Time Series Analysis

shake_it

第一章时间序列分析简介

方法

- 描述性时序分析
- 统计时序分析（频域分析方法 + 时域分析方法）

生成数据

从 2005 年 1 月开始的月度数据。start 指定起始读入时间，frequency 指定序列每年读入的数据频率。

```
price <- c(101, 82, 66, 35, 31, 7)

price <- ts(price, start = c(2005, 1), frequency = 12)
```

例 **1-1**

读入 1884-1939 年英格兰和威尔士小麦平均亩产量数据 file1.csv

```
x <- read.csv("D:/Documents/UIBE/6/TimeSeries/file1.csv")
head(x)
```

```
##   year yield
## 1 1884  15.2
## 2 1885  16.9
## 3 1886  15.3
## 4 1887  14.9
## 5 1888  15.7
## 6 1889  15.1
```

截取 1925 年之后的数据 subset

```
z <- subset(x, year > 1925, select = yield)
head(z)
```

```
##    yield
## 43  16.0
## 44  16.4
## 45  17.2
## 46  17.8
## 47  14.4
## 48  15.0
```

对 yield 序列进行对数变换，并将对数序列和原序列值导出，保存为数据文件 yield.csv。

```
ln_yield <- log(x$yield)
x_new <- data.frame(x,ln_yield) # 新数据框
write.csv(x_new, file = "D:/Documents/UIBE/6/TimeSeries/yield.csv", row.names = F)
```

缺失值插值

R 中缺失值用 NA 表示。常用的插值方法：线性插值和样条插值

```
library(zoo)
a <- 1:7
a[4] <- NA
cat("a: ", a)
```

```
## a:  1 2 3 NA 5 6 7
```

```
y1 <- na.approx(a)
y2<-na.spline(a)
cat(" ", y1, "\n ", y2)
```

```
##   1 2 3 4 5 6 7
##   1 2 3 4 5 6 7
```

第二章时间序列数据的预处理

平稳性检验

统计性质

平稳时间序列自协方差函数和自相关系数只依赖于时间的平移长度而与时间的起止点无关

- 延迟 k 自协方差函数

$$\gamma(k) = \gamma(t, t+k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- 延迟 k 自相关系数

$$\rho_k = \frac{\gamma(t, t+k)}{\sqrt{DX_t \cdot DX_{t+1}}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

- 估计均值函数

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- 估计延迟 k 自相关系数

$$\hat{\rho_k} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}, \quad \forall 0 < k < n$$

图

1. 时序图

1884-1890 年英格兰和威尔士地区小麦平均亩产量

```
yield <- c(15.2,16.9,15.3,14.9,15.7,15.1,16.7)
yield <- ts(yield, start = 1884)
plot(yield,xlab = "year", ylab="yield")
abline(v = c(1885,1889),
       h = c(15.5,16.5),
       lty = 2)
```

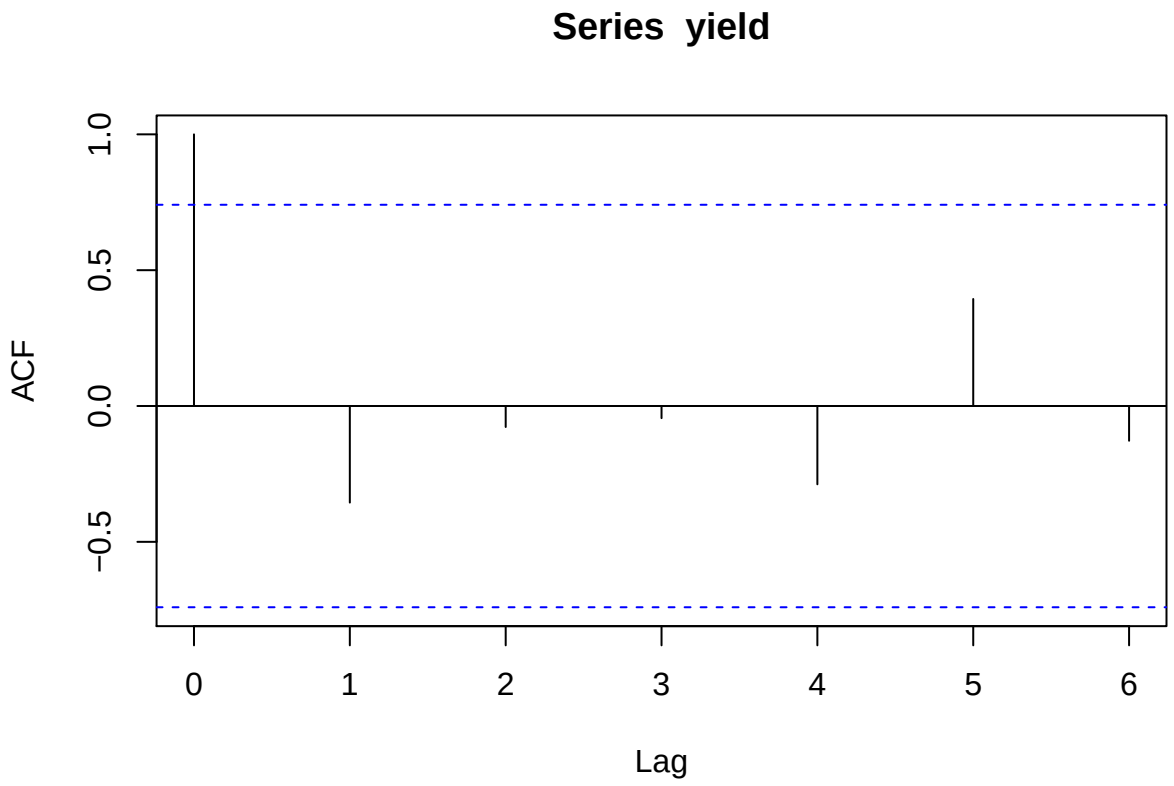
plot 各项参数:

```
if(FALSE) {
  type = "p"  # 点
         "l"  # 线
         "b"  # 点连线
         "o"  # 线穿过点
         "h"  # 悬垂线
         "s"  # 阶梯线
  pch = 17 # 点的符号
  lty = 2  # 连线的类型
  lwd = 2  # 连线的宽度（默认宽度的 2 倍）
  col = 1  # col = "black"
  col = 2  # col = "red"
  col = 3  # col = "green"
  col = 4  # col = "blue"
  xlim = c(1886,1890)
  ylim = c(15,16) # 指定坐标轴范围
}
```

2. 自相关图

自相关图是一个平面悬垂线图，横坐标表示延迟期数，纵坐标表示自相关系数，悬垂线表示自相关系数的大小。

```
acf(yield) # 虚线为自相关系数 2 倍标准差位置
```

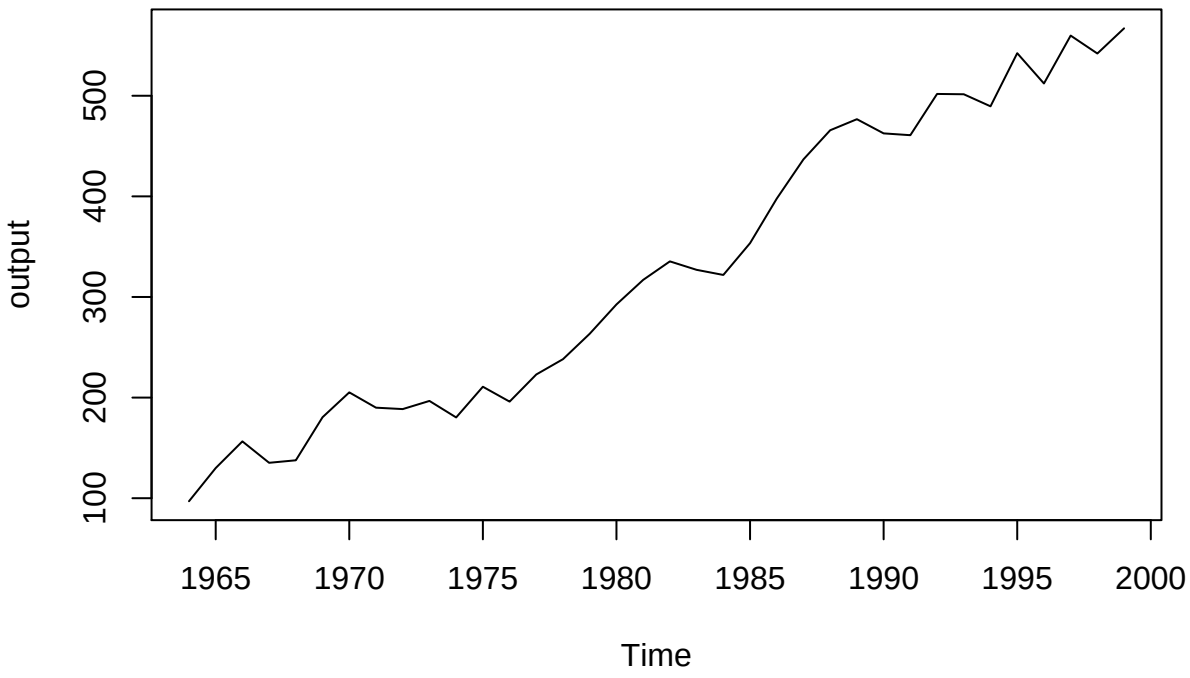


平稳性的检验（图检验方法）

- 时序图检验：始终在一个常数值附近随机波动，而且波动的范围有界、无明显趋势及周期特征。
- 自相关图检验：平稳序列通常具有短期相关性。该性质用自相关系数来描述就是随着延迟期数的增加，平稳序列的自相关系数会很快地衰减向零。

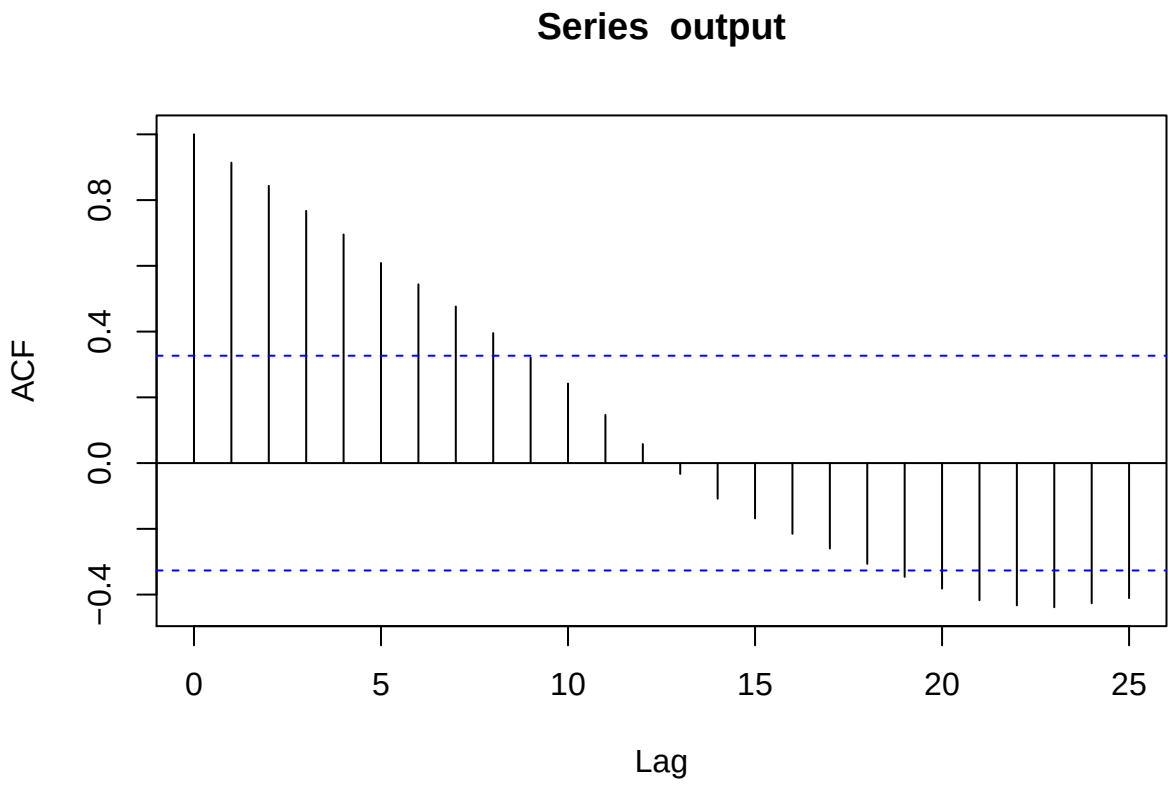
例 **2.1** 检验 **1964** 年**-1999** 年中国纱年产量序列的平稳性

```
library(readr)
sha <- read_csv("timeseries_data/file4.csv")
output <- ts(sha$output, start = 1964)
plot(output)
```



时序图有递增趋势，非平稳

```
acf(output, lag = 25)
```



自相关图衰减缓慢，非平稳。

纯随机性检验

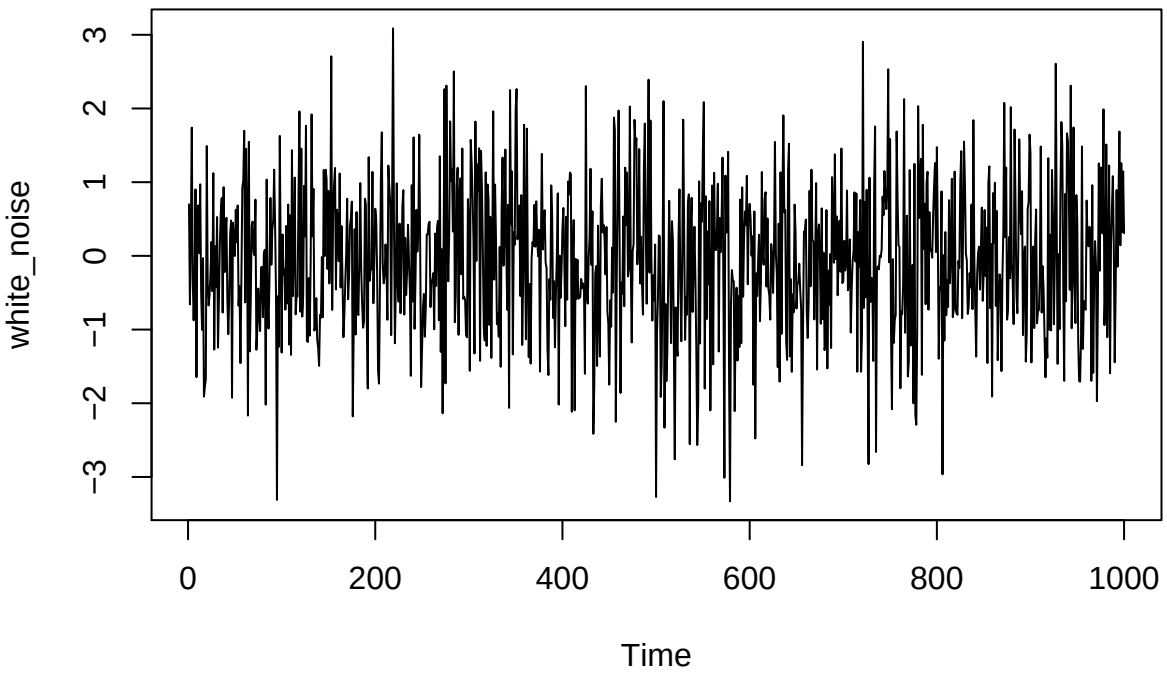
纯随机序列就是白噪声，

$$(1)\quad \mathbb{E}X_t = \mu, \quad \forall t \in T$$

$$(2)\quad \gamma(t,s) = \begin{cases} \sigma^2 & , \quad t = s \\ 0 & , \quad t \neq s \end{cases}, \quad \forall t, s \in T$$

例 2.4 随机产生长度为 1000 的标准正态分布的白噪声序列，并绘制时序图

```
white_noise <- rnorm(1000)
white_noise <- ts(white_noise)
plot(white_noise)
```



白噪声序列的性质

- 纯随机性（没有记忆）

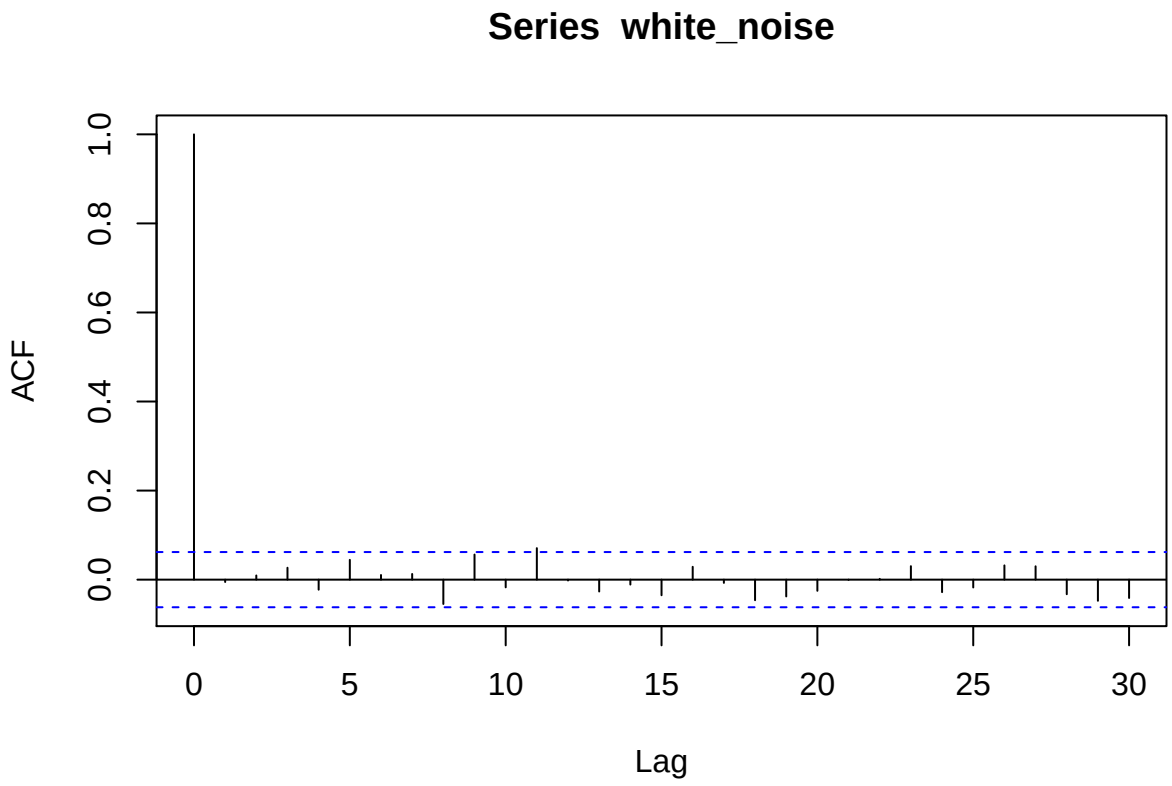
$$\gamma(k) = 0, \quad \forall\, k \neq 0$$

- 方差齐性

$$\mathbb{D}X_t = \gamma(0) = \sigma^2, \quad \forall\, k \neq 0$$

例 2.4 续白噪声序列的样本自相关图

```
acf(white_noise)
```



纯随机序列的样本相关系数不会绝对为零，而在 0 附近随机波动

Barlett 定理

纯随机序列，观察期数为 n，延迟非零期的样本自相关系数近似服从：

$$\hat{\rho}_k \dot{\sim} N(0, \frac{1}{n}), \quad \forall\, k \neq 0$$

**** 纯随机性的检验

对于给定的最大延迟阶数 m，$H_0:\ \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_m = 0,\ \forall\, m \geqslant 1$

- Q 统计量（BP）

$$Q = n \sum_{k=1}^{m} \hat{\rho}_k^2 \ \sim\ \chi^2(m)$$

- LB 统计量

$$LB = n(n+2) \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\hat{\rho}_k}{n-k} \right) \ \sim\ \chi^2(m)$$

例 2.4 续计算白噪声序列延迟 6 期、延迟 12 期的 **Q** 检验结果

```r
Box.test(white_noise, lag = 6)
```

```
##
##  Box-Pierce test
##
## data:  white_noise
## X-squared = 3.4287, df = 6, p-value = 0.7534
```

```r
Box.test(white_noise, type = "Ljung-Box", lag = 6)
```

```
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  white_noise
## X-squared = 3.4506, df = 6, p-value = 0.7505
```

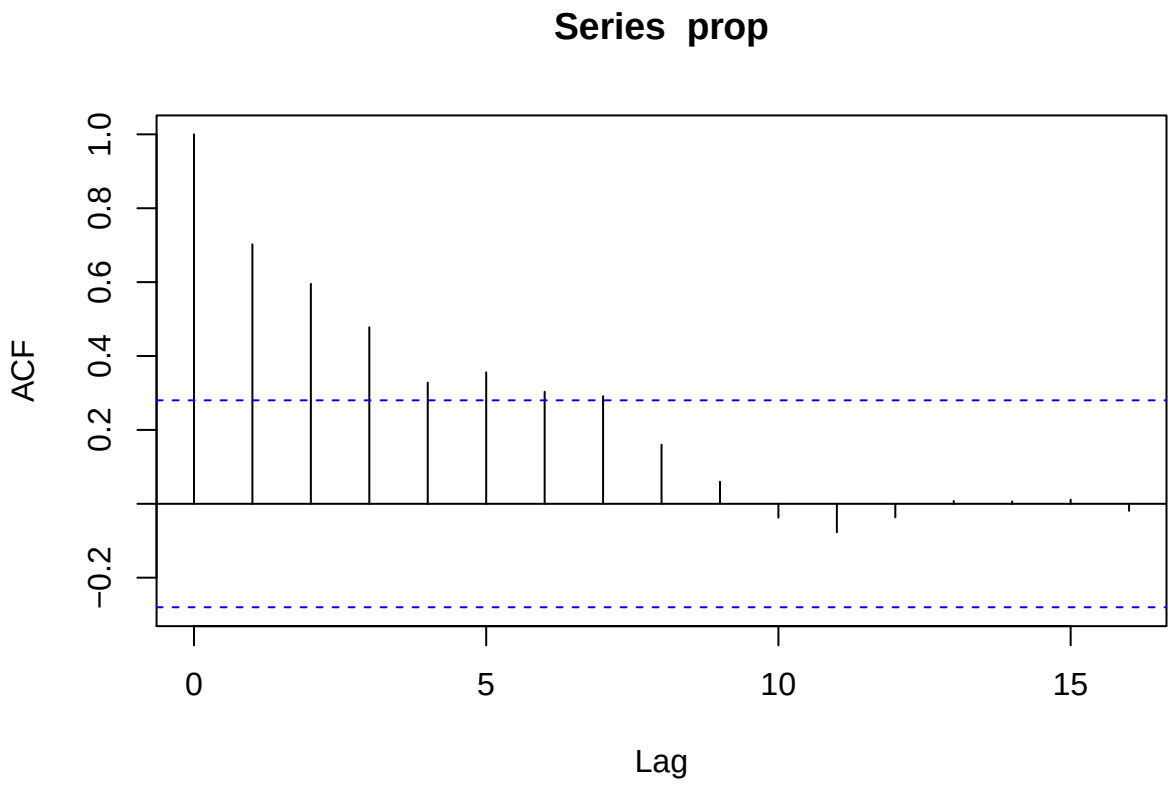
```r
Box.test(white_noise, lag = 12)
```

```
##
##  Box-Pierce test
##
## data:  white_noise
## X-squared = 15.076, df = 12, p-value = 0.2373
```

例 2.5 对 1950 年——1998 年北京市城乡居民定期储蓄所占比例序列的平稳性与纯随机性进行检验

```r
data <- read.csv("timeseries_data/file7.csv",
                 sep = ",", header = T)
prop <- ts(data$prop, start = 1950)
plot(prop)
```


```
acf(prop)
```




```
for (i in 1:2) {
  print(Box.test(prop, lag = 6*i))
}
```

```
##
##  Box-Pierce test
##
## data:  prop
## X-squared = 68.724, df = 6, p-value = 7.467e-13
##
##
##  Box-Pierce test
##
## data:  prop
## X-squared = 74.74, df = 12, p-value = 4.115e-11
```

拒绝原假设，该序列不属于白噪声序列

第三章平稳时间序列分析

方法性工具

- 差分运算
  - 一阶差分 $\nabla x_t = x_t - x_{t-1}$

  - p 阶差分 $\nabla^p x_t = \nabla^{p-1} x_t - \nabla^{p-1} x_{t-1}$
  - k 步差分 $\nabla_k x_t = x_t - x_{t-k}$
- 延迟算子 $B^p x_t = x_{t-p}$

$$(1-B)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i B^i$$

p 阶差分可以表示为

$$\nabla^p x_t = (1-B)^p x_t = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i B^i x_{t-i}$$

k 步差分

$$\nabla_k x_t = x_t - x_{t-k} = (1-B^k) x_t$$

- 线性差分方程

ARMA 模型

平稳序列建模

序列预测