组合数学第1讲

授课时间: 2017.9.5 授课教师: 孙晓明 记录人: 王华强段江飞

1 加法原理(略)

2 乘法原理(略)

3 排列与组合

一些符号

$$P_{n,m} = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
$$\binom{n}{m} = 0(m > n)$$

原有概念的推广

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!} = (-1)^n$$
$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}}{2^{2n-1}n}$$
$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$
$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i = \sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i$$
$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{i\geq 0}(-1)^i x^i = \sum_{i\geq 0}\binom{-1}{i}x^i$$

推广

$$(1+x)^a = \sum_{i\geq 0}\binom{a}{i}x^i \quad (|x| < 1)$$

(a任意)

例1

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{2*\lfloor n\rfloor}=2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{2*\lfloor n\rfloor}=2^{n-1}$$

例2

$$\sum_(i\geq 0)\binom{n}{3i}$$

考虑1的三次单位根1　$\omega 1$　$\omega 2$
其中

$$\omega 1=e^{\pi*2i/3}\quad \omega 2=e^{\pi*4i/3}$$

$$\omega 1^3=1$$

于是可以展开$(1+\omega)^n,(1+\omega^2)^n,(1+1)^n$
由$(1+\omega+\omega^2=0)$得

$$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i}=\frac{(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+(1+1)^n}{3}$$

练习: 化简上式

例3　求和$\sum_{i\geq 0}i\binom{n}{i}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=?$ 对$(1+x)^n=\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i$求导得到

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{i\geq 0}i\binom{n}{i}x^{i-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

令$x=1$得到

$$\sum_{i\geq 0}i\binom{n}{i}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$$

4　Vandermonde恒等式

定理 1. $\underbrace{\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}}_{Vandermonde\quad formula}$

证明　$(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{m+n}$ $(\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i)(\sum_{j\geq 0}\binom{m}{j}x^j)=(\sum_{k\geq 0}\binom{n+m}{k}x^k)\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n}{}}_{Vandermonde\quad formul}$

令$m=n=k$可得

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}^2=2^{2n}-2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{i}$$

□

定理 2. 在杨辉三角中，各组合数有依据位置的关系
写成公式形式：

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+...+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

即朱世杰恒等式

5 组合数的多项式性质

考察

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n*(n(+1)*(2n-1)}{6}$$

其可用组合数的性质证明如下：
证明

$$\sum\binom{k}{2}=\sum\frac{k(k+1)}{2}=\sum(k^2/2-k/2)$$

(1)

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{n}k$$

(2)

□

例4 $1^3+2^3+3^3+...+n^3=?$

Tips:

$$x^2=x(x-1)+x=2\binom{x}{2}+\binom{x}{1}$$

(1)

$$x^3=6\binom{x}{3}+2\binom{x}{2}+\binom{x}{1}$$

(2)

$$x^k==?\binom{x}{n}+...+?\binom{x}{1}$$

(3)

可以发现

$$\binom{x}{n}, ..., \binom{x}{1}$$

(4)

是一组线性无关的基.

思考：见作业1