|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Funciones |
| Código del guion | MA\_11\_02\_CO |
| Descripción | Las funciones desempeñan un papel fundamental en la construcción del pensamiento matemático, puesto que tienen múltiples aplicaciones en modelar situaciones de variación, tanto en contextos cotidianos como de aplicación en diversas ciencias. Aquí se estudia el concepto de función, su clasificación, propiedades y operaciones. |

[SECCIÓN 1] **1 Relaciones y funciones**

El concepto de **función** es uno de los más importantes en matemáticas. Las funciones expresan una relación de **dependencia** entre dos magnitudes. Por ejemplo, cuando se lanza un balón al aire, la altura a la que se encuentra depende del tiempo transcurrido desde su lanzamiento; el valor por el que nos llega el recibo de la luz depende del consumo de energía durante el mes; el área de un círculo depende de su radio y el costo de enviar un paquete depende de su peso. La representación de estas y otras situaciones de dependencia, así como el análisis de la variación de una magnitud respecto a otra, se constituye en el centro de estudio de la función, por lo que las funciones son herramientas claves en la modelación de distintos fenómenos.

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas es el de **función**, que encierra la idea de **dependencia**, es decir, una función establece una relación de dependencia entre dos magnitudes, por ejemplo, cuando de lanza un balón al aire, la altura a la que este se encuentra depende del tiempo que haya transcurrido después de haber sido lanzado el objeto, el valor que se debe cancelar del recibo de la luz depende del consumo de energía del mes, el área de un circulo depende de su radio, el costo de enviar un paquete depende de su peso, entre otras situaciones de dependencia. La forma de representación de estas situaciones de dependencia, así como el análisis de la variación de una magnitud respecto a la otra, es el centro de estudio de la función, por esta razón, el concepto de función se convierte en una herramienta para realizar la modelación de distintos fenómenos tanto reales como abstractos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG01 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Se espera poder construir una collage que varias graficas de funciones modelando diferentes situaciones de la vida cotidiana. |
| **Pie de imagen** | Algunas aplicaciones de la función |

El estudio de las funciones empieza con un concepto más general: las relaciones.

[SECCIÓN 2] **1.1 Concepto de relación**

Una relación entre dos conjuntos es una correspondencia entre algunos elementos del primer conjunto y uno o más elementos del segundo conjunto. Por ejemplo, si es el conjunto de todas las poblaciones y ciudades de Colombia y es el conjunto de todos los departamentos de Colombia, se puede establecer la relación “…está ubicada en el departamento de…”. En este caso se tienen correspondencias como:

Bogotá “está ubicada en el departamento de” Cundinamarca.

Melgar “está ubicada en el departamento de” Tolima.

Girardot “está ubicada en el departamento de” Cundinamarca.

Girón “está ubicada en el departamento de” Santander.

Ipiales “está ubicada en el departamento de” Nariño.

Por supuesto, los anteriores son solo algunos ejemplos de todas las correspondencias existentes, ya que a cada una de las 1118 ciudades o poblaciones de Colombia le corresponde uno de los 32 departamentos.

Esta no es la única relación que se puede establecer entre estos dos conjuntos. Otra relación, que aunque pudiera parecer extraña, establece correspondencias entre los elementos de los dos conjuntos es “…tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de…”. Por ejemplo:

Bogotá “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Bolívar

Bogotá “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Boyacá

Arauca “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Atlántico

Arauca “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Amazonas

Arauca “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Arauca

Arauca “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Antioquia

Melgar “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Meta

Melgar “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Magdalena

Manizales “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Meta

Manizales “tiene su primera letra es igual a la primera letra del departamento de” Magdalena

Nuevamente, estos son tan solo algunos de los ejemplos de las correspondencias que se establecieron, sin embargo, a diferencia del caso anterior, en esta relación hay ciudades a las que les corresponde más de un departamento como Arauca, mientras que otras ciudades como Duitama, Ibagué, Espinal u Ocaña, no están relacionadas con ningún departamento de Colombia.

Una relación está determinada por parejas formadas por elementos de con elementos de , por ejemplo si tenemos que todas las correspondencias que se presentan son:

Leticia “…” Amazonas, Medellín “…” Antioquia, Arauca “…” Arauca,

Barranquilla “…” Atlántico, Cartagena “…” Bolívar, Tunja “…” Boyacá,

Manizales “…” Caldas, Florencia “…” Caquetá, Yopal “…” Casanare;

Popayán “…” Cauca, Valledupar “…” Cesar; Quibdó “…” Chocó, Montería “…” Córdoba, Bogotá “…” Cundinamarca, Inírida “…” Guainía; Riohacha “…” Guajira, San José del Guaviare “…” Guaviare, Neiva “…” Huila, Santa Marta “…” Magdalena,

Villavicencio “…” Meta, Pasto “…” Nariño; Norte de Santander “…” Cúcuta,

Mocoa “…” Putumayo, Armenia “…” Quindío, Pereira “…” Risaralda,

San Andrés “…”Archipiélago de San Andres, Providencia y Santa Catalina, Bucaramanga “…” Santander; Sincelejo “…” Sucre, Ibagué “…” Tolima, Valle del Cauca “…” Cali, Mitú “…”Vaupés,

Puerto Carreño “…” Vichada.

Se puede afirmar que: la relación es: “es capital de”.

En matemáticas, se define una relación como un conjunto de parejas que pertenecen al producto cartesiano.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dados dos conjuntos y se define el producto cartesiano entre los dos conjuntos como:  ,  Es decir, el conjunto de todas las **parejas ordenadas** tales que el primer elemento de la pareja (primera componente) pertenece al conjunto y el segundo elemento de la pareja (segunda componente) pertenece al conjunto . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de Relación** |
| **Contenido** | Una relación entre dos conjuntos y es un subconjunto de su producto cartesiano. Es decir si entonces es una relación entre el conjunto y , el conjunto se llama **conjunto de salida** y el conjunto se denomina **conjunto de llegada**. |

**Ejemplo 1.** Si y , se tiene que:

Algunas relaciones de *A* en *B* son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG02 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R1. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagrama sagital de la relación , cada flecha indica correspondencia entre un elemento de *A* un elemento de *B*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG03 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir *R2* de forma similar a la IMG01 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagrama sagital de la relación . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG04 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R3 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagital de la relación . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG05 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R4. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG06 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R5. Similar a la IMG02 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagrama sagital de la relación . |

El conjunto no es una relación entre el conjunto y , ya que ∉B

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG07 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir S, Similar a la IMG02 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | **no** es una relación entre A y B |

De manera similar, el conjunto , no es una relación entre y , puesto que .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG08 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | no es una relación entre *A* y *B.* |

**Ejemplo 2.** Si , los conjuntos:

Son relaciones, donde el conjunto A es tanto el conjunto de salida como el conjunto de llegada.

Las relaciones también se pueden definir mediante una regla o ley que permita determinar la correspondencia establecida. Esto se debe a que algunas veces, representar una relación mediante la escritura de todas las parejas que pertenecen a esta, o a través de su representación sagital es interminable en conjuntos con un número grande de elementos o conjuntos infinitos (como los son los conjuntos de los sistemas numéricos); en el ejemplo de ciudades y departamentos hubiese sido inoficioso escribir las 1118 parejas que obtienen en la relación “…está ubicado en el departamento de…”, otros ejemplos son:

**Ejemplo 3.** En el conjunto de los números naturales como conjunto salida y de llegada, la relación dada por esta relacionado con si es divisor de

Se tiene que:

, ya que es divisor de

, ya que es divisor de

, ya que es divisor de

, ya que aunque es divisor de ,

**Ejemplo 4.** Entre los números naturales como conjunto de salida y los números racionales como conjunto de llegada la relación:

Se tiene que:

, ya que

, ya que

, ya que

, ya que

, ya que aunque , .

**Ejemplo 5.** Entre los números reales como conjunto de salida y a la vez como conjunto de llegada, la relación dada por:

Se tiene que:

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Dominio y rango de una relación**

Los elementos de una relación son el conjunto de salida, el conjunto de llegada, el dominio y el rango de la relación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Dominio y rango de una relación** |
| **Contenido** | Dada una relación entre los conjuntos y , se define **el dominio de la relación** (), como el conjunto de todas las primeras componentes de las parejas que pertenecen a la relación, es decir todos los elementos de que están ~~en la~~ relacionados por lo menos con un elemento de .  **El rango de la relación** es el conjunto el de todas las segundas componentes de la relación, es decir, es el conjunto de todos los elementos de que son relacionados por lo menos ~~con~~ un elemento del conjunto A. |

**En el ejemplo 1**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG09 |
| **Descripción** | Es una recopilación de los diagramas sagitales de las IMG02 hasta IMG06 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y el conjunto de llegada |

* y
* y el
* y el
* y
* y

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos relaciones que tienen el mismo dominio y el mismo rango, no necesariamente ~~son~~ iguales. |

**En el ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG10 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 2. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y mismo como llegada. |

* y
* y
* y

En los ejemplos 3, 4 y 5 debido a que no se tienen enlistadas todas las parejas de la relación, para obtener los dominios es necesario acudir a las propiedades de las operaciones de los conjuntos numéricos en los fueron establecidas las relaciones.

**En el ejemplo 3.**

Como todo número natural es divisor de sí mismo, ~~luego~~ la pareja ordenada para todo , por lo tanto y . Es importante destacar que cero (0) no es un número natural.

**En el ejemplo 4**

Si y , entonces y no está definido, luego, en este caso:

Luego, debe ser una potencia de 2 con .

Además como:

y es natural, ~~entonces~~ debe ser un número entero positivo y por tanto debe ser una fracción unitaria positiva, de donde:

**En el ejemplo 5.**

Se despeja de la ecuación

entonces

Luego los valores de deben cumplir que de donde:

Por lo tanto se particiona el conjunto de los números reales en los intervalos

, y

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Luego de donde .

De forma similar, si al despejar se obtiene que de donde .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC10 |
| **Título** | Dominio y rango de relaciones |
| **Descripción** | Actividad para identificar en diferentes relaciones sus conjuntos de salida y llegada; así como sus dominios y rangos. |

[SECCIÓN 3] **1.1.2 Relaciones de números reales y el plano cartesiano**

El plano cartesiano es un sistema de referencia ~~que está~~ formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto que llamamos origen. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o eje , y la vertical se denomina eje de las ordenadas o eje . Una pareja ordenada de números reales puede ser representada por un punto del plano y todo punto del plano representa una pareja ordenada de números reales, por lo tanto, se puede establecer una relación biunívoca entre puntos del plano y el producto cartesiano .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG11 |
| **Descripción** | Plano Cartesiano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 146258987 |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica ~~en el plano cartesian~~o de parejas ordenadas de números reales. |

Graficar una relación en el plano cartesiano consiste en ubicar en este todos los puntos correspondientes a las parejas que pertenecen a la relación, asumiendo que el conjunto de salida se debe ubicar en el eje y el conjunto de llegada en el eje .

En los siguientes ejemplos, se ha realizado la gráfica de cada relación usando la ayuda de un software.

**La grafica del Ejemplo 5.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG12 |
| **Descripción** | Gráfica de la relación del ejemplo 5. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El conjunto de puntos correspondientes a la pareja de la relación forman una circunferencia. |

En algunas ocasiones, la gráfica de la relación permite determinar dominio y rango, en este caso se observa que el dominio y rango de la relación es

**Ejemplo 6.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG13 |
| **Descripción** | Gráfica de la relación del ejemplo 6. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la relación corresponde a la región sombreada, específicamente a un semiplano. |

Se observa que y

**Ejemplo 7.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG14 |
| **Descripción** | Gráfica de la relación del ejemplo 7. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la relación es una parábola. |

Se observa que y

**Ejemplo 8.** La ecuación de Batman [[VER](http://gaussianos.com/la-ecuacion-del-logo-de-batman-en-mathematica/)].

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG15 |
| **Descripción** | Grafica de la relación del ejemplo 7. [[VER](http://gaussianos.com/la-ecuacion-del-logo-de-batman-en-mathematica/)] |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la relación forma el logo de Batman. |

Se observa que y .

[SECCIÓN 2] **1.2 Funciones**

Las funciones son un caso particular de las relaciones, es decir, toda función es una relación, pero no toda relación es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función** |
| **Contenido** | Una relación entre los conjuntos y es una **función**, si cada elemento del dominio está relacionado con un único elemento del conjunto . |

En otras palabras, si en una relación es posible determinar al menos un elemento del dominio que esté relacionado con más de un elemento de , entonces la relación **no** es una función.

**En el ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG16 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 1. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representaciones en el diagrama sagital de las relaciones del ejemplo 1. |

* **no es ~~una~~ función,** ya que se observa que el elemento está relacionado con dos elementos y .
* **no es ~~una~~ función,** ya que se observa que el elemento está relacionado con dos elementos y .
* **no es ~~una~~ función** ya que se observa que el elemento está relacionado con dos elementos y .
* **si es ~~una~~ función**.
* **si es ~~una~~ función**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La definición de función no permite relacionar a un elemento del conjunto de salida A con más de un elemento del conjunto de llegada B, pero no impide que un elemento de se pueda relacionar con más de un elemento de . |

~~Como sucede en la función R~~~~5~~ ~~del ejemplo 1.~~

**En el ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG17 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 2. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representaciones en el diagrama sagital de las relaciones del ejemplo 2. |

* **no es ~~una~~ función,** porque 1 está relacionado con dos elementos y .
* y **son funciones.**

**El ejemplo 3,** *R* **no es ~~una~~ función,** ya que 1 es divisor de todo número, luego para todo numero natural , es decir que está relacionado con infinitos números naturales.

**En el ejemplo 4,** Si , entonces luego de donde , eso nos dice que a cada natural que este en el dominio de la relación le corresponde un único número racional b, que está en el conjunto de llegada, por lo tanto R es una función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Criterio de la recta vertical** |
| **Contenido** | Cuando el conjunto de salida y el conjunto de llegada de una relación es el conjunto de ~~los~~ números reales, se puede determinar si esta relación es o no función a través de su representación gráfica en el plano cartesiano; para esto, se observa si cada recta vertical corta la gráfica en un único punto, ~~si esto sucede~~ la relación es una función, en caso de que alguna recta vertical corte a la gráfica en más de un punto la relación no es ~~una~~ función. |

**En el ejemplo 5, no** es ~~una~~ función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG18 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 5. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 5, la recta corta a la circunferencia en más de un punto, por lo tanto *R* no es función. |

**En el ejemplo 6, no** es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG19 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 6. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 6, la recta corta la región sombreada en más de un punto, por lo tanto **R** no es función. |

**El ejemplo 7,** es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG20 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 7. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 7, ninguna recta corta a la parábola en más de un punto, por lo tanto *R* es función. |

**El ejemplo 8,** La relación del logotipo de Batman **no** es función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG21 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 8. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 5, la recta corta al logo de Batman en más de un punto, por lo tanto *R* no es función. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC20 |
| **Título** | Relaciones que son funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica el reconocimiento de las relaciones que son funciones de las que no lo son |

[SECCIÓN 3] **1.2.1 Codominio, imagen y preimagen de funciones**

Las funciones son relaciones, por lo tanto establecen una correspondencia entre elementos de un conjunto de salida y un conjunto de llegada , de esta forma, tienen definido un **dominio** y un **rango**, además de estos, hay otros elementos que deben tener en cuenta cuando se trabaja con una función, estos son, codominio, imagen y preimagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de codominio de una función** |
| **Contenido** | El conjunto de llegada de una función se denomina el **codominio de la función** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de imagen por una función** |
| **Contenido** | Como en las funciones cada elemento del dominio está relacionado con un único elemento del codominio, dado un elemento del dominio, se denomina **imagen** **de**  **por**  o precisamente a ese único elemento con el que se encuentra relacionado. |

En otras palabras, la afirmación indica que el valor de **queda determinado** por el valor de .

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de preimagen por la función** |
| **Contenido** | Si es un elemento del rango de una función, se llama **preimagen de**  **por**  a todos los elementos del dominio cuya imagen sea . |

A diferencia de la imagen, las preimágenes no necesariamente son únicas, como en la relación R5 del ejemplo 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG22 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | *a*, *b* y *c* son preimágenes de *m* por la función *R5* |

es una función con , y . Además se tiene que:

es el conjunto de las preimágenes de .

[SECCIÓN 2] **1.3 Funciones de números reales.**

En el estudio del cálculo se hace énfasis en las funciones de números reales, que se definen a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funciones de números reales** |
| **Contenido** | Las funciones que tienen su dominio y codominio en el conjunto de los números reales se denominan **funciones de números reales**. |

Por lo general, las funciones de números reales se expresan de forma gráfica o analítica, la gráfica corresponde a su representación en el plano cartesiano y la forma analítica a la ecuación que relaciona a través de la aplicación de las operaciones y relaciones establecidas a cada uno de los elemento del dominio con sus respectivas imágenes. Las siguientes expresiones son ejemplos de la forma analítica de funciones de números reales:

, , ,

Sin embargo, no siempre es posible encontrar una expresión analítica o establecer la gráfica de una función de números reales, por ejemplo, dada la función que relaciona a cada número real con su imagen por , donde es la cantidad de cifras periódicas que tiene la expansión decimal de *x*, se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

, y

En esta esta función no es posible determinar una expresión analítica o gráfica que la represente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC30 |
| **Título** | Dominio y rango de algunas funciones de números reales con expresiones analíticas |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presentan los procedimientos para determinar el dominio de funciones de números reales a partir de su expresión analítica |

[SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

Estas actividades te permitirán afianzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC40 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Dominio, rango, codominio, imágenes y preimágenes de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se refuerzan los conocimientos adquiridos acerca de los conceptos de dominio, rango, codominio, imágenes y preimágenes de funciones. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC50 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Dominio de funciones de números reales |
| **Descripción** | Actividad en la que se practican ~~los~~ procedimientos para determinar el dominio de funciones de números reales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC60 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Propuesta de diagrama sagital para funciones de números reales |
| **Descripción** | Interactivo en el que se explora otra forma de graficar las funciones de números reales. |

[SECCIÓN 1] **2 Propiedades de las funciones**

Para profundizar el estudio sobre las funciones es necesario explorar ciertas características o propiedades que cumplen algunas de estas y que se evidencian tanto en el comportamiento de la función como en la gráfica de la misma, algunas de estas propiedades se pueden definir para cualquier tipo de función, mientras que otras se definen para las funciones de números reales.

[SECCIÓN 2] **2.1 Funciones inyectivas o uno a uno**

Una función inyectiva, se denomina también función **uno a uno**, se define de la siguiente manera:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inyectiva o uno a uno** |
| **Contenido** | Una función es **inyectiva,**  si todo elemento del rango tiene una única preimagen. En otras palabras  Si entonces |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG23 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación en el diagrama sagital de una función inyectiva. |

En el diagrama sagital se observa que el , las preimagenes para cada uno de estos valores son:

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

Como cada elemento del rango tiene una sola preimagen, ~~entonces~~ la **función es inyectiva.**

**Ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG24 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación en el diagrama sagital de una función no inyectiva. |

Se observa en el diagrama sagital que , las preimagenes para cada uno de esto valores son:

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de son .

Como hay un elemento del rango que tiene más de una preimagen, ~~entonces~~ la **función no es inyectiva.**

Para ~~el caso de las~~ funciones de números reales, se puede determinar si una función es inyectiva ~~a partir de la gráfica~~ trazando rectas horizontales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Criterio de la recta horizontal** |
| **Contenido** | Una función de números reales es inyectiva si y solo si ninguna recta horizontal corta su gráfica en más de un punto. |

**Ejemplo 4.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG25 |
| **Descripción** | Prueba de la recta horizontal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | De acuerdo con el criterio de la recta horizontal, ninguna recta corta la gráfica en más de un punto, por lo tanto la función es inyectiva. |

**Ejemplo 5.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG26 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | De acuerdo con el criterio de la recta horizontal, la recta corta la gráfica de la función en más de un punto, por lo tanto la función **no** es inyectiva |

[SECCIÓN 2] **2.2 Funciones sobreyectivas**

Una función es sobreyectiva, si el rango es igual al conjunto de elementos del codominio, en otras palabras:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función sobreyectiva** |
| **Contenido** | Una función es **sobreyectiva,**  si y solo si, todos los elementos del codominio son imágenes de la función. |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG27 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación en el diagrama sagital de una función sobreyectiva. |

En el diagrama sagital se observa que , y , como el rango y codominio son iguales, la función **es sobreyectiva.**

**Ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG28 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la función g, cambiar f por g |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación en el diagrama sagital de una función no sobreyectiva. |

De acuerdo con el diagrama sagital, se puede determinar que , y como no coincide el rango y el codominio la **función no es sobreyectiva**.

**Ejemplo 3.** La función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG29 |
| **Descripción** | Función en el plano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

En la gráfica se observa que el rango es el conjunto de los números reales, de la misma forma que el codominio, por lo tanto **es una función sobreyectiva.**

[SECCIÓN 2] **2.3 Funciones biyectivas**

Una función biyectiva establece una correspondencia biunívoca entre los elementos del dominio y los elementos del codominio, de esta forma:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función Biyectiva** |
| **Contenido** | Una función es **biyectiva,** si y solosi es inyectiva y sobreyectiva ~~al mismo tiempo~~. |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG30 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación en el diagrama sagital de una función biyectiva. |

Se observa que el = por lo tanto es una función **sobreyectiva,** ahora calculemos las preimágenes para cada uno de esto valores

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

Como las preimágenes son únicas, *f* **es una función inyectiva**

En conclusión, *f* es sobreyectiva e inyectiva, por lo tanto **es biyectiva.**

**Ejemplo 2.** La función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG31 |
| **Descripción** | Prueba de la recta horizontal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ninguna recta corta la gráfica en más de un punto y el rango son los números reales, por lo tanto la función es **biyectiva** |

Gráficamente, se puede ver que la función pasa la prueba de la recta horizontal por lo que es inyectiva y además el rango de la función es el conjunto de los números reales por lo que es sobreyectiva, por tanto la **función es biyectiva.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC70 |
| **Título** | La relación recíproca |
| **Descripción** | Interactivo en el que se define la relación recíproca y su relación con las propiedades inyectiva, sobreyectiva y biyectiva de las funciones. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC80 |
| **Título** | Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas |
| **Descripción** | Actividad en que se practica procesos para identificar las funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. |

[SECCIÓN 2] **2.4 Propiedades de funciones de números reales**

Las características de las funciones de números reales, se pueden estudiar teniendo en cuenta las propiedades y operaciones de este conjunto numérico.

[SECCIÓN 3] **2.4.1 Funciones pares**

En el plano cartesiano la gráfica de una función par se identifica porque al ser reflejada por el eje , la gráfica obtenida coincide con la representación gráfica de la función. En general:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función Par** |
| **Contenido** | Una función se dice **par** si para todo se tiene que y además |

**Ejemplo 1.** La función

El dominio de la función son todos los números reales, ahora si se tiene que:

Por lo tanto es par.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG32 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica que es una función par |

**Ejemplo 2.** La función

No es una función par, por ejemplo para ~~el caso de~~ se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG33 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica que la función no es una función impar |

[SECCIÓN 3] **2.4.2 Funciones Impares**

En el plano cartesiano la gráfica de una función impar se identifica porque al ser reflejada por el eje y después por el eje la gráfica obtenida coincide con la gráfica de la función. En general:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función impar** |
| **Contenido** | Una función se dice **impar** si para todo se tiene que y además |

**Ejemplo 1.** La función

El dominio de la función son todos los números reales, ahora si se tiene que:

Por lo tanto es impar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG34 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica que es una función impar |

**Ejemplo 2.** La función

No es una función impar, ya que tomando un caso particular, por ejemplo se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG35 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica que no es una función impar |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC90 |
| **Título** | Funciones pares e impares |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se identifican las funciones pares e impares. |

[SECCIÓN 3]**2.4.3 Funciones Crecientes**

En el plano cartesiano la gráfica de una función creciente se identifica porque asciende de izquierda a derecha. En forma general:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función creciente** |
| **Contenido** | Una función es creciente en un intervalo si esta definida en ese intervalo y además se cumple que:  Si entonces  Para todo |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG36 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es creciente en todo su dominio. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función monótona creciente** |
| **Contenido** | Una función se denomina monótona creciente si es creciente en todo su dominio. |

[SECCIÓN 3]**2.4.4 Funciones Decrecientes**

En el plano cartesiano la gráfica de una función decreciente se identifica a medida que aumentan los valores del dominio, los valores del codominio disminuyen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función decreciente** |
| **Contenido** | Una función es creciente en un intervalo si esta definida en ese intervalo y además se cumple que:  Si entonces  Para todo |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG37 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es decreciente |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Monótona decreciente** |
| **Contenido** | Una función se denomina monótona decreciente si es decreciente en todo su dominio. |

[SECCIÓN 3] **2.4.4 Máximos y mínimos relativos y absolutos**

En una función definida en los números reales es el mínimo de la función y es el valor donde lo alcanza. Si se cumple la siguiente definición:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Mínimo absoluto** |
| **Contenido** | Una función tiene un minimo absoluto en si y solo si y además  para todo . |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG38 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función alcanza un mínimo absoluto en |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Máximo absoluto** |
| **Contenido** | Una función tiene un máximo absoluto en si y solo si y además  Para todo . |

En este caso, es el máximo de la función y es el valor donde lo alcanza.

**Ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG39 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función alcanza un máximo absoluto en |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Mínimo relativo** |
| **Contenido** | Una función tiene un minimo relativo en si y solo si y existe un tal que,  Con , para todo . |

De esta manera es el mínimo relativo de la función y es el valor donde lo alcanza.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Máximo relativo** |
| **Contenido** | Una función tiene un máximo relativo en si y solo si y existe un tal que  Para todo . |

**Ejemplo 2.** Observa la función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG40 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene un máximo relativo y un mínimo relativo . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC100 |
| **Título** | Funciones crecientes y decrecientes; máximos y mínimos |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se identifican las funciones crecientes, decrecientes, así como sus máximos y mínimos a partir de su representación gráfica. |

[SECCIÓN 3] **2.4.1 Concavidad**

La concavidad es una característica de las funciones, que proporciona información acerca de la forma de la curva la gráfica de una función. En este sentido, la gráfica de una función puede ser convexa o cóncava, como se muestra a continuación:

En el plano cartesiano la **convexidad** de una función se identifica porque al tomar dos puntos de la gráfica, el segmento que los une está por encima de la curva de la función. Una función convexa se denomina también cóncava hacia arriba, como se muestra en los siguientes ejemplos

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG41 |
| **Descripción** | Grafica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es cóncava hacia arriba, porque el segmento que une dos puntos de la gráfica está por encima de la función. |

**Ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG42 |
| **Descripción** | Grafica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es convexa o cóncava hacia arriba, porque el segmento que une dos puntos de la gráfica está por encima de la curva de la función. |

En el plano cartesiano, la **concavidad** de una función se identifica porque al tomar dos puntos de la gráfica el segmento que los une está por debajo de la gráfica. Una función cóncava se denomina también cóncava hacia abajo.

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG43 |
| **Descripción** | Grafica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es cóncava, debido a que el segmento que une dos puntos cualesquiera de la función está por debajo de la gráfica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG44 |
| **Descripción** | Representación gráfica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es cóncava hacia abajo, debido a que el segmento que une dos puntos cualesquiera de la función está por debajo de la gráfica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC110 |
| **Título** | La importancia de la concavidad |
| **Descripción** | Interactivo en el que se expresa la relación entre la concavidad y el comportamiento de la variación en la función. |

[SECCIÓN 2] **2.5 Consolidación**

Estas actividades te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC120 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Comportamiento de la variación de la función desde su representación gráfica |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica procesos para identificar la concavidad de una función y el comportamiento en la variación que estas propiedades determinan. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC130 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Propiedades de las funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se relacionan las propiedades de las funciones con su representación gráfica |

[SECCIÓN 1] **3 Clasificación de las funciones de números reales**

Las funciones de números reales que tienen una expresión analítica se clasifican en dos tipos de funciones: las algebraicas y ~~las~~ trascendentes.

[SECCIÓN 2] **3.1 Funciones algebraicas**

**Las funciones algebraicas** son todas aquellas cuya expresión analítica se construye usando suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponentes racionales, y radicales de índice natural, por ejemplo:

, , , ,

Las funciones algebraicas más usuales son: las funciones potencia, las funciones polinómicas, las funciones racionales y las funciones radicales.

[SECCIÓN 3] **3.1.1 Funciones potencia**

Una función potencia se define como

:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funciones potencia** |
| **Contenido** | Una función de la forma con se denomina una función potencia. |

El dominio de una función potencia es el conjunto de los números reales, las otras características ~~de la funció~~n dependen de si es un número natural par o impar.

**Funciones potencia de la forma con un número natural par**

La grafica de las funciones potencia con el exponente n par son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG45 |
| **Descripción** | Potencias pares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones potencia con exponente *n* un número natural par. |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| La función es par o impar: | Par |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo: |  |
| Valores en que alcanza el mínimo: |  |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |
| Intervalo donde la función es creciente: |  |
| Concavidad: | Cóncava hacia arriba |

**Funciones potencia de la forma con un número natural impar**

La grafica de las funciones potencia con ~~su~~ exponente n impar son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG46 |
| **Potencia** | Potencias impares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de funciones potencia con el exponente *n* un número natural impar. |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| La función es par o impar: | Impar |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: | No aplica |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |
| Concavidad: | Cóncava hacia arriba en el intervalo .  Cóncava hacia abajo en el intervalo |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC140 |
| **Título** | Análisis de la representación gráfica de la función potencia |
| **Descripción** | Interactivo en el que se la función potencia a partir de distintos intervalos en su representación gráfica |

[SECCIÓN 3]**3.1.2 Funciones polinómicas**

Una función polinómica se define como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función polinómica** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con y se denomina una función polinómicas. |

El dominio de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales, las demás propiedades y características ~~de las funciones polinómicas~~ depende del grado de la misma.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El grado de una función es la mayor potencia de la expresión algebraica ~~de una función polinómica~~. |

Por ejemplo,

La función tiene grado 1 puesto que el mayor exponente de *x* es 1

La función tiene grado 3, puesto que el mayor exponente de la función es 3.

Las funciones polinómicas que se pueden caracterizar completamente son la función , la funciones de grado cero o funciones constantes, las funciones de grado uno que se clasifican en lineales y afines y las de grado dos que son las funciones cuadráticas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función constante** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con se denomina función constante. |

La grafica de las funciones constantes siempre son rectas horizontales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG47 |
| **Descripción** | Función constante |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función constante |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| La función es par o impar: | Par |
| Máximo: |  |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |
| Mínimo |  |
| Valores en que alcanza el mínimo: |  |
| Intervalos donde la función es decreciente: |  |
| Intervalos donde la función es creciente: |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función lineal** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con se denomina función lineal. |

La representación gráfica de las funciones lineales son líneas rectas con inclinación que pasan por el origen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG48 |
| **Descripción** | Grafica de varias funciones lineales en el mismo plano cartesiano, en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión algebraica que las define. Como en la imagen 47, se sugiere graficar f(x)=x, f(x)=-x, f(x)=2x, f(x)=-2x, f(x)=3x, f(x)=-3x |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Por diseñar |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones lineales |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| La función es par o impar: | Ninguna |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: | No aplica |
| Intervalo donde la función es decreciente: | si y solo si, |
| Intervalo donde la función es decreciente: | si y solo si, |

La función lineal es creciente o decreciente según el coeficiente que acompaña la variable, es decir , si es positivo la función es creciente si es negativo la función es decreciente, en cualquiera de los dos casos es una función monótona.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función afín** |
| **Contenido** | Una función de la forma  Con se denomina función afín. |

La gráfica de una función afín es una línea recta con inclinación que no pasa por el origen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG49 |
| **Potencia** | Grafica de varias funciones afines en el mismo plano cartesiano, en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión algebraica que las define. Como en la imagen 47, se sugiere graficar f(x)=x+1, f(x)=-x+1, f(x)=2x+1, f(x)=-2x+1, f(x)=3x-1, f(x)=-3x-2 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones afines |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | Si |
| Sobreyectiva | Si |
| La función es par o impar | Ninguna |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo | No aplica |
| Intervalo donde la función es decreciente | si y solo si, |
| Intervalo donde la función es decreciente | si y solo si, |

De manera similar a las funciones lineales, una función afín es creciente o decreciente según el coeficiente que acompaña la variable, es decir, si es positivo la función es creciente, si es negativo la función es decreciente, en cualquiera de los dos casos es una función monótona.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función cuadrática** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con y se denomina función cuadratica. |

La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG50 |
| **Potencia** | Representación gráfica de varias funciones cuadráticas en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión algebraica que las define, por ejemplo f(x)=x2, f(x)=1-x2, f(x)=x2-x+2, f(x)=-x2+2x-1 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones cuadráticas |

Algunas de las características principales de la función cuadrática son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| Par | Si y solo si |
| Impar | No |

Otras de sus características principales cambian según el signo del coeficiente que acompaña la variable al cuadrado, es decir ,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Características |  |  |
| Rango: |  |  |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |  |
| Intervalo donde la función es creciente: |  |  |
| Máximo: | No tiene |  |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |  |
| Mínimo |  | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: |  | No aplica |
| Cóncava hacia arriba: |  | No presenta este comportamiento |
| Cóncava hacia abajo: | No presenta este comportamiento |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC150 |
| **Título** | Representación gráfica de funciones polinómicas |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia las formas generales de las gráficas de funciones polinómicas. |

[SECCIÓN 3] **3.1.3 Funciones racionales**

Una función es racional cuando el numerador y el denominador de la fracción que la conforman son polinomios algebraicos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional** |
| **Contenido** | Una función de la forma  Con y . *~~f(x)~~* ~~se denomina una función racional.~~ |

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales excepto los valores de *x* para los cuales denominador es cero.

**Ejemplo 1.** Considere la función

.

Para determinar el dominio de la función se iguala a cero el denominador y se halla el conjunto solución:

Se retira del conjunto de los números reales las soluciones anteriores, De esta forma:

**Ejemplo 2.** Considere la función

Para calcular el dominio se iguala a cero la expresión del denominador y se determina el conjunto solución:

Esta expresión nunca es cero por lo tanto .

**Ejemplo 3.** Considere la función

.

Para determinar el dominio de la función se iguala a cero el denominador y se halla el conjunto solución:

De donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional impropia** |
| **Contenido** | Una función racional es **impropia** si y solo si el grado del polinomio en el numerador es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador. |

Son ejemplos de funciones racionales impropias

y

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional propia** |
| **Contenido** | Una función racional es **propia** si y solo si el grado del polinomio en el numerador es menor que el grado del polinomio del denominador. |

Son ejemplos de funciones racionales propias

, y .

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asíntotas verticales de una función racional** |
| **Contenido** | Una función racional de la forma  ,  tiene una asíntota vertical en , con , ~~y y~~  ~~funciones polinómicas de números reales,~~ si y . |

En el plano cartesiano se puede observar que una función tiene asíntota en si la función toma valores muy grandes (en valor absoluto) a la derecha o izquierda de la recta.

**Ejemplo 1.** Considere la función:

.

es una asíntota vertical, ya que y .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG51 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la función presenta una asíntota vertical en |

Ejemplo 2. Considere la función:

es una asíntota vertical, ya que y

es una asíntota vertical, ya que y

**no** es una asíntota vertical, ya que y

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG52 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica ~~de la función~~ tiene asíntotas en y pero no en |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asíntotas horizontales de una función racional** |
| **Contenido** | Una función racional  con , *m, n*   * Tiene una asíntota horizontal si * Tiene una asíntota horizontal si * No tiene asíntota horizontal si |

En el plano cartesiano, se puede observar que una función tiene una asíntota horizontal cuando se evalúa la función en valores muy grandes (en valor absoluto), las imágenes se aproximan a .

**Ejemplo 1.** Considere la función:

Como son de igual grado tienen una asíntota horizontal .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG53 |
| **Descripción** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función con asíntota en |

**Ejemplo 2.** Considere la función:

Como el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, la función *g(x)* tiene una asíntota horizontal en

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG54 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función con asíntota en |

**Ejemplo 3.** Considere la función:

Como el grado del denominador es menor que el del numerador, *h(x)* es una función racional impropia, por lo tanto no tiene ~~una~~ asíntota horizontal.

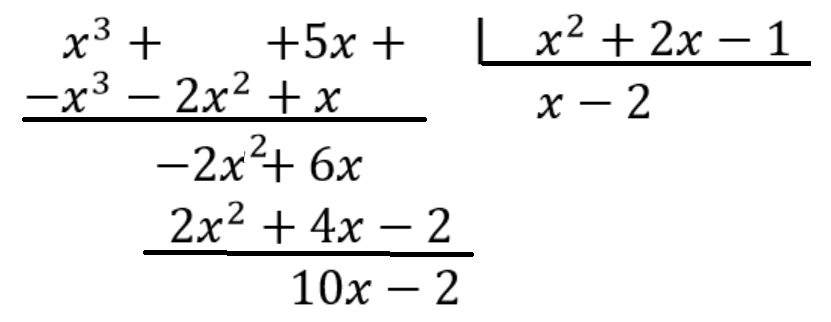
|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG55 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función , no tiene asíntotas horizontales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asíntotas oblicuas de una función racional** |
| **Contenido** | Una función racional  con y tiene una asintota horizontal , donde *mx+b* es el cociente de la división entre el numerador y el denominador de la fracción algebraica. |

En el plano cartesiano se puede observar que una función tiene una asíntota horizontal si la cuando se evalúa la función en valores muy grandes (en valor absoluto), las imágenes se acercan a la recta.

**Ejemplo 1.** Considere la función:

Dividiendo los polinomios [[VER](http://quiz.uprm.edu/tutorial_es/division_polinomios/Dpolinomios_home.html)], se tiene que:

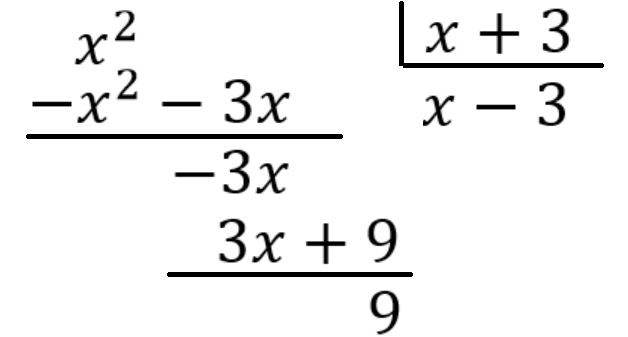


Por lo tanto, es una asíntota oblicua.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG56 |
| **Potencia** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la función *f(x)* tiene asíntota oblicua |

**Ejemplo 2.** Considere la función:

Dividiendo los polinomios se tiene que:



por lo tanto es una asíntota oblicua de *g(x)*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG57 |
| **Potencia** | Racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica presenta la asíntota oblicua de la función |

Como se observa, las gráficas de las funciones racionales pueden tomar diferentes formas por lo que no se establecen sus propiedades de forma general.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC160 |
| **Título** | Asíntotas de funciones racionales |
| **Descripción** | Actividad en el que se practica como se identifican las diferentes asíntotas de una función racional. |

[SECCIÓN 3] **3.1.3 Funciones radicales**

Las funciones radicales son aquellas que contienen raíces en su expresión algebraica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función radical** |
| **Contenido** | Una función de la forma  ,  con y , se denomina ~~una~~ **función radical**. |

De manera similar a las funciones potencia, el comportamiento y las características de las funciones radicales dependen de si es par o impar.

**Funciones radicales de la forma con un número natural par**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG58 |
| **Potencia** | Radicales pares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de las funciones radicales con índice par. |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | No |
| La función es par o impar: | Ninguna |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | - |
| Mínimo |  |
| Valores en que alcanza el mínimo: |  |
| Intervalo donde la función es creciente: |  |
| Intervalo donde la función es decreciente: |  |
| Concavidad: | Cóncava hacia abajo en su dominio |

**Funciones radicales de la forma con un número natural impar**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG59 |
| **Potencia** | Radicales impares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de las funciones radicales con índice impar. |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | Si |
| La función es par o impar | Impar |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: | No aplica |
| Intervalo donde la función es creciente: |  |
| Intervalo donde la función es creciente: |  |
| Concavidad: | Cóncava hacia abajo  Cóncava haca abajo |

[SECCIÓN 2] **3.2 Funciones trascendentes**

Las funciones de números reales que no son algebraicas, se consideran funciones trascendentes, dentro de ellas se encuentran algunas que tienen expresión analítica y otras que no. A continuación se estudian tres tipos de funciones trascendentes: trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

[SECCIÓN 3] **3.2.1 Funciones trigonométricas**

Las funciones trigonométricas, surgen al ampliar el concepto de razón trigonométrica, para poder trabajar con cualquier valor para el ángulo y no solo con que se encuentran entre y radianes. Las seis funciones trigonométricas son: Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Cosecante y Secante. A continuación se presentan sus graficas y propiedades.

Las funciones trigonométricas relacionan un ángulo con un número real que se obtiene de establecer una razón entre los lados de un triángulo rectángulo.

**La función seno**

La función seno se construye a partir del círculo trigonométrico [[VER](http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/4/Medusa/GCMWEB/Docsup/Recursos/42810459F%5CFuncionSeno.zip_desc%5CFuncionSeno/index.html)], su representación gráfica se presenta a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG60 |
| **Descripción** | La función seno |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | En el eje x desde  hasta |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

Sus principales propiedades son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| La función es par o impar | Impar |
| Máximo: |  |
| Mínimo |  |

En la representación gráfica de la función seno se presentan intervalos tanto de crecimiento como de decrecimiento e intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, pero como esta función es periódica entonces este comportamiento se repite una y otra vez, por lo tanto la función seno presenta las siguientes características:

|  |  |
| --- | --- |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |
| Valores en que alcanza el mínimo: |  |
| Intervalos donde la función es creciente: |  |
| Intervalos donde la función es decreciente: |  |
| Concavidad: | La función es cóncava hacia abajo en:  La función es cóncava hacia arriba en: |

**La función coseno**

La función Coseno se construye a partir del círculo trigonométrico [[VER](http://www.antioquiadigital.edu.co/Demostraciones-interactivas-de-Geogebra/construccion-de-la-grafica-de-la-funcion-coseno.html)], a continuación se presenta la representación gráfica de la función coseno:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG61 |
| **Descripción** | La función y sus puntos relevantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | FALTA LA GRÁFICA |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

Sus principales propiedades son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | No |
| La función es par o impar | Par |
| Máximo: |  |
| Mínimo |  |

De forma similar a la función Seno, se observa que la representación gráfica de la función coseno posee intervalos tanto de crecimiento como de decrecimiento e intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, pero como esta función es periódica entonces este comportamiento se repite una y otra vez, por lo tanto la función coseno tiene las siguientes características:

|  |  |
| --- | --- |
| Valores en que alcanza el máximo: |  |
| Valores en que alcanza el mínimo: |  |
| Intervalos donde la función es creciente: |  |
| Intervalos donde la función es decreciente: |  |
| Concavidad: | Cóncava hacia arriba en:  Cóncava hacia abajo en: |

**La función tangente**

La función tangente se puede construir a partir de la identidad , por esta razón es necesario retirar del dominio todos los valores donde , en esos mismos valores , luego de manera similar a lo que sucede con las funciones racionales en esos valores se presenta una asíntota vertical.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG62 |
| **Descripción** | La función tangente y sus puntos relevantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | FALTA LA GRÁFICA |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

Sus principales propiedades son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | No |
| Sobreyectiva: | Si |
| La función es par o impar: | Impar |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: | No aplica |
| Intervalos donde la función es creciente: |  |
| Asíntotas Verticales: |  |

En la ~~representación~~ gráfica de la función tangente se observa que en medio de dos de sus asíntotas verticales la función cambia de concavidad hacia abajo, a concavidad hacia arriba, y por ser periódica este comportamiento se presenta una y otra vez, de esta forma:

|  |  |
| --- | --- |
| Concava hacia arriba en |  |
| Concava hacia abajo en |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC170 |
| **Título** | Características y propiedades de las funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad que permite interpretar las gráficas de algunas funciones trigonométricas e identificar sus características y propiedades. |

[SECCIÓN 3] **3.1.3 Funciones exponenciales**

Una función exponencial es una función en la que la variable se encuentra en el exponente, de una manera más precisa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función exponencial** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con , se denomina una **función exponencial.** |

Se observa que debe ser positivo ya que cuando es negativo, calcular el dominio o realizar un bosquejo de la representación gráfica de la función es una tarea que no es posible resolver de forma práctica.

Las funciones exponenciales tienen como dominio el conjunto de los números reales y como rango el conjunto los reales positivos, son funciones inyectivas. Sus otras características dependen del valor de , se consideran dos casos, cuando o cuando , el caso de no se considera porque sería la función constante.

**Función exponencial de la forma con**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG63 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones exponenciales de la forma , con *0<a<1.* |

Las características principales están dadas por:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | No |
| La función es par o impar: | Ninguna |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: | No aplica |
| Intervalos donde la función es decreciente: |  |
| Intervalos donde la función es creciente: |  |
| Concavidad: | Cóncava hacia arriba en todo su dominio. |

**Función exponencial de la forma con**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG64 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones exponenciales de la forma , con *a>1* |

Las características principales están dadas por:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio: |  |
| Rango: |  |
| Inyectiva: | Si |
| Sobreyectiva: | No |
| La función es par o impar: | Ninguna |
| Máximo: | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo: | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo: | No aplica |
| Intervalos donde la función es decreciente: |  |
| Intervalos donde la función es creciente: |  |
| Cóncava hacia arriba: | En su dominio |

[SECCIÓN 2] **3.3. Funciones a trozos**

Una **función está definida a trozos o por partes** si el dominio se divide en dos o más subconjuntos disjuntos (la intersección entre los subconjuntos es vacía) que se denominan trozos y cada uno de ellos tiene una expresión o regla de correspondencia que permite relacionar los elementos del dominio con su imagen.

**Ejemplo 1.** Una función de dominio definida en tres trozos, presenta las siguientes reglas de correspondencia:

* **Primer trozo:** Si el elemento del dominio está en el , las imágenes se determinan mediante la expresión .
* **Segundo trozo:** si el elemento del dominio está en el intervalo , las imágenes están determinadas por la expresión .
* **Tercer trozo:** Si el elemento del dominio pertenece al intervalo las imágenes están determinadas por la expresión .

La expresión algebraica que representa esta función es:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG65 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

**Ejemplo 2.** La función con dominio real dada por:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG66 |
| **Descripción** | La función a trozos, modificarla para que se note el hueco que se dan el segmento cuando |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función a trozos *g(x)* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Es necesario que los trozos en los que está definida la función sean disjuntos, porque de lo contrario se pierde la condición de función |

**Ejemplo 3.** La expresión

De la expresión anterior se puede observar que en el primer trozo *r(0)=3*, mientras que en el segundo trozo se tiene que: *r(0)=(0)2+2=2*, por lo tanto cero tiene dos imágenes, a partir de esto, se deduce que la relación *r(x)* **no** es una función puesto que a algunos elementos del dominio le corresponden más de un elemento del codominio, como es el caso de cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG67 |
| **Descripción** | Realizar la gráfica de la expresión dada  y mostrar con una recta vertical entre -1 y 1 que la gráfica es cortada en dos puntos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | PRESENTAR LA GRÁFICAS AQUÍ |
| **Pie de imagen** | La prueba de la recta vertical permite comprobar que la relación *r(x)* no es una función. |

Las funciones a trozos más estudiadas son la función valor absoluto y la función parte entera.

[SECCIÓN 3] **3.3.1 Función valor absoluto**

La función valor absoluto es una función definida en dos trozos: los reales negativos y los no negativos, como se sigue:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG68 |
| **Descripción** | Gráfica del valor absoluto de x |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | FALTA LA GRÁFICA |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

Las características del valor absoluto son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | No |
| Sobreyectiva | No |
| La función es par o impar | Par |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | *y* = |
| Valores en que alcanza el mínimo |  |
| Intervalos donde la función es decreciente |  |
| Intervalos donde la función es creciente |  |

[SECCIÓN 3] **3.3.2 Función parte entera**

La función parte entera es una función definida en infinitos trozos de la forma con .

La función parte entera que se representa comotambién se puede definir como la función que hace corresponder a cada número real, el mayor número entero que es menor o igual al número real dado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG69 |
| **Descripción** | La función parte entera |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | FALTA LA GRÁFICA |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función |

Las características de la función parte entera son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | No |
| Sobreyectiva | No |
| La función es par o impar | Ninguna |
| Máximo | No |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | No |
| Valores en que alcanza el mínimo | No aplica |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC180 |
| **Título** | Las transformaciones de funciones |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudian cómo obtener graficas de funciones de ciertas funciones a partir de otras. |

[SECCIÓN 2] **3.4 Consolidación**

Estas actividades te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC190 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Clasificación de funciones de números reales |
| **Descripción** | Actividad en que se práctica lo aprendido sobre las funciones usuales de números reales. |

[SECCIÓN 1] **4 Operaciones con funciones**

Las funciones poseen una estructura aditiva y multiplicativa que permiten operarlas entre sí para obtener otras funciones.

[SECCIÓN 2] **4.2 Suma, diferencia, producto y cocientes de funciones**

A continuación se define la adición de funciones, la diferencia de funciones, el producto por un escalar, el producto y el cociente de funciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Operaciones con funciones** |
| **Contenido** | Dadas y dos funciones de ~~los~~ números reales y un número real, se definen las siguientes operaciones entre funciones:   * para todo * para todo * para todo * para todo     para todo |

Como se muestra en el destacado anterior, para que las operaciones entre las funciones *f* y *g*, tengan sentido, es necesario que *x* sea un elemento tanto en el dominio de *f* como en el dominio de *g*.

**Ejemplo 1.** Considere las funciones y . ~~entonces~~

Los dominios de *f* y *g* son: y

* Determinar

,

donde,

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG70 |
| **Descripción** | Graficas de y en distintos colores y con etiquetas de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de las funciones *f(x)*, *g(x)* y la suma de funciones *(f + g)(x)* |

* Determinar

donde,

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG71 |
| **Descripción** | Graficas de , con distintos colores y etiquetas de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de las funciones *f(x)*, *g(x)* y la diferencia de funciones *(f - g)(x)* |

* Determinar

donde,

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG72 |
| **Descripción** | Graficas de y con distintos colores y etiqueta de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de las funciones *f(x)*, *g(x)* y el producto de funciones *(fg)(x)* |

* Determinar

donde,

como la ecuación no tiene solución en el conjunto de los reales, entonces:

Cuando se opera con funciones, el dominio de la función resultante no solo está dado por la expresión que se obtiene, también es necesario tener en cuenta los dominios de las funciones que se operan, en el ejemplo anterior la expresión resultante fue que no se indetermina en , pero 3 no hace parte del dominio, ya que no está en el domino de .

* Determinar

donde,

como la ecuación tienen solución en el conjunto entonces:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG73 |
| **Descripción** | Graficas de y, , con distintos colores y etiquetas de cual es cada una, en el caso de que se resalte el hueco que se presenta en |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cociente de funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Algebra de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica las operaciones con funciones. |

[SECCIÓN 2] **4.2 Composición de funciones**

Dadas dos funciones *f* y *g,* se define una función que llamada  **compuesta**  que se representa como (, a la función que asigna a cada elemento del dominio de *f* un elemento del conjunto de llegada de *g*, de tal forma que a los elementos del conjunto de salida de *f*  les aplica la función *f* y luego a las imágenes de *f* les aplica la función *g*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG74 |
| **Descripción** | Diagrama que muestra la Composición de funciones |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://iesaricel.org/rafanogal/funciones/funciones-archivos/composicion.gif> |
| **Pie de imagen** | Diagrama Sagital de la composición de funciones |

De esta forma, para poder establecer la composición , el rango de *f* debe ser igual al dominio de *g.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Composición de funciones** |
| **Contenido** | Dadas y dos funciones de los números reales se define la **composición de funciones** como:  para todo |

En este sentido, para hallar el dominio de se debe tomar el dominio de y eliminar de este conjunto los valores que estén restringidos en la expresión que resulta al evaluar en .

**Ejemplo 1.** Si se consideran las funciones y

* Determinar

~~Así, el~~ y como la expresión resultante no tiene restricciones luego .

* Determinar

Asimismo, el y como la expresión resultante no tiene restricciones luego .

De acuerdo con el ejemplo anterior, la composición de funciones **no es conmutativa**.

**Ejemplo 2.** Si se consideran las funciones y

* Determinar

De esta forma, el y como la expresión resultante tiene como restricción que , entonces .

De manera similar a las operaciones de números reales, la composición de funciones cumple las siguientes propiedades:

* **Propiedad asociativa de la composición de funciones:** Dadas las funciones de números reales *f, g y h*; se cumple que

**Ejemplo 1.** Considere las funciones , y .

Comprobar que

Al calcular se obtiene:

luego,

Al calcular

* **Propiedad del elemento neutro de la composición de funciones:** El elemento neutro de la composición de funciones es la función identidad

De esta forma, se cumple que , para toda *f* función de números reales.

**Ejemplo 1.** Dado , si se tiene que:

Luego .

[SECCIÓN 3] **4.2.1 Funciones inversas**

Como se mencionó anteriormente, la composición de funciones cumple ~~con~~ la propiedad asociativa, propiedad del elemento neutro y no cumple con la propiedad conmutativa. A continuación se define la función inversa de la composición de funciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inversa** |
| **Contenido** | Dada una función de números reales, se dice que  **es la función inversa de**  si el y además    para todo y  para todo . En este caso se denota a como . |

No todas las funciones de número reales tienen una función inversa, para ellos se necesita que la función sea inyectiva:

Ejemplo 1. Si entonces .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC210 |
| **Título** | Composición de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica como se componen funciones. |

[SECCIÓN 2]**4.4 Consolidación**

Estas actividades te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC220 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Inversas de las funciones exponenciales y trigonométricas |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudian las funciones logarítmicas y las inversas de las funciones trigonométricas. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC230 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Operaciones con funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica las operaciones con funciones. |

[SECCIÓN 1] **5 Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC240 |
| **Título** | Competencias: Análisis de funciones de números reales |
| **Descripción** | Actividad en la que se propone analizar varias de las propiedades de una función de números reales. |

[SECCIÓN 1] **Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC250 |
| **Título** | Evalúa tus conocimientos sobre funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se evalúa los conceptos que hemos trabajado en este tema. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC260 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Relaciona los contenidos del tema |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC270 | |
| **Web 01** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 02** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 03** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
|  | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 04** |  | <http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/coordenadascartesianas/sec/MATE30_imprimible_alumnado.pdf> |
|  |  | http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/mate/Matematicas\_VI/Applets\_Geogebra/operacionesconfunciones.html |
| **Web 05** |  | [*http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf*](http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf) |
|  |  | <http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/servicio_docente/maria_victoria/rectas.pdf> |
|  |  |  |