|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Funciones |
| Código del guion | MA\_11\_02\_CO |
| Descripción | Las funciones desempeñan un papel fundamental en la construcción del pensamiento matemático, puesto que tienen múltiples aplicaciones en modelar situaciones de variación, tanto en contextos cotidianos como de aplicación en diversas ciencias. Aquí se estudia el concepto de función, su clasificación, propiedades y operaciones. |

[SECCIÓN 1] **1 Relaciones y funciones**

El concepto de **función** es uno de los más importantes en matemáticas. Las funciones expresan una relación de **dependencia** entre dos magnitudes. Por ejemplo, cuando se lanza un balón al aire, la altura a la que se encuentra depende del tiempo transcurrido desde su lanzamiento; el área de un círculo depende de su radio y el costo de enviar un paquete depende de su peso. La representación de estas y otras situaciones de dependencia, así como el análisis de la variación de una magnitud respecto a otra, se constituye en el centro de estudio de la función, por lo que las funciones son herramientas claves en la modelación de distintos fenómenos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG01 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Collage |
| **Pie de imagen** | Algunas aplicaciones de la función |

El estudio de las funciones empieza con un concepto más general: las relaciones.

[SECCIÓN 2] **1.1 Concepto de relación**

Una relación entre dos conjuntos es una correspondencia entre algunos elementos del primer conjunto y uno o más elementos del segundo conjunto. Por ejemplo, si es el conjunto de todas las poblaciones y ciudades de Colombia y es el conjunto de todos los departamentos de Colombia, se puede establecer la relación “…está ubicada en el departamento de…”. En este caso se tienen correspondencias como:

Bogotá “está ubicada en el departamento de” Cundinamarca.

Melgar “está ubicada en el departamento de” Tolima.

Girardot “está ubicada en el departamento de” Cundinamarca.

Girón “está ubicada en el departamento de” Santander.

Ipiales “está ubicada en el departamento de” Nariño.

Por supuesto, los anteriores son solo algunos ejemplos de todas las correspondencias existentes, ya que a cada una de las 1118 ciudades o poblaciones de Colombia le corresponde uno de los 32 departamentos.

Esta no es la única relación que se puede establecer entre estos dos conjuntos. Otra relación, que aunque pudiera parecer extraña, establece correspondencias entre los elementos de los dos conjuntos es “…tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de…”. Por ejemplo:

Bogotá “tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de” Bolívar

Bogotá “tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de” Boyacá

Arauca “tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de” Atlántico

Arauca “tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de” Amazonas

Arauca “tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de” Arauca

Arauca “tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de” Antioquia

Melgar “tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de” Meta

Melgar “tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de” Magdalena

Manizales “tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de” Meta

Manizales “tiene su primera letra igual a la primera letra del departamento de” Magdalena

Nuevamente, estos son tan solo algunos de los ejemplos de las correspondencias existentes. Observemos que, a diferencia del caso anterior, en esta relación hay ciudades a las que les corresponde más de un departamento, como Arauca, mientras que otras ciudades o municipios, como Duitama, Ibagué, Espinal u Ocaña, no están relacionadas con ningún departamento de Colombia.

Una relación entre conjuntos A y B está determinada por parejas formadas por elementos de con elementos de . Por ejemplo, si la lista completa de las correspondencias que se presentan es:

Leticia “…” Amazonas, Medellín “…” Antioquia, Arauca “…” Arauca,

Barranquilla “…” Atlántico, Cartagena “…” Bolívar, Tunja “…” Boyacá,

Manizales “…” Caldas, Florencia “…” Caquetá, Yopal “…” Casanare;

Popayán “…” Cauca, Valledupar “…” Cesar; Quibdó “…” Chocó, Montería “…” Córdoba, Bogotá “…” Cundinamarca, Inírida “…” Guainía; Riohacha “…” Guajira, San José del Guaviare “…” Guaviare, Neiva “…” Huila, Santa Marta “…” Magdalena,

Villavicencio “…” Meta, Pasto “…” Nariño; Norte de Santander “…” Cúcuta,

Mocoa “…” Putumayo, Armenia “…” Quindío, Pereira “…” Risaralda,

San Andrés “…”Archipiélago de San Andrés, Providencia y Santa Catalina, Bucaramanga “…” Santander; Sincelejo “…” Sucre, Ibagué “…” Tolima, Valle del Cauca “…” Cali, Mitú “…”Vaupés,

Puerto Carreño “…” Vichada,

se puede afirmar que la relación es: “es capital de”.

En matemáticas, una relación entre dos conjuntos se define como un conjunto de parejas que pertenecen al **producto cartesiano** de los conjuntos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dados dos conjuntos y su **producto cartesiano** se define como:  ,  es decir, el producto cartesiano de dos conjuntos es el conjunto de todas las **parejas ordenadas** tales que el primer elemento de la pareja (primera componente) pertenece al conjunto y el segundo elemento de la pareja (segunda componente) pertenece al conjunto . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de relación** |
| **Contenido** | Una relación *R* entre dos conjuntos y es un subconjunto de su producto cartesiano, es decir, si entonces es una relación entre el conjunto y . El conjunto se llama **conjunto de salida** y el conjunto se denomina **conjunto de llegada** de la relación *R*. |

**Ejemplo 1.** Si y , se tiene que:

.

Algunas relaciones entre *A* y *B* o de *A* en *B* son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG02 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R1. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagrama sagital de la relación . Cada flecha indica una correspondencia entre un elemento de *A* y un elemento de *B*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG03 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir *R2* de forma similar a la IMG01. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagrama sagital de la relación . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG04 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R3 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagrama sagital de la relación . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG05 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R4. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagramas sagitales de la relación . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG06 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir R5. Similar a la IMG02 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación por diagrama sagital de la relación . |

El conjunto no es una relación entre el conjunto y , ya que ∉B y por lo tanto S no es un subconjunto de *A×B*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG07 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de la relación, escribir A al conjunto de salida y B al conjunto de llegada, además dibujar una flecha de la letra A hacia la letra B, sobre la fecha escribir S, Similar a la IMG02 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | **no** es una relación entre A y B |

De manera similar, el conjunto no es una relación entre y , puesto que y por lo tanto

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG08 |
| **Descripción** | Nota para el diseñador: Escriba *A* sobre el conjunto de salida y *B* sobre el conjunto de llegada, dibuje una flecha de la letra *A* hacia la letra *B* y escriba *T* sobre la flecha*.* |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | no es una relación entre *A* y *B.* |

Se hace hincapié enque no se puede completar el diagrama sagital porque *m* no está en el conjunto de salida.

**Ejemplo 2.** Si , los conjuntos

son relaciones en que el conjunto A es tanto el conjunto de salida como el conjunto de llegada.

Las relaciones también se pueden definir mediante una regla o ley que permita determinar la correspondencia establecida. Esto facilita describir la relación sin necesidad de enumerar todas las parejas que la conforman o de representarla por medio de un diagrama sagital exhaustivo, cosa que resultaría muy difícil e incluso imposible en el caso de conjuntos con un número muy grande o infinito de elementos. En el ejemplo de los municipios y departamentos de Colombia habría sido inoficioso escribir las 1118 parejas que conforman la relación “… está ubicado en el departamento de…”. A continuación damos algunos ejemplos de relaciones entre conjuntos numéricos infinitos.

**Ejemplo 3.** En la relación *R*, con los números naturales como conjunto de salida y de llegada, dada por *a* está relacionado con si es divisor de ,

se tiene que

, ya que, es divisor de 2,

, ya que, es divisor de 8,

, ya que, no es divisor de 2,

, ya que, aunque es divisor de 2, .

**Ejemplo 4.** Considera la relación entre los números naturales como conjunto de salida y los números racionales como conjunto de llegada definida por

.

Se tiene que:

, ya que

, ya que

, ya que

, ya que

, ya que, aunque , .

**Ejemplo 5.** Considera la relación entre los números reales como conjunto de salida y a la vez como conjunto de llegada, dada por

.

Se tiene que:

,

,

,

.

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Dominio y rango de una relación**

Los elementos de una relación son el conjunto de salida, el conjunto de llegada, el dominio y el rango de la relación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Dominio y rango de una relación** |
| **Contenido** | Dada una relación *R* entre los conjuntos y , se define el **dominio de la relación,** , como el conjunto de todas las primeras componentes de las parejas que pertenecen a la relación, es decir, todos los elementos de que están relacionados con por lo menos con un elemento de .  El **rango de relación**, *Rang R*, es el conjunto de todas las segundas componentes de las parejas de la relación, es decir, el conjunto de todos los elementos de *B* relacionados con por lo menos un elemento del conjunto *A*. |

**En el ejemplo 1**:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG09 |
| **Descripción** | Es una recopilación de los diagramas sagitales de las IMG02 hasta IMG06 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y el conjunto de llegada |

* y
* y el
* y el
* y
* y

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos relaciones con el mismo dominio y el mismo rango, no son necesariamente iguales. |

**En el ejemplo 2:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG10 |
| **Descripción** | Diagrama Sagital de las relaciones del ejemplo 2. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida y el mismo conjunto como llegada. |

* y
* y
* y

En los ejemplos 3, 4 y 5, debido a que no se tienen enlistadas todas las parejas de la relación, para obtener los dominios es necesario acudir a las propiedades de las operaciones de los conjuntos numéricos en los que fueron establecidas las relaciones.

**En el ejemplo 3,** .

Como todo número natural es divisor de sí mismo, la pareja ordenada para todo . Luego y . Es importante destacar que cero (0) no es un número natural.

**En el ejemplo 4**, .

Si y , entonces y no está definido. Luego, . Ahora

Luego, debe ser una potencia de 2, con . Esto quiere decir que

.

Además, como

y es natural, debe ser un número entero positivo y por tanto debe ser una fracción positiva con numerador igual a 1, o sea que

**En el ejemplo 5**, .

Se despeja de la ecuación

.

Entonces,

Luego los valores de deben cumplir que , por lo tanto

Los ceros de la parte izquierda de la desigualdad son a=-1 y a=1, por lo tanto se particiona el conjunto de los números reales en los intervalos, y :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Luego , es decir que .

De forma similar, si al despejar se obtiene que de donde .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC10 |
| **Título** | Dominio y rango de relaciones |
| **Descripción** | Actividad para identificar en diferentes relaciones sus conjuntos de salida y llegada, así como sus dominios y rangos |

[SECCIÓN 3] **1.1.2 Relaciones de números reales y el plano cartesiano**

El plano cartesiano es un sistema de referencia formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical, que se cortan en un punto que se llama origen. La recta horizontal se llama eje de las abscisas o eje , y la vertical se denomina eje de las ordenadas o eje . Cualquier pareja ordenada de números reales puede ser representada por un punto del plano y todo punto del plano representa una pareja ordenada de números reales. Por lo tanto, se puede establecer una relación biunívoca entre los puntos del plano y el producto cartesiano .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG11 |
| **Descripción** | Plano cartesiano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 146258987 |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de parejas ordenadas de números reales. |

Representar gráficamente una relación en el plano cartesiano consiste en ubicar en el plano todos los puntos correspondientes a las parejas que pertenecen a la relación. El conjunto de salida quedará representado en el eje X y el de llegada, en el eje .

En los siguientes ejemplos, se ha realizado la gráfica de cada relación usando la ayuda de un *software*.

**La gráfica de la relación del Ejemplo 5.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG12 |
| **Descripción** | Gráfica de la relación del ejemplo 5. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El conjunto de los puntos correspondientes a las parejas de la relación forman una circunferencia |

En algunas ocasiones, la gráfica de la relación permite determinar el dominio y el rango. En este caso se observa que tanto el dominio como el rango de la relación es .

**Ejemplo 6.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG13 |
| **Descripción** | Gráfica de la relación del ejemplo 6. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la relación corresponde a la región sombreada, específicamente a un semiplano. La recta punteada indica que los puntos sobre ella forman parte de la región. |

Se observa que y .

**Ejemplo 7.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG14 |
| **Descripción** | Gráfica de la relación del ejemplo 7 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la relación es una parábola |

Se observa que y .

**Ejemplo 8.** La ecuación de Batman [[VER](http://gaussianos.com/la-ecuacion-del-logo-de-batman-en-mathematica/)].

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG15 |
| **Descripción** | Gráfica de la relación del ejemplo 8. [[VER](http://gaussianos.com/la-ecuacion-del-logo-de-batman-en-mathematica/)] |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la relación forma el logo de Batman |

Se observa que y .

[SECCIÓN 2] **1.2 Funciones**

Las funciones son un caso particular de las relaciones, es decir, toda función es una relación, pero no toda relación es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función** |
| **Contenido** | Una relación entre los conjuntos y es una **función** si cada elemento del dominio está relacionado con un único elemento del conjunto . |

En otras palabras, si en una relación es posible determinar al menos un elemento del dominio que esté relacionado con más de un elemento del conjunto de llegada, entonces la relación **no** es una función.

**En el ejemplo 1,**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG16 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de las relaciones del ejemplo 1. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representaciones por el diagrama sagital de las relaciones del ejemplo 1 |

* **no es función,** ya que se observa que el elemento está relacionado con dos elementos y .
* **no es función,** ya que se observa que el elemento está relacionado con dos elementos y .
* **no es función** ya que se observa que el elemento está relacionado con dos elementos y .
* **es función**.
* **es función**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La definición de función no permite relacionar ningún elemento del conjunto de salida A con más de un elemento del conjunto de llegada B, pero no impide que elementos de se relacionen con más de un elemento de . |

**En el ejemplo 2,**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG17 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de las relaciones del ejemplo 2 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representaciones por el diagrama sagital de las relaciones del ejemplo 2 |

* **no es función,** porque -1 está relacionado con dos elementos, -1 y .
* y **son funciones.**

**En el ejemplo 3,** la relación*R* **no es función,** ya que 1 es divisor de todo número, luego para todo número natural , es decir que está relacionado con infinitos números naturales.

**En el ejemplo 4,** si Esto nos dice que a cada número natural que está en el dominio de la relación le corresponde un único número racional b que está en el conjunto de llegada. Por lo tanto R es una función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Criterio de la recta vertical** |
| **Contenido** | Cuando tanto el conjunto de salida como el conjunto de llegada de una relación es el conjunto de números reales, se puede determinar si la relación es o no función a través de su representación gráfica en el plano cartesiano. La relación es función si cada recta vertical corta a la gráfica en un único punto; en caso de que alguna recta vertical corte a la gráfica en más de un punto, la relación no es función. |

**En el ejemplo 5,** la relación **no** es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG18 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 5 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 5, la recta corta a la circunferencia en más de un punto. Por lo tanto, *R* no es función |

**En el ejemplo 6**,la relación **no** es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG19 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 6. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 6, la recta corta la región sombreada en más de un punto. Por lo tanto, *R* no es función. |

**En el ejemplo 7,** la relación es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG20 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 7 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 7, ninguna recta corta a la parábola en más de un punto. Por lo tanto, *R* es función |

**En el ejemplo 8,** la relación del logotipo de Batman **no** es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG21 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 8. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la prueba de la recta vertical para la relación del ejemplo 5, la recta corta al logo de Batman en más de un punto. Por lo tanto, *R* no es función. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC20 |
| **Título** | Relaciones que son funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica el reconocimiento de las relaciones que son funciones y las que no lo son |

[SECCIÓN 3] **1.2.1 Codominio, imagen y preimagen de funciones**

Todas las funciones son relaciones. Por tanto, establecen una correspondencia entre elementos de un conjunto de salida *A* y un conjunto de llegada *B*, de modo que tienen definido un dominio y un rango. Además de estos, hay otros elementos que se deben tener en cuenta al trabajar con funciones: el **codominio**, la **imagen** y la **preimagen**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de codominio de una función** |
| **Contenido** | El conjunto de llegada de una función *f* se denomina el **codominio de la función,** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de imagen por una función** |
| **Contenido** | Como en las funciones cada elemento del dominio está relacionado con un único elemento del codominio, dado un elemento del dominio, se denomina **imagen** **de**  **por**  o precisamente a ese único elemento con el que se encuentra relacionado |

En otras palabras, la afirmación indica que el valor de **queda determinado** por el valor de .

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de preimagen por la función** |
| **Contenido** | Si es un elemento del rango de una función, se llama **preimagen de**  **por**  a todos los elementos del dominio cuya imagen sea |

A diferencia de la imagen, las preimágenes no necesariamente son únicas, como en la relación R5 del ejemplo 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG22 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de la relación *R5* |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | *a*, *b* y *c* son preimágenes de *m* por la función *R5* |

es una función con , y . Además se tiene que:

es el conjunto de las preimágenes de .

[SECCIÓN 2] **1.3 Funciones de números reales.**

En el estudio del cálculo se hace énfasis en las funciones de números reales, que se definen a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funciones de números reales** |
| **Contenido** | Las funciones con dominio y codominio en el conjunto de los números reales se denominan **funciones de números reales**. |

Por lo general, las funciones de números reales se expresan en forma gráfica o analítica. La gráfica corresponde a su representación en el plano cartesiano y la forma analítica, a la ecuación que relaciona cada uno de los elementos del dominio con sus imágenes por medio de una expresión matemática. Las siguientes expresiones son ejemplos de la forma analítica de funciones de números reales:

, , , .

Sin embargo, no siempre es posible encontrar una expresión analítica o trazar la gráfica de una función de números reales. Por ejemplo, dada la función que relaciona a cada número real con su imagen por , donde es la cantidad de cifras periódicas que tiene la expansión decimal de *x*, se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

, y

En el caso de esta función no es posible determinar una expresión analítica o construir una gráfica que la represente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC30 |
| **Título** | Dominio y rango de algunas funciones de números reales definidas mediante expresiones analíticas |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presentan los procedimientos para determinar el dominio de funciones de números reales a partir de su expresión analítica |

[SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

Estas actividades te permitirán afianzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC40 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Dominio, rango, codominio, imágenes y preimágenes de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se refuerzan los conocimientos adquiridos acerca de los conceptos de dominio, rango, codominio, imágenes y preimágenes de funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC50 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: dominio de funciones de números reales |
| **Descripción** | Actividad en la que se practican los procedimientos para determinar el dominio de funciones de números reales |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC60 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Propuesta de diagrama sagital para representar funciones de números reales |
| **Descripción** | Interactivo en el que se explora otra forma de representar gráficamente las funciones de números reales |

[SECCIÓN 1] **2 Propiedades de las funciones**

Para profundizar el estudio de las funciones, es necesario explorar ciertas características o propiedades de ellas, y que se evidencian tanto en el comportamiento de la función como en la gráfica de la misma. Algunas de estas propiedades se pueden definir para cualquier tipo de función, mientras que otras se definen únicamente para las funciones de números reales.

[SECCIÓN 2] **2.1 Funciones inyectivas o uno a uno**

Una función inyectiva o uno a uno se define de la siguiente manera:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inyectiva o uno a uno** |
| **Contenido** | Una función es **inyectiva,**  si todo elemento del rango tiene una única preimagen. En otras palabras, *f* es inyectiva  si implica que |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG23 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación de una función inyectiva por medio de un diagrama sagital |

En el diagrama sagital se observa que el , y las preimágenes para cada uno de los valores del rango son las siguientes:

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

Como cada elemento del rango tiene una sola preimagen, la **función es inyectiva.**

**Ejemplo 2,**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG24 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de una función, cambiar la f por la g |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación de una función no inyectiva por medio de diagrama sagital |

Se observa en el diagrama sagital que y que las preimágenes para cada uno de los elementos del rango son las siguientes:

La preimagen de es .

La preimagen de es .

tiene las dos preimágenes .

Como hay un elemento del rango que tiene más de una preimagen, la **función no es inyectiva.**

Para funciones de números reales, se puede determinar si la función es inyectiva trazando rectas horizontales sobre su gráfica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Criterio de la recta horizontal** |
| **Contenido** | Una función de números reales es inyectiva si y solo si ninguna recta horizontal corta su gráfica en más de un punto. |

**Ejemplo 4.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG25 |
| **Descripción** | Prueba de la recta horizontal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ninguna recta horizontal corta la gráfica en más de un punto. Luego, de acuerdo con el criterio de la recta horizontal la función es inyectiva |

**Ejemplo 5.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG26 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Hay rectas horizontales que cortan la gráfica en más de un punto. Luego, de acuerdo con el criterio de la recta horizontal, la función no es inyectiva |

[SECCIÓN 2] **2.2 Funciones sobreyectivas**

Una función es **sobreyectiva**, si su rango es igual a su codominio. En otras palabras:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función sobreyectiva** |
| **Contenido** | Una función es **sobreyectiva** si y solo si, todos los elementos de su codominio son imágenes de los elementos del dominio la función. |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG27 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación de una función sobreyectiva por medio de diagrama sagital |

En el diagrama sagital se observa que , y . Como el rango y el codominio son iguales, la función es sobreyectiva**.**

**Ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG28 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de la función g, cambiar f por g |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación de una función no sobreyectiva por medio de un diagrama sagital |

En el diagrama sagital se puede observar que y Como no es igual al codominio, se concluye que la **función no es sobreyectiva**.

**Ejemplo 3.** La función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG29 |
| **Descripción** | Función en el plano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

En la gráfica se observa que el rango es el conjunto de los números reales, de la misma forma que el codominio. Por lo tanto *f* **es una función sobreyectiva.**

[SECCIÓN 2] **2.3 Funciones biyectivas**

Una función biyectiva establece una correspondencia biunívoca entre los elementos del dominio y los elementos del codominio, de esta forma:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función Biyectiva** |
| **Contenido** | Una función es **biyectiva,** si y solosi es a la vez inyectiva y sobreyectiva |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG30 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación de una función biyectiva por medio de diagrama sagital |

Se observa que el = . Luego *f* es una función **sobreyectiva,** ahora las preimágenes para cada uno de estos valores son:

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

La preimagen de es .

Como las preimágenes son únicas, *f* **es inyectiva.**

En conclusión, *f* es sobreyectiva e inyectiva; por lo tanto, *f* **es una función biyectiva.**

**Ejemplo 2.** La función

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG31 |
| **Descripción** | Prueba de la recta horizontal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ninguna recta horizontal corta a la gráfica en más de un punto y el rango son los números reales. Por lo tanto, la función es **biyectiva** |

En la gráfica se puede observar que la función pasa la prueba de la recta horizontal, así que es inyectiva. Además, el rango de la función es el conjunto de los números reales, por lo que es sobreyectiva. Luego la función es biyectiva.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC70 |
| **Título** | La relación recíproca |
| **Descripción** | Interactivo en el que se define la relación recíproca y su relación con las propiedades inyectiva, sobreyectiva y biyectiva de las funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC80 |
| **Título** | Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas |
| **Descripción** | Actividad en la que se identifican funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas |

[SECCIÓN 2] **2.4 Propiedades de funciones de números reales**

Las características de las funciones de números reales se estudian teniendo en cuenta las propiedades y operaciones de este conjunto numérico.

[SECCIÓN 3] **2.4.1 Funciones pares**

La gráfica de una **función par** es simétrica con respecto al eje *Y* en el plano cartesiano. Esto significa que la gráfica no cambia al reflejarla por el eje *Y*. Formalmente:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función Par** |
| **Contenido** | Una función es **par** si para todo se tiene que y además |

**Ejemplo 1.** La función .

El dominio de la función son todos los números reales y para todo se tiene que:

Por tanto, es par.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG32 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica de que es una función par |

**Ejemplo 2.** La función

Esta función no es par. Por ejemplo para se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG33 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica de que la función no es una función par |

[SECCIÓN 3] **2.4.2 Funciones impares**

Una **función impar** se identifica porque su gráfica en el plano cartesiano no cambia al ser reflejada consecutivamente por los ejes *Y* y *X*. Formalmente:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función impar** |
| **Contenido** | Una función es **impar** si para todo se tiene que y además |

**Ejemplo 1.** La función .

El dominio de la función son todos los números reales, ahora si se tiene que:

Por lo tanto, es impar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG34 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica de que es una función impar |

**Ejemplo 2.** La función .

Esta no es una función impar, ya que tomando un caso particular, por ejemplo , se tiene que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG35 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica de que no es una función impar |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC90 |
| **Título** | Funciones pares e impares |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica cómo se identifican las funciones pares e impares |

[SECCIÓN 3]**2.4.3 Funciones crecientes**

La gráfica de una función creciente se identifica en el plano cartesiano porque asciende de izquierda a derecha. En forma general:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función creciente** |
| **Contenido** | Una función es creciente en un intervalo si está definida en ese intervalo y además se cumple que  si , entonces  para todo |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG36 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es creciente en todo su dominio |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función monótona creciente** |
| **Contenido** | Una función se denomina monótona creciente si es creciente en todo su dominio |

[SECCIÓN 3]**2.4.4 Funciones decrecientes**

En el plano cartesiano la gráfica de una función decreciente se identifica porque a medida que aumentan los valores del dominio, los valores del codominio disminuyen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función decreciente** |
| **Contenido** | Una función es creciente en un intervalo si está definida en ese intervalo y además se cumple que,  si , entonces  para todo |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG37 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es decreciente |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Monótona decreciente** |
| **Contenido** | Una función se denomina monótona decreciente si es decreciente en todo su dominio |

[SECCIÓN 3] **2.4.4 Máximos y mínimos relativos y absolutos**

Para una función *f* definida en los números reales, es el mínimo de la función y es el valor donde *f* alcanza ese mínimo si se cumple la siguiente definición:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Mínimo absoluto** |
| **Contenido** | Una función tiene un mínimo absoluto en si y solo si y además  para todo . |

**Ejemplo 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG38 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función alcanza un mínimo absoluto en |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Máximo absoluto** |
| **Contenido** | Una función tiene un máximo absoluto en si y solo si y además  para todo |

En este caso, es el máximo de la función y es el valor donde lo alcanza.

**Ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG39 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función alcanza un máximo absoluto en |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Mínimo relativo** |
| **Contenido** | Una función tiene un mínimo relativo en si y solo si y existe un , tal que  ,  con , para todo . |

De esta manera, es el mínimo relativo de la función y es el valor donde lo alcanza.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Máximo relativo** |
| **Contenido** | Una función tiene un máximo relativo en si y solo si y existe un , tal que  para todo |

**Ejemplo 2.** Observa la función .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG40 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función tiene un máximo relativo y un mínimo relativo |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC100 |
| **Título** | Funciones crecientes y decrecientes; máximos y mínimos |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica cómo se identifican las funciones crecientes, decrecientes, así como sus máximos y mínimos a partir de su representación gráfica |

[SECCIÓN 3] **2.4.1 Concavidad**

La **concavidad** es una característica de las funciones que proporciona información acerca de la forma de la gráfica de la función. La gráfica de una función puede ser **cóncava hacia abajo** o **cóncava hacia arriba**. Una curva es cóncava hacia arriba si cualquier segmento rectilíneo que une dos de sus puntos siempre se sitúa encima de ella; en caso contrario, si cualquier segmento rectilíneo que une dos puntos de la función siempre está por debajo de la curva, se dice que la curva es cóncava hacia abajo. Las funciones cuya gráfica es cóncava hacia abajo se denominan **funciones cóncavas**. Las funciones cuya gráfica es cóncava hacia arriba también se denominan **convexas**.

**Ejemplo 1.** .

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG41 |
| **Descripción** | Gráfica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es cóncava hacia arriba, porque el segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica está por encima de la gráfica de la función |

**Ejemplo 2.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG42 |
| **Descripción** | Gráfica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es convexa o cóncava hacia arriba, porque el segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica está por encima de la curva de la función |

En el plano cartesiano, la **concavidad** de una función se identifica porque al tomar dos puntos de la gráfica, el segmento que los une está por debajo de la gráfica. Una función cóncava se denomina también cóncava hacia abajo.

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG43 |
| **Descripción** | Gráfica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es cóncava, debido a que el segmento que une dos puntos cualesquiera de la función está por debajo de la gráfica |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG44 |
| **Descripción** | Representación gráfica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función es cóncava hacia abajo, debido a que el segmento que une dos puntos cualesquiera de la función está por debajo de la gráfica |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC110 |
| **Título** | La importancia de la concavidad |
| **Descripción** | Interactivo en el que se expresa la relación entre la concavidad y el comportamiento de la variación descrita por la función |

[SECCIÓN 2] **2.5 Consolidación**

Estas actividades te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC120 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Comportamiento de la variación de la función con base en su representación gráfica |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica cómo se identifica la concavidad de una función a partir de su gráfica y cuál es la relación entre la concavidad y el comportamiento de la variación que describe la función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC130 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Propiedades de las funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se relacionan las propiedades de las funciones con su representación gráfica |

[SECCIÓN 1] **3 Clasificación de las funciones de números reales**

Las funciones de números reales que tienen una expresión analítica se clasifican en dos tipos: algebraicas y trascendentes.

[SECCIÓN 2] **3.1 Funciones algebraicas**

**Las funciones algebraicas** son todas aquellas cuya expresión analítica se construye usando suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponentes racionales y radicales de índice natural, por ejemplo:

, , , ,

Las funciones algebraicas más usuales son: las funciones potencia, las funciones polinómicas, las funciones racionales y las funciones radicales.

[SECCIÓN 3] **3.1.1 Funciones potencia**

La definición de una función potencia es como sigue

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funciones potencia** |
| **Contenido** | Las funciones de la forma con se denominan funciones potencia |

El dominio de las funciones potencia es el conjunto de los números reales. Las otras de sus características dependen de si es un número natural par o impar.

**Funciones potencia de la forma con un número natural par**

Las gráficas de las funciones potencia con el exponente *n* par son parábolas cóncavas hacia arriba:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG45 |
| **Descripción** | Potencias pares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones potencia con exponente *n* un número natural par |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | No |
| Sobreyectiva | No |
| La función es par o impar | Par |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo |  |
| Valores en que alcanza el mínimo |  |
| Intervalo donde la función es decreciente |  |
| Intervalo donde la función es creciente |  |
| Concavidad | Cóncava hacia arriba |

**Funciones potencia de la forma con un número natural impar**

Las gráficas de las funciones potencia con exponente n impar son como las que se muestran a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG46 |
| **Potencia** | Potencias impares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de funciones potencia con el exponente *n* un número natural impar |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | Sí |
| Sobreyectiva | Sí |
| La función es par o impar | Impar |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo | No aplica |
| Intervalo donde la función es decreciente |  |
| Intervalo donde la función es creciente |  |
| Concavidad | Cóncava hacia arriba en el intervalo .  Cóncava hacia abajo en el intervalo |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC140 |
| **Título** | Análisis de la representación gráfica de la función potencia |
| **Descripción** | Interactivo en el que se analiza la función potencia en distintos intervalos de su representación gráfica |

[SECCIÓN 3]**3.1.2 Funciones polinómicas**

Una función polinómica se define como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función polinómica** |
| **Contenido** | Una función de la forma  con y se denomina función polinómica |

El dominio de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales. Las demás propiedades y características dependen del grado que tenga la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El **grado** de una función polinómica es la mayor potencia de la variable independiente que aparece en su expresión algebraica. |

**Por ejemplo:**

La función tiene grado 1 puesto que el mayor exponente de *x* es 1

La función tiene grado 3, puesto que el mayor exponente de la expresión algebraica de la función es 3.

Las funciones polinómicas que se pueden caracterizar completamente son las funciones de grado cero o funciones constantes, las funciones de grado uno, que se clasifican en lineales y afines, y las de grado dos, que son las funciones cuadráticas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función constante** |
| **Contenido** | Una función de la forma  ,  con , se denomina función constante. |

Las gráficas de las funciones constantes siempre son rectas horizontales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG47 |
| **Descripción** | Función constante |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función constante |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | No |
| Sobreyectiva | No |
| La función es par o impar | Par |
| Máximo |  |
| Valores en que alcanza el máximo |  |
| Mínimo |  |
| Valores en que alcanza el mínimo |  |
| Intervalos donde la función es decreciente |  |
| Intervalos donde la función es creciente |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función lineal** |
| **Contenido** | Una función de la forma  ,  con , se denomina función lineal. |

Las gráficas de las funciones lineales son líneas rectas con inclinación que pasan por el origen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG48 |
| **Descripción** | Gráficas de varias funciones lineales en el mismo plano cartesiano, en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión algebraica que las define. Como en la imagen 47, se sugiere graficar f(x)=x, f(x)=-x, f(x)=2x, f(x)=-2x, f(x)=3x, f(x)=-3x |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Por diseñar |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones lineales |

Las características principales de estas funciones son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | Sí |
| Sobreyectiva | Sí |
| La función es par o impar | Impar |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo | No aplica |
| Intervalo donde la función es creciente | si y solo si |
| Intervalo donde la función es decreciente | si y solo si |

La función lineal es creciente o decreciente según el signo del coeficiente que acompaña a la variable *x*. Si *a*1 es positivo, la función es creciente; si *a*1 es negativo, la función es decreciente. En cualquiera de los dos casos es una función monótona.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función afín** |
| **Contenido** | Una función de la forma  ,  con , se denomina función afín. |

La gráfica de una función afín es una línea recta con inclinación que no pasa por el origen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG49 |
| **Descripció**n | Grafica de varias funciones afines en el mismo plano cartesiano, en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión algebraica que las define. Como en la imagen 47, se sugiere graficar f(x)=x+1, f(x)=-x+1, f(x)=2x+1, f(x)=-2x+1, f(x)=3x-1, f(x)=-3x-2 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones afines |

Las características principales de las funciones afines son las siguientes:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | Si |
| Sobreyectiva | Si |
| La función es par o impar | Ninguna |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo | No aplica |
| Intervalo donde la función es creciente | si y solo si |
| Intervalo donde la función es decreciente | si y solo si |

De manera similar a las funciones lineales, una función afín es creciente o decreciente según el signo del coeficiente que acompaña a la variable *x*.

Si positivo, la función es creciente; si es negativo, la función es decreciente. En cualquiera de los dos casos, la función afín es monótona.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función cuadrática** |
| **Contenido** | Una función de la forma  ,  con y , se denomina función cuadrática. |

La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG50 |
| **Descripción** | Gráficas de funciones cuadráticas en el mismo plano cartesiano, en distintos colores y rotuladas con la expresión algebraica que las define, por ejemplo *f*(x) = x2, *f*(x) = 1 – x2, *f*(x) = x2 – *x* + 2, *f*(x) = –x2 + 2*x* – 1. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones cuadráticas |

Algunas de las características principales de la función cuadrática son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Inyectiva | No |
| Sobreyectiva | No |
| Par | Si y solo si |
| Impar | No |

Otras de sus características principales cambian según el signo del coeficiente que acompaña a la variable al cuadrado, es decir de **.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Características |  |  |
| Rango |  |  |
| Intervalo donde la función es decreciente |  |  |
| Intervalo donde la función es creciente |  |  |
| Máximo | No tiene |  |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |  |
| Mínimo |  | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo |  | No aplica |
| Cóncava hacia arriba |  | No presenta este comportamiento |
| Cóncava hacia abajo | No presenta este comportamiento |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC150 |
| **Título** | Representación gráfica de funciones polinómicas |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudian las formas generales de las gráficas de las funciones polinómicas |

[SECCIÓN 3] **3.1.3 Funciones racionales**

Una función racional es un cociente de dos polinomios algebraicos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional** |
| **Contenido** | Una función *f* es racional si tiene la forma  con y . |

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales excepto los valores de *x* para los cuales denominador es cero.

**Ejemplo 1.** Considera la función

.

Para determinar el dominio de la función, se iguala a cero el denominador y se halla el conjunto solución:

El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los valores para los cuales el denominador es cero:

.

**Ejemplo 2.** Considera la función

Para calcular el dominio se iguala a cero la expresión del denominador y se determina el conjunto solución:

Esta expresión nunca es cero para , por lo tanto .

**Ejemplo 3.** Considere la función

.

Para determinar el dominio de la función se iguala a cero el denominador y se halla el conjunto solución:

,

de donde .

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional impropia** |
| **Contenido** | Una función racional es **impropia** si y solo si el grado del polinomio en el numerador es mayor o igual al grado del polinomio del denominador. |

Son ejemplos de funciones racionales impropias

y

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional propia** |
| **Contenido** | Una función racional es **propia** si y solo si el grado del polinomio en el numerador es menor que el grado del polinomio del denominador. |

Son ejemplos de funciones racionales propias

, y .

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asíntotas verticales de una función racional** |
| **Contenido** | Una función racional de la forma  ,  donde p y q son funciones polinómicas de números reales, tiene una asíntota vertical en , con , si y . |

Las asíntotas sirven como auxiliares en el trazado de gráficas en el plano cartesiano. La asíntota vertical en *x* = *a* es una recta vertical que tiene esa misma ecuación. Tiene la particularidad de que la función toma valores muy grandes en valor absoluto a derecha o izquierda de ella. Hay gráficas con varias asíntotas verticales.

**Ejemplo 1.** Considera la función:

.

es una asíntota vertical, ya que y 9

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG51 |
| **Descripción** | Gráfica de la función racional impropia  *g(x)* |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la función presenta una asíntota vertical en |

Ejemplo 2. Considera la función:

es una asíntota vertical, ya que y

es una asíntota vertical, ya que y

**no** es una asíntota vertical, ya que y

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG52 |
| **Descripción** | Gráfica de la función racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica tiene asíntotas en y pero no en , donde no está definida la función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asíntotas horizontales de una función racional** |
| **Contenido** | Una función racional  con , *m, n*   * Tiene una asíntota horizontal si * Tiene una asíntota horizontal si * No tiene asíntota horizontal si |

La gráfica de una función racional *f* que tiene una asíntota horizontal en *y = k* tiene la particularidad de que para valores de *x* muy grandes en valor absoluto, las imágenes *f(x)* se aproximan a *k*.

**Ejemplo 1.** Considera la función:

Como los polinomios del numerador y del denominador son del mismo grado, la gráfica tiene la asíntota horizontal .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG53 |
| **Descripción** | Gráfica de la función racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función con asíntota en |

**Ejemplo 2.** Considera la función

como el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, la función *g(x)* tiene una asíntota horizontal en

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG54 |
| **Potencia** | Gráfica de la función racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función con asíntota en |

**Ejemplo 3.** Considera la función:

Como el grado del denominador es menor que el del numerador, *h(x)* es una función racional impropia, por lo tanto no tiene asíntota horizontal.

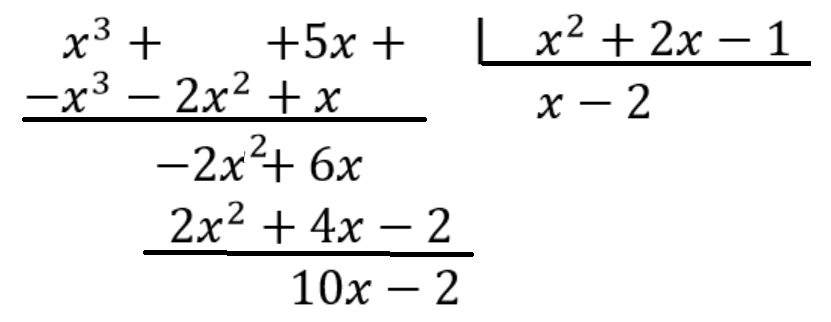
|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG55 |
| **Descripción** | Grafica de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función no tiene asíntotas horizontales |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Asíntotas oblicuas de una función racional** |
| **Contenido** | Una función racional  con y tiene una asíntota horizontal , donde *mx + b* es el cociente de la división del numerador por el denominador de la fracción algebraica |

La gráfica de una función racional *f* que tiene una asíntota oblicua tiene la particularidad de que para valores de *x* muy grandes en valor absoluto, las imágenes *f*(*x*) se aproximan a la recta.

**Ejemplo 1.** Considere la función:

Dividiendo los polinomios [[VER](http://quiz.uprm.edu/tutorial_es/division_polinomios/Dpolinomios_home.html)], se tiene que:

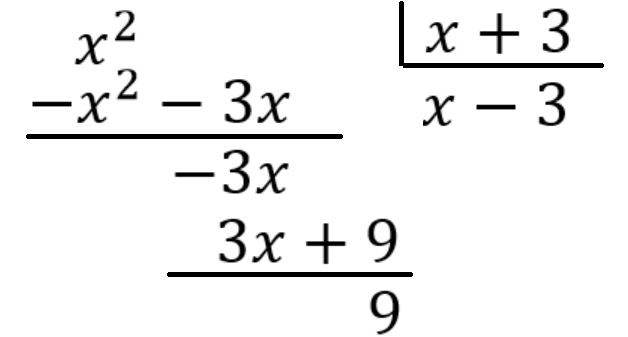


Por lo tanto, es una asíntota oblicua.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG56 |
| **Descripción** | Gráfica de la función racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la función *f(x)* tiene asíntota oblicua |

**Ejemplo 2.** Considera la función

Dividiendo los polinomios se tiene:



Por lo tanto, es una asíntota oblicua de *g(x)*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG57 |
| **Descripción** | Grafica de la función racional |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la función presenta la asíntota oblicua |

Los ejemplos anteriores revelan que las gráficas de las funciones racionales pueden tomar diversas formas. Por esa razón, no es posible establecer patrones generales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC160 |
| **Título** | Asíntotas de funciones racionales |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica cómo se identifican las diferentes asíntotas de una función racional |

[SECCIÓN 3] **3.1.3 Funciones radicales**

Las funciones radicales son aquellas que contienen raíces en su expresión algebraica. Formalmente,

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función radical** |
| **Contenido** | Una función de la forma  ,  con y , se denomina **función radical**. |

De manera similar a las funciones potencia, el comportamiento y las características de las funciones radicales dependen de si es par o impar.

**Funciones radicales de la forma con un número natural par**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG58 |
| **Descripción** | Radicales pares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Grafica de funciones radicales con índice par |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | Sí |
| Sobreyectiva | No |
| La función es par o impar | Ninguna |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | - |
| Mínimo |  |
| Valores en que alcanza el mínimo |  |
| Intervalo donde la función es creciente |  |
| Intervalo donde la función es decreciente |  |
| Concavidad | Cóncava hacia abajo en su dominio |

**Funciones radicales de la forma con un número natural impar**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG59 |
| **Descripción** | Radicales impares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de funciones radicales con índice impar. |

Las características principales son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | Sí |
| Sobreyectiva | Sí |
| La función es par o impar | Impar |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo | No aplica |
| Intervalo donde la función es decreciente |  |
| Intervalo donde la función es creciente |  |
| Concavidad | Cóncava hacia abajo:  Cóncava haca arriba |

[SECCIÓN 2] **3.2 Funciones trascendentes**

Las funciones de números reales que no son algebraicas se llaman **trascendentes**. Algunas de las funciones trascendentes tienen expresión analítica; otras carecen de ella. A continuación se estudian tres tipos de funciones trascendentes: trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

[SECCIÓN 3] **3.2.1 Funciones trigonométricas**

Las funciones trigonométricas surgen al ampliar el concepto de razón trigonométrica de modo que se pueda trabajar con cualquier valor del ángulo y no solo con los que se encuentran entre y radianes. Las seis funciones trigonométricas son: seno, coseno, tangente, cotangente, cosecante y secante. A continuación se presentan las gráficas y las propiedades de las tres primeras.

Las funciones trigonométricas relacionan un ángulo con un número real que se obtiene de establecer una razón entre los lados de un triángulo rectángulo.

**La función seno**

La función seno se construye a partir del círculo trigonométrico [[VER](http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/4/Medusa/GCMWEB/Docsup/Recursos/42810459F%5CFuncionSeno.zip_desc%5CFuncionSeno/index.html)]. Su representación gráfica se presenta a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG60 |
| **Descripción** | La función seno |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | En el eje x desde  hasta |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

Sus principales propiedades son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | No |
| Sobreyectiva | No |
| La función es par o impar | Impar |
| Máximo |  |
| Mínimo |  |

La representación gráfica de la función seno presenta intervalos tanto de crecimiento como de decrecimiento e intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo. Debido a que esta función es periódica, este comportamiento es repetitivo. Las principales características de la función seno son las siguientes:

|  |  |
| --- | --- |
| Valores en que alcanza el máximo |  |
| Valores en que alcanza el mínimo |  |
| Intervalos donde la función es creciente |  |
| Intervalos donde la función es decreciente |  |
| Concavidad | La función es cóncava hacia abajo en:  La función es cóncava hacia arriba en: |

**La función coseno**

La función coseno se construye a partir del círculo trigonométrico [[VER](http://www.antioquiadigital.edu.co/Demostraciones-interactivas-de-Geogebra/construccion-de-la-grafica-de-la-funcion-coseno.html)]. Su gráfica se presenta a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG61 |
| **Descripción** | La función y sus puntos relevantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | FALTA LA GRÁFICA |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

Sus principales propiedades son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | No |
| Sobreyectiva | No |
| La función es par o impar | Par |
| Máximo |  |
| Mínimo |  |

De forma similar a la función seno, se observa que la gráfica de la función coseno presenta intervalos tanto de crecimiento como de decrecimiento e intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo. Esta función también es periódica y, otra vez, este comportamiento es repetitivo. Las principales características de la función coseno son las siguientes:

|  |  |
| --- | --- |
| Valores en que alcanza el máximo |  |
| Valores en que alcanza el mínimo |  |
| Intervalos donde la función es creciente |  |
| Intervalos donde la función es decreciente |  |
| Concavidad | Cóncava hacia arriba en:  Cóncava hacia abajo en: |

**La función tangente**

La gráfica de la función tangente se puede construir a partir de la identidad . recuerda que se deben retirar del dominio los valores de *x* para los cuales *cos(x) = 0*. En esos valores *sen (x) ≠ 0* y, de manera similar a lo que sucede en el caso de las funciones racionales, en esos valores la gráfica presenta asíntotas verticales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG62 |
| **Descripción** | La función tangente y sus puntos relevantes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | FALTA LA GRÁFICA |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

Las principales propiedades de la función tangente son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | No |
| Sobreyectiva | Sí |
| La función es par o impar | Impar |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo | No aplica |
| Intervalos donde la función es creciente |  |
| Asíntotas verticales |  |

En la gráfica de la función tangente se observa que en medio de dos de sus asíntotas verticales la función cambia de concavidad hacia abajo a concavidad hacia arriba, y que este comportamiento se repite una y otra vez, debido a que la función es periódica

|  |  |
| --- | --- |
| Cóncava hacia arriba en |  |
| Cóncava hacia abajo en |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC170 |
| **Título** | Características y propiedades de las funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad de interpretación de las gráficas de algunas funciones trigonométricas e identificar sus características y propiedades |

[SECCIÓN 3] **3.1.3 Funciones exponenciales**

En las funciones exponenciales la variable se encuentra en el exponente. La definición precisa de función exponencial es la siguiente:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función exponencial** |
| **Contenido** | Las funciones de la forma  con , reciben el nombre de **función exponencial.** |

Se observa que debe ser positivo puesto que si *a* fuese negativo encontraríamos problemas para determinar el dominio y no sería posible trazar la gráfica en el plano cartesiano.

Las funciones exponenciales tienen como dominio el conjunto de los números reales y como rango el conjunto los reales positivos y son funciones inyectivas. Sus otras características dependen del valor de . Se consideran dos casos: cuando y cuando , si se tiene la función constante.

**Función exponencial de la forma con**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG63 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones exponenciales de la forma , con *0 < a < 1* |

Las características principales están dadas por:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | Sí |
| Sobreyectiva | No |
| La función es par o impar | Ninguna |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo | No aplica |
| Intervalos donde la función es decreciente |  |
| Intervalos donde la función es creciente |  |
| Concavidad | Cóncava hacia arriba en todo su dominio |

**Función exponencial de la forma con**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG64 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones exponenciales de la forma , con *a > 1* |

Las características principales están dadas por:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | Sí |
| Sobreyectiva | No |
| La función es par o impar | Ninguna |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | No tiene |
| Valores en que alcanza el mínimo | No aplica |
| Intervalos donde la función es decreciente |  |
| Intervalos donde la función es creciente |  |
| Cóncava hacia arriba | En todo su dominio |

[SECCIÓN 2] **3.3. Funciones a trozos**

Una **función está definida a trozos o por partes** si el dominio se divide en dos o más subconjuntos disyuntos (la intersección entre los subconjuntos es vacía) que se denominan trozos y cada uno de ellos tiene una expresión o regla de correspondencia propia que permite relacionar los elementos del dominio con su imagen.

**Ejemplo 1.** Una función *f* de dominio definida en tres trozos presenta las siguientes reglas de correspondencia:

* **Primer trozo:** Si el elemento del dominio está en el intervalo , las imágenes se determinan mediante la expresión .
* **Segundo trozo:** Si el elemento del dominio está en el intervalo , las imágenes están determinadas por la expresión .
* **Tercer trozo:** Si el elemento del dominio pertenece al intervalo , las imágenes están determinadas por la expresión .

La expresión algebraica que representa esta función es:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG65 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

**Ejemplo 2.** Considera la función *g*, con dominio los reales, definida en la forma

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG66 |
| **Descripción** | La función a trozos, modificarla para que se note el hueco que se dan el segmento cuando |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función a trozos *g(x)* de ejemplo 2 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Es necesario que los trozos en los que está definida la función sean disyuntos, porque de lo contrario se pierde la condición de función |

**Ejemplo 3.** Considera la expresión

Esta expresión no corresponde a una función, puesto que los dos primeros intervalos de la definición no son disyuntos, lo que ocasiona que existan valores de *x* con dos imágenes. Por ejemplo, para *x = 0*, hay una imagen *r*(0) = 3, según la definición del primer tozo, y otra *r*(0) = (0)2 + 2 = 2, según la definición del segundo trozo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG67 |
| **Descripción** | Realizar la gráfica de la expresión dada  y mostrar con una recta vertical entre -1 y 1 que la gráfica es cortada en dos puntos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | PRESENTAR LA GRÁFICAS AQUÍ |
| **Pie de imagen** | Gráfica de una relación no funcional definida por trozos, la prueba de la recta vertical permite comprobar que la relación *r(x)* no es función |

Las funciones a trozos más comunes son la función valor absoluto y la función parte entera. Las estudiaremos a continuación.

[SECCIÓN 3] **3.3.1 Función valor absoluto**

La función valor absoluto es una función definida en dos trozos, los números reales negativos y los numero reales no negativos, como se sigue:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG68 |
| **Descripción** | Gráfica del valor absoluto de x |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | FALTA LA GRÁFICA |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función |

Las características del valor absoluto son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | No |
| Sobreyectiva | No |
| La función es par o impar | Par |
| Máximo | No tiene |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | *y* = |
| Valores en que alcanza el mínimo |  |
| Intervalos donde la función es decreciente |  |
| Intervalos donde la función es creciente |  |

[SECCIÓN 3] **3.3.2 Función parte entera**

La función parte entera está definida en infinitos trozos de la forma con , en el modo siguiente:

La función parte entera, denotada como , también se puede definir como la función que hace corresponder a cada número real el mayor número entero que es menor o igual al número real considerado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG69 |
| **Descripción** | La función parte entera |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | FALTA LA GRÁFICA |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función |

Las características de la función parte entera son:

|  |  |
| --- | --- |
| Dominio |  |
| Rango |  |
| Inyectiva | No |
| Sobreyectiva | No |
| La función es par o impar | Ninguna |
| Máximo | No |
| Valores en que alcanza el máximo | No aplica |
| Mínimo | No |
| Valores en que alcanza el mínimo | No aplica |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC180 |
| **Título** | Transformación de funciones |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia cómo obtener gráficas de ciertas funciones a partir de otras |

[SECCIÓN 2] **3.4 Consolidación**

Estas actividades te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC190 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: clasificación de funciones de números reales |
| **Descripción** | Actividad en que se practica lo aprendido sobre las funciones usuales de números reales |

[SECCIÓN 1] **4 Operaciones con funciones**

Las funciones poseen una estructura aditiva y multiplicativa que permiten operarlas entre sí para obtener otras funciones.

[SECCIÓN 2] **4.1 Suma, diferencia, producto y cociente de funciones**

A continuación se define la adición de funciones, la diferencia de funciones, el producto por un escalar, el producto y el cociente de funciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Operaciones con funciones** |
| **Contenido** | Dadas y dos funciones de números reales y un número real, se definen las siguientes operaciones entre funciones:   * para todo * para todo * para todo * para todo     para todo |

Como se muestra en el destacado anterior, para que las operaciones entre las funciones *f* y *g*, tengan sentido, es necesario que *x* pertenezca tanto al dominio *de f como al* dominio de *g*.

**Ejemplo 1.** Considera las funciones y .

Los dominios de *f* y *g* son: y

* se calcula como

,

donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG70 |
| **Descripción** | Gráficas de y en distintos colores y con etiquetas de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de las funciones *f(x)*, *g(x)* y la suma de funciones *(f + g)(x)* |

* se calcula como

donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG71 |
| **Descripción** | Gráficas de , con distintos colores y etiquetas de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de las funciones *f(x)*, *g(x)* y la diferencia de funciones *(f - g)(x)* |

* se determina así:

donde

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG72 |
| **Descripción** | Graficas de y con distintos colores y etiqueta de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de las funciones *f(x)*, *g(x)* y el producto de funciones *(fg)(x)* |

* se calcula así:

donde

como la ecuación no tiene solución en el conjunto de los reales,

Cuando se opera con funciones, el dominio de la función resultante no solo está dado por la expresión que se obtiene, también es necesario tener en cuenta los dominios de las funciones que se operan. En el ejemplo anterior, la expresión resultante fue . Esta función no se indetermina en *3*; sin embargo *3* no hace parte del dominio, puesto que no está en el domino de .

* nos queda:

donde

Aquí, como la ecuación tiene por solución en el conjunto , entonces:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG73 |
| **Descripción** | Graficas de y, , con distintos colores y etiquetas de cual es cada una, en el caso de que se resalte el hueco que se presenta en |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cociente de funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Álgebra de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practican las operaciones con funciones |

[SECCIÓN 2] **4.2 Composición de funciones**

Dadas dos funciones *f* y *g*, se define una función llamada ***g* compuesta** Esta nueva función aplica sucesivamente *f* y *g* a elementos del dominio de *f*, es decir, calcula valores *g(f(x))*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG74 |
| **Descripción** | Diagrama que muestra la composición de funciones |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://iesaricel.org/rafanogal/funciones/funciones-archivos/composicion.gif> |
| **Pie de imagen** | Diagrama sagital de la composición de funciones |

La gráfica de arriba revela que para poder establecer la composición , el rango de *f* debe ser igual al dominio de *g.* Formalmente

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Composición de funciones** |
| **Contenido** | Dadas y dos funciones de los números reales se define la **composición de funciones** como:  para todo |

Entonces, para hallar el dominio de se debe tomar el dominio de y eliminar de este conjunto los valores que estén restringidos en la expresión que resulta al evaluar en .

**Ejemplo 1.** Considera las funciones y .

* se determina como se sigue:

y como la expresión resultante no tiene restricciones, luego .

* se calcula así:

Asimismo, y como la expresión resultante no tiene restricciones luego, .

En este ejemplo se observa que que . Por lo tanto, la composición de funciones **no es conmutativa**.

**Ejemplo 2.** Considera las funciones y

* se determina así:

En este caso, el y como la expresión resultante tiene la restricción que , entonces .

De manera similar a las operaciones entre, la composición de funciones cumple las siguientes propiedades:

* **Propiedad asociativa de la composición de funciones:** Dadas las funciones de números reales *f, g y h*, se cumple que

**Ejemplo 1.** Considera las funciones , y .

Vamos a comprobar que

Al calcular se obtiene que

luego

Por otra parte, al calcular , resulta:

* **Propiedad del elemento neutro de la composición de funciones:** El elemento neutro de la composición de funciones es la función identidad

Para esta función se cumple que , para toda función *f* definida en el conjunto de los números reales.

**Ejemplo 1.** Dado , si se tiene que:

. Luego .

[SECCIÓN 3] **4.2.1 Funciones inversas**

Como se mencionó anteriormente, la composición de funciones cumple la propiedad asociativa, elemento neutro y no es conmutativa. A continuación se define la función inversa de la composición de funciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inversa** |
| **Contenido** | Dada una función de números reales, se dice que  **es la función inversa de**  si el y además    para todo y  para todo . En este caso se denota a como . |

No todas las funciones de números reales tienen inversa; para ello se necesita que la función sea inyectiva.

Ejemplo 1. Si entonces .

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC210 |
| **Título** | Composición de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica la composición de funciones |

[SECCIÓN 2]**4.4 Consolidación**

Estas actividades te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC220 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Inversas de las funciones exponenciales y trigonométricas |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudian las funciones logarítmicas y las inversas de las funciones trigonométricas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC230 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Operaciones con funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practican las operaciones con funciones |

[SECCIÓN 1] **5 Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC240 |
| **Título** | Competencias: Análisis de funciones de números reales |
| **Descripción** | Actividad en la que se propone analizar varias de las propiedades de una función de números reales |

[SECCIÓN 1] **Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC250 |
| **Título** | Evalúa tus conocimientos sobre funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se evalúan los conceptos que hemos trabajado en este tema |

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC260 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Relaciona los contenidos del tema |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC270 | |
| **Web 01** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 02** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 03** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
|  | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 04** |  | <http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/coordenadascartesianas/sec/MATE30_imprimible_alumnado.pdf> |
|  |  | http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/mate/Matematicas\_VI/Applets\_Geogebra/operacionesconfunciones.html |
| **Web 05** |  | [*http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf*](http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf) |
|  |  | <http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/servicio_docente/maria_victoria/rectas.pdf> |
|  |  |  |