组合数学第一讲

授课时间: 2017年9月5日 授课教师: 孙晓明 记录人: 高昂

1 概念与例子

以如下方式陈述概念.

乘法原理 令S是对象的有序对(a,b)的集合, 其中第一个对象a来自大小为p的一个集合, 而对于对象a的每个选择, 对象b有q种选择. 于是, S的大小为$p \times q$:

$$|S| = p \times q$$

乘法原理的第二种实用形式是: 如果第一项任务有p个结果, 而不论第一项任务的结果如何, 第二项任务都有q个结果,那么, 这两项任务连续执行就有$p \times q$个结果.

以如下方式举例说明.

例1 一名学生要修两门课程. 第一门课可以安排在上午3个小时中的任一小时, 第二门课则可以安排在下午4个小时的任一小时. 该学生可能的课程安排数量是$3 \times 4 = 12$.

2 定理及其证明

以如下方式陈述定理, 并给出证明.

定理 1. *设S是多重集合, 它有k种不同类型的对象, 且每一种类型的有限重复数分别是$n_1, n_2, \cdots, n_k$. 设S的大小为$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. 则$S$的排列数目等于*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

证明 给定多重集合S. 它有k种类型对象, 比如说$a_1, a_2, \cdots, a_k$且重复数分别是$n_1, n_2, \cdots, n_k$, 对象总数$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. 我们想要这$n$个对象的排列数量. 可以这样考虑这个问题. 一共有n个位置, 而我们想要在每一个位置放置S中的一个对象. 首先, 我们确定放置a_1的位置. 因为在S中a_1的数量是n_1, 因此必须从n个位置的集合中取出n_1个位置的子集. 这样做的方法数是$\binom{n}{n_1}$. 下一步, 要确定放置a_2的位置. 此时还剩下$n - n_1$个位置, 我们必须从中选取n_2个位置来. 这样做的方法数量是$\binom{n-n_1}{n_2}$.再接下来我们有$\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$种方法为a_3选择位置. 继续这样做下去, 利用乘法原理, 我们发现S的排列个数等于

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}.$$

使用定理2.3.1, 我们看到上面这个数等于

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_k!}.$$

□

多行数学推导推荐使用align和gather环境, 示例如下.

例2 在集合向量组成的3维实向量空间V中, 用几何的方法定义了内积

$$(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta|\cos\theta$$

其中$|\alpha|, |\beta|$是向量α, β的夹角.

是否存在向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$满足条件: $(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) = 1, (\alpha_1, \alpha_2) = 2, (\alpha_1, \alpha_3) = 3$且$(\alpha_1, \alpha_2) = -2$?

解 设有$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$满足条件, 它们在实数域$\mathbb{R}$上的任意线性组合$\alpha = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$含于$V$, 应满足条件$(\alpha, \alpha) \geq 0$. 即

$$\begin{aligned}(\alpha, \alpha) &= (x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3, x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3) \\ &= x^2(\alpha_1, \alpha_1) + y^2(\alpha_2, \alpha_2) + z^2(\alpha_3, \alpha_3) + 2xy(\alpha_1, \alpha_2) + 2xz(\alpha_1, \alpha_3) + 2yz(\alpha_2, \alpha_3) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 6zx - 4yz \geq 0\end{aligned}$$

对任意实数x, y, z成立.

将$(\alpha, \alpha) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 6zx - 4yz$先当作$x$的二次多项式配方, 再将其中不含$x$的项看做$y$的二次多项式配方, 得

$$(\alpha, \alpha) = (x + 2y - 3z)^2 - 3(y - \frac{4}{3}z)^2 - \frac{8}{3}z^2$$

选$z = 0, y = 1, x = -2$, 则$x + 2y - 3z = 0$, 代入上式得

$$(\alpha, \alpha) = -3 < 0$$

矛盾. 因此不存在满足所说条件的向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

3 其他常用环境

使用enumerate环境编辑列表, 示例如下.

1. 数学文档中推荐使用英文标点. 用英文标点分割中文字符时, 建议使用"[标点][空格]"的格式;
2. 模板中未介绍的功能, 请参考文档lshort-zh-cn.pdf;
3. 模板中未规定的格式细节, 可自行斟酌.

使用tabular环境编辑表格, 示例如下.

授课时间:	2017年9月5日
授课人:	孙晓明
记录人:	高昂
课程内容:	1) 课程介绍
	2) 排列与组合
	3) 组合数的定义拓展与应用

使用algorithmic环境编辑伪代码, 示例如下.

Algorithm 1 Stretch or compress a profile

```
function STRETCH-OR-COMPRESS(n, m, k, σ_0, i, soc)
    if i = ⌊(n+1)/2⌋ then
        for j ← 1 to k do
            σ_i(p_j) ← (x_{σ_{i-1}(p_j)} + soc, y_{σ_{i-1}(p_j)})
    else if i = ⌊(n+3)/2⌋ then
        σ_i ← σ_{i-1}
    return (n + soc, m, k, σ_i)
```

function $\textsc{Stretch-or-Compress}(n, m, k, \sigma_0, i, soc)$

  if $i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ **then**

    for $j \leftarrow 1$ to k **do**

      $\sigma_i(p_j) \leftarrow (x_{\sigma_{i-1}(p_j)} + soc, y_{\sigma_{i-1}(p_j)})$

  else if $i = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$ **then**

    $\sigma_i \leftarrow \sigma_{i-1}$

  return $(n + soc, m, k, \sigma_i)$