

组合数学第一讲

授课时间: 2017年9月5日 授课教师: 孙晓明

记录人: 高昂

1 概念与例子

以如下方式陈述概念.

乘法原理 令 S 是对象的有序对 (a, b) 的集合, 其中第一个对象 a 来自大小为 p 的一个集合, 而对于对象 a 的每个选择, 对象 b 有 q 种选择. 于是, S 的大小为 $p \times q$:

$$|S| = p \times q$$

乘法原理的第二种实用形式是: 如果第一项任务有 p 个结果, 而不论第一项任务的结果如何, 第二项任务都有 q 个结果, 那么, 这两项任务连续执行就有 $p \times q$ 个结果.

以如下方式举例说明.

例1 一名学生要修两门课程. 第一门课可以安排在上午3个小时中的任一小时, 第二门课则可以安排在下午4个小时的任一小时. 该学生可能的课程安排数量是 $3 \times 4 = 12$.

2 定理及其证明

以如下方式陈述定理, 并给出证明.

定理 1. 设 S 是多重集合, 它有 k 种不同类型的对象, 且每一种类型的有限重复数分别是 n_1, n_2, \dots, n_k . 设 S 的大小为 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. 则 S 的排列数目等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

证明 给定多重集合 S . 它有 k 种类型对象, 比如说 a_1, a_2, \dots, a_k 且重复数分别是 n_1, n_2, \dots, n_k , 对象总数 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. 我们想要这 n 个对象的排列数量. 可以这样考虑这个问题. 一共有 n 个位置, 而我们想要在每一个位置放置 S 中的一个对象. 首先, 我们确定放置 a_1 的位置. 因为在 S 中 a_1 的数量是 n_1 , 因此必须从 n 个位置的集合中取出 n_1 个位置的子集. 这样做的方法数是 $\binom{n}{n_1}$. 下一步, 要确定放置 a_2 的位置. 此时还剩下 $n - n_1$ 个位置, 我们必须从中选取 n_2 个位置来. 这样做的方法数量是 $\binom{n-n_1}{n_2}$. 再接下来我们有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 种方法为 a_3 选择位置. 继续这样做下去, 利用乘法原理, 我们发现 S 的排列个数等于

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdots \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}.$$

使用定理2.3.1, 我们看到上面这个数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}.$$

□

多行数学推导推荐使用align和gather环境, 示例如下.

例2 在集合向量组成的3维实向量空间 V 中, 用几何的方法定义了内积

$$(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta| \cos \theta$$

其中 $|\alpha|, |\beta|$ 是向量 α, β 的夹角.

是否存在向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足条件: $(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) = 1, (\alpha_1, \alpha_3) = 2, (\alpha_1, \alpha_3) = 3$ 且 $(\alpha_1, \alpha_2) = -2$?

解 设有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足条件, 它们在实数域 \mathbb{R} 上的任意线性组合 $\alpha = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$ 含于 V , 应满足条件 $(\alpha, \alpha) \geq 0$. 即

$$\begin{aligned} (\alpha, \alpha) &= (x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3, x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3) \\ &= x^2(\alpha_1, \alpha_1) + y^2(\alpha_2, \alpha_2) + z^2(\alpha_3, \alpha_3) + 2xy(\alpha_1, \alpha_2) + 2xz(\alpha_1, \alpha_3) + 2yz(\alpha_2, \alpha_3) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 6zx - 4yz \geq 0 \end{aligned}$$

对任意实数 x, y, z 成立.

将 $(\alpha, \alpha) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 6zx - 4yz$ 先当作 x 的二次多项式配方, 再将其中不含 x 的项看做 y 的二次多项式配方, 得

$$(\alpha, \alpha) = (x + 2y - 3z)^2 - 3(y - \frac{4}{3}z)^2 - \frac{8}{3}z^2$$

选 $z = 0, y = 1, x = -2$, 则 $x + 2y - 3z = 0$, 代入上式得

$$(\alpha, \alpha) = -3 < 0$$

矛盾. 因此不存在满足所说条件的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

3 其他常用环境

使用enumerate环境编辑列表, 示例如下.

1. 数学文档中推荐使用英文标点. 用英文标点分割中文字符时, 建议使用"[标点][空格]"的格式;
2. 模板中未介绍的功能, 请参考文档lshort-zh-cn.pdf;
3. 模板中未规定的格式细节, 可自行斟酌.

使用tabular环境编辑表格, 示例如下.

授课时间:	2017年9月5日
授课人:	孙晓明
记录人:	高昂
课程内容:	1) 课程介绍
	2) 排列与组合
	3) 组合数的定义拓展与应用

使用algorithmic环境编辑伪代码, 示例如下.

Algorithm 1 Stretch or compress a profile

function STRETCH-OR-COMPRESS($n, m, k, \sigma_0, i, soc$)

if $i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ **then**

for $j \leftarrow 1$ to k **do**

$\sigma_i(p_j) \leftarrow (x_{\sigma_{i-1}(p_j)} + soc, y_{\sigma_{i-1}(p_j)})$

else if $i = \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$ **then**

$\sigma_i \leftarrow \sigma_{i-1}$

return $(n + soc, m, k, \sigma_i)$
