Contents

1 组合数学 1.1 (2017.9.5)

BY：王华强段江飞

1.1 1. 加法原理

1.2 2. 乘法原理

1.3 3. 排列与组合

一些符号

$$P_{n,m} = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
$$\binom{n}{m} = 0(m > n)$$

原有概念的推广

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!} = (-1)^n$$
$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}}{2^{2n-1}n}$$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i = \sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{i\geq 0}(-1)^i x^i = \sum_{i\geq 0}\binom{-1}{i}x^i$$

推广

$$(1+x)^a = \sum_{i\geq 0}\binom{a}{i}x^i \quad (|x|<1)$$

(a 任意)

1.3.1 应用 1

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{2*\lfloor n\rfloor} = 2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{2*\lfloor n\rfloor} = 2^{n-1}$$

1.3.2 应用 2

$$\sum_{(} i \geq 0)\binom{n}{3i}$$

考虑 1 的三次单位根 1 $\omega 1$ $\omega 2$
其中

$$\omega 1 = e^{\pi * 2i/3} \quad \omega 2 = e^{\pi * 4i/3}$$

$$\omega 1^3 = 1$$

于是可以展开$(1+\omega)^n, (1+\omega^2)^n, (1+1)^n$
由 ($1+\omega+\omega^2=0$) 得

$$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i} = \frac{(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+(1+1)^n}{3}$$

练习: 化简上式

1.4 4.Vandermonde 恒等式

1.4.1 1. 求和 $\sum_{i\geq 0} i\binom{n}{i} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = ?$

对$(1+x)^n = \sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i$ 求导得到

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i\geq 0} i\binom{n}{i}x^{i-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

令$x=1$ 得到

$$\sum_{i\geq 0} i\binom{n}{i} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1}$$

1.4.2 2. $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{m+n}$

$(\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i)(\sum_{j\geq 0}\binom{m}{j}x^j) = (\sum_{k\geq 0}\binom{n+m}{k}x^k)$ $\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}}_{Vandermonde\quad formula}$

令$m=n=k$ 可得

$$\underline{\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}^2 = 2^{2n} - 2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{i}}$$

在杨辉三角中，有以下关系

Pascaltri

写成公式形式：

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + ... + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

1.5 5. 组合数的多项式性质

考察

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n*(n(+1)*(2n-1)}{6}$$

其可用组合数的性质证明如下：

$$\sum\binom{k}{2} = \sum\frac{k(k+1)}{2} = \sum(k^2/2 - k/2)$$

(1)

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = 2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n}k$$

(2)

练习：$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = ?$

Tips:

$$x^2 = x(x-1) + x = 2\binom{x}{2} + \binom{x}{1}$$

(1)

$$x^3 = 6\binom{x}{3} + 2\binom{x}{2} + \binom{x}{1}$$

(2)

$$x^k == ?\binom{x}{n} + ... + ?\binom{x}{1}$$

(3)

可以发现

$$\binom{x}{n}, ..., \binom{x}{1}$$

(4)

是一组线性无关的基.

思考: 见作业 1