Integral Indefinida

Definição: Uma função $F(x)$ é chamada de primitiva de $f(x)$ em um intervalo I se, $\forall x \in I$ temos $\boxed{F'(x) = f(x)}$

Ex: a) $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é primitiva de $f(x) = x^2$. $F'(x) = f(x)$

b) $F(x) = \operatorname{sen} x$ é primitiva de $f(x) = \cos x$.

$F'(x) = f(x)$

Digitalizado com CamScanner

1. **Proposição**: Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, $\boxed{G(x) = F(x) + C}$ também é primitiva de $f(x)$.

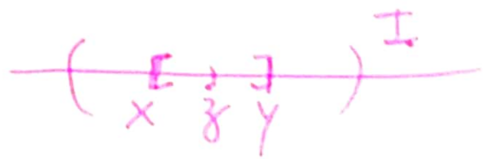
$C \to$ nº real.

Prova: $G'(x) = [F(x)+C]' = F'(x) + 0 = f(x)$.

2. **Proposição**: Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos de um intervalo I, então f é constante em I.

Prova: Sejam $x, y \in I$, $x < y$. Como f é derivável em I, f é contínua em $[x,y]$ e derivável em (x,y). Pelo Teorema do Valor Médio (TVM), existe $z \in (x,y)$ /

$$\boxed{f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}}$$



Digitalizado com CamScanner

Como $f'(z)=0$, temos que $f(y)-f(x)=0$

$\Leftrightarrow f(x)=f(y)$. Como $x, y \in I$ são dois

valores quaisquer, temos que f é constante em I.

3- Proposição: Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções primitivas de $f(x)$ no intervalo I, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ / $F(x)-G(x)=c$, $\forall x \in I$.

Prova: Seja $H(x)=F(x)-G(x)$ em I.

$$H'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0 \quad \therefore H'(x)=0$$

$$\overset{\text{Prop. 2.}}{\Rightarrow} H(x)=c$$

$$F(x)-G(x)=c$$

Digitalizado com CamScanner

Definição: Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x)+C$ é chamada **integral indefinida** da função $f(x)$ e é denotada por:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+C}$$

Ex: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+C$

$\frac{x^3}{3}+1$

$\frac{x^3}{3}+2$

Obs: (i) $\int f(x)\,dx = F(x)+C \iff F'(x)=f(x)$

(ii) $\int f(x)\,dx$ representa uma família de funções.

Digitalizado com CamScanner