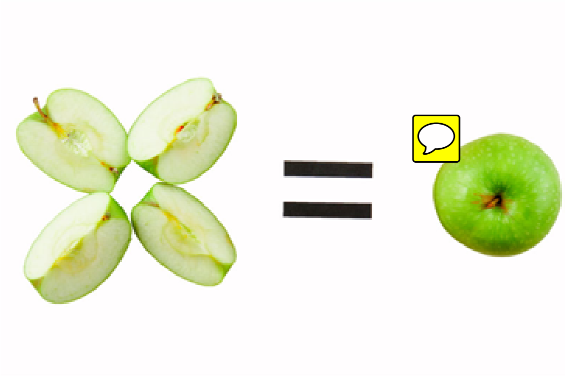
Matemáticas 2º ESO

Impreso por
Edgar Josué Malagón Montaña
Centro
Escuela Colombia Test

Los Números reales propiedades y operaciones



~~Los números reales son todos aquellos que usamos~~ en nuestra vida cotidiana y están a nuestro alrededor. ~~Sirven para medir distancias, para medir el tiempo para calcular el crecimiento de la población y muchas cosas más.~~

Sumario

1 Los números racionales

La idea de número racional surge de dividir un todo en partes iguales, como por ejemplo un cuarto de hora, media naranja, tres cuartos de mantequilla.

El conjunto de los números racionales se simboliza con la letra

$\mathbb{Q}$

~~y~~ se define como el cociente entre dos números enteros, es decir:

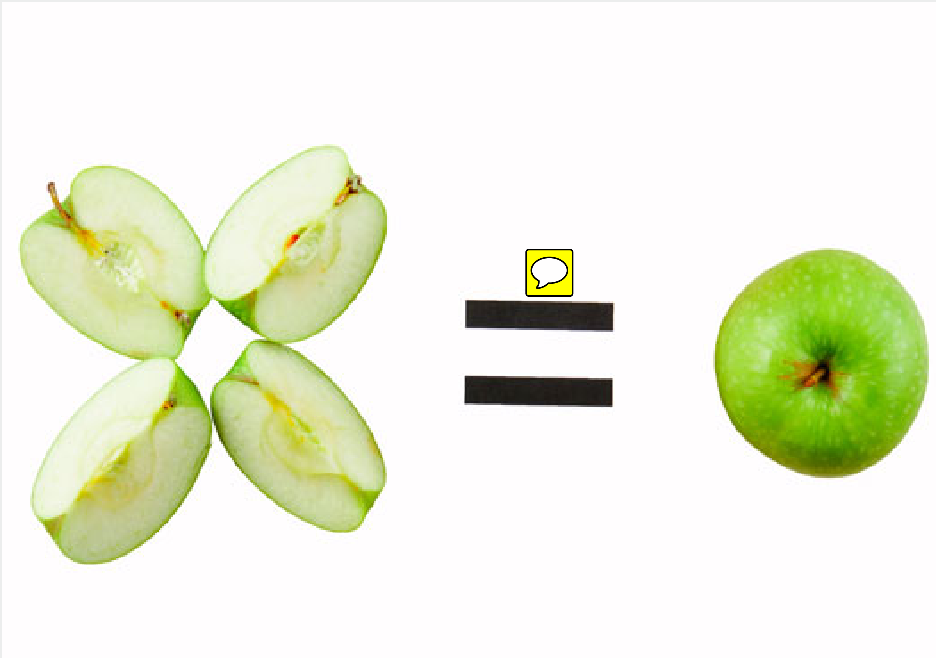
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \text{ y } \mathrm{mcd}(a, b) = 1\right\}$$

Recuerda

Cuando un número racional se expresa como una fracción, el dividendo se denomina numerador y el divisor se llama denominador. Los números racionales contienen a los números enteros, debido a que cada entero se puede escribir como una fracción.

$\frac{a}{b}$

Todo número racional se puede expresar como una fracción, o como un decimal, esto depende de la utilidad y de la necesidad en cada caso. Por ejemplo, para decir que una chocolatina se ha dividido en partes iguales y se han tomado algunas de ellas, conviene escribir esa cantidad como una fracción, pero si se quiere medir el tiempo que tarda un atleta en recorrer 100 metros, es más útil escribir la cantidad de tiempo como un decimal.



Cada fracción de la manzana representa 1/4

. Las cuatro partes representan la fracción 4/4

1.1 Los números racionales como una fracción

Cuando escribimos un número racional en forma de fracción lo dejamos como el cociente entre dos números enteros, teniendo en cuenta que el denominador sea diferente de cero; podemos encontrar dos tipos de fracciones:

Fracciones propias	Fracciones impropias
Son aquellas en las que el numerador es menor que el denominador.	Son aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador. Este tipo de fracciones también se pueden escribir como un número mixto.
2/3, se cumple que 2 < 3	7/4, se cumple que 7 > 4 . $1\frac{3}{4}$ número mixto.

Recuerda

Para convertir una fracción impropia en número mixto, se desarrolla el algoritmo de la división, donde el cociente es la parte entera, el divisor es el denominador y el residuo es el numerador.

$$\frac{13}{5} \rightarrow \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ 3 & 2 \end{array}$$

Denominador Parte entera Numerador Esto significa que:

$$\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

Para convertir un número mixto en una fracción impropia, se adiciona la parte entera con la fracción.

$$\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{(3 \cdot 5) + 2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

Practica

Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

1.1.1 ¿Cómo se convierte una fracción en un decimal?

Como todo número racional escrito en forma de fracción es una división indicada, para escribirlo como decimal lo único que debe hacerse es desarrollar esa división. ~~Ejemplos:~~

$$\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0{,}75$$

$$-\frac{3}{2} = -(3 \div 2) = -1{,}5$$

$$\frac{2}{3} = 2 \div 3 = 0{,}66\ldots 0{,}\overline{6}$$

Para determinar la medida de los objetos se utilizan, por lo general, números decimales.

1.1.2 Los números racionales como un decimal

Cuando escribimos un número racional como un decimal tenemos en cuenta que se forma de dos partes, una entera y otra decimal separadas por una coma. Existen dos clases de decimales:

Decimales finitos	**Decimales infinitos**
Son aquellos en los que su parte decimal tiene un número finito de cifras; estos se pueden escribir como fracción.	Son aquellos en los que su parte decimal tiene un número infinito de cifras, y pueden ser periódicos puros o periódicos mixtos.
0,75	0,3333... Periódico puro
~~3,14~~	2,256666... Periódico mixto
1,25	

Practica

Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

1.1.3 ¿Cómo se convierte un decimal en una fracción?

Para pasar de la **forma decimal** de un número racional a la **fracción** equivalente, se debe tener en cuenta si se trata de una forma decimal finita o infinita periódica.

- Si es un decimal finito se usarán las potencias de diez ya que nuestro sistema de numeración es en base 10.
- Se debe multiplicar y dividir el número por la potencia de diez, según la cantidad de decimales que posea el decimal.

- $0{,}25 = \dfrac{100 \times 0{,}25}{100} = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$
- $-0{,}5 = \dfrac{10 \times (-0{,}5)}{10} = -\dfrac{5}{10} = -\dfrac{1}{2}$
- $3{,}125 = \dfrac{1000 \times 3{,}125}{1000} = \dfrac{3125}{1000} = \dfrac{25}{8}$

- Si es un decimal periódico, en el numerador ponemos el número sin coma, menos la parte que está fuera del periodo, y en el denominador, tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal que no forma parte del periodo.

- $17{,}\widehat{3} = \dfrac{173 - 17}{9} = \dfrac{156}{9}$
- $5{,}2\widehat{37} = \dfrac{5237 - 52}{990} = \dfrac{5185}{990}$

Profundiza

Los números racionales

¿Cuáles son los números racionales?

El conjunto de números racionales lo forman los **números enteros** y las **fracciones de números enteros**. Se pueden expresar como una fracción, como un decimal finito o como un decimal infinito periódico.

Para identificar los números racionales, conviene recordar cuál es la **clasificación general** de los **números**:

- **Naturales**: son los que usamos para contar, 1, 2, 3... Algunos matemáticos también incluyen el 0. El conjunto de los números naturales se designa con el símbolo .

- **Enteros**: son los números naturales, tanto positivos como negativos, más el 0. Es decir, son: ...−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3,... El conjunto de los números enteros se designa con el símbolo .

- **Racionales**: son todos los números que se pueden representar como fracciones con numerador y denominador enteros. Se pueden representar también como números decimales finitos o como decimales infinitos periódicos. El conjunto de los números racionales se designa con el símbolo .

- **Irracionales**: son todos los números que no se pueden representar como fracciones con numerador y denominador enteros. Se pueden representar también como números decimales infinitos no periódicos. El conjunto de los números irracionales se designa con el símbolo .

- **Reales**: son todos los números racionales y todos los números irracionales. El conjunto de los números reales se designa con el símbolo .

Esto se ve reflejado en el siguiente diagrama de los diferentes **conjuntos numéricos**:

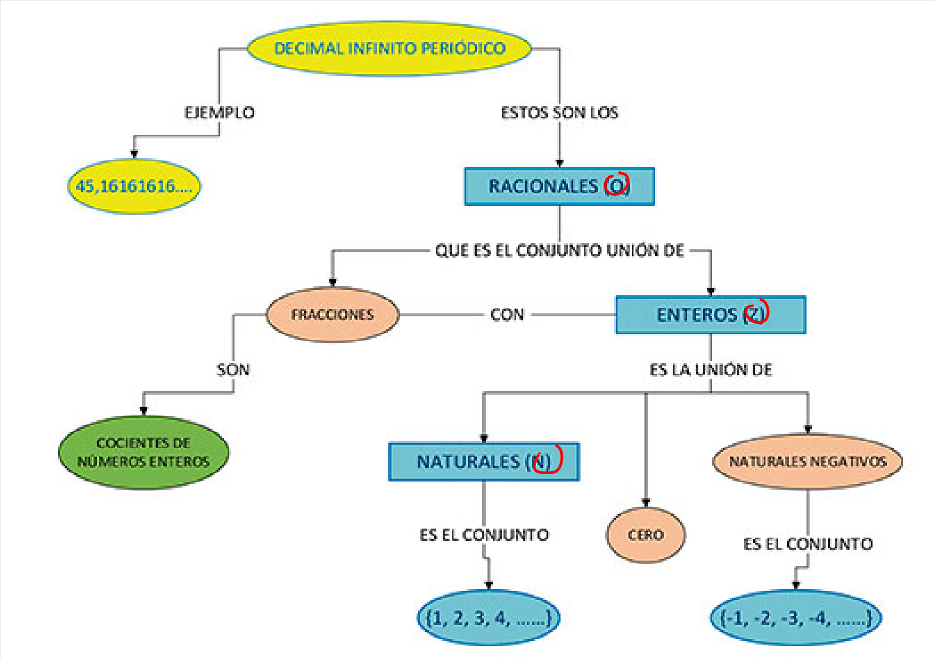
Del anterior diagrama, en particular, los **números racionales** son:

Practica

Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

1.2 La representación de los números racionales sobre la recta numérica

Todo número racional se puede representar por un punto en la recta numérica; para ubicarlos en ella se debe tener en cuenta su representación.

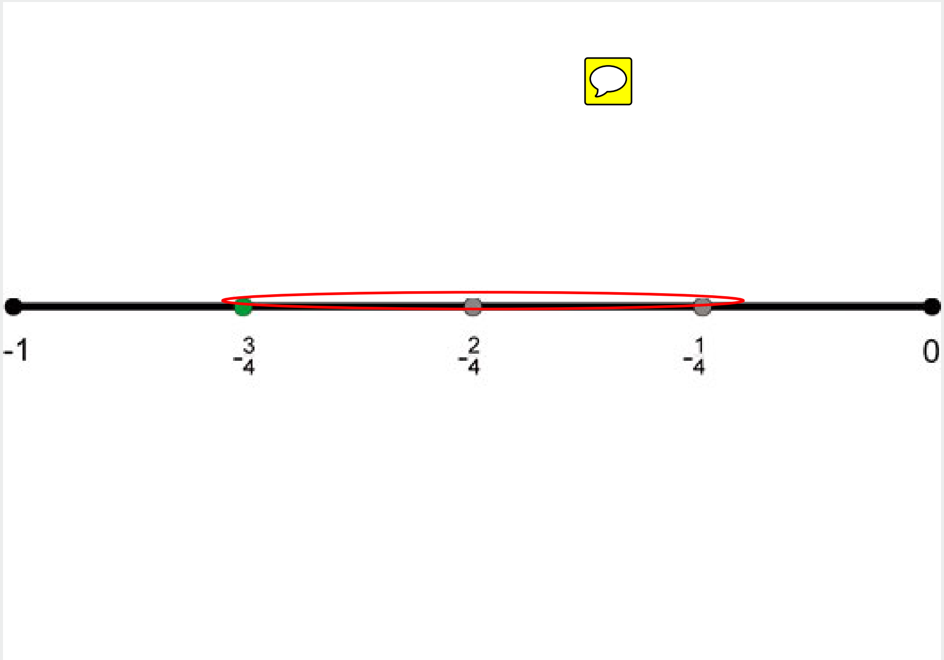


Para representar los números racionales en la recta numérica debemos recordar los números que componen al conjunto de los números racionales.

1.2.1 Las fracciones en la recta numérica

Si la fracción que representa al número racional es propia, dividimos la unidad (es decir, entre cero y uno) en tantas partes iguales como lo indique el denominador y tomamos tantas como lo diga el numerador, y allí ubicamos el punto.

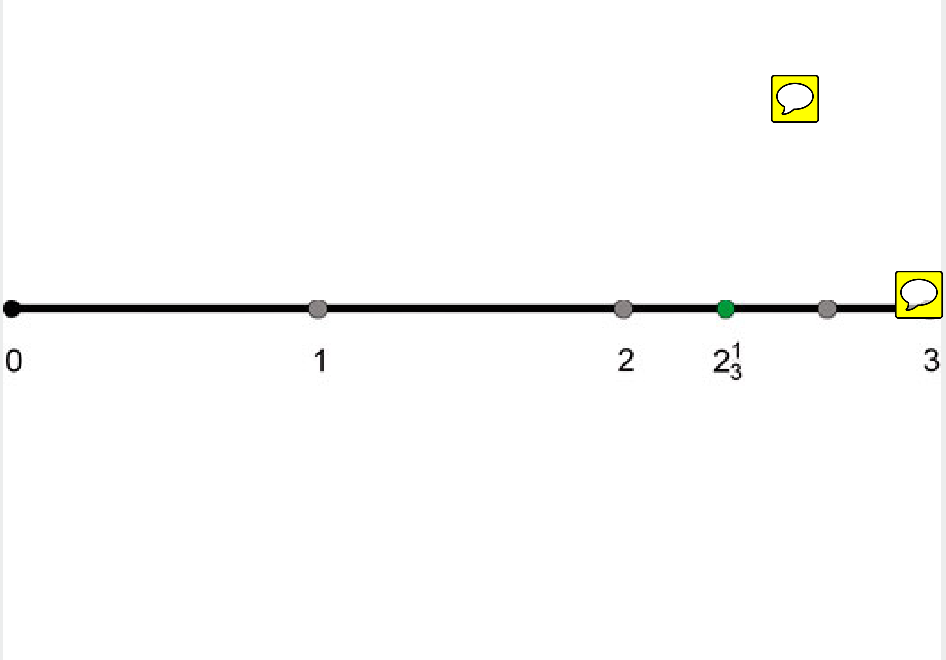
Por ejemplo, si vamos a ubicar el racional -3/4 en la recta numérica, dividimos en cuatro partes iguales la unidad comprendida entre 0 y -1. Y a partir del cero, tomamos tres partes hacia la izquierda para indicar el punto que le corresponde a -3/4.



Ubicación de -3/4 en la recta numérica.

Si la fracción que representa al número racional es impropia, conviene convertir el número en mixto y ubicar primero la parte entera; luego, la parte fraccionaria se sitúa a partir de ese punto como en el primer caso.

Por ejemplo, para ubicar el número 7/3, lo convertimos en número mixto, y este quedará de la forma: 2 1/3; posteriormente, situamos la parte entera que es 2, y graficamos la fracción 1/3 entre 2 y 3.

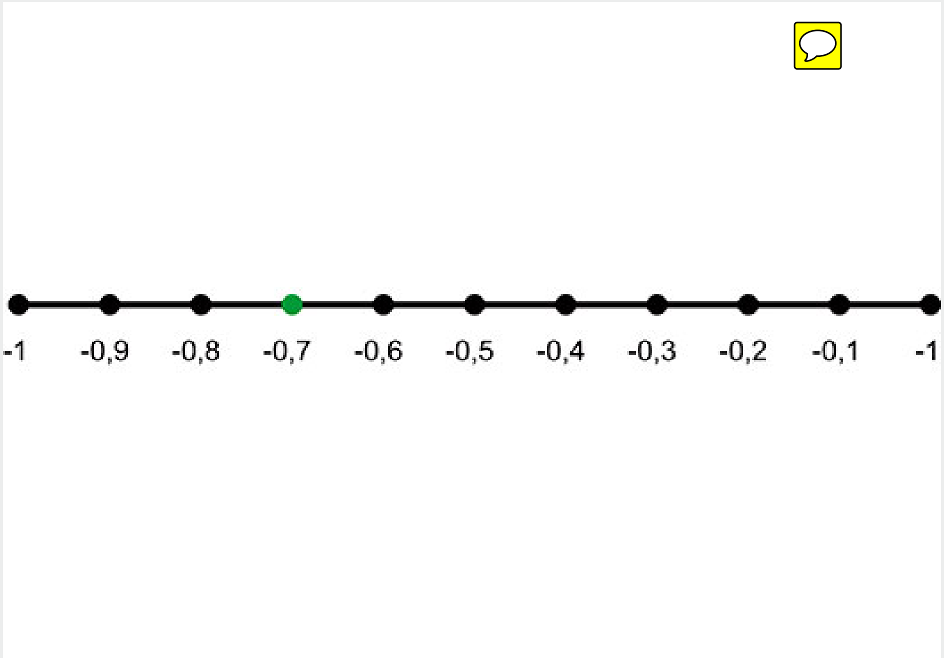


Ubicación de la fracción 7/3 en la recta numérica.

1.2.2 Los decimales en la recta numérica

Si el número está representado como un decimal, se ubica la parte entera y, a partir de allí, se divide la unidad en diez partes iguales y se toman tantas como indique el primer decimal; para este caso, es conveniente aproximar el número a uno o dos decimales si sus cifras decimales son muchas o es periódico.

Por ejemplo, al ubicar el racional -0,7 en la recta, se toma la unidad entre 0 y -1, se divide en 10 partes iguales y, comenzando en cero, se cuentan siete de ellas.



Ubicación del número -0,7 en la recta numérica.

Practica

Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

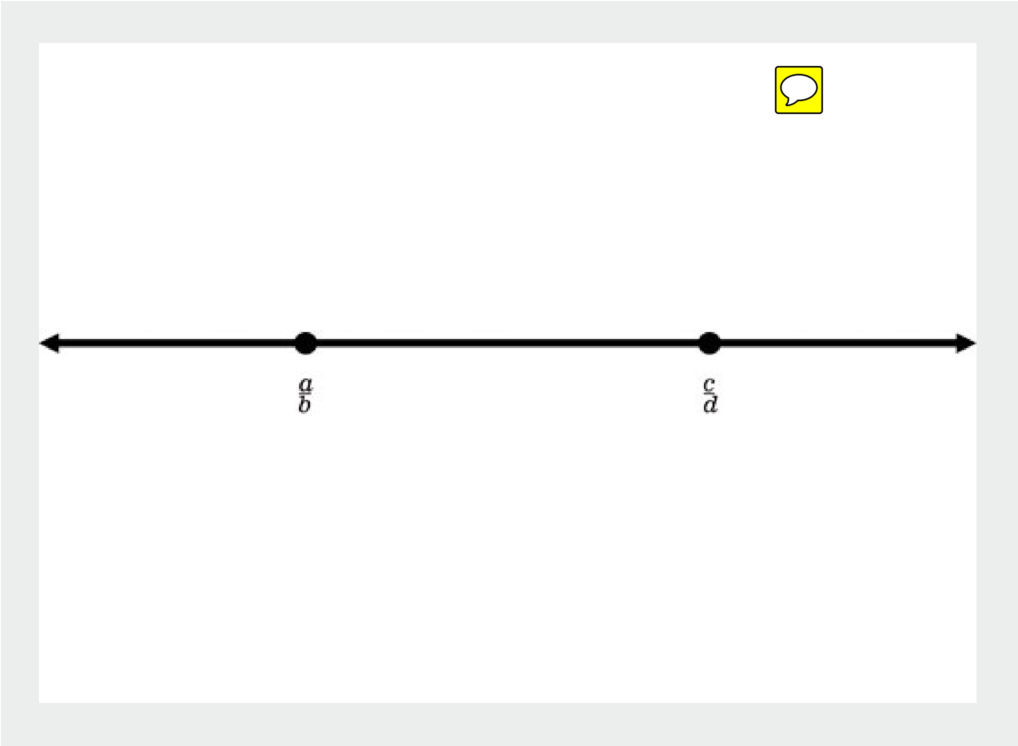
Practica

Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

1.3 El orden en los números racionales

Para cualquier par de números racionales se puede establecer uno y solo una de las siguientes relaciones de orden:

1 Los números racionales



$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

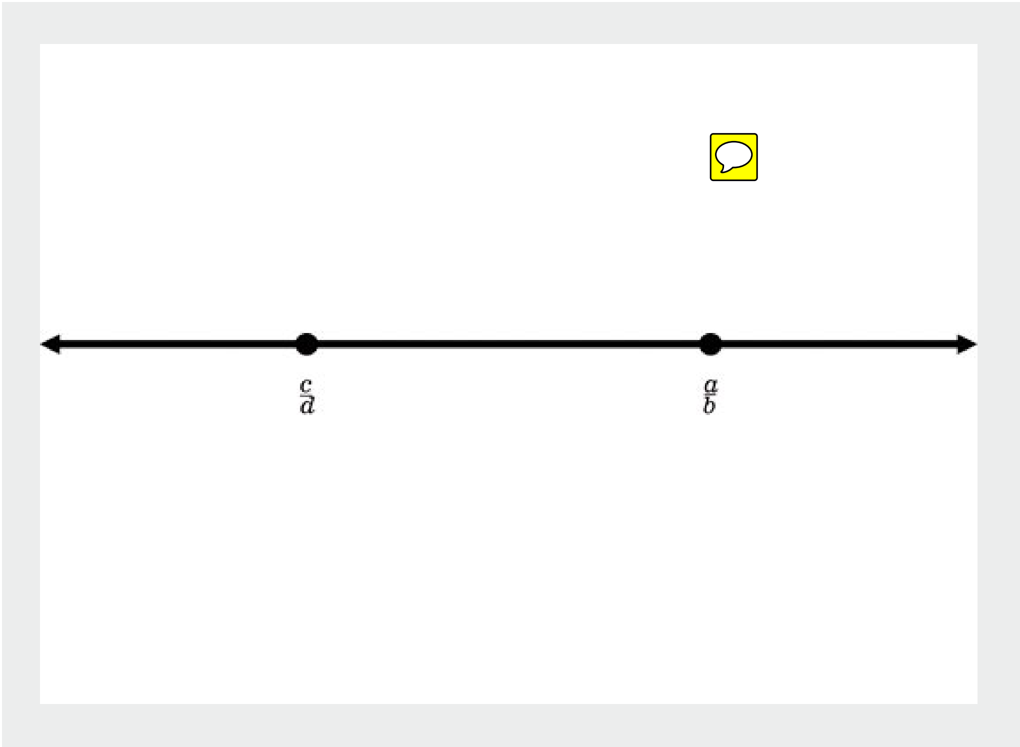
~~Si representados en la recta numérica~~

$\cancel{\frac{a}{b}}$

~~se encuentra a la izquierda de~~

$\cancel{\frac{c}{d}}$

1 Los números racionales



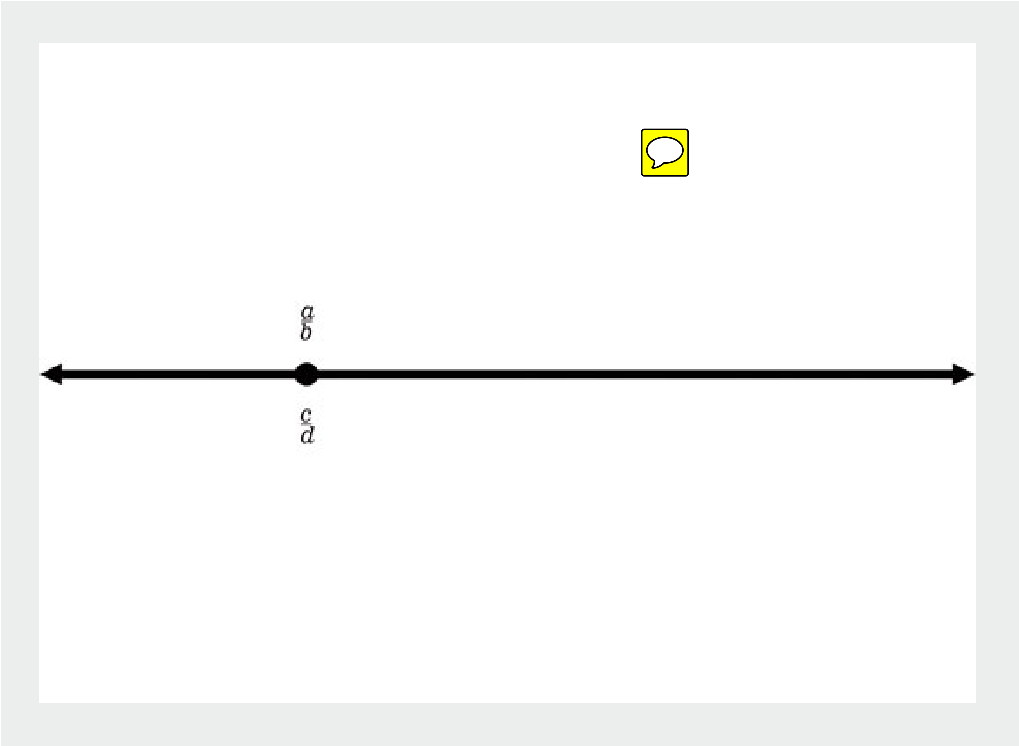
$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

~~Si representados en la recta numérica~~

$\cancel{\frac{a}{b}}$

~~se encuentra a la derecha de~~

$\cancel{\frac{c}{d}}$



$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

~~Si representados en la recta numérica~~

$\cancel{\frac{a}{b}}$

~~se ubica en el mismo punto~~

$\cancel{\frac{c}{d}}$

~~En este último caso se dice que los racionales~~

$\cancel{\frac{a}{b}}$

~~y~~

$\cancel{\frac{c}{d}}$

~~son equivalentes. Además~~ dos o más racionales forman una familia de fracciones equivalentes si para cualquier par de racionales se cumple que:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = c \cdot d$

Por ejemplo:

$-\frac{3}{7} = -\frac{15}{35}$

Porque:

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

$7 \cdot (-15) = 105$ y $(-3)(35) = 105$

Como los resultados son iguales se cumple que los racionales son equivalentes.

1.3.1 ¿Cómo ordenar números en la recta numérica?

Para ordenar dos o varios números de mayor a menor o de menor a mayor conviene convertir todos los racionales a fracciones con igual denominador para comparar únicamente los numeradores y así determinar su orden.

Recuerda

- A las fracciones que tienen igual denominador se les llama fracciones homogéneas.

  $\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 2\frac{1}{5}$ y $-\frac{4}{5}$

  Estas tienen igual denominador por tanto, son fracciones homogéneas.

- Las fracciones que tienen diferente denominador se denominan fracciones heterogéneas.

  $\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{7}$ y $-\frac{4}{3}$

  Estas tienen diferente denominador, por ende, son fracciones heterogéneas.

- Para convertir dos fracciones heterogéneas en homogéneas se halla el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores y se amplifica cada fracción, para que tengan al mínimo común múltiplo como igual denominador; por ejemplo:

  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right\}$

Primero se halla el m.c.m. (2, 4, 6) = 12.

Segundo, se multiplica cada racional, así:

$\frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{6}{12}$

$\frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$

$$\frac{5 \times 12}{6 \times 12} = \frac{10}{12}$$

Así se tiene que:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right\} = \left\{\frac{6}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}\right\}$$

Practica

Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

1.4 Consolidación

Practica

Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

2 Operaciones en el conjunto de los números racionales

En el conjunto de los números racionales se realizan operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación y división.

2.1 La adición y sustracción de números racionales

Si los números racionales están escritos como una fracción se deben considerar dos casos:

- **Racionales con igual denominador** En el caso para la adición de los números racionales se adicionan los numeradores y se deja el mismo denominador, en el caso de la sustracción se restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

$$-\frac{7}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{-7+2+4}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{-1+2}{3}=\frac{1}{3}$$

- **Racionales con diferente denominador** En la adición o sustracción de racionales con distinto denominador se debe hallar el m.c.m. de los denominadores y después amplificar cada fracción al m.c.m., para que tengan el mismo denominador; luego, se adicionan o restan como se hizo en el caso de racionales con igual denominador. Por ejemplo:

$$-\frac{7}{6}+\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=-\frac{14}{12}+\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\frac{-14+8+15}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

.

Si los números están escritos en notación decimal, se escriben uno debajo del otro ubicando la coma en la misma posición y se procede a sumar o restar como en los naturales, al resultado se le ubica la coma en la misma posición que se encuentra en los sumandos.

$$\begin{array}{r} 13,2 \\ 2,15 \\ 45,6 \\ +\quad 0,17 \\ \hline 51,12 \end{array}$$

~~1~~	~~3,~~	~~2~~	
~~2,~~	~~1~~	~~5~~	
~~4~~	~~5,~~	~~6~~	
~~+~~	~~0,~~	~~1~~	~~7~~
~~5~~	~~1,~~	~~12~~	

Practica

Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

2.2 La multiplicación de números racionales

Si los racionales están escritos como fracción, se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí, teniendo en cuenta la ley de los signos definida para los números enteros.

$$-\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{(-2)\times 5}{3\times 7}=-\frac{10}{21}$$

Si los racionales están escritos como un decimal se procede del siguiente modo. Primero, se multiplican como si fueran números enteros; después, en el resultado, se separan con una coma tantas cifras como decimales hay en ambos factores de la multiplicación. Por ejemplo, al multiplicar 3,24 por 2,8 tendremos:

	3,	2	4
x		2,	8
2	5	9	2
+ 6	4	8	
9,	0	7	2

~~3,~~	~~2~~	~~4~~
~~x~~	~~2,~~	~~8~~

~~2~~	~~5~~	~~9~~	~~2~~
~~6~~	~~4~~	~~8~~	
~~9,~~	~~0~~	~~7~~	~~2~~

La coma se ubicó detrás del nueve porque en los factores hay en total, tres cifras decimales.

2.3 División de números racionales

Para dividir números racionales se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor, por ejemplo:

$$-\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{-3 \cdot 3}{5 \cdot 2} = -\frac{9}{10}$$

Observa que el inverso multiplicativo de

$\cancel{\frac{2}{3}}$

~~es~~

$\cancel{\frac{2}{3}}$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Otra forma de encontrar una división de racionales colocar una fracción sobre otra, evento en el cual se aplica la ley de la oreja. En este caso, se hace el producto de extremos sobre el producto de medios.

Practica

Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

Profundiza

Las operaciones con números racionales y su jerarquía

¿Sabes operar con números racionales?

Para efectuar **operaciones** con números racionales hay que saber cómo se procede en cada una de ellas y, además, qué **jerarquía** se debe seguir.

La suma y la resta de números racionales

Para **sumar** y **restar** fracciones hay que considerar lo siguiente:

- Las fracciones deben tener siempre el **mismo denominador**.

- Cuando no tengan el mismo denominador, hay que buscar el mínimo común múltiplo **(m.c.m.)**, del siguiente modo:

- Se opera en línea recta, operando los numeradores y dejando el mismo denominador.

La multiplicación de fracciones

Para **multiplicar** fracciones hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Se multiplican **en línea** los numeradores y, después, se procede igual con los denominadores:

La división de fracciones

Para **dividir** fracciones hay que proceder del siguiente modo:

- Se multiplican **en cruz** los numeradores y los denominadores.

¿Cómo aplicar la jerarquía en las operaciones combinadas con fracciones?

Para hacer una operación combinada con fracciones, **se opera** siempre **de izquierda a derecha**, siguiendo el siguiente orden:

1. Las operaciones contenidas en las **llaves**, **paréntesis** y **corchetes**.
2. **Multiplicaciones** y **divisiones**.
3. **Sumas** y **restas**.

La siguiente imagen servirá para memorizar esta jerarquía: las operaciones que se indican en la base serían las primeras que hay que resolver y, luego, las de las siguientes franjas, hasta llegar a la parte más alta de la pirámide; pero siempre hay que proceder por este orden.

2.4 Consolidación

Practica

Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

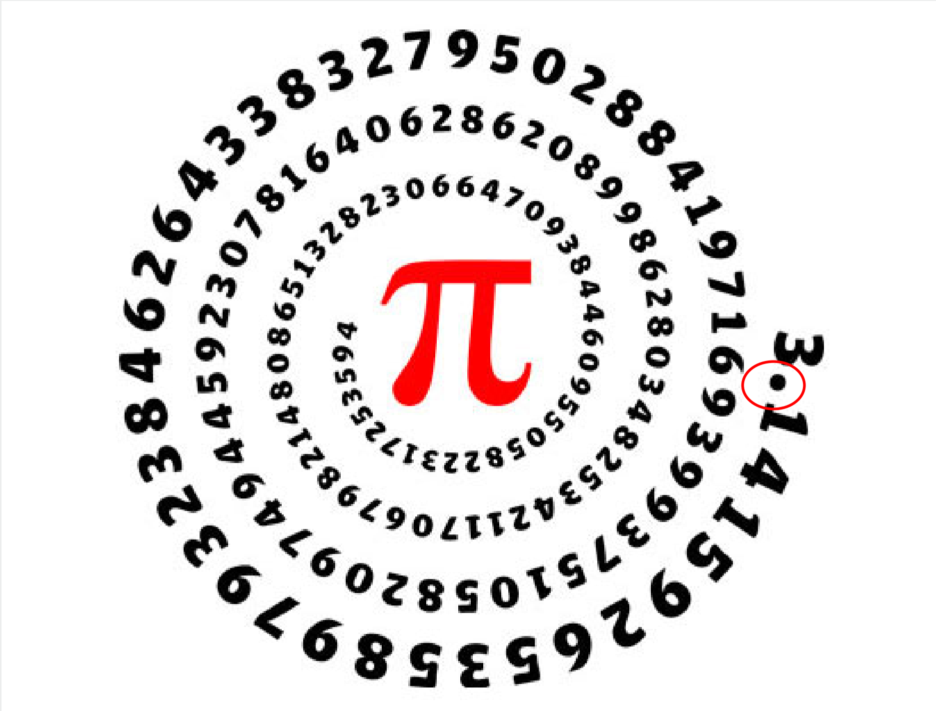
3 El conjunto de los números irracionales

El conjunto de los números irracionales está compuesto por todos aquellos decimales infinitos que no son periódicos y, por tanto no se pueden representar como un cociente entre dos enteros. Se representan con la letra **I.**

$$I = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \notin \mathbb{Q}\}$$

La definición como conjunto de los números irracionales significa que son todos aquellos números reales que no son racionales.

3 El conjunto de los números irracionales



Algunos números irracionales son de gran importancia en la ingeniería el cálculo las artes y la economía.

Los números irracionales

Los números irracionales se pueden componer de una parte entera y una racional. Por ejemplo:

$5\sqrt[3]{7}$

En este caso el cinco es la parte entera y la raíz cúbica de siete la parte irracional.

Se lee cinco raíz cúbica de siete y significa que la raíz cúbica de siete se repite cinco veces.

El origen de los números irracionales o inconmensurables (que no se pueden medir) se da en la antigua Grecia, en la escuela Pitagórica, y su aparición fue un suceso debido a que los pitagóricos consideraban que todo en la naturaleza estaba regido por números, ya sea como unidad o partes exactas de la unidad, es decir, todo podía ser representado y medido con un número.

Estos números aparecieron al querer medir la diagonal de un cuadrado de lado la unidad; para ello, el teorema de Pitágoras y lo que descubrieron era que la longitud de dicho cuadrado no era una medida conmensurable o que no se podía comparar con la unidad o con partes de ella, como este hecho ponía en serio peligro la filosofía pitagórica y dado que escapaba a su razón, decidieron darle el nombre de irracional, además de ocultar este descubrimiento a la comunidad filosófico-científica de la época. Sin embargo, parece ser que Hipaso no cumplió el voto de silencio que pesaba sobre la irracionalidad de.

$\cancel{\sqrt{2}}$

, por lo que la hermandad pitagórica lo habría expulsado de la escuela y habrían erigido una tumba con su nombre, mostrando así que, para ellos, él estaba muerto.

3.1 Algunos números irracionales importantes

El número irracional más conocido es π (pi); su aproximación decimal se define como la relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. Sus aplicaciones se ven en el diseño industrial, en la ingeniería, la probabilidad y muchas otras cosas.

$$\pi \approx 3{,}141592653589\ldots$$

El número e (o número de Euler) fue reconocido y utilizado, por primera vez, por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático y tiene aplicaciones muy importantes en economía, en el crecimiento de la población, en ingeniería, en el movimiento del sistema de amortiguación de un automóvil y muchas más.

$$e \approx 2{,}71828\ 18284\ 59045$$

El número Φ (phi), más conocido como "razón áurea", está íntimamente ligado al campo del arte y la arquitectura, pues su valor es sinónimo de belleza y expresa lo que se considera puramente bello; fue usado por los griegos en sus construcciones y por grandes artistas como Leonardo Da Vinci.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034\ldots$$

3.2 Clasificación de los números irracionales

Los números irracionales se clasifican en dos grupos:

- Algebraicos: son aquellos que se obtienen al solucionar una ecuación algebraica, por ejemplo: $x^2 - 2 = 0$ $x^2 = 2$

  $$x = \pm\sqrt{2}$$

  En esta ecuación se pide buscar un número que elevado a la segunda potencia dé como resultado 2. ~~Te darás cuenta que~~ no hay ningún número ni entero ni racional que cumpla esta condición. Por tanto, su solución es.

  $\cancel{\sqrt{2}}$

, que es un número irracional.

- Trascendentes: son aquellos que no se obtienen al resolver una ecuación algebraica, por ejemplo π ~3,1416...
  El número π, que muestra la relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro no se puede obtener de ninguna ecuación algebraica.

3.3 Aproximación de los números irracionales

Debido a que los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas, se hace imposible trabajar con ellos en toda su extensión decimal, por tanto, se debe usar su representación o aproximar la cifra decimal a una cantidad cercana.

Por ejemplo, sabiendo que

$\sqrt{2}$

es un número irracional y que

~~0 < a < b~~

es equivalente a a2 < b2, una forma de encontrar una aproximación de

$\sqrt{2}$

es la siguiente: como

$\sqrt{2}$

es un número tal que su cuadrado es 2, y 12 < 22 = 4 entonces:

$1 < \sqrt{2} < 2$

Para calcular una aproximación de

$\sqrt{2}$

con un decimal se procede a evaluar los cuadrados de todos los números entre 1 y 2 con un decimal, hasta encontrar un valor menor y uno mayor que

$\sqrt{2}$

$(1,1)^2 = 1,21$

$(1,2)^2 = 1,44$

$(1,3)^2 = 1,69$

$(1,4)^2 = 1,96$

$(1,5)^2 = 2,25$

Estos cálculos nos indican que

$\sqrt{2}$

está entre 1,4 y 1,5. Así, podemos afirmar que:

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

En esta caso tenemos que 1,4 es una **aproximación por defecto** de

$\sqrt{2}$

y 1,5 es una **aproximación por exceso**

$\sqrt{2}$

. El error que se ~~comete~~ al aproximar.

$\sqrt{2}$

por 1,4 o por 1,5 es menor que una décima.

Este mismo procedimiento puede hacerse con la ayuda de una calculadora y tomando un decimal de dos o más cifras entre 1 y 2, para obtener una aproximación de

$\sqrt{2}$

con el número de decimales que queramos. Para el número π ≈ 3,141592653589... una aproximación se puede hacer por **truncamiento**, es decir, cortar el número a cierta cantidad de decimales. Por ejemplo: truncar π a cuatro cifras decimales seria π = 3,1415 truncar π a dos cifras decimales seria π = 3,14.

3.4 Los números irracionales en la recta numérica

Como los números irracionales son decimales infinitos no periódicos, su ubicación en la recta no es fácil de determinar, sin embargo, para raíces cuadradas no exactas existe un método muy sencillo basado en el teorema de Pitágoras.

¿Cuál es la ubicación en la recta de

$\sqrt{2}$

? Para determinar su ubicación vamos a trazar una recta perpendicular a la recta numérica, que pase por el punto 1, y con las dos rectas construimos un triángulo rectángulo de catetos 1. Por el teorema de Pitágoras se tiene:

$h = \sqrt{1^2 + 1^2}$

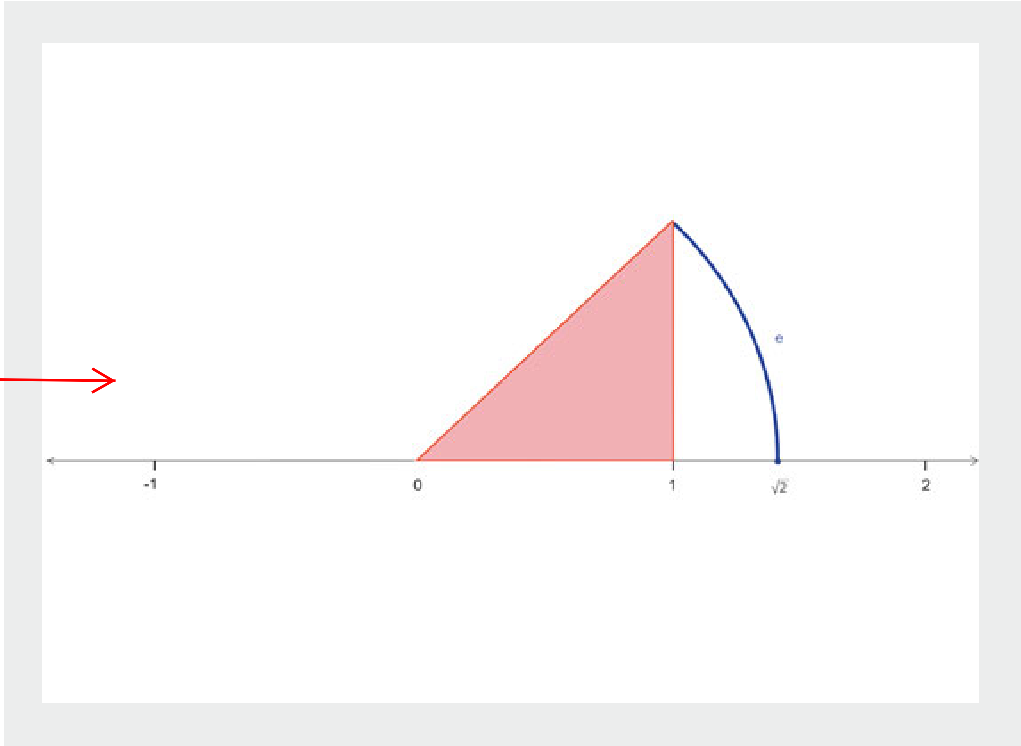
$h = \sqrt{2}$

Como la hipotenusa del triángulo mide

$\sqrt{2}$

con un compás y haciendo centro en cero, trasladamos mediante un arco de circunferencia la longitud de *h* a la recta numérica. El punto de corte entre la recta y el arco es.

$\cancel{\sqrt{2}}$



Observa cómo se representa

$\cancel{\sqrt{2}}$

sobre la recta numérica.

Con este procedimiento podemos ubicar cualquier raíz cuadrada.

Operaciones con los números irracionales

Al igual que con los números racionales, en los números irracionales se pueden hacer operaciones como adición y multiplicación manteniendo las mismas propiedades.

Para la **adición** se agrupan los términos que sean semejantes y se adicionan entre sí las partes enteras (es decir que tengan la misma representación numérica).

$3\sqrt{5} + 2\pi + 7\sqrt{5} + 7\pi$

$\left(3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}\right) + \left(2\pi + 7\pi\right)$

$10\sqrt{5} + 9\pi$

En este caso, la adición se deja expresada, ya que no se puede simplificar más debido a que los sumandos no son semejantes.

Para la **multiplicación**, si los términos son semejantes, se aplican las propiedades de la potenciación y la radicación, y se multiplican las partes enteras.

$4\pi \cdot 3\pi = (4 \cdot 3)\pi^2$

$= 12\pi^2$

$-3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{8} = -3 \cdot 5\sqrt{2 \cdot 8}$

$= -15\sqrt{16}$

$= -15 \cdot 4$

$= -60$

Si los factores no son semejantes, se multiplican las partes enteras y las partes irracionales se dejan expresadas.

$2\sqrt{5} \cdot 3\pi = 2 \cdot 3\pi\sqrt{5}$

$= 6\pi\sqrt{5}$

Profundiza

Los números irracionales. El número áureo

¿A qué valores corresponden los números irracionales?

Para saber cuáles son los **números irracionales**, conviene que recuerdes lo siguiente:

- Son números **decimales** con un número ilimitado de cifras decimales no periódicas.

- Este tipo de decimales **no** se puede **expresar como fracción**.

- Se representan con el **símbolo** .

La clasificación de los números irracionales

Los números irracionales pueden ser **algebraicos** y **trascendentes**:

- **Algebraicos**: **pueden expresarse** como **soluciones de una ecuación polinómica**, como, por ejemplo, el número áureo: = 1,6180339887...

- **Trascendentes**: **no pueden expresarse** como **soluciones de una ecuación polinómica**, como, por ejemplo, el número π (pi) = 3,141592653589..., que define la relación entre una circunferencia y su diámetro, y además es el número irracional más conocido.

El número áureo

El **número áureo** es un **número irracional**, cuyo valor es:

Este número se encuentra en muchos aspectos de nuestro entorno, como, por ejemplo, en la forma de las conchas marinas, en la fachada y la planta del Partenón de Atenas y, también, en las proporciones del cuerpo humano, como bien estudió Leonardo da Vinci.

3.5 Consolidación

Practica

Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

4 Los números reales

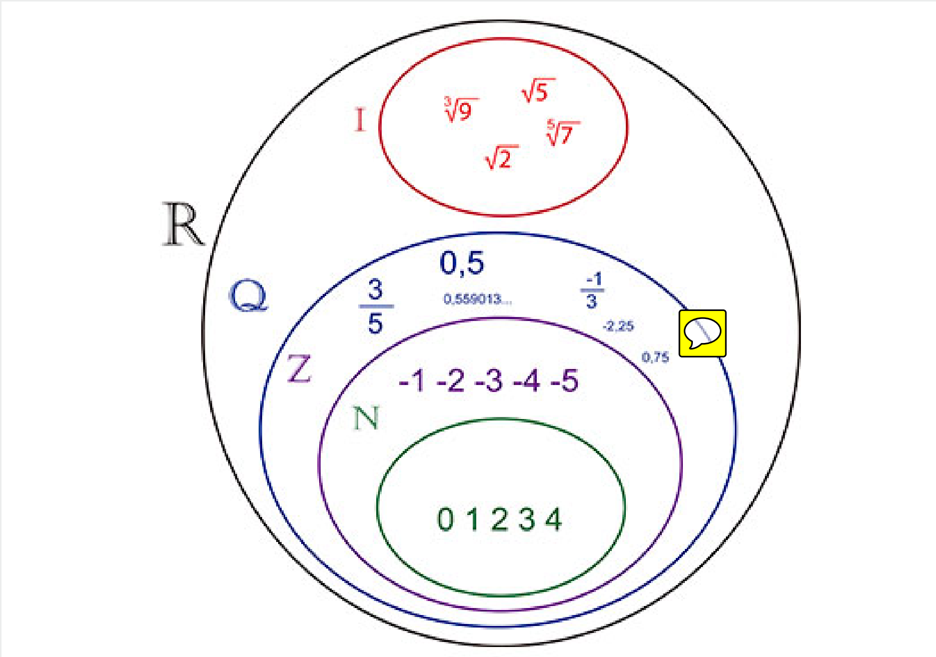
El conjunto de los números reales está constituido por los números naturales, los enteros, los racionales y los irracionales; se caracteriza porque:

- Se representa con la letra

$\mathbb{R}$

- Es un conjunto infinito.

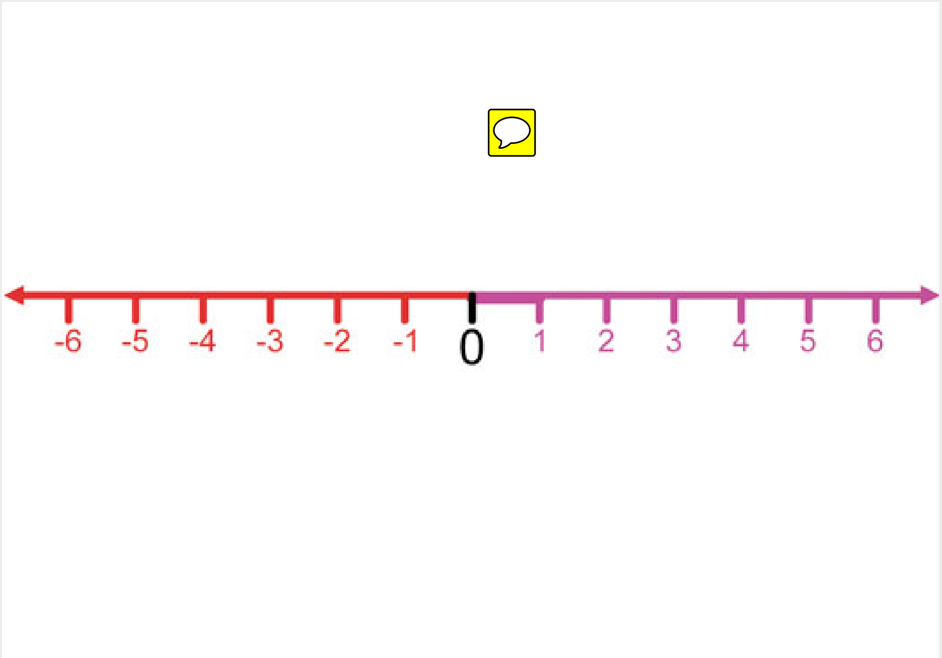
- Es totalmente ordenado.
- Es un conjunto denso.



Los números reales se construyen a partir de los otros conjuntos numéricos.

4.1 La representación de los números reales en la recta numérica

Como los números reales se construyen a partir de los racionales y los irracionales, es preciso decir que a cada punto de la recta le corresponde un número real, aunque usualmente solo se marcan los enteros sobre la recta numérica; se sobreentiende entonces que los espacios que hay entre cada número entero están ocupados por los demás números reales.



Los espacios entres los números enteros están ocupados por los demás números reales.

4.2 Orden en los números reales

Para cualquier par de números

$\cancel{x, y \in \mathbb{R}}$

se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:

$\boldsymbol{x < y}$ si x está a la izquierda de y en la recta numérica.

$x > y$ si x está a la derecha de y en la recta numérica.

$x = y$ si x está en el mismo punto que y.

4.2.1 Propiedades del orden en los números reales

Si se le adiciona o sustrae un mismo número a una desigualdad, el sentido de esta se mantiene.

- Si $x < y$, entonces $x + a < y + a$
- Si $x < y$, entonces $x - a < y - a$
- Si $x > y$, entonces $x + a > y + a$

- Si $x > y$, entonces $x - a > y - a$

Por ejemplo, si a -8 < 10 se la adiciona 4 a cada lado de la desigualad, se tiene:

$-8 + 4 < 10 + 4$

$-4 < 12$

En este caso la desigualdad persiste.

Si se multiplica una desigualdad por un mismo número positivo, el sentido de la desigualdad se mantiene.

- Si x < y, entonces

$x \cdot a < y \cdot a$

Por ejemplo, si -8 < 10 y se multiplica

$\frac{3}{2}$

a cada lado de la desigualad se tiene:

$-8 \cdot \frac{3}{2} < 10 \cdot \frac{3}{2}$

$-\frac{24}{2} < \frac{30}{2}$

$-12 < 15$

En este caso la desigualdad continúa.

Si una desigualdad se multiplica por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia, por ejemplo si -4 > -13 se multiplica por -3 a cada lado de la desigualdad se tiene:

$-4 \cdot -3 > -13 \cdot -3$

$12 < 39$

En este caso se cambió el sentido de la desigualdad porque, como sabemos, 12 está a la izquierda de 39 en la recta numérica.

Practica
Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

4.3 Operaciones con números reales

Como los números reales se han definido a partir de los números racionales y los irracionales, loa reales conservan también las mismas operaciones con idénticas propiedades.

4.3.1 La adición de números reales

¿Cuánto es la suma de

$$-\frac{1}{3} + 2\sqrt[3]{7}$$

~~?~~En este caso si no se pide una aproximación decimal, el resultado se deja expresado como la adición de dos racionales, debido a que estos dos números, a partir de sus representaciones, no se pueden operar entre sí, salvo que se reescriban y se aproximen como dos números decimales.

$$-\frac{1}{3} + 2\sqrt[3]{7} = \frac{-1 + 6\sqrt[3]{7}}{3}$$

Por ejemplo:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{8\pi + 15\sqrt{2}}{12}$$

4.3.2 Multiplicación de números reales

Para multiplicar número reales se tienen en cuenta la ley de los signos, las propiedades de la radicación y la multiplicación de números racionales.

Por ejemplo:

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$$

$$-\frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{7} = \frac{-3 \cdot 2\sqrt{3}}{5 \cdot 7} = -\frac{6\sqrt{3}}{35}$$

Practica
Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

4.4 Consolidación

Practica
Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.

5 Competencias

Practica
Encontrarás actividades de ejercitación en la versión online.