}^2 / \sum_1^{n-1} \widehat{e_{t\tau}}^2$$

Cointegración con cambio de régimen

- **ADF-** Calcular el estadístico ADF para el regresor $\widehat{e_{t\tau}}$.

- Los valores críticos son los valores menores, considerando todos los posibles puntos de quiebre:

$$Z_{\alpha}{}^{*} = \inf Z_{\alpha}(\tau)$$
$$Z_{t}{}^{*} = \inf Z_{t}(\tau)$$
$$ADF^{*} = \inf ADF(\tau)$$

para $\tau \ \in T$

Cointegración con cambio de régimen

- La solución que adoptan para detectar cointegración cuando existen cambios estructurales, es similar a la de Banerjee, Lumsdaine, y Stock (1992) y Zivot y Andrews (1992).

- Gregory y Hansen (1996) computan el estadístico para el test de cointegración para cada uno de los posibles cambios de régimen $t \in T$ y toman el valor más pequeño (el mayor en valor absoluto) de entre todos los posibles puntos de quiebre.

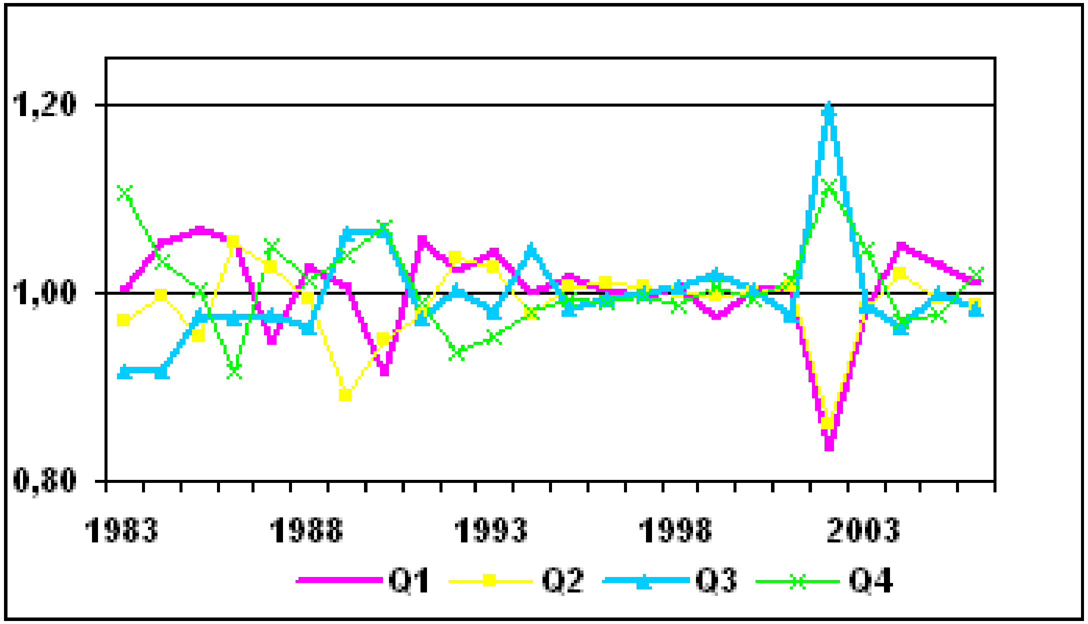
Cointegración con cambio de régimen

- En principio el conjunto T puede ser cualquier subconjunto compacto de (0, 1). En la práctica, se necesita un tamaño que permita calcular los estadísticos.
- T = (0,15, 0,85) parece razonable. Aunque T contiene un número incontable de puntos, todos los estadísticos que los autores consideran son funciones "salto" de T, tomando saltos en los puntos {i/n, *i entero*). Por motivos computacionales, los estadísticos se computaron para cada punto de quiebre en el intervalo ([O.l5n], [0.85n]).

Cointegración periódica

- Las series *estacionalmente integradas* (raíz unitaria estacional) tienen "memoria larga" tal que los shocks pueden durar para siempre y en ese sentido pueden cambiar el patrón estacional en forma permanente.
- REER: nivel trimestral sobre promedio anual

A veces la primavera se transforma en verano y otras en otoño.



Cointegración periódica

- Esos patrones estacionales cambiantes pueden combinarse de forma tal de lograr relaciones de equilibrio de LP estables.

- Un modelo *autorregresivo periódico* de orden ρ, (PAR(ρ)):

$$y_t = \mu_s + \phi_{1s} y_{t-1} + \cdots + \phi_{\rho s} y_{t-\rho} + \varepsilon_t$$

donde μ_s es un intercepto que varía con la estación, $\phi_{1s}, \ldots, \phi_{\rho s}$ son parámetros autorregresivos que pueden cambiar con la estación, s=1,2, 3,4. ε_t Se asume que ε_t es ruido blanco aunque puede suceder que la varianza también varíe con la estación *s*.

- Una serie trimestral es *periódicamente integrada de orden uno*, PI(1), cuando se necesita un filtro $(1 - \alpha_s B)$ para removerle la tendencia estocástica. α_s son los parámetros que varían con la estación *s*.

Cointegración periódica

- Dos procesos $y_t,\ x_t$ periódicamente integrados están cointegrados cuando la combinación lineal $y_t - \theta_s x_t$ puede ser descrita utilizando un proceso periódicamente estacionario, donde θ_s es un parámetro que varía con la estación s. (Franses, 1996).

- Una prueba simple y natural consiste en evaluar los residuos de una regresión del tipo $y_t = \widehat{\mu_s} + \widehat{\theta}_s x_t + \widehat{u_t}$

- Franses (1999) sugiere un procedimiento en dos etapas, similar al de Engle-Granger

Cointegración periódica

- Los modelos de **cointegración periódica** permiten que tanto los parámetros de largo plazo como los coeficientes de ajuste varíen con la estación. Puede haber un ajuste hacia la relación de LP en cada estación (totalmente cointegrado) o un ajuste en alguna de las estaciones (parcialmente cointegrado).

- La especificación final es del tipo:

$$\Delta_4 y_t = \lambda_s (y_{t-4} - \theta_s{}' z_{t-4}) + \sum_{i=1}^{\rho} \gamma \Delta_4 y_{t-i} + \sum_{i=1}^{\rho} \beta_j{}' \Delta_4 z_{t-i} + \epsilon_t$$

Donde λ_s refleja los parámetros de ajuste en la estación *s;* θ_s es un vector de parámetros de LP en la estación *s.*

Cointegración periódica

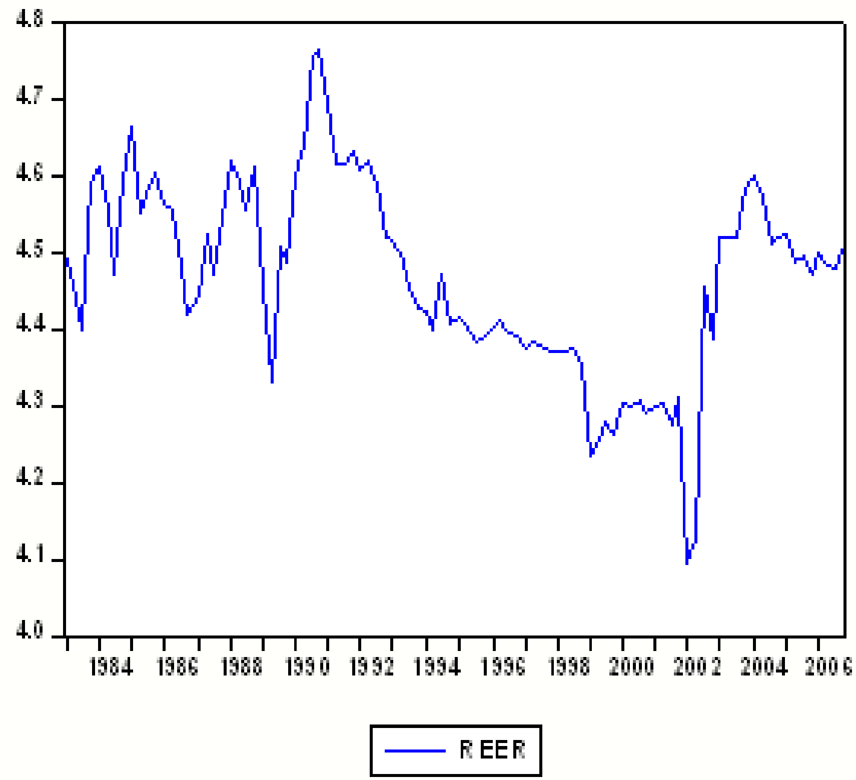
- **Pasos:**

1. Analizar la existencia de raíces unitarias en las diferentes estaciones.
2. Analizar la posibilidad de una relación de cointegración en un ECM periódico, donde todas las series se han transformado en series estacionarias (periódicas) a través del filtro Δ_4.
3. Testear si hay cointegración periódica total o parcial.
4. Realizar pruebas de exogeneidad débil.

Cointegración periódica

Ejemplo

Bucacos (2009) aplica un modelo de cointegración periódica para explicar los movimientos del REER de Uruguay en base a sus fundamentos en el período 1983Q1-2006Q4.



$$REER = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i RER_I{}^{CC} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{EP^*}{P}$$

REER: tipo de cambio real efectivo

TOT: términos de intercambio

G: ratio de gastos de gobierno a Pib

in: tasa de interés real neta

Cointegración periódica

- Si se asume que la estacionalidad es determinística se puede incurrir en errores

- Existen indicios que el patrón estacional es estocástico (raíces unitarias estacionales) y es posible que las variables mantengan relaciones estables entre ellas en el LP, aunque sus patrones estacionales variables no coincidan en el CP.

- La cointegración periódica permite que tanto los parámetros de la relación de LP como los coeficientes de ajuste varíen con la estación.

- Se testearon restricciones sobre los parámetros de la especificación, arribándose finalmente a:

Cointegración periódica

$$(14)\ \Delta_4 REER_t = -0.77\,(REER - 6.45 + 0.20\,TOT + 0.01in + 0.98\,G)_{1,t-4} - 0.45(REER - 6.34 + 0.37\,TOT + 0.009in)_{2,t-4} +$$

(0.14) (0.31) (0.07) (0.003) (0.20) (0.09) (0.33) (0.07) (0.003)

$$-0.45(REER - 7.18 + 0.20\,TOT + 0.005in + 1.80G)_{3,t-4} - 0.77(REER - 5.78 + 0.25TOT + 0.011in)_{4,t-4} +$$

(0.09) (0.37) (0.06) (0.003) (0.21) (0.14) (0.39) (0.08) (0.004)

$$+0.71\Delta_4 REER_{t-1} - 0.004\,(\Delta_4 E_{t-3} - \Delta_4 E_{t-4}) + 0.69(\Delta_4 p^*_t - \Delta_4 p^*_{t-1}) + 0.27(\Delta_4 p_{t-1} - \Delta_4 p_{t-2}) +$$

(0.04) (0.001) (0.05) (0.13)

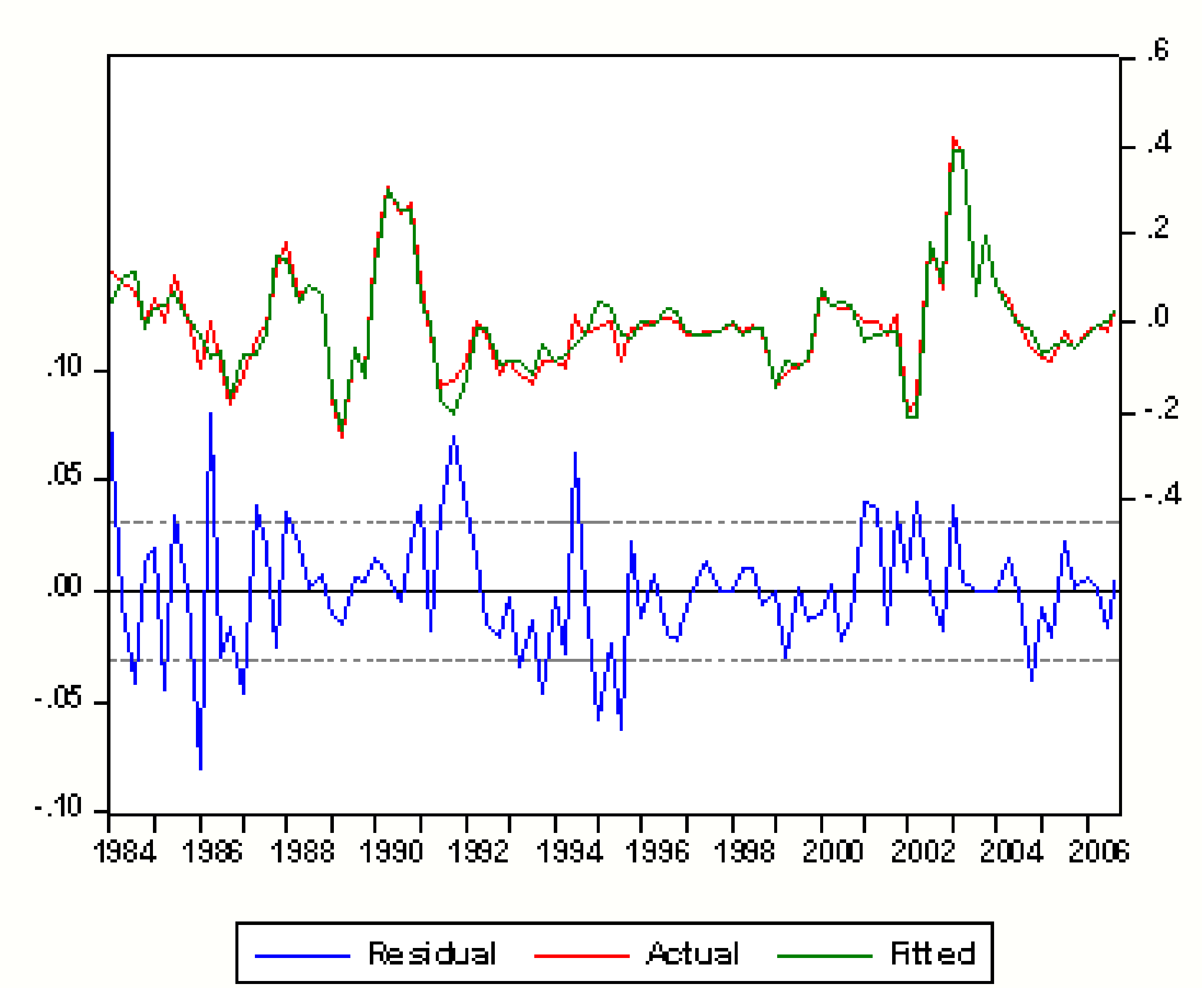
$$-0.15(\Delta_4 TOT_t - \Delta_4 TOT_{t-1}) + \varepsilon_t$$

(0.06)

$$\bar{R}^2 = 0.93;\quad \sigma = 3.1\%;\quad F_{AR,1-1} = 0.00;\quad F_{AR,1-4} = 0.00;$$

$$F_{ARCH,1-1} = 3.37;\quad F_{ARCH,1-4} = 2.25;\quad JB = 4.23$$

Cointegración periódica



Cointegración periódica

- Conclusiones:

1. REER se puede tratar como una serie estacionaria en cuartas diferencias: los shocks que afectan la tasa de cambio anual del REER tienen efecto solamente transitorio y en el LP el REER alcanza el valor dado por sus fundamentos.
2. Dependiendo de la estación (trimestre), el REER tiene diferentes fundamentos.
3. El impacto de los cambios en esos fundamentos sobre las relaciones de LP depende del trimestre.
4. El ajuste de los desequilibrios de LP también depende del trimestre.