|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Las funciones |
| Código del guion | MA\_10\_01\_CO |
| Descripción | Las funciones permiten modelar situaciones a través de variables y de esta manera poder predecir comportamientos en diversas disciplinas del conocimiento. La comprensión del concepto de funciones y sus representaciones permite solucionar problemas a través de modelos matemáticos. |

[SECCIÓN 1] **1 Las Funciones reales**

Conjuntos de objetos pueden ser relacionados a través de *reglas* que definen la relación entre los elementos de los conjuntos; por ejemplo, la regla “ser madre de” relaciona el conjunto de mujeres que tienen hijos, con el conjunto de personas.

En el caso de conjuntos numéricos también es posible definir reglas de relación, por ejemplo, una relación entre el conjunto de números naturales con él mismo está dada por la regla “ser el doble de”, esta regla puede representarse como una ecuación: *y* = 2*x*, donde *y* será el doble de *x*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [104292707](http://www.shutterstock.com/pic-104292707/stock-photo-an-image-of-a-police-line-up-wall-with-male-suspects.html?src=-0CKTf5TuxDYXTYGhHQKAw-2-76)  http://thumb101.shutterstock.com/display_pic_with_logo/388663/104292707/stock-photo-an-image-of-a-police-line-up-wall-with-male-suspects-104292707.jpg |
| **Pie de imagen** | La altura de las personas es una relación entre el conjunto de personas y el conjunto de los números reales. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Algunas de las relaciones entre conjuntos son llamadas funciones y son utilizadas para modelar situaciones en ciencias, economía y otras disciplinas.

[SECCIÓN 2] **1.1 Concepto de función**

De las posibles relaciones entre dos conjuntos, las **funciones** son tipos particulares de relaciones que cumplen condiciones específicas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de función** |
| **Contenido** | Una **función** es una relación entre dos conjuntos tal que a cada elemento del primer conjunto le *corresponde un* elemento del segundo conjunto. |

Como se puede observar en la definición, es importante identificar que los conjuntos involucrados en la relación tienen un orden, el primer conjunto para el cual se hace corresponder un único elemento del segundo conjunto, es denominado dominio de la función.

Las funciones que van de un conjunto A a un conjunto B se pueden escribir de la siguiente forma:

*f*: *A* → *B*

Donde *A* es el dominio de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG02 |
| **Descripción** | Ilustración como en la imagen de referencia. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En un diagrama conjuntista la función : *A* → *B* se representa como una flecha que parte de un conjunto A llamado dominio. Los elementos están relacionados en esta representación conjuntista por flechas. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Lateral |

No todas las relaciones son funciones, por ejemplo, la relación dada por la regla que asigna a cada número sus múltiplos, no es función, dado que a un número le corresponden varios elementos relacionados, si se observa el número tres, tendría asignados los números 3, 6, 9, 12, …

No se debe confundir el hecho que dos conjuntos están relacionados con que siempre debe haber una ecuación que presenta la relación entre ellos, por ejemplo la función dada por la regla “adicionar uno” se puede representar con la ecuación *y* = *x* + 1; sin embargo no toda función puede representarse con una ecuación.

Por otra parte, no toda expresión que relaciona variables es una función. Observa la expresión *x*2 + *y*2 = 1, esta representa una circunferencia de radio 1 y centro en el origen del plano cartesiano; esta expresión no es una función porque para cada valor de *x* del diámetro horizontal se tienen dos posibles valores para la relación, por ejemplo para el valor *x* = 0 se tienen dos valores que hacen cierta la ecuación: 1 y –1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG03 |
| **Descripción** | En un plano cartesiano graficar una circunferencia de radio 1 y centro en el origen, destacando las dos “imágenes” del cero. La palabra imagen debe ir entre comillas |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La circunferencia *x*2 + *y*2 = 1 no es una función. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Algunas relaciones no tienen expresiones algebraicas como la circunferencia, por ejemplo la función que relaciona cada número natural con su respectivo número en la sucesión de Fibonacci. Los números de Fibonacci se definen a partir de la siguiente expresión:

*F*n = *F*n–2 + *F*n–1

Donde *F*1 = 1 y *F*2 = 1. Se observan a continuación los primeros números de la sucesión:

*F*1 = 1

*F*2 = 1

*F*3 = 2

*F*4 = 3

*F*5 = 5

*F*6 = 8

*F*7 = 13

Esta función no se puede representar con una expresión algebraica..

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG04 |
| **Descripción** | Eliminar título y figura de la izquierda. Centrar las figuras que quedan. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [223108795](http://www.shutterstock.com/pic-223108795/stock-vector-the-golden-rectangle-template.html?src=TinmcwTf9OdNN1bf5T1j6Q-2-0)  http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/595630/223108795/stock-vector-the-golden-rectangle-template-223108795.jpg |
| **Pie de imagen** | La serie de Fibonacci modela comportamientos de poblaciones y de regularidades geométricas. |

[SECCIÓN 2] **1.2 Representación de funciones**

Las funciones están formadas por dos conjuntos y una regla que define la relación entre los conjuntos, estas se pueden representar de varias formas:

* Analítica, cuando se representa con una fórmula.
* Tabular, cuando se usan tablas de valores.
* Gráfica, cuando se representa en un plano cartesiano.

La forma de representar funciones de forma analítica requiere una ecuación con dos variables, esta ecuación permite identificar propiedades generales de la función, sin necesidad de conocer los valores que toma esta en cada punto. La función *f*: *A* → *B*

como correspondencia entre variables, se escribe

*y* = *f*(*x*)

donde *f* es el nombre de la función, *y* es la variable independiente, *x* la variable dependiente, los valores del conjunto de llegada, o valores de la variable dependiente , se obtienen mediante una regla o ecuación a partir del valor de . Lo anterior se expresa diciendo que está en función de *x*. En general se escribe *f*(*x*) = “expresión algebraica en términos de *x*”.

|  |  |
| --- | --- |
| **Ejemplos de representaciones analíticas de funciones** | |
| Función que asigna … | Expresión analítica |
| … a un número su cuadrado. | *f*(*x*) = *x*2 |
| … a un número positivo su raíz cuadrada positiva. | *g*(*x*) = √*x* |
| … a un número natural el correspondiente número triangular. | <<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_001>> |
| … a un número su cubo menos su cuadrado. | *p*(*x*) = *x*3 – x2 |

Cuando en una función se asigna a la variable independiente *x* un valor fijo, este se transforma en un nuevo valor a través de la función. Cuando se calculan los valores numéricos de la función para varios valores de *x* se obtiene una tabla de datos que representa parejas que hacen parte de la función.

Las tablas numéricas no representan a toda la función, solo muestran el comportamiento de esta a partir de algunos valores. En la siguiente tabla se observan algunas tablas de funciones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Ejemplos de tablas de valores para funciones** | |
| **Expresión analítica** | **Tabla para algunos valores de la función** |
| *f*(*x*) = *x*2 | |  |  | | --- | --- | | ***x*** | ***y* = *f*(*x*)** | | –√2 | 2 | | –1 | 1 | | –0,5 | 0,25 | | 0 | 0 | | 1 | 1 | | 1,4142 | 1,99996164 | | 2 | 4 | | 3 | 9 | |
|  | |
| *g*(*x*) = √*x* | |  |  | | --- | --- | | ***x*** | ***y* = *f*(*x*)** | | 0 | 0 | | 0,25 | 0,5 | | 2 | √2 | | 4 | 2 | | 9 | 3 | | 36 | 6 | | 50 | √50 | | 100 | 10 | | 121 | 11 | |
|  | |
| <<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_001>> | |  |  | | --- | --- | | ***x*** | ***y* = *f*(*x*)** | | 1 | 1 | | 2 | 3 | | 3 | 6 | | 4 | 10 | | 8 | 36 | | 15 | 120 | | 16 | 136 | | 25 | 325 | | 100 | 5050 | |
|  | |
| *p*(*x*) = *x*3 – *x*2 | |  |  | | --- | --- | | ***x*** | ***y* = *f*(*x*)** | | –4 | 48 | | –1 | –2 | | 0 | 0 | | 0,5 | –0,125 | | 1 | 0 | | 2 | 4 | | 3 | 18 | | 7 | 294 | | 10 | 900 | |

En la representación tabular habitualmente los valores en la tabla van de menor a mayor, lo que facilita su lectura y análisis.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Un sistema de coordenadas cartesianas permite medir las posiciones de los puntos en un plano a partir de dos ejes perpendiculares.  En un punto *P*(*x*, *y*) en un sistema de coordenadas cartesianas, también llamado plano cartesiano, la coordenada *x* es llamada abscisa y la coordenada *y* es llamada ordenada. |

Dentro de un sistema de coordenadas cartesianas se puede representar una función como el conjunto de puntos (*x*, *y*) que cumplen que *y* = *f*(*x*). Una forma de graficar funciones es a través de tablas de datos, para las que la primera columna será la coordenada de la abscisa y la segunda columna será la ordenada de los puntos que estas parejas ordenadas representan.

En el siguiente gráfico se observan puntos del gráfico de la función *f*(*x*) = *x*2

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG05 |
| **Descripción** | Representación de función como gráfica en el plano cartesiano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función *f*(*x*) = *x*2, en la que se destacan los puntos (0, 0), (–1, 1), (1, 1), (√2, 2), (2, 4). |

Observa que el punto (2, 4) es parte de la función, ya que *f*(2) = 22 = 4.

Para identificar si una figura en un plano cartesiano es una función o no, basta verificar si todas las rectas *x* = *a* intersectan en un único punto la figura, en caso de ser así, la figura representa una función real.

Entre más puntos se calculen, más preciso será el gráfico de la función, de hecho, el gráfico de la función consiste en el conjunto de parejas ordenadas (*x*, *f*(*x*)) que en general es infinito; por lo tanto, al usar los puntos a partir de una tabla nos da una aproximación de la gráfica que mejora en la proporción en que se aumente la cantidad de puntos, por ejemplo, si solo se usan dos puntos para graficar, obtendríamos siempre una línea recta.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG06 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función *p*(*x*) = *x*3 – *x*2, destacando los puntos (–1, –2), (0, 0), (1, 0), (2, 4). |

En el gráfico anterior se observan unos pocos puntos destacados, que estaban en la tabla que se construyó anteriormente, sin embargo, la curva que forma la función *p*(*x*) está formada por infinitos puntos.

[SECCIÓN 2] **1.3 Dominio y rango de una función**

Para toda función se identifica el conjunto de salida, el conjunto de llegada y la regla que define la relación. Los conjuntos que la definen reciben nombres especiales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definiciones** |
| **Contenido** | Dada la función *f*: *A* → *B*, se define los siguientes conjuntos:   * Dominio es el conjunto A, es decir, el conjunto de todos los valores que usa la función *f*. * Codominio es el conjunto *B* de posibles resultados para la función. * Rango es el conjunto de valores que resultan de evaluar los elementos del dominio, es decir, todos los valores *f*(*x*). Se tiene la relación Rango ⊂ *B*. |

El siguiente diagrama muestra la relación entre los conjuntos definidos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG07 |
| **Descripción** | Relación conjuntista de los conjuntos Dominio, Codominio y Rango |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El rango de *f* es subconjunto del codominio, pueden ser iguales. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

En el caso de la función costo de una llamada telefónica que depende de la cantidad *x* de minutos de duración de la llamada *C*(*x*), el dominio corresponde a todos los números reales positivos, que representan la cantidad de tiempo, y el rango serán los números enteros positivos, que representan el costo en pesos de la llamada, dado que no hay fracciones de peso.

Observa en el ejemplo anterior que el dominio tiene restricciones, en este caso, no puede tener valores negativos, ya que no hay tiempos negativos para una llamada telefónica.

Hay otros tipos de restricciones para el dominio, por ejemplo, dada la función

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_002>>

Los valores de *x* que puede tomar el dominio tienen la siguiente restricción:

2 – *x* ≥ 0

Por lo tanto

*x* ≤ 2

En este caso, el dominio está restringido al intervalo (–∞, 2).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG08 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función *q*(*x*). La función **no** está definida para *x* > 2. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Observa que el rango de la función *q*(*x*) es el intervalo (0, ∞).

Otro tipo de restricción que pueden tener las funciones es la restricción del dominio por denominadores en la expresión analítica. Por ejemplo, sea la función

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_003>>

La función tiene como restricción a todos los números que hagan que el denominador de la fracción sea cero, es decir, los valores de x tales que

*x*2 + 3*x* – 40 = 0

Al resolver la ecuación se obtienen los valores x = –8 y x = 5; por lo tanto, el dominio debe excluir estos números. El dominio será (–∞, –8)∪(–8, 5) ∪(5,∞), equivalentemente se puede escribir ***R***–{–8,5}.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG09 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función *t*(*x*). La función **no** está definida para los valores *x* = –8 y *x* = 5. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Para la función *t*(*x*), el rango está dado por todos los reales; en el gráfico se observa que la función “alcanza” todos los posibles valores para *y*.

[SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] 2 **Propiedades de las funciones**

Según la forma en que se relaciona el dominio, codominio y rango, las funciones pueden ser clasificarse como inyectivas, sobreyectivas o biyectivas..

[SECCIÓN 2] **2.1 Funciones: inyectivas, sobreyectivas y biyectivas**

La definición de función permite que a varios elementos del dominio le corresponda el mismo elemento del rango.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El valor que toma *x* a través de la función es llamado imagen de *x.* |

La función constante asigna la misma imagen para todos los elementos del dominio, por ejemplo, la función *f*(*x*) = –1, asigna el valor –1 a todos los elementos del dominio. En este caso el dominio es R y el rango es el conjunto unitario {–1}

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG10 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función constante *f*(*x*) = –1. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

En la definición de función se anotó que para cada elemento del dominio se asigna un único elemento del rango, pero no se restringió la posibilidad que varios elementos del dominio tengan la misma imagen, como se observó en las funciones constantes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inyectiva** |
| **Contenido** | Una función *f* es inyectiva si a cada elemento del rango corresponde a un único elemento del dominio.  En otras palabras, si *x*1 ≠ *x*2 entonces *f*(*x*1) ≠ *f*(*x*2). Es decir, dos elementos diferentes tienen imágenes diferentes. |

Las funciones constantes no son inyectivas, por ejemplo, dada la función *f*(*x*) = –1 se tiene que 2 ≠ 3, pero *f*(2) = *f*(3) = –1. Para que una función no sea inyectiva basta con que la imagen de dos puntos diferentes sea igual.

La función *g*(*x*) = *x*3 es inyectiva, para cualquier par de valores *a* y *b* tales que *a* ≠ *b*, su cubo siempre es diferente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG11 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de las función inyectiva *g*(*x*) = *x*3. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Gráficamente es fácil identificar funciones que son inyectivas, basta verificar que cada una de las líneas horizontales *y* = *a*, para *a* ∈ ***R***, cortan el gráfico de la función en un único punto. Este criterio también permite identificar a partir del gráfico de una función si esta no es inyectiva, basta encontrar una línea *y* = *a* que corte más de una vez el gráfico de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG12 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta *y* = 2 corta en dos puntos a la función *h*(*x*) = *x*2, por lo tanto, la función no es inyectiva. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Las funciones también pueden clasificarse en términos de la relación entre el codominio y el rango de estas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función sobreyectiva** |
| **Contenido** | Una función *f* es sobreyectiva si su codominio y rango son iguales. |

Para decidir si una función es sobreyectiva es necesario conocer cuál es su codominio, por ejemplo, la función *g*: *R* → *R*, definida por la relación *g*(*x*) = *x*2 – 4*x* no es sobreyectiva, de hecho a partir del gráfico de la función se determina que el rango de la función está dado por (–4, ∞), por lo tanto los conjuntos codominio y rango son diferentes (–4, ∞) ≠ *R*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG13 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *g*(*x*) = *x*2 – 4*x* no es sobreyectiva. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

**NOTA**: La función *g*(*x*) no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

La función *p*: [0, ∞) → [0, ∞) definida por la relación *p*(*x*) = √*x* es una función sobreyectiva. En este caso, cada posible altura y ∈ [0, ∞) existe un número *x* tal que √*x = y*; en otras palabras, el codominio coincide con el conjunto de valores que genera la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG14 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *p*(*x*) = √*x* es sobreyectiva cuando se define sobre los conjuntos [0, ∞) → [0, ∞) |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

**¡IMPORTANTE!** Para decidir si una función es sobreyectiva es fundamental saber sobre qué conjuntos está definida.

La función *q*: [0, ∞) → *R* definida por la relación *q*(*x*) = √*x* **no**es una función sobreyectiva, como se anotó anteriormente, el rango de la función así definida es [0, ∞), pero en este caso el codominio es el conjunto de los números reales, por lo tanto :

[0, ∞) ≠ *R*

Rango ≠ Codominio

Una función puede ser o no inyectiva, a la vez que puede ser o no sobreyectiva, cuando una función es tanto inyectiva como sobreyectiva se dice que es biyectiva.

Inyectiva + sobreyectiva = biyectiva

[SECCIÓN 2] **2.2 Funciones inversas**

Para toda función biyectiva *f*: *A* → *B* existe una función *g*: *B* → *A* que permite “cancelar” la acción de la función *f* sobre un valor *x*, esta función se llama inversa de *f* y se define a continuación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inversa** |
| **Contenido** | Si una función *f*: *A* → *B* es biyectiva, la función *g*: *B* → *A* tal que:  *f*(*x*) = *y* si y solo si *g*(*y*) = *x*  se denomina función inversa de *f*.  La función inversa de *f* se denota *f* –1. |

Observa que a partir de la definición se sigue que

*f* –1(*f*(*x*))= *x*

es decir, que si se evalúa el resultado de la función *f*, para un punto *x*, en la función inversa se “recupera” el valor de *x*.

La función definida por la regla *f*(*x*) = 3*x* – 2 es una función biyectiva. Para calcular analíticamente la función inversa procedemos como sigue:

1. Plantear la expresión que define la función como una ecuación en dos variables:

*y* = 3*x* – 2

1. Despejar la variable *x* de la ecuación:

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_004>>

1. Intercambiar las variables *x* y *y*:

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_005>>

La expresión obtenida es la inversa de la función *f*(*x*), por lo tanto

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_006>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG15 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de función *f*(*x*) = 3*x* – 2 y de su inversa *f* –1(*x*). |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Observa que la función *f* representa dos operaciones: multiplicar por tres y luego restar dos. La función inversa: suma dos unidades y al resultado lo divide entre tres; como era de esperarse “cancela” la acción de la función *f*. Analíticamente se verifica lo anterior de la siguiente forma:

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_007>>

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_008>>

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_009>>

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_010>>

La función *p*: [0, ∞) → [0, ∞) definida por la relación *p*(*x*) = √*x* es una función biyectiva. La función *p*–1: [0, ∞) → [0, ∞) estará definida por *p*–1(*x*) = *x*2. Observa que la función resultante es también biyectiva, ya que su dominio está restringido al intervalo [0, ∞), como se muestra en el gráfico.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG16 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de función *f*(*x*) = 3*x* – 2 y de su inversa *f* –1(*x*). |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

[SECCIÓN 2] **2.3 Funciones: crecientes y decrecientes**

El estudio del crecimiento y decrecimiento de una función se realiza por intervalos. Una función puede ser creciente en un intervalo y decreciente en otro.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función creciente** |
| **Contenido** | Una función *f*(*x*)es *creciente* en un intervalo si al tomar cualquier par de elementos *x*1 y *x*2 en el intervalo, tales que *x*1< *x*2 entonces:  *f*(*x*1) ≤ *f*(*x*2) |

El gráfico de una función creciente en un intervalo siempre cumple que para cada par de puntos en el intervalo, la pendiente de la recta que pasa por estos puntos es positiva.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La pendiente de una recta que pasa por dos puntos *P*1(*x*1, *y*1) y *P*2(*x*2, *y*2) está dada por la expresión:  <<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_011>> |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG17 |
| **Descripción** | Ejemplo de función creciente |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f*(*x*) = *x*3 es creciente en todo *R*. |

De forma análoga a como se definió el intervalo de crecimiento de una función, se define el decrecimiento de una función: una función *f*(*x*)es **decreciente**en un intervalo si al tomar cualquier par de elementos *x*1 y *x*2 en el intervalo, tales que *x*1< *x*2 entonces:

*f*(*x*1) ≥ *f*(*x*2)

Gráficamente, en el intervalo en el que una función es decreciente la pendiente de la recta que pasa por dos puntos en el intervalo será siempre negativa.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG18 |
| **Descripción** | Ejemplo de función decreciente |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f*(*x*) = *x*2 es decreciente en el intervalo (–∞, 0). |

[SECCIÓN 2] **2.4 Funciones: pares e impares y constante**

Dependiendo ciertas simetrías que pueda tener una función se puede clasificar como función par o impar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función par** |
| **Contenido** | Una función *f* es **par** si para cada elemento *x* del dominio se cumple que  *f*(–*x*) = *f*(*x*) |

Se puede interpretar la definición de función par como aquella función que cada número y su inverso aditivo tienen la misma imagen a través de la función.

Para identificar si una función *f* es par, a partir de su expresión analítica, se siguen los pasos a continuación:

1. Evaluar la función en *–x*, es decir, *f*(–*x*).
2. Operar algebraicamente la expresión resultante.
3. Verificar que el resultado sea *f*(*x*).

La función *f*(*x*) = *x*2 es una función par, se verifica esta afirmación:

*f*(–*x*) = (–*x*)2 = *x*2 = *f*(*x*)

De hecho, el cuadrado de un número es equivalente al cuadrado de su opuesto aditivo, por ejemplo, 32 = (–3)2.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG19 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f*(*x*) = *x*2 es una función par. |

Se observa que el gráfico de la función *f*(*x*) = *x*2 es simétrico con respecto al eje *Y*, esta es una característica de las funciones pares.

En el siguiente gráfico se observa una función par.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG20 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las funciones pares son simétricas con respecto al eje *Y*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función par** |
| **Contenido** | Una función *f* es **impar** si para cada elemento *x* del dominio se cumple que  *f*(–*x*) = –*f*(*x*) |

Se puede interpretar la definición de función par como aquella función que cada número y su inverso aditivo tienen como imágenes a través de la función inversos aditivos.

Para identificar si una función *f* es impar, a partir de su expresión analítica, se siguen pasos análogos a los utilizados para determinar si una función es par:

1. Evaluar la función en *–x*, es decir, *f*(–*x*).
2. Operar algebraicamente la expresión resultante.
3. Se compara el resultado obtenido con –*f*(*x*), en caso de ser iguales, la función es impar.

La función *f*(*x*) = –2*x*3 + 5*x* es una función impar, para verificarlo se calcula *f*(–*x*):

*f*(–*x*) = –2(–*x*)3 + 5(–*x*) = –2(–*x*3) – 5*x* = 2*x*3 – 5*x*

Por otra parte

*–f*(*x*) = –(–2*x*3 + 5*x*) = 2*x*3 – 5*x*

Por lo tanto, se tiene que *f*(–*x*) = –*f*(*x*), es decir, la función *f* es una función impar. El gráfico de la función se muestra a continuación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG21 |
| **Descripción** | Función impar |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las funciones impares son simétricas respecto al origen. |

**¡IMPORTANTE!** A diferencia del concepto de paridad para números naturales, en el que si un número no es par o es impar, el hecho que una función no sea par no implica que sea impar. Algunas funciones pueden no ser ni pares ni impares.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG22 |
| **Descripción** | Función ni par ni impar |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f*(*x*) = *x*2–2*x* +1 no es ni par ni impar, no hay simetría respecto al eje *Y* o respecto al origen. |

Una función es **constante** si no cambia, es decir, si no hay variación en sus imágenes. Las funciones constantes tienen la forma

*f*(*x*) = *a*

donde *a* ∈ *R*. La función constante asigna a todos los elementos del dominio el mismo elemento en el codominio, de hecho, el rango de la función es {*a*}.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG23 |
| **Descripción** | Función ni par ni impar |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La representación gráfica de una función constante es una recta paralela al eje *X*. |

[SECCIÓN 2] **2.5 Funciones periódicas**

Una función *periódica* es aquella cuyo comportamiento se repite en intervalos sucesivos que se denominarán *periodos*. Las funciones periódicas permiten modelar fenómenos cuyo comportamiento es cíclico y manifiesta en repeticiones a intervalos iguales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funciones periodicas** |
| **Contenido** | Una función *f* es una función periódica si existe un número positivo *P* tal que *f*(*x*)*=f*(*x + P*) para cada *x*.  El valor más pequeño que puede tomar *P* es llamado *periodo* de la función. |

Para verificar si una función es periódica, dada su representación analítica, habrá que disponer de información acerca del periodo de la función y aplicar la función en y en para cada punto *x*, si los resultados son idénticos entonces la función es periódica.

El gráfico de una función periódica es una repetición de una parte del gráfico.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG24 |
| **Descripción** | Función periódica |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las funciones periódicas repiten su comportamiento a intervalos de igual amplitud. |

[SECCIÓN 2] **2.6 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **3 Clasificación de funciones**

Las funciones se pueden clasificar en familias de funciones que tienen un comportamiento similar. En esta sección se exponen la clasificación de funciones más utilizadas para modelar situaciones de aplicación.

[SECCIÓN 2] **3.1 La función lineal**

Las funciones lineales modelan situaciones en las que hay un crecimiento constante *m*, la expresión general para estas funciones está dada por

*f*(*x*) = *mx* + *b*

donde *m* y *b* son constantes.

El gráfico de una función lineal es una línea recta con pendiente *m* y que intersecta al eje Y en el punto (0, *b*).

La dosis de administración de dos medicamentos A y B dependen del peso del paciente:

* Para el medicamento A se deben suministrar 1/3 ml por cada kg del paciente.
* Para el medicamento B se deben suministrar 1 ml por cada kg del paciente.

La dosis que se debe suministrar para cada medicamento es una función que depende del peso del paciente. El incremento de la dosis es constante, por lo tanto, las dosis de los medicamentos se pueden modelar por funciones lineales:

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_012>>

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_013>>

Donde *f*(*x*) es la dosis del medicamento A y *g*(*x*) es la dosis del medicamento B, para un paciente de *x* kilogramos de peso.

La representación gráfica de las funciones respectivas es el presentado en la imagen:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG25 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Dosis recomendada para dos medicamentos, modelada a través de funciones lineales. |

El comportamiento de la función *f*(*x*) puede interpretarse como un aumento de un ml por cada tres kilogramos que tenga de más el paciente.

[SECCIÓN 2] **3.2 La función cuadrática**

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La función cuadrática** |
| **Contenido** | Una función f es una función cuadrática si es de la forma  *f*(*x*) = *ax*2 + *bx* + *c*  donde *a*, *b*, *c* ∈ *R*, con *a* ≠ 0. |

La condición *a* ≠ 0 en la definición de función cuadrática garantiza que la función no es una función lineal.

El gráfico de la función cuadrática se denomina parábola, para graficarla basta conocer algunos de sus componentes, que dependen exclusivamente de los parámetros *a*, *b* y *c*:

* Vértice: es el punto máximo o mínimo en el gráfico de la función.
* Los ceros: son los puntos de corte con el eje *X*.
* Corte con *Y*: es el punto de corte con el eje *Y*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG26 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Elementos del gráfico de una parábola. |

**El vértice**

La coordenada *x* del vértice se calcula a través de la fórmula

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_014>>

Por lo tanto, el vértice tendrá coordenadas

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_015>>

Para identificar si es un máximo o mínimo, se verifica:

* Si *a* > 0, entonces *V* es mínimo.
* Si *a* < 0, entonces *V* es máximo.

**Los ceros**

Para calcular los ceros de una función cuadrática *f*, se pueden usar dos métodos:

* Plantear la ecuación *f*(*x*) = 0 y solucionarla por factorización.
* Usar la fórmula cuadrática

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_016>>

Observa que en la fórmula cuadrática aparece el símbolo ±, este indica que se debe realizar dos veces el cálculo: uno con el símbolo + y otro con el símbolo –.

**Corte con *Y***

El corte con *Y* de una función cuadrática es el punto (0, *c*).

**Ejemplo**

Dada la función *f*(*x*) = *x*2 + 3*x* –10, se identifican los valores de los parámetros: *a* = 1, *b* = 3 y *c* = –10; a partir de estos valores se calculan los siguientes puntos:

* Vértice:

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_017>>

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_018>>

Este se puede representar con decimales como *V*(–1,5, –3,25 ).

Se observa que como *a* = 1 > 0, entonces V es mínimo.

* Ceros, usando el método de factorización:

*x*2 + 3*x* –10 = 0

(*x*+5)(*x*–2) = 0

Por lo tanto *x* = –5 y *x* = 2.

* Corte con *Y*: (0,–10)

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG27 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función *f*(*x*) = *x*2 + 3*x* –10. Se resalta el vértice, los ceros y corte con *Y*. |

**Ejemplo**

Dada la función *f*(*x*) = –*x*2 + 6*x* –5, se identifican los valores de los parámetros: *a* = –1, *b* = 6 y *c* = –5; a partir de estos valores se calculan los siguientes puntos:

* Vértice:

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_019>>

Por lo tanto, *V*(3, 4)

Se observa que como *a* = –1 < 0, entonces V es máximo.

* Ceros, usando la fórmula cuadrática:

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_020>>

Por lo tanto, separando para el valor positivo y negativo de la raíz, se obtiene:

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_021>>

Es decir, los ceros son *x* = 1 y *x* = 5.

* Corte con *Y*: (0,–5)

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG28 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función *f*(*x*) = –*x*2 + 6*x* –5. Se resalta el vértice, los ceros y corte con *Y*. |

Para el cálculo de la capacidad de un recipiente en forma de cilindro de altura fija 10 cm, se usa la fórmula:

*V*(*r*) = 10π*r*2

Donde *r* es el radio del recipiente en centímetros. Se observa que el volumen está en función del radio y es una forma cuadrática con *a* = 10π, *b* = 0 y *c* = 0.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG29 |
| **Descripción** | tres cilíndros de radios 1, 12 y 4 cm respectivamente, pero con la misma altura!. Deben estar separados. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunos cilindros de altura 10 cm y radio variable. |

La forma en que varía el volumen, conforme varía el radio se muestra en el siguiente gráfico

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG30 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función volumen *V*(*r*) para un cilindro de altura fija 10 cm y radio variable *r*. |

Observa que *V*: [0, ∞) → *R*, dado que no hay radios negativos, la función está definida para valores positivos.

[SECCIÓN 2] **3.3 Las funciones exponenciales y logarítmicas**

Las funciones exponenciales son de la forma

*f*(*x*) = *ax*

Donde a es un número positivo llamado base.

El gráfico de una función exponencial *f*(*x*) = *ax* tiene las siguientes características:

* La función es siempre positiva.
* No tiene raíces.
* El corte con el eje *Y* está en el punto (0, 1)
* Es siempre creciente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG31 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función exponencial *f*(*x*) = 2*x*. |

Variaciones de las funciones exponenciales se utilizan en medicina para medir el nivel de concentración de un medicamento en la sangre luego de *x* horas de haber sido administrado, la expresión general para calcular esta concentración está dada por la función:

*C*(*x*) = *c*0*e*–*kx*

Donde *c*0 es la concentración inicial y *k* es un parámetro que depende de cada medicamento. La base *e* el número de Euler y equivale a aproximadamente a 2,718281.

Por ejemplo, para un medicamento con parámetro *k* = 1,5 cuya concentración inicial es de 100 mg se tiene la fórmula de concentración:

*C*(*x*) = 100*e*–1,5*x*

En este caso, los parámetros modifican la función exponencial *ex* de la siguiente forma:

* El valor 100 modifica el punto de corte con *Y* de la función, se convierte en (0, 100).
* El exponente negativo hace que la función sea decreciente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG32 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función *C*(*x*) = 100*e*–1,5*x* que modela la concentración de un medicamento, en miligramos, luego de *x* horas de haber sido administrado. |

Como puedes observar, las funciones exponenciales *f*(*x*) = *ax* son biyectivas si se definen sobre *f*: *R* → (0, ∞), por lo tanto existe una función inversa *f* –1: (0, ∞) → *R* tal que *f* –1 (*f*(*x*)) = *x*; esta función depende del valor *a* y es llamada función logarítmica de base *a* y se nota:

*f* –1 (*x*) = log*a* *x*

La función logarítmica cumple la siguiente propiedad:

*y*  = log*a* *x* si y solo si *ay* = *x*

Al ser funciones inversas, se tienen las siguientes equivalencias

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_022>>

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_023>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG33 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función *g*(*x*) = log2 *x*. |

[SECCIÓN 2] **3.4 Las funciones racionales**

Las funciones racionales son de la forma

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_024>>

Donde *p*(*x*) y *q*(*x*) son polinomios.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Un polinomio es una expresión algebraica de la forma  <<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_025>>  Donde cada coeficiente *ai* es un número real. |

El dominio de una función racional es el conjunto de los números enteros a excepción de los valores que hacen que *q*(*x*) = 0.

A partir de los polinomios que forman una función racional *f* se pueden deducir algunas características de la gráfica de la función. Los valores que anulan el numerador, es decir, las soluciones de la ecuación *p*(*x*) = 0, son los ceros de la función.

Por otra parte, si los valores cercanos a un punto *a* tal que *q*(*x*) = 0, que no hacen parte del dominio, hacen que la función tienda a ∞ o a –∞, entonces se dice que a es una asíntota vertical de la función *f*.

Ejemplo

La función racional

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_026>>

Tiene un cero en *x* = 0, ya que *p*(*x*) = 0 es equivalente a *x* = 0.

Por otra parte, al solucionar la ecuación *q*(*x*) = 0 se obtiene:

*x*2 – 4 = 0

(*x* – 2)(*x* + 2) = 0

Lo anterior implica que *x* = 2 o *x* = –2, por lo tanto el dominio de la función será R – {–2, 2}, es decir, el conjunto de los números reales excepto los valores –2 y 2.

Tabulando valores cercanos y menores que *x* = –2 se observa que la función tiende a –∞; cuando se toman valores cercanos y mayores la función tiende a ∞.

Por otra parte, tabulando valores cercanos y menores que *x* = 2 se observa que la función tiende a –∞; tabulando valores cercanos y mayores se observa que la función tiende a ∞.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG34 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función racional *f*(*x*). |

Como se puede observar en el gráfico, las asíntotas dividen el plano en regiones; se debe tener en cuenta que todas las curvas forman el gráfico de la función, **no** son gráficos diferentes.

Ejemplo

La función racional

<<FQ\_MA\_10\_01\_CO\_027>>

Tiene un cero en *x* = –3, ya que

2*x* + 6 =0

*x* = –3

Por otra parte, al solucionar la ecuación *q*(*x*) = 0 se obtiene:

*x*2 – 2*x* + 1 = 0

(*x* – 1)2 = 0

Lo anterior implica que *x* = 1, por lo tanto el dominio de la función será R – {1}, es decir, el conjunto de los números reales exceptuando el número 1.

Tabulando valores cercanos y menores que *x* = 1 se observa que la función tiende a ∞, de la misma forma que al tomar valores cercanos y mayores la función tiende a ∞.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG35 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función racional *f*(*x*). |

[SECCIÓN 2] **3.5 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **4 Competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_REC00 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_10\_01\_REC00 | |
| **Web 01** | *Título* | *URL* |
| **Web 02** | *Título* | *URL* |
| **Web 03** | *Título* | *URL* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_REC00 (Se numeran de 10 en 10) |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |