不需要什么基础的量子力学与粒子物理

谈相君

2024 年 10 月 27 日

Abstract

放假了似乎有些无聊，正好学一学 LaTeX 也记录一下 2022 年在量子领域里学习到的东西，想尽可能的用最通俗易懂的语言和公式和数学物理出身的朋友们或者没有什么物理基础的朋友们来分享一下。其实初等的量子力学并不算很高深晦涩的东西，它可能会破灭你对量子的想象也可能会打破你的认知改变你对世界的思考方式，但其实哪怕什么都不懂哪怕你支持地平说也可能可以活好这一生，仅以此书希望能满足大家一点对世界的好奇，希望大家能活出更精彩更充实。学好知识很难，给他人讲明白其实更难。通篇我会用尽可能少的复杂数学表达式和更多的经典举例类比来提升整体文章的可读性（我也会在每一个小节后面整理一个知识点表格）。希望大家通过这本书能够有所领悟有所收获，有问题也欢迎随时联系我！

Email:xinshijietxj@gmail.com

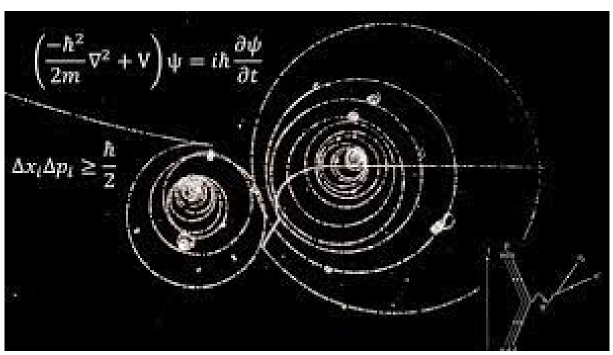

Figure 1: Introduction to Quantum Physics and Particle Physics

目录

第一部分　这是科学不是玄学

1 开尔文男爵："物理的大厦已经建成了"-量子力学的开端

相信大家或多或少都了解过量子力学的开端事件，"19 世纪物理学存在的两朵乌云"，其中第二朵-紫外灾难与黑体辐射正式引发了经典力学的局限性的思考，随着光电效应和双缝实验等成果的发布，人类也在后续的探索中造就了旧量子论（量子力学前身）的出现。那句"物理的大厦已经建成了"也成为了两个世纪以来的著名物理梗，类比现代的"实验室电缆和物理大厦的地基总有一个是松的"-某著名实验室发布颠覆性成果后又撤回并表明是电缆松了造成的。这百年来量子力学的也对社会和文明引发了巨大的冲击，不管是我们常用的手机电脑其工作原理还是正在大力发展的量子信息领域到处都有量子力学的存在。并且现今量子场论已经可以较为精确的描述除引力外的基本相互作用，当然前沿也大有人在做量子引力相关理论，至于是否能完成真正意义上的四大基本作用力的大一统就让我们拭目以待吧。

2 咋有些另类-量子力学的数学表述

我们没必要一上来就把难度加的那么大，在不考虑量子场论仅仅考虑初等量子力学的时候，其实大部分都是在用微分方程或者线性代数来解决我们面临的问题，因此大家不用过于担心看不懂的问题，但最好拥有线性代数的基础，否则将会手足无措寸步难行。整体来说量子力学适用的范围和经典力学的区别在于一个是微观一个宏观，一个对应离散一个对应连续。如果有朋友要问其数学形式上的区别在哪里，其实可以这么理解，当普朗克常数退化为零的时候量子力学和经典力学没有什么太大的差异。对于用量子行为描述的物体它的波函数告诉我们它是会在某一时间在某一个区域或位置被找到，而具有经典行为的物体它有确定的轨道以及精准的动量/位置。下面给大家看看描述各个不同的领域都应当根据适用范围运用什么样的物理。

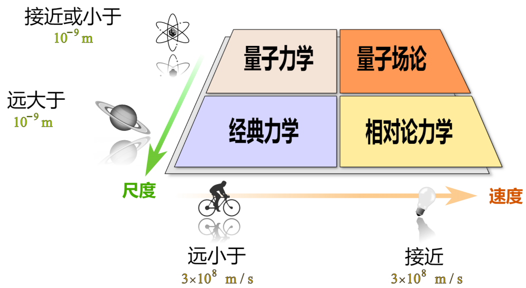

Figure 2:　各理论的适用范围

如上图可见，牛顿经典力学在宏观低速下成立，宏观高速的时候则需要考虑狭义相对论效应带来的影响。在微观低速的世界则由量子力学所主导，但如果要探究含有相对论性粒子的时候则需要用到量子场论的修正，下面可能得先进入相对枯燥的数学部分，当然每个点我都会尽可能辅以大量文字来说明。

2.1 一些基本性质与狄拉克尖括号

当然现今量子力学也有着它的一套独特数学表示法，狄拉克标记 (Dirac Notation)。首先在量子力学中我们都是需要定义在希尔伯特空间（Hilbert Space）里，这是一个具有内积完备性的赋范线性空间。大伙们看到这里可能就会丧失一部分看下去的欲望，怎么上来就希尔伯特了这是个啥，我知道你很急但是请你先别急。

（此段针对有一定数理基础或者有兴趣钻研的读者）首先我们从数学性质上来分析，如果我们想要定义加法与数乘来对物体的坐标进行运算，那么我们会需要一个线性向量空间，这是对用坐标对物体进行定位的基础。但是我们在向量空间中还需要长度这个概念，此时学过数学的朋友们可能就要抢答了，我们对这个空间再进行一个范数的定义将其变为赋范线性空间。范数在物理意义上等价于空间里的距离，为该向量空间内所有的向量赋予非负的长度。此时的空间还不足以进行内积运算，因为我们缺少角度即夹角的定义。那么我们需要再对内积进行一个定义，这对后续量子力学里正交性的存在至关重要。此外我们还需要保障内积的完备性-范数即物理距离的收敛，使得极限可以被良好定义在该空间内，即极限的相关运算和数值不会超出该空间的度量范围。OK 说了这么多废话（bushi），赶紧开始进入量子部分的正题吧。

首先在量子力学中每一个量子态都可以被描述为定义在希尔伯特空间上的态向量，比如说我可以有表示在 xyz 三维坐标系内 z 轴方向自旋上的这个态的向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以及表示自旋下的这个态的向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 这些都是量子态（数学上是正交的本征态）。狄拉克他呢则是创建了一套符号去简易表示这些向量，将态向量定义为右矢 (ket)：$|\psi\rangle$ 如果对一个右矢进行共轭转置（即把矩阵或者向量进行转置，再取其复共轭即把虚部 i 变-i 这样实部不用变）那么就会得到一个左矢（bra）$\langle\psi|$，左矢的空间和右矢的空间互为对偶空间，即互为镜像关系。例如 z 轴自旋上的左矢可以表示为 $\langle\psi_{z+}| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$，是不是很简单捏？总结一下右矢是被用来表示这个量子系统中的量子态，而其共轭转置就是左矢。不妨来看一看一个转换的例子：

$$\begin{pmatrix} 1+2i \\ -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-2i & i \end{pmatrix}$$

下面再来说一些性质，相同的态矢量内积的定义为（其中 δ_{ij} 为克罗内克德尔塔函数）：

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_i |\psi_i|^2$$

不难看出，外积的定义则为：$|\psi\rangle\langle\psi|$。当内积作用于两个基矢时，所得值为：

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$$

在物理中存在着很多的可观测量，比如自旋。任何描述这量子系统的量子态 $|\psi\rangle$ ，都可以用包含上述基底的态表示为:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i|e_i\rangle$$

其中，$c_i = \langle e_i|\psi\rangle$ 是一系列复系数的集合，其物理意义是在量子态 $|e_i\rangle$ 里找到量子态 $|\psi\rangle$ 的概率幅。因为我们可能都了解过，量子的行为并不能如同在经典力学般被准确的预测，我们只能够知晓粒子某一时刻在某一坐标出现的概率。那么只要知道了概率幅并对其进行模的平方的计算就可以得到概率（也可以理解为绝对值的平方），当然记得对其进行归一化处理让其总和为 1（保证在所有位置下的累加可能性为 1），例如从状态 ψ_{z+} 跃迁到状态 ψ_{z-} 的概率可表示为：

$$P = |\langle\psi_{z-}|\psi_{z+}\rangle|^2$$

假设，量子态 $|\psi\rangle$ 等于这些本征态之中的一个本征态 $|e_k\rangle$，则对于这量子系统，测量可观察量 A（注意量子力学中的可观测量测得的都是其本征值，也就是线代术语里的特征值，本征态对应特征向量），得到的结果必定等与本征值 A_k，即该本征态出现的概率必为 1，量子态 $|\psi\rangle$ 为一个完全确定的态。

我们不妨来简单计算一下这个式子，在 z 轴自旋态为 $|\uparrow\rangle$ 情况下观测到自旋为 $|\uparrow\rangle$ 的概率：

$$P = |\langle\psi_{z+}|\psi_{z+}\rangle|^2 =$$

$$= \left|\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2 = 1$$

有没有发现什么呢？这其实说明了当在 z 轴自旋上的本征态的时候我们观测所得的必定是自旋向上的态（忽略激发和微扰的影响）。大家想必对量子叠加态这种东西挺感兴趣的吧，那么我再给大家解释一下什么是量子叠加。从物理意义上来说此时的量子态并不是某一个本征态，而是多个本征态的概率和，这正是量子力学的奇妙之处，我这个粒子可以同时处于自旋上和自旋下这两个不同的态，并且具有相同或不同的概率（此处相同）。请看我的表演，定义一个叠加态先：$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_{z+}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_{z-}\rangle$，注意这里的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是为了保证归一化而设立的系数，来一起算一算在这个叠加态下得到自旋向上的概率：

$$P_{z+} = |\langle\psi_{z+}|\psi\rangle|^2$$

$$= \left|\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

再来计算一下自旋向下的概率，同理可得：$P_{z-} = |\langle\psi_{z-}|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$，可以得知自旋向上和向下的概率均为二分之一并且两个本征态同时存在，这就是量子叠加态所展现的。正如薛定谔的猫这个思想实验，在箱子里面的猫可能会被放射性同位素杀死，也可能没有，它此时的状态就是一个生死叠加态，只有在打开箱子对可观测量-猫猫的生死进行观测之后，得到生或者死的本征值，此时表现不同本征态的波函数坍塌并变为某个确立的本征态，我们才能知道猫猫的生死，但是在测量之前既不是生也不是死，而是处于生和死同时存在的状态。

上文说到系数 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 与归一化有关，那么究竟什么是归一化以及为什么要进行归一化呢？我们知道，在量子态 $|\psi\rangle$ 下观测得到本征值 a_i 的概率可以表达为 $P_i = |\psi_i|^2 = |\langle a_i|\psi\rangle|^2$，如果我们要保证各 a_i 的概率和为 1，那么势必得有：

$$\sum_i P_i = \sum_i |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = 1$$

不难得知 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是为了保证自旋上和自旋下的概率和为 1。还得讲讲测量算子，每一次我们对某个物理可观测量进行了观测，在量子力学的数学表达上都对应作用了一个厄米算子（任何可观测量都对应一个量子力学中的算符）。那么你肯定会问，什么是厄米算子嘛？厄米算子是一个自伴算子，即自身等于其厄米共轭（复共轭转置矩阵），并且有着这样的性质：厄米矩阵的主对角线上元素都是实数以及特征值均为实数且本征向量彼此正交（垂直）。给予算符 $\hat{O}$ 和其共轭伴随算符 $\hat{O}^\dagger$，如果 $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$，例如：

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} 1 & 1-2i \\ 1+2i & 3 \end{pmatrix}, \hat{O}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 1-2i \\ 1+2i & 3 \end{pmatrix}$$

可以发现在转置后副对角线上的元素取复共轭均对应并等于原矩阵的元素，因此该矩阵为厄米矩阵，可以在量子力学中用作测量算子。既然说到测量了，那么我们怎么去定义测量的期望呢？

在概统相关学科中，数学期望是一个反映随机变量平均取值的量。对于每次实验可能的结果 x_k 和可能的概率 p_K 来说，那么离散型的期望公式可以表达为：

$$E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

而在量子力学中对物理量测量的期望可以理解为对可观测量-本征值 O 的期望，那么我们不妨这样定义：$\langle O\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$，来看一个对处于 $|\psi_{z+}\rangle$ 的粒子在 z 轴上进行测量的简单的例子：

$$\langle S_z\rangle = \frac{\hbar}{2}\langle\psi_{z+}|\sigma_z|\psi_{z+}\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}$$

同理可得 $\langle S_z\rangle = \frac{\hbar}{2}\langle\psi_{z-}|\sigma_z|\psi_{z-}\rangle = -\frac{\hbar}{2}$，其中 σ_z 为泡利 z 轴自旋矩阵，这说明粒子的自旋必定是在 z 轴上的，且自旋上时测得本征值为 $\frac{\hbar}{2}$，自旋下时本征值为 $-\frac{\hbar}{2}$，分别对应了两个在 z 轴上的自旋本征态，这里省掉 $\hbar$ 变为 $= \frac{1}{2}$ 即为半整数自旋的由来（后面会聊到什么是自旋以及所有具有半整数自旋的粒子都是费米子）。

除了泡利 z 矩阵以外，其实还有泡利 x 和 y（都是行列式结果为-1、迹为 0 的厄米幺正矩阵）：

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

并且有 $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=-i\sigma_x\sigma_y\sigma_z=\sigma_x=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 的数学性质，他们所代表的物理量是自旋在三维欧几里得空间中某个坐标轴的投影分量。相信有线性代数基础的大家不难看出，前面提到过的 z 轴自旋假设刚好是 σ_z 的两个归一化特征向量：

$$\Psi_\uparrow=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\Psi_\downarrow=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

同样的思路可以计算得到自旋在 x 轴和 y 轴上面的特征向量（本征态）和本征值，有了这些就可以列出量子力学中常见的本征值方程-算符 · 本征态函数=本征值 · 本征态函数，用自旋举个例子：

$$\hat{S}_z\cdot|\uparrow\rangle=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z\cdot|\downarrow\rangle=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

注意量子态和本征态并不是一个东西，量子态是可以转化为本征态的线性叠加的，而本征态是厄米算符给出本征值对应的本征向量。这一部分就先和大家聊到这里。至于对易子和共轭物理量我打算在不确定性原理那里再和大家细说，我们先来复习或者说预习一下向量计算以及相关代数性质吧，毕竟量子力学少不了这些东西。

总结：

量子力学的数学表述需要被定义在一个具有内积完备性的赋范线性空间中-希尔伯特空间

量子态和本征态是用来描述某些量子行为的（比如自旋的方向，手性，螺旋度等）

量子每一个行为的各个本征态可以由一组正交基来表示

狄拉克标记中量子态均由右矢（列向量）来表示，左矢为其共轭对偶量（行向量）

量子的每个可观测的行为可以在数学上等价为一个厄米算符（具有自伴性）

<左矢|算符|右矢>为期望的计算方式，<左矢|右矢>为在|右矢>量子态下观测得到量子态<左矢|的概率幅

观测可观测量得到的为该系统的某个本征态对应的本征值

量子态在进行概率计算时候必须先进行归一化，满足所有本征态概率和为 1

量子在被观测之前的性质由确立的波函数来描述，为某个本征态的概率数值上为归一化后的波函数的模的平方

每一次的观测结果必定是原先量子态的波函数（概率幅）坍塌为了某一个确定的本征态

2.2 矩阵与代数

在正式进入量子的代数部分之前，我想先和大家一起回顾一下基本的向量运算法则（没错我经常会忘，不过大家也可以直接忽略）。首先是内积运算（Inner Product）：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

内积的数值矩阵的迹其实也有关系，例如对于实矩阵来说 $\sum_i\sum_j A_{ij}B_{ij}=tr(B^TA)$，复矩阵则是 $\sum_i\sum_j A_{ij}\bar{B_{ij}}=tr(B^HA)$。

量子力学中克罗内克积（Kronecker Product）也很常见：$m\times n\bigotimes p\times q=mp\times nq$

$$A\bigotimes B\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\bigotimes\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

再来看看外积（Outer Product），它其实是克罗内克积的一个特殊形式：$u\bigotimes v=A=uv$:

$$A=uv=\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&4\end{pmatrix}$$

$$=det\begin{pmatrix}i&j&k\\1&0&1\\2&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-2&5\end{pmatrix}$$

以及哈达玛积（Hadamard Product），作用在两个行列数 $m\times n$ 均相同的矩阵 AB 上，可以表示为：$(A*B)_{ij}=a_{ij}b_{ij}$

$$A*B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1&0\cdot0\\0\cdot0&-1\cdot-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

这么重要的地方当然也少不了矩阵的乘法 $C=AB$:

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ip}b_{pj}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1&0\\0&-1\cdot-1\end{pmatrix}$$

2.3 纯态与混态、量子纠缠与纠缠熵

想必大家在前面也看到了，我们的初态量子态可以是 $|\psi_{z+}\rangle$ 这种本征态，也可以是处于某个量子叠加态比如说 $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_{z+}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|\psi_{z-}\rangle$。想象一下粒子在某个轴上的自旋可以映射为一个硬币的两面，那么叠加态则可以认为是硬币既是处于正面也是处于反面。那么现在问题来了，我很有钱，对没错此时我有一堆（N 个）硬币，那么我该去怎么利用量子的说法去更好的炫富呢?

想象一下我有一袋子硬币堆积在一起，那么不可避免的某个硬币会受到另外硬币直接或者间接的影响。对于这样 N 个量子硬币构成的集合，我们在统计物理学上把它叫做系综。为了更好的去描述系综，我们先引入两个概念，混合态和纯态。别慌，我们再定义一个叫做密度矩阵的算符的概念，即：

$$\rho_{AB} = |\psi_A\rangle\langle\psi_B|$$

注意密度矩阵算符也是自伴算符，即 $\rho = \rho^{\dagger}$。如果有一个自旋上的粒子 A 和一个自旋下的粒子 B 构成的系综，那么它们的密度矩阵则可以表达为：

$$\rho_{AB} = |\psi_{z+}\rangle\langle\phi_{z-}|$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

至于什么是纯态呢，其实纯态就是说假设我们只去讨论其中的两个互不干涉的硬币，那么他们的态空间 $H_A \bigotimes H_B$ 上的任一相干叠加态可以表示为：

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{mn} C_{mn} |\Psi_m\rangle_A \bigotimes |\Phi_n\rangle_B$$

混合态则是引入了热力学相关概念，在系综会以一定概率出现在各个可能的纯态上的时候，我们需要引入一个概率分布来描述系综，是一个由多个纯态构成的线性组合。在现实中绝大多数情况都是混合态，因为不可避免的会受到外界环境的干扰从而发生量子退相干。

那么问题来了，我们有办法更直观的从数学上面来区分纯态和混态吗？聪明的你一定知道我这么写那自然是有了，那就是通过密度矩阵来判别。在线性代数中有一种操作叫做求迹，即 $tr(\rho)$，意思是对主对角线上的元素求和。在进行归一化之后，密度矩阵的迹其实都是 1，但是区别在于纯态的密度矩阵平方的迹 $tr(\rho^2)$ 仍然为 1，但混态的则会 $tr(\rho^2) < 1$。在这里我对两个二元系统的密度矩阵（进行归一化后的）来举例进行说明：

$$tr\left(\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = tr\left(\rho_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = 1$$

$$tr(\rho_1^2) = tr(\rho_1 * \rho_1) = tr \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1$$

$$tr(\rho_2^2) = tr(\rho_2 * \rho_2) = tr\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

因此我们得出 ρ_2 所代表的为混态，ρ_1 的则为纯态。由于在现实中量子不可避免的会与外界环境交互或形成量子纠缠，那么这个量子纠缠又是什么东东呢？首先声明一下，关于量子纠缠的解释其中自由意志、爱情、玄学什么的暂不在本文探讨范围内，如有想法可以先行移步百度民科贴吧。想象一个零自旋的静止粒子衰变成为了两个具有相反自旋（角动量守恒）且运动方向相反（动量守恒）的粒子，那么在我们进行自旋的观测之前，这两个粒子就正好处在一个未知的量子纠缠态，可以用直积表示为：

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A \bigotimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \bigotimes |\uparrow\rangle_B)$$

上述式子意思就是在说如果粒子 A 被观测到处于自旋上的态，那么粒子 B 必定会处于自旋下，相反如果 A 粒子处于自旋下则粒子 B 必定相反为自旋上，这里所谓的纠缠便是出现了，因为在观测前我们并不难知道其中任何一个粒子的态。但是在仅仅对某一个粒子进行一次观测后，另一个粒子的状态也将被同时确定，就像爱因斯坦形容的那样："这是如同幽灵般的超距作用"。

既然谈到了纠缠，我在这里也不得不说一下纠缠程度的度量-纠缠熵。众所周知（如果不知道那你看到这里也该知道了）熵（Entropy）是为了描述一个体系的混乱程度的物理量，其中体系越复杂混乱，熵值就越大。那么我们怎么去衡量量子体系的熵值呢？首先我先介绍一下在热动力学中一个含有 N 个物理态的体系，且每个物理态出现的概率分别是 p_i，熵是这么被定义的：

$$S = -k_B \sum_i p_i \log p_i$$

纠缠熵则是根据香农的信息熵公式来定义的：

$$S = -\sum_i p_i \log p_i = -Tr(\rho \log \rho)$$

根据对数函数的性质不难得出，当这个体系为纯态的时候，那么纠缠熵必定为 0。对于最大纠缠态而言，其密度矩阵 $\rho = \frac{1}{N}$，熵值则为 $S = \log N$。由这些性质我们也可以用偏迹和熵来观测纠缠的程度：

$$S = -Tr(Tr_A(\rho) \log(Tr_A(\rho)))$$

有些朋友们可能会奇怪于括号里面的 $Tr_A(\rho)$ 是个什么东西？这其实是在表示进行偏迹运算，量子力学中叫做约化密度算符。如果已知密度算符 ρ，对于子系统 B 进行偏迹运算，则可以得到子系统 A 的约化密度算符 ρ_A：

$$\rho_A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \langle b_j|_B \left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) |b_j\rangle_B = \mathrm{Tr}_B(\rho)$$

例如对于纠缠态 $|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A \bigotimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \bigotimes |\uparrow\rangle_B)$，其子系统 A 的约化密度算符 ρ_A 为：

$$\rho_A = \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle_A\langle\uparrow|_A + |\downarrow\rangle_A\langle\downarrow|_A\Big)$$

我们根据纠缠熵也可以来定义纠缠的程度，例如最大纠缠态，在这里我想讨论一下处于最大纠缠的单重态和三重态。其实上文所提到的 $|\psi_{AB}\rangle$ 就是一个单重态，因为 A 和 B 始终自旋相反-物理意义上可以用电子自旋配对（符合泡利不相容原理）来形容，那么其总自旋 S=0：

$$S = \frac{1}{2}\hbar - \frac{1}{2}\hbar = 0$$

那么三重态是什么东西呢？根据类比的思想顾名思义其可能的总自旋为-1，0，1：

$$|\psi_{AB}\rangle = |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A \bigotimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \bigotimes |\uparrow\rangle_B)$$

$$|\psi_{AB}\rangle = |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B$$

第一个和第三个式子想必大家很熟悉，A、B 两个子系统自旋方向相同嘛，但是大家可能对第二个式子有些疑惑，不太清楚在物理意义上与单重态的区别。还请大家可以带着疑惑前往下一章，我会在讲述自旋与泡利不相容原理的时候给大家讲对称与反对称态以及交换算符的概念。（至于更多东西例如为什么会出现这些那可能会涉及到在三维转动下 SU(2) 群和 SO(3) 群的差别，将在接触旋量后再去讲述）话说回来再来检验一下看看这个子系统 A 的约化密度矩阵所表示的究竟是混合态还是纯态呢：

$$tr({\rho_A}^2) = \frac{1}{4}tr\left(\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right) * \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}tr\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) * \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix} = \frac{1}{2} < 1$$

不难看出经过约化密度算符作用得出的子系统 A 处于混态（$tr(\rho_A) < 1$），这部分是不是很简单呢，其实主要就是掌握线性代数的基础运算技巧就可以啦，不太确定的话不妨再来看一个练习的例子，我们来判断一下量子纠缠态 $|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A \bigotimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \bigotimes |\uparrow\rangle_B)$ 的密度矩阵以及它的性质：

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$tr(\rho_{AB}) = 1, tr({\rho_{AB}}^2) = 1$$

不难看出这个由 AB 两个子系统组成的单重态纠缠体系处于纯态，注意纠缠态和混态并不是一个概念，大家要注意分清楚哦！因为这里的 A-B 一定是完全确立的，A 和 B 的自旋必须相反，且系综不可分解。但是对于单个 A 所代表的系综则是混合态，因为其可以分解为两个系综。

总结：

量子叠加态是该系统处于各个本征态的线性叠加，观测前每个本征态同时存在

量子纠缠是当无法对两个或以上的量子进行单个描述而只能描述其整体行为时候的非经典现象

数学上纠缠是指复合系统的多个子系统的量子态不能被张量积的形式来表达，则子系统彼此相互纠缠

密度算符的形式是|右矢><左矢|，算出来是一个矩阵

纯态是一个可分态，对子系统 A 做测量时不会影响到子系统 B 的状态，可以用张量积直接表示

混合态是几个纯态由统计概率形式共同组成的量子态

纯态的密度矩阵的乘积的迹等于 1，混态的密度矩阵的乘积的迹小于 1

约化密度算符是在做偏迹运算，意在求出复合系统中某一个子系统的密度矩阵

非理想情况下（与环境存在不可避免的交互）会发生量子退相干，密度矩阵的非对角元素会随着时间流逝逐渐趋零

当处于最大纠缠态的时候，纠缠熵为 $S = \log N$，N 为物理态的总个数

2.4 战场上永远记得告诉敌人你的动量-不确定性原理

在开始对不确定性的介绍前，我想先和大家聊一聊量子物体特有的性质-波粒二象性（或者说经典物体也有，只不过是波长太长从而波动性退化不可见了）。

关于粒子性其实很简单，相信大家高中也都学过爱因斯坦的光电效应方程：$E_k = h\nu - W_0$，其中 W 为对应金属的金属逸出功，$qU = \frac{mv^2}{2}$ 这里代表的意思是需要克服势能的粒子所获初动能为吸收光子所得，只有当其最大初动能大于金属逸出功时候才能有电子溢出（具有剩余动能），因此照射的光应当具有一个最小的截止频率，并且在小于该频率时多大光照强度多长时间都不可能有电子溢出。而在截止频率之上增大光强（金属材料饱和范围内）也会提升同一时间内溢出电子的数量，即更多的光子与更多电子发生了能量的传递。简述一下，光子能量=移出一个电子所需的能量-逸出功+被发射的电子的动能，光电效应产生的光电流充分说明了光具有粒子性。

我们在前文中知道，一个可以用波函数描述的微观粒子并不具有确定的轨道，其运动更像是从某一个位置突然消失，同时出现跃迁到了下一个位置。那么这里我们就讨论一下什么是波函数吧，前文对波函数 ψ 的定义是概率幅，这里再定义一下其数学表达式（为了方便就定义一个一维的）：

$$P_{total} = C\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

其中 C 为归一化系数，x 为坐标位置 t 为演化时间，为了保证总概率为 1 即粒子始终会在空间的某一处而存在，$\psi(x,t)$ 即为波函数。当然对任何粒子的相对波长也会有一个关系式，即德布罗意波（物质波）：$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p}$

那么是什么导致了人们用波函数来描述粒子的波动性行为呢，其实是经过一系列干涉和衍射实验（将在后续章节详细叙述）。

经历过爱因斯坦光电效应方程和电子衍射实验的验证，人们终于意识到了粒子所具有的完整的波粒二象性，下面再来说说本节核心内容：关于位置-动量的不确定性。

在微观量子世界里关于位置-动量的不确定性原理可以有着三种常见近似“等价”的描述：

不可能在测量位置时完全不搅扰动量，反之亦然。

不可能对于位置与动量做联合测量，即同步地测量位置与动量，只能做近似联合测量。

不可能制备出量子态具有明确位置与明确动量的量子系统。

我们不妨来尝试分别理解一下这三句话。第一句话意思其实可以理解为对于一个量子系统，我们在测量一个量的时候必定会造成一个扰动从而使得其共轭对偶量发生退化，不在具有足够的测量准确性，即不确定度加大。第二句话其实就是在说如果在同一时间分别对动量和位置这种共轭对偶量进行测量是不可能存在的行为，其必定是不准确的，我们只能得到一个相对的值和近似范围。第三句意在说明当然注意这是针对量子系统的行为，对于那些宏观位置和动量同时可测互不干扰的系统而言，其退化为了经典系统。

除此外，在这里还要先行定义一个算符-对易算符：$[\hat{A}\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$。若 h 为普朗克常数，那么正则对

易关系（数学表述上也叫交换算符）的表达式为：$[\hat{x}, \hat{p}] = xp - px = i\hbar$，我们不妨来一起推一下：

$$px\psi = -i\hbar\frac{d}{dx}(x\psi)$$

$$= -i\hbar(\psi + x\frac{d\psi}{dx})$$

$$= (-i\hbar - i\hbar x\frac{d}{dx})$$

$$px = -i\hbar - i\hbar x\frac{d}{dx} = -i\hbar + xp$$

那么 $xp - px = xp - (-i\hbar + xp) = -i\hbar$，这说明了在量子系统里面，算符的作用先后顺序也很重要，改变顺序将会影响到最后的结果。可以这么去理解，我先观测子系统 A 再去观测子系统 B，和我先去观测子系统 B 再去观测子系统 A 得到的结果是不同的。

总结：

微观量子物体具有波粒二象性，即表现出波动性也表现出粒子性

任意两个共轭对偶物理量测量时必定会影响另一个的波函数的概率分布，且无法同时精准测量或者制备其量子态

德布罗意波的定义公式为：$\lambda = \frac{h}{p}$

对于德布罗意波长越大的粒子或物体，它的行为就越倾向于可以用经典物理来描述，波长越短其量子性质就更明显

共轭对偶（不相容）物理量的正则对易式表达结果不为 0

在波长为 0，动量不为 0 时候考虑其经典运动学的性质，在波长不为 0，动量为 0 的时候考虑其经典波动性质

哈哈最后有一个梗送给大家：

Figure 3: 战场上永远记得告诉敌人你的动量

2.5 动手剧情-建立量子通信

“嘘！少年，别声张，你能看到此章说明你一定骨骼惊奇，对其实你就是被组织选中的那个人。事情是这个样子的，组织需要你潜入敌方基地盗取敌方一份机密，记住这个任务十分危险，并且我们所有的通讯频道都已经被敌方渗透，我们需要用另外一种特别的加密手段去传递信息-量子加密来进行量子通信！所有的技能已经在前面都已经交给你了！这次能否盗出机密文件扭转整个战局，就靠你了！”

你缓缓关闭了组织给你的信息，这是前不久你刚收到的。此刻你已经乔装进入了地方基地，为了保证万无一失你还是得检查一下量子通信仪器工作是否正确，想到这里你开始了测试：

开始量子态初始化-使用 polarization-based QKD protocol：

量子通信仪器使用的并不是电子的自旋而是光通信中光子的不同偏振，因此我们需要制备的是光子的横纵偏振态。以你高达 180 的智商很快就以自旋的本征正交基为模板想到了到光子偏振的映射。开始定义光子偏振态正交基：

$\Rightarrow$（1）选择光子水平（H）与竖直（V）偏振模式，制备偏振本征态：$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

你松了口气，第一组正交基似乎定义的没什么问题，正好可以对应的是电子自旋的上下本征态。接着你开始定义第二组处于叠加态的非本征态正交基：$\Rightarrow$（1）选择对称态（S）与反对称态（A）模式：

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

很好，初态制备的定义阶段似乎都没有什么问题，一切正常!接下来就是测试制备是否成功了：

3 物理的美-对称与守恒

不管是在量子力学还是粒子物理中，对称性都会起到一个很重要的作用，尽管有些时候的对称性会有些抽象，但是实际上几乎所有物理学定理都是会围绕各种对称性而展开的。

“如果说给系统一个“操作”，如果系统从一个状态变到另一个等价的状态，则说系统对这一操作是对称的。它是指一个理论的拉格朗日量或运动方程在某些变量的变化下的不变性。如果这些变量随时空变化，而拉格朗日量或运动方程仍旧不变，则称此性质为为“局域对称性”（local symmetry），反之，若这些变量不随时空变化，则称此性质为“整体对称性”（global symmetry）。物理学中最简单的对称性例子是牛顿运动方程的伽利略变换不变性和麦克斯韦方程的洛伦兹变换不变性和相位不变性。”

3.1 镜子里的世界-对称性

3.2 每一个对称性必定对应一个守恒量-诺特定理

总结:

关于洛伦兹协变性:

能量守恒对应时间平移不变性

动量守恒对应空间平移不变性

角动量守恒对应空间旋转不变性

关于分立对称性:

空间宇称守恒对应 P 坐标不变性

3.3 致这个并不完美的世界

第二部分 “世界上只有两个半人懂这些”

4 车门焊死了来提提速-简述狭义相对论

狭义相对论是相对论性量子力学（高速）与粒子物理的数学基础内容，因此我们很有必要去掌握它，有句人云亦云的话不知道大家听过没有：“世界上只有两个半人懂相对论。这句话一个人是爱因斯坦他自己，另一个则是实验物理学家爱丁顿，至于最后那半个则是其它所有人-因为都是一知半解。”。其实这些都是过去式了，我们大可不必拿一些吓唬人的话来整自己。如果你实在是完全认同刚刚那句话的话，那我本人希望在看完后你能让懂的人变为三个半人。

我们过去所理解的经典运动实际上都是可以通过伽利略变换来描述的，伽利略时空是一个 D3 的欧几里得空间（DN 指的是维度有 N 维），有着 D1 的时间，并且有着严格的距离定义 $||a-b|| = \sqrt{(a-b, a-b)}$。在经典牛顿力学中，物体的运动可以被伽利略变换（Galilean transformation）和牛顿运动方程所描述。在这里你可能有些犯迷糊，什么是伽利略变换？其实我们都知道而且应该都用过：比如一个质点的初始位置为（x,y），其运动速度沿 x 轴为 v，那么经过任意时间 t 之后其坐标均可以表示为：$(x + v \cdot t, y)$

我们过去常用的牛顿运动理论其实就是基于三维平直时空去做仿射变换，作为好奇宝宝的你可能会问了：啥子是仿射变换呢？其实很简单，仿射变换就相当于我在对坐标系进行线性缩放的基础上再去添加了一个平移变换，举个例子：存在一个函数 $y = x$，经过一个线性缩放变化 $y = a \cdot x$，如果我们再进行一个平移变化 $y = a \cdot x + c$，最终得到的即为仿射变换。其实在 $R \times R^3$ 空间中任意变换都可以被表示为一个旋转变换+一个平移变换+一个匀速直线运动变换的组合。

伽利略变换和牛顿经典运动学所探讨的时间和空间是绝对的，也就是说在伽利略变换中，时间是不受到观测者相对运动影响，用矩阵可以表达为：

$$(x', t') = (x, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix}$$

如果这还不够直观，那我们可以去列一下，假设同一事件存在于 S 与 S’ 两个具有相对速度 v 的坐标系：

$$x' = x + v \cdot t$$

$$y' = y, z' = z$$

$$t' = t$$

4.1 爱因斯坦：“感谢感谢我拿走辣”-洛伦兹变换

在简单介绍完了伽利略变换之后我想我们可以来提提速，来深入了解一下洛伦兹变换了。

4.2 我们需要指标与度规-四矢量

闵可夫斯基时空

4.3 老生常谈-动量与能量

5 不变的粒子数与微观低速-薛定谔方程

相信大家有过这样的经历，不管是在影视还是各类动画里，涉及到物理或者量子的时候多半都会出现这个式子的画面：

$$\hat{H}\Psi(r,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t)$$

别怕其实这就是一个非相对论性零自旋自由粒子的薛定谔方程而已，在量子力学里面只能说是一个非常基础的东西，希望在本章过后大家再看到什么地方用这一个方程来试图混淆视听都可以一笑了之，并且记住，这只是非相对论性的量子力学，动能还是 $E_k = \frac{mv^2}{2}$。如果粒子具有过大的动能那么需要引入洛伦兹变换，薛定谔方程将变形为克莱因-戈登方程（后面再讨论）。我们前面聊了很多，但其实都算是背景知识，真正的量子力学内容在这一章才开始。

5.1 开 幕 雷 击-介是你没有见过的船新算符！

严正声明：此篇需要大家认真记忆，这将是关乎后续内容至关重要的一节。

为了让大家更好的理解薛定谔方程，首先我想要定义一个叫做酉（幺正）算符的概念（这个东西之后会经常出现），其所作用的变换均为酉变换（Unitary Transformation），在数学上这等价于两个希尔伯特空间的同构。这其实意在说明酉变换是一个保留内积的变换，变换之前的两个向量的内积等于其转换后的内积，作用前后不会影响两个复向量的点积结果。其所有特征值都满足是绝对值为 1 的复数，行列式结果也为 1。并且这类酉算符均满足性质：

$$\hat{U}\hat{U}^{\dagger} = \hat{U}^{\dagger}\hat{U} = I$$

$$U^{-1} = U^{\star}$$

并且一个厄米算符可以表达可观测量，那么它也一定是酉算符，举个例子例如我们有厄米矩阵（拿 y 轴自旋举个例子）：$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$$\sigma_y{}^{\dagger}\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_y\sigma_y{}^{\dagger}$$

其次我们再去了解这个方程含有的元素的性质，例如和动能以及势能相关的哈密顿算符（酉算符）$\hat{H}$：

$$\hat{H} = T + V = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$$

这个算符的意义是引出哈密顿量 H。在经典哈密顿力学中，任何辛流形上的光滑实值函数 H 可以用来定义一个哈密顿系统（看不懂可以忽略这句话，因为不影响对本文的理解），只需要知道哈密顿量 $H = T + V$ 所表述的是其数值等于系统总动能和总势能之和就好。在后续出现的方程中，哈密顿算符 $\hat{H}$ 等效着体系的总能

量。例如一个具有质量 2m，速度为 0.01c 的时候，其势能为 $V(x)=\frac{1}{x^2}$，那么其哈密顿量则为：

$$H=T+V=\frac{2m\cdot(0.01c)^2}{2}+\frac{1}{x^2}$$

哈密顿量可以作用在一个时间平移酉算符 $\hat{U}(t)$ 上（没错又来一个，详细性质会在后面介绍）：

$$\hat{U}(t)=exp(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar})=e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$$

我还不得不介绍另一个算符-动量算符 $\hat{p}=-i\hbar\nabla$ 或者为 $\hat{p}=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$，这里是一个量子力学很常用的变换 $\frac{1}{i}=\frac{1\cdot i}{i^2}=-i$。动量算符它有着一个很大的作用-它能把动量用偏微分（也是线性算子）的形式来表示出来，毫无疑问它也是个厄米算符。(这都是你没见过的吧）那么当动量算符与位置算符的交换算符作用在一个物理量上的时候会发生什么呢?

$$[\hat{x},\ \hat{p}]\psi=(\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x})\psi=x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial(x\psi)}{\partial x}=i\hbar\psi$$

可知 $[\hat{x},\ \hat{p}]=i\hbar\neq 0$ 这关系称为位置算符与动量算符的正则对易 (Canonical Commutation) 关系。此处位置和动量的正则对易算符结果不等于 0，表明位置与动量是不相容可观察量-即不可能同时精确观测，当观测到其中任意一个量必定会影响另外一个量的精准度。

实际上数学里面有个关系表达式（海森堡不确定性原理）：$\left|\frac{\langle[\hat{x},\ \hat{p}]\rangle}{2i}\right|=\frac{\hbar}{2}$，可知两个不相容可观测量的不确定度必定大于 $\frac{\hbar}{2}$，这就得出了我们课本上常见的那个版本：

$$\delta x\delta p\geq\frac{\hbar}{2}$$

总结：

幺正矩阵必定可逆，且逆矩阵等于其本身的共轭转置矩阵，其特征值的绝对值与行列式结果均为 1

泡利 xyz 矩阵均为幺正厄米矩阵，用来描述磁场与自旋的相互作用（使来观测自旋）

哈密顿量代表着系统的总能量（势能与动能总和)，公式为 $H=T+V$，哈密顿算符是自伴算符

动量算符 $\hat{p}=-i\hbar\nabla$ 是厄米算符，其与位置算符互不正则对易，因此动量和位置不能同时精确测量

海森堡不确定性原理表达了两个不对易的物理量（共轭对偶量）的不确定度乘积必须大于 $\frac{\hbar}{2}$

5.2 “团长，你根本妹在沈阳!”-粒子的波动方程与波函数

在本章我们不必过分纠结波动方程是怎么来的，它的物理意义什么，那是波动力学的内容，我们核心放在量子力学上。

5.3 好像其实也不难-方程的解

5.4 还是会扩散的-薛定谔方程的含时演化

5.5 我可以越过任何的高山-量子隧穿与量子势垒

5.6 我比薛定谔多了相对论效应-Klein – Gordon 方程

6 薛定谔与海森堡-波动力学、矩阵力学

上回说完了量子力学的数学基础与薛定谔方程的理解，接下来就可以进一步的在量子知识的海洋里遨游了！

6.1 各执己见-绘景与表象

6.2 打了半天原来是一伙的-量子力学的两种表述

7 对撞机咋没新活儿了-标准模型与基本粒子

在这里不去过多的探讨那些深奥晦涩的数学和物理内容，我们简单从物理意义角度来理解一下标准模型。标准模型在粒子物理学里是一个结合了强相互作用力、弱相互作用力、电磁力以及物质基本粒子的理论，并且可以融合量子力学和狭义相对论。其融合了三种规范不变性（后面会具体解释）：色荷 SU(3)、弱同位旋 SU(2) 以及弱超荷 U(1)。

Figure 4: 标准模型粒子图例

如图可见，标准模型共包含了两大类粒子（费米子与玻色子），刨除预言中但是实验未发现的粒子则一共 $36+12+8+2+1+1+1=61$ 种（算上反粒子），其中大多数都由加速器和粒子对撞机所发现，比较有名的比如大型强子对撞机 LHC（Large Hadron Collider）。在上个世纪末以及这个世纪初的时候几乎每隔一段时间就会有新的粒子在对撞实验中被找出来，在 1978-2012 年间粒子与高能物理可谓是风光无限，毕竟还出了个著名的标准模型。可惜一切似乎都暂时定格在了 2012 年-标准模型中最后一个粒子-希格斯玻色子的发现，从此粒子物理进入了一个平缓重整期，除了中微子振荡现象的相关实验还算在有序进行，其它项目关的关、对撞机修的修-没新的狠活了。（当然有关基本粒子质量的问题还在探究，质量机制仍然是一个值得思考的问题）近十年的平缓期也并不是故事的结尾，因为质量的形成机制、强 CP 问题、中微子振荡、重子不对称性以及暗物质和暗能量的性质（什么，你看不懂在说什么？那就对了，因为我也都不太懂，懂了没准你就是下一个诺奖）这些并不能被标准模型所解决，众多证据表明着一个共同的问题-标准模型具有局限性并且不是一个终极理论，其

可能知识高能下的一个近似理论。除此之外在标准模型之上更有着超对称理论（SUSY）以及超弦理论，粒子物理和高能物理领域还有着众多的问题等着我们去探索。

下面给大家简单表演个数数，在这里先不用过多计较它们是什么东西，后面都会涉及到的。在这里声明一下物质由费米子以及费米子的组合构成，而玻色子负责传递基本相互作用。

（费米子）6 种夸克以及其 6 种反粒子：上夸克 u, 反上夸克 $\bar{u}$, 下夸克 d, 反上夸克 $\bar{d}$, 夸克 c, 反夸克 $\bar{c}$, 奇夸克 s, 反奇夸克 $\bar{s}$, 顶夸克 t, 反顶夸克 $\bar{t}$, 底夸克 b, 反底夸克 $\bar{b}$，但由于每种夸克可以带有 3 种不同的色（color），因此一共是 $12 \times 3 = 36$ 种。

（费米子）6 种轻子以及其 6 种反粒子：电子 e^-, 反电子 e^+,μ 子 μ, 反 μ 子 $\bar{\mu}$,tau 子 tau, 反 tau 子 $\bar{\tau}$。电子中微子 ν_e，反电子中微子 $\bar{\nu_e}$，μ 子中微子 ν_μ，反 μ 子中微子 $\bar{\nu_\mu}$，τ 子中微子 ν_τ，反 τ 子中微子 $\bar{\nu_\tau}$。

（（规范）玻色子）光子 γ 本身也是其反粒子,Z 玻色子以及其反粒子本身 z^0，W 玻色子 W^0 以及一对带电反粒子 W^+,W^-，胶子 g 以及反粒子为其本身，但其具有 8 种色因此为 8 种粒子。

（（标量）玻色子）希格斯玻色子 H，反粒子为其本身。

7.1 笨死了我才没有在旋转-关于粒子自旋的认知

在开始聊这一章节以及什么是自旋之前，我们不妨根据现有数据先来做一些基于经典物理认知的假设计算。已知电子质量为 $9.109 \times 10^{-31}kg$。自旋角动量为 $\frac{1}{2}\hbar kg \cdot m^2/s$，取普朗克常数为 $6.626 \times 10^{-34}J \cdot s$。假设电子为经典物理意义上的球体，近似半径可以被估算为 $R = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}m$，那么其等效球体赤道上的自旋线速度为多少呢?

根据球体的转动惯量 $I = \frac{2}{5}mR^2$ 以及角动量 $L = Rmv = I\omega$，取光速为 $3 \times 10^8 m/s$ 可知：

$$R = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} = 2.8102 \times 10^{-15}m$$

$$\frac{1}{2}\hbar = \frac{2}{5}mR^2\omega \Rightarrow \omega = 1.83 \times 10^{25}rad/s$$

$$v = \omega R = 5.15 \times 10^{10}m/s$$

光速是多少来着，神不神奇？大家是不是感到诧异的同时也发现了一些问题在这里面-电子转动的线速度居然远远超过了光速！这这这速度直接原地起飞了啊，这不管是在经典力学还是量子力学中都应该是不被允许的。那么，一定是哪里出了问题，某个假设不成立或是电子自旋本身并不能这样进行经典小球旋转模型的等效。如果我们此时去查看自旋的定义：“自旋即由粒子内禀角动量引起的内禀运动”，这意在说明是一个粒子本身具有的内禀性质，对应于经典物理当中的角动量概念，但是上述计算表明了其并不能等效于角动量来计算-否则会引发出超光速的自旋线速度。

分析究竟什么是自旋还得从一个经典概念说起，角动量守恒大家应该也都了解，但是其实在这里守恒的并不是自旋角动量，而是轨道角动量与自旋角动量的和。这个概念我们可以类比地球和太阳的关系来理解，地球在绕着太阳公转的公转轨道上具有轨道角动量，而地球还有本身的自转-对应自旋角动量。那么这时候大家想必也好理解什么是自旋角动量了，就是总角动量是一个定值-守恒量，然而它和粒子的轨道角动量之间在数值上始终存在一个差值-即自旋角动量，但它是一个非经典性质并不像地球自转那样，它不存在一个自转的定轴。在物理上这段差值还展现为了一个磁矩的产生-自旋磁矩，这也是我们能够测量自旋的原因。对于一个具有电荷 q，质量 m 以及自旋角动量 $\vec{S}$ 的粒子其自旋磁矩作为一个矢量可以表达为（g 为一个无量纲的因子，理论近似上可以认为是自旋的倒数 $\frac{1}{S}$）：

$$\vec{\mu_s} = g\frac{q}{2m}\vec{S} = \gamma\vec{S}$$

其中 γ 是磁旋比（gyro-magnetic ratio），在数值上等价为 $g\frac{q}{2m}$。

我们不妨再来了解下自旋与泡利不相容原理的联系，在高中或者大学普物阶段大家可能或多或少了解到原子上的处于同一轨道的电子必须保证相反的自旋，否则不能处于同一轨道。但其实这只是泡利不相容原理的简化版本，其本质应该是全同粒子（指的是一群不可区分的粒子，比如牧场上上百头羊长差不多你并不知道谁是谁）中例如玻色子（自旋为整数的粒子）的波函数具有对称性，而费米子（自旋为半整数的粒子）的波函数具有反对称性，两个费米子不可能处于完全相同的量子态。举个例子，玻色子就像两个相同面朝上的硬币你

交换其位置，并不会影响系统的状态和硬币的状态。费米子就是如果你一左一右交换两个朝上面不同的硬币，那么硬币朝向会从正反变为反正-或者反正变为正反，此时的交换会影响其本身的状态以及整个系统的状态：

$$|\uparrow\uparrow\rangle \leftrightarrows |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$|\downarrow\uparrow\rangle \leftrightarrows |\uparrow\downarrow\rangle$$

关于自旋为整数 N 大家或许还好理解-简单理解为一个周期内出现了 N 次相同的态，但是自旋半整数例如 $\frac{1}{2}$ 到底是什么呢？我们不妨去这么理解，自旋二分之一就相当于我转动 720 度才能回到初始的位置而非 360 度 (不要惊讶这是基本操作！因为这是 SU(2) 群的性质决定的，而正常的旋转一周 360 度复原则是三维空间下的 SO(3) 转动群)。当然自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子并不是只有自旋上下和我之前展示的几个叠加态，实际上可以是任意正交本征态成分的线性组合：

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$$

其中 $|\alpha|^2$ 是测量到自旋为 $\frac{1}{2}\hbar$ 的概率，$|\beta|^2$ 是测量到自旋为 $-\frac{1}{2}\hbar$，当然得保证归一化条件 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$。其实这里面也出现了个有趣的性质，即我们只需要一个粒子自旋就可以得到两个系数 $\alpha\beta$，量子计算相对于经典计算之所以能够达成指数级加速也正是利用了这个原理：有 n 个经典比特，我们只能存储和表达 2n 种状态 (二进制 0 和 1)。然而如果有 n 个量子比特，我们去做一个自旋方向上、下到二进制 0、1 的映射，则可以去表达 2^n 个不同的状态。

由于自旋上和下是一组正交基，那么可以在一个二维复平面上做一个 x-y 坐标轴映射，并且定义出夹角 θ：

$$\theta = \arctan\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}$$

那么看到这里相信大家也想到了什么，对，可能存在一个转动算符-数学形式上对应二维转动矩阵！这个算符可以用来表示对自旋观测轴夹角的旋转，有了它我们就可以以任意角自行定义自旋方向了：

$$R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

总结：

自旋并不是粒子在进行经典的旋转，而是数值上总角动量减去轨道角动量后存在的余量，是粒子的内禀性质，表现为一段磁矩

自旋二分之一粒子是在“转动”720 度后回到原始态而不是 360 度（SU(2) 群性质）

泡利自旋矩阵定义了在三维空间中坐标轴上的观测算符

对于全同粒子来说，费米子的波函数并不具有可交换性，而全同玻色子交换波函数不会发生改变

泡利不相容原理对应的费米子部分即为不可能有两个费米子出现在完全相同的量子态

可以任意定义 xyz 坐标系中定义自旋观测轴，并且可以由转动矩阵来进行任意角度旋转，即所谓的自旋上下都是相对的

7.2 半整数自旋粒子与物质的构成-费米子

7.3 整数自旋与相互作用的传递-玻色子

7.4 真空不空以及质量的产生-自发对称性破缺与希格斯机制

7.5 我可能只是一定能标下的近似-标准模型的局限性

8 解决了负能量但弄出来了反粒子-狄拉克方程

8.1 问就是我也不会解-方程的解

8.2 还是得简化一波-旋量

8.3 反正电子与电子有区别吗-螺旋度与手性

第三部分　就是说咱也可以化身懂哥

9 连接万物-基本相互作用

9.1 神说：要有光-电磁相互作用

9.2 Z 玻色子和 W 玻色子出来挨打！-弱相互作用与电弱大统一

9.3 渐近自由与色动力学-强相互作用

9.4 爱因斯坦数学究竟好不好？-引力与广义相对论

10 居然不是零质量-中微子振荡

10.1 这数字咋对不上呢？-太阳中微子问题

10.2 质量本征态与味本征态的不对称-振荡从何而来

10.3 转动矩阵与传播方程的含时演化-中微子振荡数学模型

10.4 与暗物质和暗能量的相互作用-反中微子的出现

11 搞这个你就是下一个诺奖-大一统理论与在标准模型之上的东西

11.1 它咋还不能量子化呢？-引力子与量子引力

11.2 点我送诺奖辣-大一统理论

11.3 看懂这个你是真厉害!-超对称、弦论与额外维度

11.4 百分之九十六的宇宙是未知-暗物质与暗能量