|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Los límites y la continuidad |
| Código del guion | MA\_11\_03\_CO |
| Descripción | El concepto de límite de una función es la noción sobre la que se fundamenta la matemática usada en el análisis de problemas económicos, de ingeniería y de ciencias en general. El entendimiento de este permite el desarrollo de herramientas matemáticas para resolver problemas complejos |

[SECCIÓN 1] **1 La noción intuitiva de límite**

Cuando se habla de un límite en leguaje cotidiano, este se relaciona directamente con un valor fijo. Por ejemplo, si se habla del límite de velocidad en una carretera, este está relacionado directamente con un valor de velocidad máximo permitido; si se habla del límite del oído humano para tolerar el ruido, se está refiriendo un valor que determina la cantidad de ruido que puede soportar un oído antes de producir daño al órgano.

El concepto intuitivo de límite en matemáticas implica analizar el comportamiento de un objeto cuando se acerca a un valor llamado límite. En el caso del sonido aludido en el párrafo anterior se analizaría el efecto en el oído al aumentar el ruido, cuando este se acerca al valor llamado límite de tolerancia.

Esta sección está consagrada al entendimiento de los límites de funciones matemáticas y su simbología:

<<FQ\_MA\_11\_03\_001>>

La noción matemática de límite a través de funciones permite analizar situaciones relacionadas con economía, física, medicina y otras ciencias, centrándose en el comportamiento en las proximidades de un punto.

[SECCIÓN 2] **1.1 Los límites de una función en un punto**

El límite de una función *f*(*x*) en un punto *a* puede considerarse como “la altura hacia la que *tiende* la función cuando esta se acerca al punto *a*”.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG01 |
| **Descripción** | Ilustración como en la imagen de referencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El límite de la función *f*(*x*) cuando se acerca al punto *a* como la altura hacia la que *tiende* la función. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior o lateral |

En la imagen puede observarse que cuando los puntos negros se acercan a *a*, los puntos azules se acercan a *L*. En este caso, el límite se representa en símbolos como

<<FQ\_MA\_11\_03\_001>>

Para calcular el límite de una función en un número real *a*, se busca determinar cuál es el *compartimiento de las imágenes* al tomar valores próximos a *a*; de hecho, la imagen del punto *a* puede no estar definida bajo la función *f*(*x*).

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC20 |
| **Título** | ¿Qué sabes sobre sucesiones? |
| **Descripción** | Actividad que relaciona sucesiones y sus propiedades como límites |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC30 |
| **Título** | Identifica límites y características de sucesiones |
| **Descripción** | Actividad para identificar sucesiones acotadas y monótonas en cualquiera de sus representaciones |

Algunas funciones pueden *no* estar definidas en ciertos puntos, pero el límite de estas funciones en esos puntos puede existir. Por ejemplo, las siguientes funciones *no* están definidas en cero.

<<FQ\_MA\_11\_03\_002>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_003>>

Tabulando valores cercanos a cero es posible determinar intuitivamente el límite al que tiende cada función cuando se acerca a cero. Para la función *f*(*x*):

|  |  |
| --- | --- |
| **Tabulación de valores cercanos a cero en la función *f*(*x*)** | |
| ***x*** | ***f*(*x*)** |
| −0,1 | 0,998334166… |
| −0,034 | 0,999807344… |
| −0,017 | 0,999951834… |
| −0,001 | 0,999999833… |
| −0,00023 | 0,999999991… |
| −0,00001023 | 0,999999999… |
| −0,000000531 | 0,99999999993… |
| −0,000000101 | 0,99999999999… |
| 0 | No está definido |
| 0,000000101 | 0,99999999999… |
| 0,000000531 | 0,99999999993… |
| 0,00001023 | 0,999999999… |
| 0,00023 | 0,999999991… |
| 0,001 | 0,999999833… |
| 0,017 | 0,999951834… |
| 0,034 | 0,999807344… |
| 0,1 | 0,998334166… |

Se observa que al acercarnos a cero por la *derecha*, es decir, con *valores mayores* *que* cero, o por la izquierda, con *valores menores que* cero, las imágenes toman valores cercanos a uno; de hecho, cuanto más cercano sea el valor de x a cero, más cercano será el valor de *f*(*x*) a uno.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG02 |
| **Descripción** | Ilustración como en la referencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Comportamiento de las imágenes de valores cercanos para la función *f*(*x*). |

En símbolos, se puede representar el comportamiento de la función *f*(*x*) cerca a cero así:

<<FQ\_MA\_11\_03\_005>>

Para el caso de la función *g*(*x*) se tiene la siguiente tabla para valores cercanos a cero:

|  |  |
| --- | --- |
| **Tabulación de valores cercanos a cero en la función *g*(*x*)** | |
| ***x*** | ***g*(*x*)** |
| −0,1 | 0,544021111… |
| −0,034 | 0,907557625… |
| −0,017 | −0,762216923… |
| −0,001 | −0,826879541… |
| −0,00023 | 0,137706631… |
| −0,00001023 | 0,870017833… |
| −0,000000531 | 0,89622731… |
| −0,000000101 | 0,098869629… |
| 0 | No está definido |
| 0,000000101 | −0,098869629 |
| 0,000000531 | −0,89622731… |
| 0,00001023 | −0,870017833… |
| 0,00023 | −0,137706631… |
| 0,001 | 0,826879541… |
| 0,017 | 0,762216923… |
| 0,034 | −0,907557625… |
| 0,1 | −0,544021111… |

Se observa que las imágenes no se aproximan a ningún valor ni por derecha ni por izquierda, oscila de creciente a decreciente sin acerarse a un valor específico. Este comportamiento puede verse reflejado en la gráfica de la función. En este caso, el límite no existe.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG03 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y resaltando los valores del rango |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de cero, las imágenes oscilan entre −1 y 1 y no se estabilizan hacia un valor fijo. |

En símbolos, se puede representar el comportamiento de la función *g*(*x*) cerca a cero así:

<<FQ\_MA\_11\_03\_006>>

Las funciones *f* y *g* no estaban definidas en cero; se observó que para la primera, el límite cuando tiende hacia cero existía, y para la segunda este límite no existía. A continuación se muestra una función *h* que está definida en cero y cuyo límite existe.

Sea *h*(*x*) = *x*2 – 2 función definida en cero; se observa a continuación la tabulación de valores cercanos a cero para esta función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Tabulación de valores cercanos a cero en la función *h*(*x*)** | |
| ***x*** | ***h*(*x*)** |
| −0,1 | −1.99 |
| −0,034 | −1.998844 |
| −0,017 | −1.999711 |
| −0,001 | −1.999999 |
| −0,00023 | −1.9999999471 |
| −0,00001023 | −1.9999999998953471 |
| −0,000000531 | −1.999999999999718 |
| −0,000000101 | −1.9999999999999898 |
| 0 | −2 |
| 0,000000101 | −1.9999999999999898 |
| 0,000000531 | −1.999999999999718 |
| 0,00001023 | −1.9999999998953471 |
| 0,00023 | −1.9999999471 |
| 0,001 | −1.999999 |
| 0,017 | −1.999711 |
| 0,034 | −1.998844 |
| 0,1 | −1.99 |

Se observa que cuando la función toma valores por la derecha o por la izquierda, el valor de las imágenes se aproxima a −2, en este caso, *f*(0) = −2.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG04 |
| **Descripción** | ampliado cerca de cero y y resaltando los valores del rango |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función *h*(*x*) = *x*2 – 2. Se observa que las imágenes de valores cercanos a cero son cercanas a –2. |

Se puede afirmar que el límite de una función en un punto *a* es el valor al que se aproximan las imágenes de los puntos que se acercan al valor *a*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límite de una función en un punto** |
| **Contenido** | Si *f* está definida para valores tan cercamos como se quiera a derecha e izquierda de un número real *a*, y las imágenes de estos valores se aproximan a un único número real *L*, entonces se dice que el límite cuando *x* tiende a *a* por la función *f* es *L*, y se denota como:  <<FQ\_MA\_11\_03\_001>> |

El límite de una función en un punto puede no existir. En la tabla se muestran algunas razones por las que el límite puede no existir.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC40 |
| **Título** | Reconoce la idea intuitiva del límite de una función en un punto |
| **Descripción** | Actividad en que se practica cómo identificar intuitivamente el límite de una función en un punto a partir de su representación tabular o gráfica |

|  |  |
| --- | --- |
| **Razones por las que puede no existir el límite de una función** | |
| **Razón** | **Ejemplo** |
| Las imágenes no se estabilizan hacia una altura fija *L* cuando la función se acerca a *a*; las imágenes crecen indefinidamente. | Los valores por izquierda y por derecha de la función  <<FQ\_MA\_11\_03\_007>>  crecen indefinidamente. |
| Las imágenes de valores mayores que *a* y las imágenes menores que *a* se estabilizan hacia valores diferentes, para valores cada vez más cercanos a *a*. | La función *q*(*x*) definida por  <<FQ\_MA\_11\_03\_008>>  por la izquierda tiende hacia uno y por la derecha tiende a uno. |
| La función no está definida para ningún valor cercano a *a.* | La función r(x) definida por  <<FQ\_MA\_11\_03\_009>>  no está definida para valores cercanos a 1 por la izquierda. |
| Las imágenes de los valores obtenidos a través de la función no se estabilizan hacia un valor fijo. | La función  <<FQ\_MA\_11\_03\_003>>  oscila indefinidamente cuando se toman valores cercanos a cero. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC10 |
| **Título** | El estudio de los límites y de la continuidad |
| **Descripción** | Interactivo que presenta el concepto de límite y el de continuidad, tanto desde la noción intuitiva como gráfica, y sus propiedades |

[SECCIÓN 2] **1.2 Los límites laterales**

Cuando se evalúan valores cercanos a un punto *a* a través de algunas funciones, puede observarse que los valores mayores que *a* se estabilizan hacia un punto *L* y que los valores menores que *a* se estabilizan hacia un punto *M*, donde *L* ≠ *M*. Se puede observar este comportamiento para el punto −1 en la función

<<FQ\_MA\_11\_03\_010>>

En la siguiente tabla se observa el comportamiento de la función *f*(*x*) para valores mayores que −1, es decir, por la derecha del punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Tabulación de valores cercanos a −1 por la derecha en la función *f*(*x*)** | |
| ***x*** | ***f*(*x*)** |
| −0.9 | 1.9 |
| −0.966 | 1.966 |
| −0.983 | 1.983 |
| −0.999 | 1.999 |
| −0.99977 | 1.99977 |
| −0.99998977 | 1.99998977 |
| −0.999999469 | 1.999999469 |
| −0.999999899 | 1.999999899 |

Se observa que las imágenes de los valores cada vez más cercanos a −1 se acercan cada vez más al valor 2. En símbolos se escribe este comportamiento así:

<<FQ\_MA\_11\_03\_011>>

En este caso, el símbolo + está indicando el **límite por la derecha**, es decir, el valor hacia el que tiende la función cuando se toman valores mayores y cada vez más cercanos al punto *a*, que en este caso es −1.

De forma similar se define el límite por la izquierda. En la siguiente tabla se observa el comportamiento de la función *f*(*x*) para valores menores que −1, es decir, por la izquierda del punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Tabulación de valores cercanos a −1 por la izquierda en la función *f*(*x*)** | |
| ***x*** | ***f*(*x*)** |
| −1.1 | −2.1 |
| −1.034 | −2.034 |
| −1.017 | −2.017 |
| −1.001 | −2.001 |
| −1.00023 | −2.00023 |
| −1.00001023 | −2.00001023 |
| −1.000000531 | −2.000000531 |
| −1.000000101 | −2.000000101 |

Se observa que las imágenes de los valores cada vez más cercanos a −1 se acercan cada vez más al valor −2, cuando los valores de *x* evaluados son menores que −1. En símbolos se escribe este comportamiento así:

<<FQ\_MA\_11\_03\_012>>

En este caso, el símbolo − está indicando el **límite por la izquierda**, es decir, el valor hacia el que tiende la función cuando se toman valores menores y cada vez más cercanos al punto *a*, que en este caso es −1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG05 |
| **Descripción** | Ilustración como en la imagen de referencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los límites por la izquierda y por la derecha de la función *f*(*x*) son, respectivamente, −2 y 2. |

El límite cuando *x* tiende a 2 en la función no existe; sin embargo, los límites laterales sí existen. Lo anterior puede resumirse así:

<<FQ\_MA\_11\_03\_013>>

En general, los límites laterales están relacionados directamente a través de la siguiente propiedad.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Existencia de límites y límites laterales** |
| **Contenido** | Si *f* está definida en un intervalo al cual pertenece *a*, entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_014>>  si y solo si los límites laterales existen y  <<FQ\_MA\_11\_03\_015>> |

Por ejemplo, para la función *g*(*x*) = *x*3 − 8 se tiene que

<<FQ\_MA\_11\_03\_016>>

Por lo tanto, los límites laterales existen y

<<FQ\_MA\_11\_03\_017>>

Si se considera la función *h*(*x*) dada por la gráfica:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG06 |
| **Descripción** | Ilustración como en la referencia. La parte izquierda NO es una recta, es una curva |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cerca de −4 el límite es cero. |

A partir del gráfico de la función *h*(*x*) se infiere que

<<FQ\_MA\_11\_03\_018>>

Como se observa en el gráfico de la función, esta se acerca cada vez más al valor cero cuando se toman valores cercanos a −4 tanto por derecha como por izquierda. Se debe notar que el límite en −4 existe, así como los límites laterales, aunque la función evaluada es diferente de cero:

*h*(−4) = −1

Lo anterior resalta el hecho de que el límite de una función en un punto puede ser diferente del valor que tome la función en dicho punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC50 |
| **Título** | Reconoce la idea intuitiva del límite lateral |
| **Descripción** | Actividad en que se practica cómo identificar intuitivamente límites laterales a partir de su representación tabular o gráfica |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC60 |
| **Título** | Relaciona el tipo de límite con la gráfica de la función |
| **Descripción** | Actividad que permite relacionar el tipo de límite según la representación gráfica de una función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC70 |
| **Título** | Identifica límites laterales ante saltos de discontinuidad |
| **Descripción** | Actividad que permite identificar límites laterales a partir de tablas o gráficos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC100 |
| **Título** | Define algunas nociones de límite |
| **Descripción** | Actividad en la que se rellenan huecos desde un menú desplegable, para completar de forma correcta algunas definiciones sobre límite |

[SECCIÓN 2] **1.3 Los límites en el infinito**

A través del concepto de límite se puede estudiar el comportamiento de las funciones cuando toman valores infinitamente grandes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición intuitiva de límite en el infinito** |
| **Contenido** | Si está definida en un dominio que contenga un intervalo (*b*, ∞) y tal que las imágenes de los valores en el intervalo se acercan indefinidamente hacia un único valor *L*, entonces se dice que *L* es el límite en el infinito de la función *f*; en símbolos se escribe:  <<FQ\_MA\_11\_03\_019>>  De forma análoga se define el límite en el infinito negativo:  <<FQ\_MA\_11\_03\_020>>  Es decir, al tomar valores cada vez más grandes (negativos), las imágenes de la función se estabilizan hacia una altura *L*. |

Por ejemplo, sea la función

<<FQ\_MA\_11\_03\_002>>

Al evaluar la función *f*(*x*) en valores positivos cada vez más grandes, se observa que los valores de las imágenes tienden a estabilizarse hacia cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Tabulación de valores en la función *f*(*x*)** | |
| ***x*** | ***f*(*x*)** |
| 10 | −0,05440211 |
| 20 | 0,04564726 |
| 40 | 0,01862783 |
| 100 | −0,00506366 |
| 200 | −0,00436649 |
| 500 | −0,00093554 |
| 1000 | 0,00082688 |
| 2000 | 0,00046502 |
| 10 000 | −0,00003056 |

En símbolos se puede escribir:

<<FQ\_MA\_11\_03\_FQ\_MA\_11\_03\_021>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG07 |
| **Descripción** | Gráfico de la función sen(x)/x como se muestra en la imagen de referencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En el gráfico de la función se observa que al aumentar el valor *x*, la función va acercándose a cero. |

Algunas funciones en el infinito no se estabilizan hacia un número, pero tienen un comportamiento constante bien sea creciendo o decreciendo indefinidamente; en estos casos se escribe

<<FQ\_MA\_11\_03\_022>>

Por ejemplo, para la función *g*(*x*) = −*x*3 + *x*2 se observa la siguiente tabla de valores:

|  |  |
| --- | --- |
| **Tabulación de valores en la función *g*(*x*)** | |
| ***x*** | ***g*(*x*)** |
| 10 | −900 |
| 20 | −7600 |
| 40 | −62 400 |
| 100 | −990 000 |
| 200 | −7 960 000 |
| 500 | −124 750 000 |
| 1000 | −999 000 000 |
| 2000 | −7 996 000 000 |
| 10 000 | −999 900 000 000 |

Así, el límite al infinito de la función *g*(*x*) está dado por

<<FQ\_MA\_11\_03\_023>>

De forma similar se obtiene

<<FQ\_MA\_11\_03\_024>>

El gráfico de la función *g*(*x*) confirma el comportamiento anteriormente descrito.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG08 |
| **Descripción** | Gráfico de la función g(x)=−x^3+x^2 como en la imagen de referencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *g*(*x*) = −*x*3 + *x*2. |

Un tercer caso para límites en el infinito para funciones surge cuando la función no se estabiliza y no existe el límite.

Por ejemplo, a continuación se muestra una tabla de la función *h*(*x*) = sen *x* para valores cada vez más grandes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Tabulación de valores en la función *h*(*x*)** | |
| ***x*** | ***h*(*x*)** |
| 10 | −0,54402111 |
| 20 | 0,91294525 |
| 40 | 0,74511316 |
| 100 | −0,50636564 |
| 200 | −0,87329730 |
| 500 | −0,46777181 |
| 1000 | 0,82687954 |
| 10000 | −0,30561439 |
| 2000 | 0,93003950 |
| 10000 | −0,30561439 |

Como era de esperarse, la función oscila entre menos y ; por esta razón, ni en el infinito y ni en menos infinito la función muestra alguna tendencia a estabilizarse hacia un número fijo, ni una tendencia de crecimiento o decrecimiento indefinido. Por lo tanto:

<<FQ\_MA\_11\_03\_025>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_026>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG09 |
| **Descripción** | Gráfico de la función seno |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función seno. |

El comportamiento periódico de la función seno implica que la función en el infinito no va a estabilizarse hacia un valor fijo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC80 |
| **Título** | Calcula límites usando GeoGebra |
| **Descripción** | Actividad en la que se propone usar un recurso interactivo de GeoGebra para encontrar límites |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC90 |
| **Título** | ¿Cómo se afectan los límites de las funciones bajo transformaciones en el plano? |
| **Descripción** | Interactivo en el que se exponen los cambios que sufren las funciones o las familias de funciones bajo transformaciones en el plano |

[SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC110 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La noción intuitiva de límite |
| **Descripción** | Actividades sobre La noción intuitiva de límite |

[SECCIÓN 1] 2 **Las propiedades de los límites**

El resultado de operar dos funciones es una nueva función. En esta sección se mostrará cómo se definen los límites de esta nueva función en términos de los límites de las funciones que se operan, así como las condiciones para que estas relaciones sean ciertas.

Las operaciones básicas pueden aplicarse a funciones o a límites, y analizar qué relación guardan las funciones operadas, su límite en un punto con la función resultante, y su límite en un punto.

.

[SECCIÓN 2] **2.1 La suma de límites**

La propiedad más simple que se deriva de operaciones entre funciones y sus límites es la suma. Sumar límites de funciones está directamente relacionado con la suma entre las funciones que los definen. Se observa a continuación las propiedades en términos de los límites de las funciones que forman la suma.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedad para la suma de límites** |
| **Contenido** | Sean *M*, *L* ∈ ***R***. Entonces:   1. Si   <<FQ\_MA\_11\_03\_027>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_028>>   1. Si   <<FQ\_MA\_11\_03\_029>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_030>>   1. Si   <<FQ\_MA\_11\_03\_031>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_032>>   1. Si   <<FQ\_MA\_11\_03\_033>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_034>>   1. Si   <<FQ\_MA\_11\_03\_035>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_036>> |

Es de anotar que las propiedades de la suma de límites requieren que el valor al que se aproxima la función sea el mismo para cada uno de los términos: *x = a*.

Se observa que no hay propiedades generales para la suma de funciones que no converjan o cuyos límites infinitos sean de diferente signo. Estas mismas propiedades se tienen para **límites laterales**.

Ejemplo

Calcular

<<FQ\_MA\_11\_03\_037>>

Solución

Primero debe manipularse algebraicamente la función a la que se le está aplicando el límite, para convertirla en una suma de funciones:

<<FQ\_MA\_11\_03\_038>>

Así, para poder usar propiedades de suma de límites, es necesario calcular los límites de las funciones que forman la suma:

<<FQ\_MA\_11\_03\_039>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_040>>

Por lo tanto, en virtud de la propiedad de la suma de límites:

<<FQ\_MA\_11\_03\_041>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG10 |
| **Descripción** | Gráficos de la función constante 2 y la función 1/*x* |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función constante 2 y la función 1/*x.* |

Ejemplo

Calcular

<<FQ\_MA\_11\_03\_042>>

Para calcular el límite es necesario determinar los límites de las funciones que forman los términos de la función, que se muestran en el gráfico.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG11 |
| **Descripción** | Gráfico de las funciones sen(x)/x, x^2 y −2 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de las funciones que forman el límite. |

Los límites de los términos son:

<<FQ\_MA\_11\_03\_043>>

Por lo tanto, en virtud de las propiedades de la suma de límites se tiene que

<<FQ\_MA\_11\_03\_044>>

Los límites en el infinito conservan las propiedades para la suma de límites; en este caso se asume que el valor al que tiende el límite es *a* = ∞, o *a = −*∞, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Calcular

<<FQ\_MA\_11\_03\_045>>

Solución

Por las propiedades de la suma de límites se tiene que

<<FQ\_MA\_11\_03\_046>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC130 |
| **Título** | Propiedades de la suma y la resta de límites |
| **Descripción** | Actividad para calcular el límite de funciones obtenidas como suma de otras funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC120 |
| **Título** | Propiedades de los límites |
| **Descripción** | Interactivo que expone Las propiedades de los límites |

[SECCIÓN 2] **2.2 El producto de límites**

Para el producto de límites se relacionan estos con sus respectivas funciones y el producto entre ellas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedades del límite de un producto** |
| **Contenido** | Sean *M*, *L* ∈ ***R***. Entonces:   1. Si   <<FQ\_MA\_11\_03\_047>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_048>>   1. Si   <<FQ\_MA\_11\_03\_049>>  o  <<FQ\_MA\_11\_03\_050>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_051>>   1. Si   <<FQ\_MA\_11\_03\_052>>  o  <<FQ\_MA\_11\_03\_053>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_054>>   1. Si   <<FQ\_MA\_11\_03\_055>>  o  <<FQ\_MA\_11\_03\_056>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_057>> |

Estas mismas propiedades se tienen para límites laterales y para límites en el infinito.

Ejemplo

Calcular

<<FQ\_MA\_11\_03\_058>>

Solución

En virtud de las propiedades para el producto de límites

<<FQ\_MA\_11\_03\_059>>

Por lo tanto, es necesario calcular los límites de los factores:

<<FQ\_MA\_11\_03\_060>>

Así,

<<FQ\_MA\_11\_03\_061>>

Ejemplo

Calcular

<<FQ\_MA\_11\_03\_062>>

Solución

Se puede reescribir el límite como un producto de límites cuyo valor es conocido y resolver el producto resultante:

<<FQ\_MA\_11\_03\_063>>

Como se puede observar, una potencia de una función puede operarse como productos iterados de una misma función y, por lo tanto, se puede usar la propiedad del producto de límites, lo que se formaliza como una propiedad para las potencias de límites.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedades del límite de una potencia** |
| **Contenido** | Sean *L* ∈ ***R***. Si  <<FQ\_MA\_11\_03\_064>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_065>> |

Ejemplo

Calcular

<<FQ\_MA\_11\_03\_066>>

Solución

La función en el límite puede escribirse como el siguiente producto:

<<FQ\_MA\_11\_03\_067>>

Por lo tanto,

<<FQ\_MA\_11\_03\_068>>

[SECCIÓN 2] **2.3 El cociente de límites**

Para cocientes de límites es necesario verificar que el denominador no sea nulo, para poder realizar los cálculos correspondientes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Propiedades del límite de un cociente** |
| **Contenido** | Sean *L, M* ∈ ***R***, con *M* ≠ 0.   1. Si   <<FQ\_MA\_11\_03\_069>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_070>>   1. Si   <<FQ\_MA\_11\_03\_071>>  entonces  <<FQ\_MA\_11\_03\_072>> |
|  |  |

Estas mismas propiedades se tienen para límites laterales y límites en el infinito.

Siempre que sea posible, es necesario simplificar algebraicamente la expresión para luego calcular el límite.

Ejemplo

Calcular

<<FQ\_MA\_11\_03\_073>>

Solución

En virtud de la propiedad del cociente de límites se puede escribir

<<FQ\_MA\_11\_03\_074>>

Algunos límites pueden transformarse en cocientes de límites conocidos para su cálculo, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Calcular

<<FQ\_MA\_11\_03\_075>>

Solución

La función en el límite puede reescribirse como sigue

<<FQ\_MA\_11\_03\_076>>

Así, haciendo uso de la propiedad para cocientes de límites

<<FQ\_MA\_11\_03\_077>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG12 |
| **Descripción** | Gráfico de la función *x*/sen(*x*) |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función *x*/sen(*x*). |

Ejemplo

Calcular

<<FQ\_MA\_11\_03\_078>>

Solución

Al evaluar los límites de las funciones que forman el cociente se obtiene

<<FQ\_MA\_11\_03\_079>>

Por lo tanto,

<<FQ\_MA\_11\_03\_080>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC140 |
| **Título** | Propiedades del límite del producto-cociente de funciones |
| **Descripción** | Actividad para calcular el límite de funciones obtenidas como producto y cociente de otras funciones |

[SECCIÓN 2] **2.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC150 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las propiedades de los límites |
| **Descripción** | Actividades sobre Las propiedades de los límites |

[SECCIÓN 1] **3 Los límites de funciones indeterminados**

A través de las operaciones entre límites surgen algunas situaciones en las que los límites se convierten en límites indeterminados, es decir, límites para los que el resultado no se puede precisar directamente, ni la existencia del límite ni su posible resultado. Para determinar la existencia de estos límites es necesario discriminar a partir de los diferentes tipos de funciones y del tipo de indeterminación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC160 |
| **Título** | Identifica gráficamente si un límite está indeterminado |
| **Descripción** | Actividad para estudiar tipos de límites indeterminados por operaciones, que pueden o no existir |

[SECCIÓN 2] **3.1 Las indeterminaciones**

Las indeterminaciones pueden surgir cuando aparecen límites infinitos, ceros o combinaciones de estos. Dependiendo de la forma en que aparecen en términos de operaciones entre funciones se pueden clasificar las indeterminaciones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminación de suma de límites** |
| **Contenido** | Si  <<FQ\_MA\_11\_03\_133>>  entonces la suma de los límites es una indeterminación:  <<FQ\_MA\_11\_03\_134>> |

La definición se extiende a los límites laterales y al infinito.

Ejemplo

Los siguientes límites laterales son infinitos

<<FQ\_MA\_11\_03\_135>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_136>>

Si se suman los límites se obtiene una indeterminación ∞ − ∞; sin embargo, si se escribe el límite como suma de funciones y se opera, se puede obtener el valor del límite:

<<FQ\_MA\_11\_03\_137>>

Ejemplo

Los siguientes límites laterales son infinitos.

<<FQ\_MA\_11\_03\_138>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_139>>

Para calcular el valor de la suma de los límites que resultó ser una indeterminación, se procede como sigue:

<<FQ\_MA\_11\_03\_140>>

Otro caso de indeterminación de límites se da en términos del producto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciones en el producto de límites** |
| **Contenido** | Si  <<FQ\_MA\_11\_03\_141>>  Entonces el producto de los límites es una indeterminación  <<FQ\_MA\_11\_03\_142>> |

La definición se extiende a límites laterales y al infinito.

Al igual que en el caso anterior, los límites indeterminados pueden ser manipulados algebraicamente a expresiones equivalentes que permiten el cálculo del límite.

Ejemplo

Se tiene que

<<FQ\_MA\_11\_03\_143>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_144>>

El producto de los límites resulta indeterminado; sin embargo, al operar el producto de las funciones que se evalúan en los límites se obtiene

<<FQ\_MA\_11\_03\_145>>

Ejemplo.

El producto de los siguientes límites es una indeterminación.

<<FQ\_MA\_11\_03\_146>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_147>>

Al operar las funciones se obtiene:

<<FQ\_MA\_11\_03\_148>>

[SECCIÓN 2] **3.2 Los límites de funciones racionales**

El límite de un cociente de funciones es igual al cociente entre los límites de las funciones, siempre que el límite del denominador sea diferente de cero. En el caso de tener un denominador cero se tiene una indeterminación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Indeterminaciones en el cociente de límites** |
| **Contenido** | Si  <<FQ\_MA\_11\_03\_149>>  entonces el límite del cociente es una indeterminación:  <<FQ\_MA\_11\_03\_150>>  De forma similar, si los límites tienden a infinito se tiene una indeterminación:  <<FQ\_MA\_11\_03\_151>> |

Ejemplo

El cociente de los siguientes límites es indeterminado:

<<FQ\_MA\_11\_03\_152>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_153>>

Sin embargo, al operar el cociente de las funciones se obtiene

<<FQ\_MA\_11\_03\_154>>

A continuación se muestra una indeterminación que se elimina simplificando las expresiones.

Ejemplo

El siguiente cociente de límites es indeterminado:

<<FQ\_MA\_11\_03\_155>>

Esta indeterminación puede convertirse en un límite definido como se muestra a continuación.

<<FQ\_MA\_11\_03\_156>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC170 |
| **Título** | Practica límites de funciones racionales |
| **Descripción** | Actividad para practicar el cálculo del límite en funciones racionales y para identificar discontinuidades asociadas a la división por cero |

[SECCIÓN 2] **3.3 Los límites de funciones radicales**

Las funciones radicales son de la forma

<<FQ\_MA\_11\_03\_157>>

Si el valor *n* es par, la función tiene como dominio [0, ∞); y si *n* es impar, la función tiene como dominio todos los reales.

La siguiente tabla resume los valores que toman las funciones radicales dependiendo de la paridad del índice *n* de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Límites de la función radical con índice *n*** | |
| **Si *n* es par** | **Si *n* es impar** |
| <<FQ\_MA\_11\_03\_158>> | <<FQ\_MA\_11\_03\_162>> |
| <<FQ\_MA\_11\_03\_159>> | <<FQ\_MA\_11\_03\_163>> |
| <<FQ\_MA\_11\_03\_160>> | <<FQ\_MA\_11\_03\_164>> |
| <<FQ\_MA\_11\_03\_161>> |  |

Dependiendo de las transformaciones que tenga la función radical, el dominio de la función cambia y por lo tanto los límites también. En el caso de que el índice sea impar, basta con evaluar el punto en la función para obtener el resultado del límite.

Ejemplo

Sea

<<FQ\_MA\_11\_03\_165>>

Los siguientes son algunos límites de esta función radical.

<<FQ\_MA\_11\_03\_166>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_167>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_168>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_169>>

Se observan claramente los límites en el gráfico de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_IMG13 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función radical *f*(*x*). |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC180 |
| **Título** | Practica límites de funciones radicales |
| **Descripción** | Actividad para practicar el cálculo del límite en funciones radicales y para identificar discontinuidades asociadas a inexistencia de raíces |

[SECCIÓN 2] **3.4 Los límites de las funciones trigonométricas**

La siguiente tabla resume los límites más usados de las funciones trigonométricas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Límites de funciones trigonométricas** | |
| **Función** | **Límites** |
| Seno | <<FQ\_MA\_11\_03\_170>>  <<FQ\_MA\_11\_03\_171>> |
| Coseno | <<FQ\_MA\_11\_03\_172>>  <<FQ\_MA\_11\_03\_173>> |
| Tangente | <<FQ\_MA\_11\_03\_174>>  <<FQ\_MA\_11\_03\_175>> |
| Límite especial | <<FQ\_MA\_11\_03\_176>> |

Cuando se combinan funciones trigonométricas y los límites resultantes son indeterminados, se deben tener en cuenta las identidades trigonométricas junto con procesos algebraicos, para calcular el resultado del límite como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

El siguiente límite es una indeterminación.

<<FQ\_MA\_11\_03\_177>>

Este límite se puede calcular de la siguiente manera:

<<FQ\_MA\_11\_03\_178>>

Se debe observar el uso del límite especial que se anotó en la tabla.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC190 |
| **Título** | Límites de funciones trigonométricas y sus inversas |
| **Descripción** | Interactivo en el que se exponen diferentes tipos de límites que aparecen en las funciones trigonométricas y en sus inversas |

[SECCIÓN 2] **3.5 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC200 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Los límites indeterminados de funciones |
| **Descripción** | Actividades sobre Los límites indeterminados de funciones |

[SECCIÓN 1] 4 **La continuidad de las funciones**

Las funciones más simples que se estudian en matemáticas son las funciones continuas, que pueden intuitivamente ser pensadas como aquellas que están hechas de “una sola pieza” sobre la que no hay rupturas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG14 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [343540238](http://www.shutterstock.com/pic-343540238/stock-photo-mobius-strip-made-from-paper-on-white-background-isolated-with-clipping-path.html?src=Gk1vj4bUzxdMu5YQ0Gk8rw-1-37)  http://thumb1.shutterstock.com/display_pic_with_logo/142219/343540238/stock-photo-mobius-strip-made-from-paper-on-white-background-isolated-with-clipping-path-343540238.jpg |
| **Pie de imagen** | La continuidad indica que no hay rupturas en una función. |

A través del concepto de límite es posible formalizar el concepto de continuidad para funciones; una vez formalizado pueden analizarse interesantes propiedades de funciones clasificadas como continuas. En esta sección se verá tanto la formalización como algunas propiedades de las funciones referidas, comenzando por la continuidad en un punto.

[SECCIÓN 2] **4.1 La continuidad de una función en un punto**

Al calcular límites de funciones polinómicas se observa que el límite en un punto coincide con el valor que se obtiene al evaluar la función en ese punto. Esta es precisamente la condición que cumplen las funciones continuas en un punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de función continua en un punto** |
| **Contenido** | Una función *f*(*x*) es continua en el punto *a* si y solo si se cumple que:  <<FQ\_MA\_11\_03\_081>> |

Se puede decir entonces que una función es continua en un punto si el límite en este coincide con el valor que la función le asigna al punto.

A partir de la definición de continuidad en un punto se deduce que se deben cumplir algunas condiciones.

* Se debe poder calcular la imagen por *f*(*a*), es decir, que es necesario que *a* esté en el dominio de la función.
* El límite en el punto *a* debe existir.
* Dado que las funciones toman valores reales, el límite debe ser finito.

Ejemplo

Para verificar la continuidad en *x* = 3 de la función

<<FQ\_MA\_11\_03\_082>>

es necesario evaluar la función en el punto indicado y calcular el límite en el mismo, así:

<<FQ\_MA\_11\_03\_083>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_084>>

Por lo tanto, se tiene que

<<FQ\_MA\_11\_03\_085>>

En virtud de lo anterior, se infiere que la función *f*(*x*) es continua en 3.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG15 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | A partir del gráfico se confirma que la función *f*(*x*) es continua en *x* = 3, es decir, no hay “saltos” ni “rupturas” sobre la gráfica en el punto. |

Ejemplo

Para verificar si hay continuidad en *x* = −2 dada la función

<<FQ\_MA\_11\_03\_086>>

se debe evaluar la función en el punto y calcular el límite en este; sin embargo, la función no está definida en −2 y por lo tanto no puede ser continua.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG16 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *g*(*x*) no está definida en *x* = −2 y por lo tanto no es continua en este punto. |

Ejemplo

Dada la función

<<FQ\_MA\_11\_03\_087>>

se observa que está definida en *x* = 1; de hecho, *h*(1) = 1; sin embargo,

<<FQ\_MA\_11\_03\_088>>

En este caso, la función *h*(*x*) no es continua en *x* = 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG17 |
| **Descripción** | Función definida a trozos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *h*(*x*) tiene un “salto” en *x* = 1. |

**IMPORTANTE**: todas las funciones polinómicas son continuas en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo

Para verificar la continuidad en el punto *x* = 0 de la función

<<FQ\_MA\_11\_03\_089>>

se evalúa la función en el punto así: *q*(0) = 0, y con ayuda del gráfico de la función podemos deducir que

<<FQ\_MA\_11\_03\_090>>

Por lo tanto, la función *q*(*x*) es continua en cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG18 |
| **Descripción** | Gráfico de la función x sin (1/x) como en la imagen de referencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El límite de la función *q*(*x*) cuando tiende a cero es cero. |

En el anterior ejemplo es necesario observar que si la función se definiera como

<<FQ\_MA\_11\_03\_091>>

entonces no se tendría la continuidad en cero, ya que esta función no está definida en cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC210 |
| **Título** | Especifica las condiciones para que una función sea continua en un punto |
| **Descripción** | Actividad para identificar las condiciones de continuidad de funciones en un punto |

[SECCIÓN 2] **4.2 Las operaciones de funciones continuas en un punto**

Estudiar la continuidad de una función en un punto se reduce a estudiar el límite de una función en dicho punto y compararlo con su imagen. Por lo tanto, la relación entre continuidad y operaciones entre funciones surge de las propiedades de los límites y se resume a continuación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Operaciones de funciones continuas** |
| **Contenido** | Sean *f* y *g* funciones continuas en un punto *a*; entonces:   * *f* + *g* es continua en *a* * *f* ⋅ *g* es continua en *a* * si *g*(*a*) ≠ 0 entonces se tiene continuidad en *a* para la función   <<FQ\_MA\_11\_03\_092>> |

Cuando se calculan límites laterales únicamente, se define la continuidad por derecha o por izquierda de forma análoga a como se definió para la continuidad en un punto.

Para analizar la continuidad de una función es posible descomponerla en funciones más simples que la conforman, verificar la continuidad en estas y luego usar las operaciones de funciones continuas como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo

La función

<<FQ\_MA\_11\_03\_093>>

está formada por la suma de dos funciones continuas en el punto *x* = 1; por lo tanto, la función *f*(*x*) es continua en uno. De hecho:

<<FQ\_MA\_11\_03\_094>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_095>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG19 |
| **Descripción** | f(x)=ln(x)+Sen(x−1) ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f*(*x*) es continua en *x* = 1. |

Ejemplo

La función *g*(*x*) es continua *por derecha* en *x* = −3. La función está definida por

<<FQ\_MA\_11\_03\_096>>

Al calcular el límite lateral y evaluar la función en el punto se obtiene:

<<FQ\_MA\_11\_03\_097>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG20 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *g*(*x*) es continua por izquierda en . |

Ejemplo

La función *h*(*x*) está definida únicamente para valores negativos.

<<FQ\_MA\_11\_03\_098>>

Esta función es *continua por la izquierda* en cero, ya que las funciones que forman los factores son continuas en el punto, como se verifica a continuación:

<<FQ\_MA\_11\_03\_099>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_100>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG21 |
| **Descripción** | k(x)=Sen(x) √x ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *h*(*x*) es continua por izquierda en *x* = 0. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC220 |
| **Título** | Determina la continuidad de una función obtenida por operaciones con otras funciones |
| **Descripción** | Actividad mediante la cual se determina si se generan funciones continuas por operaciones (suma, producto, composición) entre funciones continuas |

[SECCIÓN 2] **4.3 Los tipos de discontinuidad**

Existen diferentes razones por las que una función no sea continua en un punto, como por ejemplo si no está definida en el punto, o si el límite no coincide con el valor que toma en la función. Dependiendo si es posible o no convertir la función en continua, las discontinuidades se clasifican en evitables e inevitables.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Discontinuidad evitable** |
| **Contenido** | Sea *L*∈***R*** y *f* es una función discontinua en *a* tal que  <<FQ\_MA\_11\_03\_101>>  Si *a* ∉ Dom *f*  o *f*(*a*) ≠ *L*, entonces f tiene una discontinuidad evitable en *a*. |

Para convertir una función discontinua en una función continua en un punto *a* es necesario modificar la forma en que se define en este.

Ejemplo

En la siguiente función se observa una discontinuidad en cero.

<<FQ\_MA\_11\_03\_102>>

La discontinuidad es evitable dado que

<<FQ\_MA\_11\_03\_103>>

En este caso, 0 ∉ Dom *f* . Así, redefiniendo la función se obtiene una función continua en cero.

<<FQ\_MA\_11\_03\_104>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG22 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función presenta una discontinuidad evitable en *x* = 0. |

Ejemplo

Sea

<<FQ\_MA\_11\_03\_105>>

En este caso, 2 ∈ Dom *g*, y *g*(2) = 0, pero

<<FQ\_MA\_11\_03\_106>>

Por lo tanto, la función *g*(*x*) tiene una discontinuidad evitable en dos. De hecho, si se redefine la función en la imagen del punto para el que se tiene la discontinuidad se puede hacer que la función sea continua en este:

<<FQ\_MA\_11\_03\_107>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG23 |
| **Descripción** | Función como en la imagen de referencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *g*(*x*) presenta una discontinuidad evitable en *x* = 2. |

Cuando se presenta una discontinuidad evitable en un punto se redefine la función en ese punto para que coincida con el límite en ese punto.

Otro tipo de discontinuidades son las discontinuidades inevitables, que se definen como aquellas para las que modificar un punto de la definición de la función no hace que la función resultante sea continua en el punto. Pueden ser:

* Discontinuidad asintótica
* Discontinuidad de salto
* Discontinuidad de oscilación

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Discontinuidad asintótica** |
| **Contenido** | La discontinuidad asintótica de una función *f*(*x*) en un punto *a* se presenta cuando al menos uno de los límites laterales de la función en ese punto es infinito o menos infinito. |

Ejemplo

La función

<<FQ\_MA\_11\_03\_108>>

tiene una discontinuidad asintótica en uno, dado que

<<FQ\_MA\_11\_03\_109>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_110>>

Además 0 ∉ Dom *f* .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG24 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f*(*x*) presenta una discontinuidad asintótica en *x* = 1. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Discontinuidad de salto** |
| **Contenido** | Una función *f*(*x*) tiene una discontinuidad de salto en un punto *a* cuando los límites laterales en el punto son finitos y diferentes. |

Ejemplo

La función parte entera *g*(*x*) = [*x*] tiene discontinuidades de salto en cada número entero, en particular, es discontinua en *x* = 3. De hecho:

<<FQ\_MA\_11\_03\_111>>

No obstante lo anterior, la función *g* es continua por derecha en todos los enteros.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG25 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función presenta una discontinuidad de salto en *x* = 3. |

Ejemplo

La siguiente función tiene una discontinuidad de salto en cero.

<<FQ\_MA\_11\_03\_112>>

La discontinuidad de salto se da en virtud de los valores de los límites laterales:

<<FQ\_MA\_11\_03\_113>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG26 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *h*(*x*) presenta una discontinuidad de salto en cero. |

Ahora, como los limites laterales existen y son finitos, se puede redefinir la función para que sea continua por derecha o por izquierda, pero no continua en el punto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Discontinuidad de oscilación** |
| **Contenido** | Una función *f*(*x*) tiene una discontinuidad de oscilación en el punto *a*, cuando los límites laterales no existen y no son infinitos. |

Ejemplo

La función

<<FQ\_MA\_11\_03\_114>>

presenta una discontinuidad de oscilación. El gráfico de la función muestra el comportamiento “inestable” de la función cerca a cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG27 |
| **Descripción** | ampliado cerca de |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f*(*x*) presenta una discontinuidad de oscilación en cero. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC230 |
| **Título** | Los tipos de discontinuidad |
| **Descripción** | Interactivo en el que se exponen los tipos de discontinuidad |

[SECCIÓN 2] **4.4 Las funciones continuas en intervalos**

El gráfico de una función continua, intuitivamente, se puede realizar en un solo trazo; sin embargo, el hecho de que una función sea continua en un punto *a* no garantiza que los puntos alrededor de este sean continuos. Por ejemplo, existen funciones continuas en un solo punto pero discontinuas en todos los demás puntos de su dominio, como en la función

<<FQ\_MA\_11\_03\_115>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG28 |
| **Descripción** | Las líneas deben ir como puntos, no una línea continua, tanto la horizontal como la diagonal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f(x)* es únicamente continua en cero. |

Para poder asegurar que podemos realizar la gráfica de una función en un solo trazo en un intervalo, se debe garantizar la continuidad en todos los puntos del intervalo, que puede ser abierto, semiabierto o cerrado.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Continuidad en intervalos abiertos** |
| **Contenido** | Una función *f* es continua en un intervalo abierto (*a*, *b*) si y solo si es continua en todo punto *c*∈(*a*, *b*).  Una función *f* es continua en un intervalo abierto (*a*, ∞) si y solo si es continua en todo punto *c*∈(*a*, ∞).  Una función *f* es continua en un intervalo abierto (−∞, *b*) si y solo si es continua en todo punto *c*∈(−∞, *b*). |

Ejemplo

La siguiente función es discontinua en cero.

<<FQ\_MA\_11\_03\_116>>

Sin embargo, la función *g*(*x*) es continua en todos los demás valores, por lo que se puede afirmar que la función es continua en los intervalos (−∞, 0) y (0, ∞). Se observa que en los intervalos de continuidad, la gráfica de la función puede realizarse en un solo trazo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG29 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *g*(*x*) es continua en (−∞, 0) y en (0, ∞). |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Continuidad en intervalos semiabiertos** |
| **Contenido** | Una función *f* es continua en un intervalo semiabierto [*a*,*b*) si y solo si es continua en el intervalo abierto (*a*,*b*) y continua por derecha en *a*.  Una función *f* es continua en un intervalo semiabierto [*a*,∞) si y solo si es continua en el intervalo abierto (*a*,∞) y continua por derecha en *a*.  Se define de forma análoga la continuidad para intervalos de la forma (*a*,*b*] y (−∞,*b*]. |

Ejemplo

La función parte entera *f*(*x*) = [*x*] es una función discontinua en todos los enteros, pero es continua por derecha en cada uno de estos valores; por lo tanto, la función es continua en los intervalos semiabiertos de la forma [*n*, *n*+1) para *n* ∈ ***Z***.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG30 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *g(x)* es continua en todos los intervalos [*n*, *n*+1) para *n* ∈ ***Z***. |

Ejemplo

La siguiente función es discontinua en −3.

<<FQ\_MA\_11\_03\_117>>

Sin embargo, es continua en los intervalos (−∞, −3] y (−3, ∞), ya que es continua por izquierda en −3.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG31 |
| **Descripción** | , |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f*(*x*) es continua en (−∞, −3] y (−3, ∞). |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Continuidad en intervalos cerrados** |
| **Contenido** | Una función *f* es continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*] si y solo si es continua en (*a*, *b*), continua por derecha en *a* y continua por izquierda en *b*. |

Ejemplo

La siguiente función es discontinua en cero y dos:

<<FQ\_MA\_11\_03\_118>>

No obstante lo anterior, la función es continua en *x* = 0 por derecha y en *x* = 2 por izquierda; además, es continua en los demás puntos, por lo que podemos decir que la función *f*(*x*) es continua en los intervalos (−∞, 0), [0, 2] y (2, ∞).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG32 |
| **Descripción** | Función como en la imagen de referencia |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f(x)* es continua en el intervalo cerrado [0, 2]. |

A través de combinaciones de operaciones entre funciones continuas se tiene que las funciones más usuales entre números reales tales como polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son continuas en todo punto de su dominio. La tabla a continuación resume los intervalos de continuidad para las funciones básicas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Funciones y sus intervalos de continuidad** | |
| **Función** | **Intervalos de continuidad** |
| Polinómica | R |
| Racional | R – {raíces del denominador} |
| <<FQ\_MA\_11\_03\_119>> | [0, ∞) |
| <<FQ\_MA\_11\_03\_120>> | R |
| <<FQ\_MA\_11\_03\_121>> | R |
| <<FQ\_MA\_11\_03\_122>> | (0, ∞) |
| <<FQ\_MA\_11\_03\_123>> | R |
| <<FQ\_MA\_11\_03\_124>> | R |
| <<FQ\_MA\_11\_03\_125>> | <<FQ\_MA\_11\_03\_126>> |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC240 |
| **Título** | Identifica intervalos de continuidad para funciones |
| **Descripción** | Actividad que permite al estudiante identificar intervalos de continuidad de funciones específicas |

[SECCIÓN 2] **4.5 El teorema del valor medio**

Cuando una función es continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*], se puede dibujar la gráfica de la función de un solo trazo en este intervalo; esto quiere decir que la gráfica de la función en ese intervalo es una curva continua que une los puntos (*a*, *f*(*a*)) y (*b*, *f*(*b*)). Esto hace que cualquier valor que se encuentre entre *f*(*a*) y *f*(*b*) es imagen de un valor en el intervalo, como se expresa de manera formal en el siguiente teorema.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Teorema del valor medio** |
| **Contenido** | Sea *f* una función continua en el intervalo [*a, b*]. Si *f*(*a*) ≤ *f*(*b*), entonces para todo *d* ∈ [*f*(*a*), *f*(*b*)] existe un *c* ∈ [*a*, *b*] tal que *d* = *f*(*c*).  De forma análoga, si *f*(*a*) > *f*(*b*), entonces para todo *d* ∈ [*f*(*b*), *f*(*a*)] existe un *c*∈(*a*, *b*) tal que *d* = *f*(*c*). |

En otras palabras, el teorema indica que siempre que se escoja una altura dentro del intervalo de las imágenes, es posible encontrar un elemento del dominio con esa imagen; esto, siempre que la función sea continua en un intervalo cerrado.

Ejemplo

La siguiente función es continua en el intervalo [−9, −4].

<<FQ\_MA\_11\_03\_127>>

Se observa que *g*(−9) > *g*(−2); entonces, cualquier valor entre *g*(−9) = 3 y *g*(−4) = 2 es imagen de un elemento del dominio.

En particular, si se toma el valor 2,5 ∈ [2, 3], el teorema de valor medio garantiza la existencia de un valor *c* tal que *f*(*c*) = 2,5. De hecho, *c* = 6,25.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG33 |
| **Descripción** | en el intervalo y la recta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En virtud del teorema del valor medio, existe un valor c tal que *f*(*c*) = 2,5. |

El teorema del valor medio puede usarse para garantizar la existencia de raíces de una ecuación en un intervalo, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Es posible usar el teorema del valor medio para deducir un intervalo en el que la siguiente ecuación tiene al menos una solución.

<<FQ\_MA\_11\_03\_128>>

Para determinar que la ecuación tiene solución, primero igualamos a cero, es decir, la transformamos en la ecuación.

<<FQ\_MA\_11\_03\_129>>

A partir de esta ecuación es posible transformar el problema en un problema de raíces de ecuaciones, definiendo la función

<<FQ\_MA\_11\_03\_130>>

La solución a la ecuación inicial equivale a encontrar los puntos de corte de la función *f*(*x*) con el eje *X*. La función *f*(*x*) es continua en todos los reales, ya que es la suma de dos funciones continuas en todos los reales: la función seno y un polinomio. En particular, la función es continua en el intervalo [0, π] y

<<FQ\_MA\_11\_03\_131>>

<<FQ\_MA\_11\_03\_132>>

𝐴sí, los extremos del intervalo toman valores con signos opuestos; en virtud del teorema del valor medio existe un número *c ∈* [0, π] tal que *f*(*c*) = 0. Lo anterior es equivalente a decir que la ecuación inicial tiene una solución en el intervalo [0, π].

Es importante anotar que el teorema del valor medio es un teorema que garantiza la existencia de un objeto, mas no permite determinar con precisión cuál es exactamente este.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG34 |
| **Descripción** | y en el intervalo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f*(*x*) tiene una raíz en el intervalo [0, π], como se puede deducir a partir del teorema del valor medio. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC250 |
| **Título** | Importancia de las hipótesis del teorema del valor medio |
| **Descripción** | Actividad para relacionar el teorema del valor medio con sus condiciones |

[SECCIÓN 2] **4.6 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC260 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La continuidad de funciones |
| **Descripción** | Actividad sobre La continuidad de funciones |

[SECCIÓN 1] **5 Competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC270 |
| **Título** | Competencias: El concepto de límite en nuestro entorno |
| **Descripción** | Actividad que relaciona El concepto de límite con aplicaciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC280 |
| **Título** | Proyecto: Aplicación de límites para el trazado de gráficas de funciones |
| **Descripción** | Proyecto que involucra el uso de límites para gráficos de funciones |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC290 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual sobre el tema Los límites y la continuidad |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC300 |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Evalúa tus conocimientos sobre el tema Los límites y la continuidad |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_11\_03\_REC | |
| **Web 01** | *Verifica la continuidad de funciones.* | [**http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=5844f7bfc8b89f0512de7c545ad502c**](http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=5844f7bfc8b89f0512de7c545ad502c) |
| **Web 02** | *Límites de sucesiones y fractales.* | [**http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/2.html**](http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/2.html) |
| **Web 03** | *Definiciones y ejemplos de límites e indeterminaciones.* | *www.unabvirtual.edu.co/ovas/limites/* |
| **Web 04** | *Ejemplos de continuidad de funciones.* | https://www.youtube.com/watch?v=onyOpZBC8Rk |
| **Web 05** | *Cálculo de límites al infinito* | http://www.lamanzanadenewton.com/materiales/matematicas/lmn\_mat\_fch12.html |
| **Web 06** | *Indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones.* | http://www.matematicasonline.es/flash/limites/swf/clases.swf |