|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Las funciones trigonométricas |
| Código del guion | MA\_10\_03\_CO |
| Descripción | Desarrollos tecnológicos en las telecomunicaciones, particularmente los teléfonos celulares, se basan en el análisis de ondas, estas a su vez se describen a partir de ciertos elementos matemáticos muy importantes: las funciones trigonométricas. |

[SECCIÓN 1] **1 Las funciones trigonométricas y sus recíprocas**

La trigonometría tiene aplicación en diferentes disciplinas del conocimiento tan diversas como la óptica, la astronomía, la arquitectura, la ingeniería, la geología, entre muchas más; y nace del análisis de triángulos rectángulos, pero se extiende a un tipo especial de funciones: Las funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas son la extensión de las **razones trigonométricas** a todos los números reales que permiten el uso de herramientas características de las funciones para el análisis de problemas en contextos particulares.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Shutterstock: 83915149  image of speakerphones and sound against white background |
| **Pie de imagen** | La rama de la física que se encarga de estudiar el sonido se denomina acústica. Las ondas acústicas son modeladas con funciones trigonométricas. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC10 |
| **Título** | Construcción de Las funciones trigonométricas y sus recíprocas |
| **Descripción** | Interactivo que expone las características de las funciones trigonométricas y sus recíprocas a partir de su construcción |

[SECCIÓN 2] **1.1 Las funciones trigonométricas**

Para definir las funciones trigonométricas de un ángulo *α* (alpha) partimos de la circunferencia unitaria, donde el ángulo está en posición estándar, es decir, su lado inicial coincide con el eje *x* y sobre el círculo unitario identificamos un único punto *P* (*x*, *y*)que identifica al ∡*α*, como puedes observar en la siguiente gráfica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG02 |
| **Descripción** | Ilustrar una circunferencia sobre el plano cartesiano, con radio 1 y el triángulo sobre ella como se ve en la imagen. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Para cualquier ángulo *α* existe un único punto *P* (*x*, *y*)sobre la circunferencia unitaria que lo caracteriza. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

El triángulo rectángulo *APC* tiene dimensiones:

* **Base**: *x*.
* **Altura**: *y*.
* Al tratarse de una circunferencia unitaria tiene como **hipotenusa** la unidad, que es el mismo **radio**, es decir 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en un triángulo rectángulo se definen como:  https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Bsen%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7B%5Ctext%7Bcateto%20opuesto%7D%7D%7B%5Ctext%7Bhipotenusa%7D%7D  https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Bcos%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7B%5Ctext%7Bcateto%20adyacente%7D%7D%7B%5Ctext%7Bhipotenusa%7D%7D  https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Btan%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7B%5Ctext%7Bcateto%20opuesto%7D%7D%7B%5Ctext%7Bcateto%20adyacente%7D%7D |

Al encontrar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente del ∡*α* para el Δ*APC* tenemos:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Bsen%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7By%7D%7B1%7D%3Dy

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Bcos%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7Bx%7D%7B1%7D%3Dx

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Ctext%7Btan%20%7D%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7By%7D%7Bx%7D

Las definiciones de seno, coseno y tangente como coordenadas del punto que identifica un ∡*α* son válidas para cualquier ángulo y no solo para los ángulos agudos o positivos, con la restricción *x* ≠ 0 para la tangente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Signos de las funciones trigonométricas** |
| **Contenido** | Los signos de las coordenadas de un punto *P* sobre la circunferencia unitaria varían dependiendo del cuadrante en que se encuentre. Así, los signos de las funciones seno, coseno y tangente de un ángulo, definidos como las coordenadas de éste, cambian de signo de acuerdo al cuadrante en el que se encuentre. |

Teniendo en cuenta la relación que encontramos anteriormente, podemos concluir que:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG03 |
| **Descripción** | Ilustrar las circunferencias con los datos propuestos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El signo de sen *α* corresponde al de la ordenada, el signo de la abscisa al de cos *α* y el signo de tan *α* corresponde al respectivo cociente entre la ordenada y la abscisa. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Así, para determinar los signos de las razones trigonométricas de un ángulo en específico, por ejemplo, para hallar el signo de sen 120°, cos 230° y tan 330°, debemos:

1. Representar gráficamente los ángulos en la circunferencia unitaria

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG04 |
| **Descripción** | Ilustrar las circunferencias con los datos propuestos.  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12548/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_04_img24_small.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La representación gráfica de los ángulos en la circunferencia unitaria indica en qué cuadrante se halla cada uno de ellos. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

1. Observar los signos, de la ordenada para sen 120°, de la abscisa para cos 230° y el respectivo cociente para tan 330°, con lo que podemos determinar que:

* Como el ángulo 120° se encuentra en el II cuadrante, el seno es positivo.
* Como el ángulo 230° se encuentra en el III cuadrante, el coseno es negativo.
* Como el ángulo 330° se encuentra en el IV cuadrante, la tangente es el resultado del cociente entre la ordenada (negativa) y la abscisa (positiva), es decir, que la tangente es negativa.

Tomando como punto de partida las características básicas de las funciones trigonométricas que hemos visto, podemos hacer una aproximación a la construcción general de las funciones, analizando particularidades como su dominio, rango, periodo, intervalos de crecimiento y decrecimiento, etc.

[SECCIÓN 3] **1.1.1 La función seno**

Se define la función seno como sen *α*, siendo *α* un número real, como el valor correspondiente a la ordenada del punto *P* sobre la circunferencia unitaria, que identifica el ángulo ***α* medido en radianes***.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para hallar la equivalencia entre la medida de un ángulo dado en grados sexagesimales (°) y su medida en radianes (rad), debes aplicar:  180 ° = π rad |

Por ejemplo, sen 2 equivale a calcular la ordenada del punto *P* que identifica un ángulo de 2 radianes.

Para hacerlo más claro, se tiene que:

2 rads ≈ 114,6 °

Por lo tanto el valor de sen 2, es el valor de la ordenada del punto *P* que puedes observar en la siguiente imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG05 |
| **Descripción** | Ilustrar las circunferencias con los datos propuestos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Expresar 2 rad en grados sexagesimales, nos permite construir la representación gráfica de sen 2. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Para hallar el valor numérico de sen 2, hacemos uso de la calculadora teniendo en cuenta que estamos trabajando con 2 rad, de donde podemos concluir que:

sen 2 ≈ 0,9092

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Para hacer cálculos numéricos de funciones trigonométricas en la calculadora, debes tener en cuenta que   * Si usas radianes, la calculadora debe estar configurada para calcular esta unidad, es decir en modo *Radianes*, que por lo general aparece como *RAD* o con la letra *R* * Si usas grados sexagesimales, la calculadora debe estar en modo *Degrees,* que en general está representado por una letra *D* o *DEG* en la parte superior de la pantalla. |

Para conocer cómo cambiar el modo de tu calculadora, puedes observar el siguiente video [[VER](https://www.youtube.com/watch?v=TlTlq6p_TI0)]

Una ventaja adicional de definir las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria es la relación directa que hay entre el valor de *α* y la longitud de arco que describe *α* como ángulo.

Observa que la medida de *α* en radianes cumple, por definición, la siguiente relación:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7Bs%7D%7Br%7D

Donde *s* es la longitud del arco sobre la circunferencia, y *r* es igual al radio.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG06 |
| **Descripción** | Ilustrar las circunferencias con los datos propuestos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la relación entre el arco de circunferencia unitaria y el ∡*α* que lo determina. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Como estamos trabajando sobre la circunferencia unitaria su radio es *r* = 1, lo que nos lleva a tener:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cdpi%7B300%7D%20%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Calpha%20%3Ds

Es decir que el valor de *α* para la función sen *α* equivale a la longitud del arco, sobre la circunferencia unitaria, que genera el ángulo de *α* radianes.

Teniendo en cuenta los razonamientos anteriores, podemos identificar algunas propiedades del gráfico de la función seno:

* La función seno tiene como **dominio** todos los números reales, dado que se puede calcular para cualquier valor que adquiera el ∡*α* sin restricciones.
* Los valores que toma la función seno, es decir el **rango**, se encuentran entre –1 y 1, ya que está representado por la la componente *y* o altura del triángulo rectángulo que cualquier ∡*α* determine sobre la circunferencia unitaria.
* Dado que la función seno toma el mismo valor cada “giro”, es decir que la función toma el mismo valor para *α* y para *α* + 2*π*, puesto que el punto que identifica estos dos ángulos es el mismo, podemos deducir que es una **función periódica** con un periodo de 2π.

Por otra parte, evaluando la función seno para varios valores de *α*, tenemos que:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valores de la función sen *α* calculada en diferentes valores de *α* en radianes | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *α* | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| sen *α* | 0 |  |  |  | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | – 1 |  |  |  | 0 |

Usando la relación sexagesimal para el valor del ∡*α* de la función seno se tiene la siguiente tabla equivalente:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valores de la función sen *α* calculada en diferentes valores de *α* en grados sexagesimales | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *α* | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
| sen *α* | 0 |  |  |  | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | – 1 |  |  |  | 0 |

A partir de las tablas y teniendo en cuenta las características que hemos hallado, podemos hacer un bosquejo de la gráfica de la función seno [[VER](http://www.geogebra.org/m/favB7TTW?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Ffunci%25C3%25B3n%2Bseno%2Fmaterials%2F)].

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG07 |
| **Descripción** | Ilustrar la gráfica con los datos propuestos.  http://matematicaspr.com/image/l2dj/blog/graficas-funciones-trigonometricas/grafica-funcion-seno.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Esquema general de la función seno en el intervalo [0, 2π]. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Como la función seno es periódica con periodo de 2π, y con base en la gráfica obtenida para sen *α*, con 0 ≤ *α* ≤ 2π, podemos inferir que el gráfico de toda la función seno será como se muestra en la siguiente imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_ CO\_IMG08 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función *y* = sen *α*, teniendo en cuenta que su dominio son todos los números reales y su periodo es 2π. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Para analizar la gráfica de la función sen *α* puedes observar interactuar con el siguiente link [[VER](http://tube.geogebra.org/student/m15858)], donde moviendo el punto *P* puedes observar los diferentes valores que la función adquiere en todo su dominio.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La función *y* = sen *α* cumple con las siguientes características:   * El **dominio** es el conjunto de todos los números reales **ℛ**. * El **rango** es el intervalo [–1, 1], es decir, **–1 < sen *α* < 1**. * La **amplitud** es 1. * El **periodo** es 2π * Los **puntos de corte** con el eje X suceden en *n*π, para *n* ∈ ℤ |

[SECCIÓN 3] **1.1.2 La función coseno**

La función coseno se determina a partir de la circunferencia unitaria teniendo en cuenta que la función *y* = cos *α*  se define como el valor de la abscisa del punto *P* (sobre la circunferencia unitaria) al que corresponde un ángulo de *α* radianes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La circunferencia unitaria está definida por la ecuación  *x*² + *y*² = 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG09 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación en la circunferencia unitaria de cos *α* |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

De acuerdo con lo que podemos deducir de la gráfica, la función *y* = cos *α* y los valores que puede tomar cumplen con las siguientes características:

* La función coseno tiene como dominio todos los números reales **ℛ**.
* Los valores que toma la función están entre –1 y 1, dado que los valores son coordenadas de puntos sobre la circunferencia unitaria.
* La función toma el mismo valor cada “giro”, es decir que la función toma el mismo valor para *α* y para *α +* 2π, dado que el punto que identifica estos dos ángulos es el mismo, sobre la circunferencia unitaria, por lo tanto la función coseno tiene periodo 2π.

Como puedes observar, cumple con características similares a la función seno. Veamos algunos puntos que pertenecen a la gráfica, en la siguiente tabla:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valores de la función cos *α* calculada en diferentes valores de *α* en radianes | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *α* | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| sen *α* | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | – 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | 1 |

Y usando la relación sexagesimal para el valor del ∡*α* de la función coseno se tiene la siguiente tabla equivalente:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valores de la función cos *α* calculada en diferentes valores de *α* en grados sexagesimales | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *α* | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
| sen *α* | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | – 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Los ángulos π/6, π/3 y π/4 son ángulos notables, por lo que podemos calcular fácilmente los valores de las razones trigonométricas seno y coseno, valores con los que, teniendo en cuenta el cuadrante en el que se encuentra el ángulo *α*, hemos completado la tabla anterior. |

Con los datos que hemos recolectado sobre la función coseno, podemos generar un primer bosquejo de su gráfica, observa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG10 |
| **Descripción** | Grafica Funcion Coseno |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función *y* = cos *α* en el intervalo [0, 2π]. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Dado que es una función periódica, podemos extender el gráfico de la función a su dominio completo: todos los reales ℛ.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG11 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfico de la función *y* = cos *α*, teniendo en cuenta que su dominio son todos los números reales y su periodo es 2π. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Para analizar la construcción de la función *y* = cos *α* puedes visitar el link [[VER](http://www.geogebra.org/m/dpqu7MAN?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Ffunci%25C3%25B3n%2Bcoseno%2Fmaterials%2F)] donde moviendo el punto *P* puedes observar su comportamiento.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La función *y* = cos *α* cumple con las siguientes características:   * El **dominio** es el conjunto de todos los números reales **ℛ**. * El **rango** es el intervalo [–1, 1], es decir, **–1 < cos *α* < 1**. * La **amplitud** es 1. * El **periodo** es 2π * Los **puntos de corte** con el eje X suceden en , para *n* ∈ ℤ |

[SECCIÓN 3] **1.1.3 La función tangente**

Para definir la función *y* = tan *α*, utilizamos la relación entre las razones trigonométricas de sen *α* y cos *α* que dan origen a tan *α*, así:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Ctext%7Btan%20%7D%5Calpha%20%3D%20%5Cfrac%7B%5Ctext%7Bsen%20%7D%5Calpha%20%7D%7B%5Ctext%7Bcos%20%7D%5Calpha%20%7D

Al determinar la función tangente en función del seno y el coseno del mismo ángulo, debemos tener presente la indeterminación para cos *α =* 0; al observar la gráfica de la función *y* = cos *α* podemos ver que los valores en los que la función es igual a cero, es decir sus puntos de corte con el eje X son cuando el ángulo *α* toma los valores:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Cpm%20%5Cfrac%7B%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%5Cpm%20%5Cfrac%7B3%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%20%5Cpm%20%5Cfrac%7B5%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%5Cpm%20%5Cfrac%7B7%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C...

En general, podemos decir que cos *α =* 0 cuando:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7B2n&plus;1%7D%7B2%7D%5Cpi

Para *n* ∈ ℤ.

Dado que para estos valores, la función tangente no está definida, podemos afirmar que en dichos puntos, la función *y* = tan *α* presenta asíntotas verticales.

Para construir la gráfica de la función tangente es necesario analizar su comportamiento al tomar valores cercanos a las asíntotas, para ello, hallaremos algunos valores para el ángulo *α* utilizando la calculadora. Tú puedes hallar algunos valores más, recuerda que debes trabajar en radianes.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Valores de la función tan *α* calculada en diferentes valores de *α* en radianes | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *α* | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| sen *α* | 0 | 0,57 | 1 | 1,73 | NE | –1,73 | –1 | –0,57 | 0 | 0,57 | 1 | 1,73 | NE | –1,73 | –1 | –0,57 | 0 |

Una aproximación de la gráfica para *y* = tan *α* es:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG12 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Bosquejo de la gráfica de la función *y* = tan *α* en el intervalo [0, 2π]. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Al observar el bosquejo de la gráfica, podemos determinar algunas de las características que la función *y* = tan *α* cumple:

* El dominio está definido para todos los valores *α* que pertenecen al conjunto de los números reales sin incluir aquellos de la forma:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Calpha%20%3D%5Cfrac%7B2n&plus;1%7D%7B2%7D%5Cpi

* El rango son los números reales.
* Los valores donde se interseca *y* = tan *α* con el eje X, es decir, los ceros de la función, son los mismos de la función seno: *α* = 0, *α* = π, *α* = 2π,…, *α* = *n*π, para *n* ∈ ℤ.
* La función *y* = tan *α* es periódica, con periodo π.
* La función no posee puntos máximos ni mínimos.

Así, al construir la gráfica de la función *y* = tan *α* en todo su dominio, tenemos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG13 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función *y* = tan *α* teniendo en cuenta su dominio. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Puedes analizar la relación que hay entre las funciones trigonométricas sen *α*, cos *α* y tan *α* observando sus comportamientos en el siguiente link [[VER](http://www.geogebra.org/m/upkH6BAv?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Fconstrucci%25C3%25B3n%2Bfunci%25C3%25B3n%2Btangente%2Fmaterials%2F)].

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC30 |
| **Título** | Caracteriza las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente |
| **Descripción** | Actividad para caracterizar el comportamiento de las funciones trigonométricas |

[SECCIÓN 2] **1.2 Las funciones trigonométricas recíprocas**

La función recíproca *g* (*x*) de una función *f* (*x*) cumple que:

*f* (*x*) · *g* (*x*) = 1

Así, el producto entre la función y su recíproca es el elemento neutro de la multiplicación, es decir 1.

La función recíproca se puede definir como:



Ya que:



Para las funciones trigonométricas también se determinan funciones recíprocas, de tal manera que cumplen con la anterior definición, sin embargo, se debe analizar características básicas como su dominio, rango, periodo, asíntotas, etc.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | *g*(*x*) es la función recíproca de *f*(*x*) si y solo sí:  (*f* · *g*) (*x*) = *f* (*x*) · *g* (*x*) = 1; ∀ *x* |

[SECCIÓN 3] **1.2.1 La función cotangente**

Al determinar la función *y* = cot *α* como la función trigonométrica recíproca de la función *y* = tan *α*, tenemos:



Ya que cumple que:



Teniendo en cuenta las razones trigonométricas donde:



Tenemos que:



Y por la ley de extremos y medios llegamos a:



Así, la función *y* = cot *α* la podemos representar como:



Al iniciar el análisis de la función cotangente, podemos observar que es indeterminada para sen *α* = 0, es decir, para valores de *α* = *n*π, con *n* ∈ ℤ, así que hemos determinado que en estos valores, la función *y* = cot *α* tiene asíntotas verticales.

Teniendo en cuenta la relación de la función cotangente con el coseno y el seno del ángulo *α*, podemos construir un bosquejo de la gráfica, observa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG14 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Bosquejo de la gráfica de la función *y* = cot *α* en el intervalo [0, 2π]. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Analizando la gráfica de la función *y* = cot *α* en el intervalo [0, 2π], podemos deducir que cumple con las siguientes características:

* El dominio corresponde a todos los números reales, excepto los valores de la forma *n*π, con *n* ∈ ℤ.
* El rango es el conjunto de los números reales ℛ.
* Los puntos de corte con el eje X corresponden a los valores donde cos *α* = 0.
* No interseca al eje Y*.*
* Tiene periodo igual a π.
* No posee valores máximos ni mínimos.

Al construir la gráfica de la función cotangente para todo su dominio, se tiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG15 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *y* = cot *α* teniendo en cuenta su dominio, rango, asíntotas y periodo. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Para analizar con mayor profundidad la función cotangente y su construcción, puedes visitar el link [[VER](http://www.geogebra.org/m/CxMQK9Ap?doneurl=%2Fsearch%2Fperform)].

[SECCIÓN 3] **1.2.2 La función secante**

La función *y* = sec *α* se define como la función recíproca de la función cos *α*, así, la función secante cumple que:



Porque:



El primer análisis que debemos hacer de la función secante son sus indeterminaciones, esto sucede cuando cos *α* = 0, es decir, cuando el ∡*α* toma valores como:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Cpm%20%5Cfrac%7B%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%20%5Cpm%20%5Cfrac%7B3%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%5Cpm%20%5Cfrac%7B5%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C%5Cpm%20%5Cfrac%7B7%5Cpi%20%7D%7B2%7D%2C...%2C%20%5Cfrac%7B%5Cleft%20%28%202n&plus;1%20%5Cright%20%29%5Cpi%20%7D%7B2%7D

Con *n* ∈ ℤ.

De esta forma tenemos que el dominio de la función secante son todos los números reales, excepto los que anulan la función coseno, es decir, cuando cos *α* = 0. En estos valores encontramos asíntotas verticales para *y* = sec *α*.

Tomando algunos valores de la función cos *α*, podemos construir un bosquejo de la gráfica de la función secante, observa la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG16 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Bosquejo de la gráfica de la función *y* = sec *α* en relación con la función cos *α*, en el intervalo [0, 2π]. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Analizando la gráfica de la función *y* = sec *α* en el intervalo [0, 2π], podemos deducir que cumple con las siguientes características:

* El dominio corresponde a todos los números reales, excepto los valores donde la función cos *α* = 0.
* El rango es el conjunto (–∞, –1] ∪ [1, ∞).
* No tiene puntos de corte con el eje X, en ningún valor de su dominio.
* La grafica interseca al eje Y en el punto de coordenadas (0, 1)*.*
* Tiene periodo igual a 2π.

Al construir la gráfica de la función secante para todo su dominio, se tiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG17 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *y* = sec *α* teniendo en cuenta su dominio, rango, asíntotas y periodo. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Para analizar con mayor profundidad la función secante, puedes visitar el link [[VER](http://www.geogebra.org/m/aMkHS28W?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Fcoseno%2By%2Bsecante%2Fmaterials%2F%2Fpage%2F1%2Fr%2F0)].

[SECCIÓN 3] **1.2.1 La función cosecante**

Al definir la función cosecante (csc) como la función recíproca de seno, tenemos:



Porque al multiplicar la función *y* = csc *α* por la función sen *α* tenemos:



Ahora, para empezar el análisis de la función cosecante, debemos tener en cuenta las indeterminaciones que presenta, es decir, donde sen *α* = 0 y para ello, debemos descartar de su dominio los valores para *α* = 0, ±π, ±2π, ±3π, ±4π,… , *n*π, para *n* ∈ ℤ. En estos valores del ∡*α* encontramos asíntotas verticales.

Teniendo en cuenta las asíntotas, el dominio y algunos valores para la función sen *α*, podemos trazar un bosquejo de la gráfica de la función cosecante, observa:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG18 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Bosquejo de la gráfica de la función *y* = csc *α* en relación con la función sen *α*, en el intervalo [0, 2π]. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Al analizar el segmento de gráfica de la función *y* = csc *α*, podemos deducir que cumple con las siguientes características:

* El dominio corresponde a todos los reales menos los múltiplos de π.
* El rango de es el conjunto (–∞, –1] ∪ [1, ∞)
* No tiene puntos de corte con los ejes X o Y en ningún valor de su dominio.
* Es una función periódica, cuyo periodo es 2π.

Al construir la gráfica de la función cosecante para todo su dominio, se tiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG19 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *y* = csc *α* teniendo en cuenta su dominio, rango, asíntotas y periodo. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Para analizar con mayor profundidad la función secante, puedes visitar el link [[VER](http://www.geogebra.org/m/Y3cfGC5Z?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Ffunci%25C3%25B3n%2Bcosecante%2Fmaterials%2F%2Fpage%2F3%2Fr%2F0)].

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC40 |
| **Título** | Determina valores de las funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad para hallar valores de ángulos teniendo en cuenta las gráficas de las funciones trigonométricas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC50 |
| **Título** | Analiza graficas de funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad para analizar gráficas y características de funciones trigonométricas |

[SECCIÓN 2] **1.3 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC60 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las funciones trigonométricas y sus recíprocas |
| **Descripción** | Actividades sobre Las funciones trigonométricas y sus recíprocas |

[SECCIÓN 1] **2 El análisis de gráficas de funciones trigonométricas**

Las funciones trigonométricas permiten modelar, entre otras aplicaciones, el comportamiento de ondas de radio, sin embargo, estas representaciones no utilizan directamente las funciones trigonométricas generales, sino se aplican transformaciones de estas: traslaciones, reflexiones, compresiones, alargamientos, cambios en sus periodos, amplitud y desfases.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG20 |
| **Descripción** | Las imágenes de las ondas se encuentran en: Shutterstock 157764617. Se deben traducir los términos como se muestra en la imagen. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Modelación de diferentes ondas de radio aplicando transformaciones a algunas funciones trigonométricas.  ¿Puedes identificar las funciones trigonométricas que se utilizaron para modelar las ondas? |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC70 |
| **Título** | Analiza las gráficas de funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Interactivo que expone las diferentes transformaciones a las gráficas de funciones trigonométricas |

[SECCIÓN 2] **2.1 La traslación de funciones**

La traslación en términos geométricos se define como el movimiento de cada punto en una dirección dada, una distancia constante, en otras palabras, es cambiar de posición una figura u objeto sin que este cambie de forma, tamaño o dirección con respecto a un punto, es decir, no rota.

Se pueden presentar dos diferentes tipos de traslaciones: vertical y horizontal, y cuando se presentan las dos al mismo tiempo se denomina traslación oblicua, sin embargo, en términos generales, siempre se puede descomponer una traslación en vertical y horizontal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG21 |
| **Descripción** | La imagen del cuadro fue de shutterstock: 234410887 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La imagen presenta una traslación oblicua que se puede descomponer en una traslación horizontal y una traslación vertical, por lo tanto la imagen no cambia su forma ni su tamaño y tampoco gira. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Las funciones trigonométricas como cualquier otra función, pueden presentar traslaciones, incidiendo directamente en el dominio y/o en el rango.

[SECCIÓN 3] **2.1.1 Las traslaciones verticales**

Trasladar verticalmente una función equivale a cambiar la altura de todos los puntos que la componen.

Analíticamente, para una función trigonométrica *f* (*x*) podemos trasladarla verticalmente *C* unidades sumando una constante *C* a la función, es decir:

*f* (*x*) + *C*

Si el valor *C* es positivo, el gráfico original de la función *f* (*x*) se traslada verticalmente hacia arriba, y si el valor de la constante *C* es negativo, el gráfico baja *C* unidades.

Ejemplo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG22 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de traslaciones verticales de la función *y =* sen *x* |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

A partir del gráfico, podemos observar que:

* La función *y*'= sen *x* + 1 tiene un desplazamiento o traslación de una unidad hacia arriba con respecto a la función *y* = sen *x*.
* La función *y*'' = sen *x* – 1 presenta desplazamiento de una unidad hacia abajo con respecto a la función *y =* sen *x*.

Al analizar las gráfica *y*' y *y*'' que representan las traslaciones de la función *y* = sen *x*, podemos deducir que las traslaciones verticales de una función, modifican las segundas componentes (ordenadas) de la función original, cambiando así el rango de la función final:

* La función *y* = sen *x* tiene un rango [–1, 1]
* La función *y*'= sen *x* + 1 tiene un rango [0, 2]
* La función *y*'' = sen *x* – 1 tiene un rango [–2, 0]

Mientras que el dominio de las tres funciones se mantiene en ℛ.

En general, ocurre lo mismo para las demás funciones trigonométricas, ya que los desplazamientos verticales afectan:

* El rango solo de las funciones: seno, coseno, secante y cosecante.
* Puntos de corte con el eje X.

Debes tener en cuenta que los desplazamientos verticales no afectan el dominio, asíntotas o periodo de las funciones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Una traslación vertical de la función *f* (*x*) tiene la forma:  *f '* (*x*) = *f* (*x*) + *C*  Donde *C* ∈ ℛ cumple que:   * Si *C* > 0, la traslación es hacia arriba. * Si *C* < 0, la traslación es hacia abajo. * Si *C* = 0, no hay traslación. |

[SECCIÓN 3] **2.1.2 Las traslaciones horizontales**

Las traslaciones horizontales de una función *f* (*x*) modifican la primera componente (abscisa) de los puntos que forman el gráfico de esta función, por lo tanto una traslación horizontal es, analíticamente, de la forma:

*f* (*x+D*)

Donde *D* ∈ ℛ y cumple que:

* Si *D* > 0, la traslación es hacia la izquierda *D* unidades.
* Si *D* < 0, la traslación será *D* unidades hacia la derecha.
* Si *D* = 0, no hay traslación.

Ejemplo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG23 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica del desplazamiento horizontal de la función *y =* sen *x*, π/6 a la izquierda. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Al analizar la gráfica *y*' que representa la traslación de π/6 hacia la izquierda de la función *y* = cos *x*, podemos deducir que las traslaciones horizontales de una función, modifican las primeras componentes (abscisas) de la función original lo cual no altera ninguna de sus características básicas como dominio, rango, periodo, amplitud, etc, únicamente cambia:

* Los puntos de corte con el eje X en aquellas funciones que los tienen como seno y coseno.
* Las asíntotas verticales en las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Las traslaciones horizontales tienen la forma:  *f* ' (*x + D*)  Si el valor *D* es positivo, el gráfico original de la función *f* (*x*) se traslada horizontalmente hacia la izquierda, y si el valor de la constante *D* es negativo, el gráfico se desplaza *D* unidades hacia la derecha. |

[SECCIÓN 2] **2.2 La reflexión de funciones**

La reflexión definida geométricamente, corresponde a la imagen que se obtiene de todos los puntos de una figura a través de un movimiento rígido equidistante con respecto a una recta, denominada eje de reflexión, es decir, que cada punto de la figura y su imagen, mantienen igual distancia con respecto al eje de reflexión y que la figura original no cambia de forma ni de tamaño.

Es común que la primera imagen que se asocie a la reflexión geométrica sea el efecto que causa un espejo, siendo el espejo el eje de reflexión, pues este cumple con la definición antes expuesta.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG24 |
| **Descripción** | Ilustrar: |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El espejo se denomina el eje de reflexión y todos los puntos de la imagen original así como los de la imagen resultante, equidistan del eje entre sí. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Lateral |

Analíticamente podemos representar las reflexiones de la función *f* (*x*) con respecto al eje X y Y como:

* Reflexión de *f* (*x*) con respecto al eje X:

*f* ' (*x*) = *f* (– *x*)

* Reflexión de *f* (*x*) con respecto al eje Y:

*f* ' (*x*) = – *f* (*x*)

Observa la reflexión de la función *y* = tan *x* con respecto al eje Y.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG25 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la reflexión de la función tangente con respecto al eje Y. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Al analizar la gráfica de *y* = tan *x* y su reflexión con respecto al eje Y podemos observar que sus características básicas como dominio, rango, periodo y asíntotas se mantienen.

Observa la gráfica que se obtiene al reflejar la función tangente con respecto al eje X:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG26 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Al reflejar la función *y* = tan *x* con respecto al eje X, se obtiene la misma gráfica que al reflejarla con respecto al eje Y, es decir que –tan *x* = tan –*x*. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Las reflexiones con respecto al eje X y al eje Y están relacionadas directamente con las funciones pares e impares.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Una función *f* (*x*) es:   * Par si solo sí *f* (*x*) =  *f* (–*x*) ∀ *x* ∈ dominio de *f*. * Impar si solo sí *f* (–*x*) = – *f* (*x*) para todo *x* ∈ dominio de *f* |

En términos generales tenemos que:

* Las funciones pares son aquellas que al reflejarlas con respecto al eje Y, obtenemos el mismo gráfico de la función original.
* Las funciones impares son aquellas que al reflejarlas con respecto al eje Y, obtenemos la misma imagen que la reflexión con respecto al eje X de la función original.

En el caso de las funciones trigonométricas, obtenemos, de acuerdo con el análisis de las reflexiones que presentan, la siguiente clasificación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Clasificación de las funciones trigonométricas de acuerdo con sus reflexiones** | |
| **Funciones pares** | **Funciones Impares** |
| cos *x* | sen *x* |
| tan *x* |
| sec *x* | cot *x* |
| csc *x* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC80 |
| **Título** | Practica la traslación y la reflexión de las gráficas de funciones |
| **Descripción** | Actividad para asociar una gráfica de reflexión o traslación a la función que la describe |

[SECCIÓN 2] **2.3 La compresión y alargamiento de funciones**

Movimientos rígidos como la traslación y la reflexión no generan cambios de forma ni de tamaño en una figura, sin embargo, existen transformaciones como la compresión o alargamiento que producen una *deformación* de la figura inicial, que a su vez puede ser descrita de forma analítica, para el caso de las funciones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG27 |
| **Descripción** | Shutterstock: 102840389  http://thumb7.shutterstock.com/display_pic_with_logo/357475/102840389/stock-photo-young-woman-and-deformation-mirror-102840389.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En algunas ferias o circos podemos encontrar espejos que deforman la figura que reflejan, comprimiendo o alargando la imagen original, generando imágenes jocosas. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Lateral |

Las funciones pueden presentar compresiones o alargamientos verticales y horizontales.

[SECCIÓN 3] **2.3.1 La compresión y alargamiento vertical de funciones**

Al comprimir o alargar verticalmente el gráfico de una función, se modifica la altura de los puntos que la forman.

Para la función original *f* (*x*), se puede representar una deformación vertical analíticamente así:

*f* ' (*x*) = *B f* (*x*)

Donde la constante *B* ∈ ℛ y presenta:

* Una elongación o alargamiento vertical de la gráfica original, si |*B*|> 1.
* Una compresión vertical de la gráfica original si |*B*|< 1.

Ejemplo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG28 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la compresión y alargamiento vertical de la función *y* =sen *x.* |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Analizando las gráficas resultantes de *y*' y *y*'' podemos deducir que la compresión o alargamiento vertical de las funciones afectan directamente, en el caso de la función seno su rango y por otro lado, sus características como dominio y periodo se mantienen igual, esto debido a que las compresiones o alargamientos verticales modifican las segundas componentes (ordenadas).

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Una comprensión o alargamiento vertical de la función *f* (*x*) presenta la forma analítica:  *f* ' (*x*) = *B f* (*x*)  Donde *B* es una constante que pertenece a los números reales y cumple que:   * Si |*B*| > 1, la función presenta un alargamiento vertical. * Si |*B*| < 1, la función presenta una compresión vertical. |

[SECCIÓN 3] **2.3.2 La compresión y alargamiento horizontal de funciones**

La compresión o alargamiento horizontal produce un cambio directo en las primeras componentes (abscisas) de los puntos que forman la gráfica original.

En el caso de una función *f* (*x*), un alargamiento o una compresión se presenta en la forma:

*f* ' (*x*) = *f* (*Ax*)

Donde *A* ∈ ℛ, cumple que:

• Si |*A*| > 1, la gráfica se contrae horizontalmente por un factor de 1/*A*.

• Si |*A*| < 1, la gráfica se alarga horizontalmente por un factor de 1/*A*.

Observa cómo funcionan estas transformaciones con los gráficos de una función trigonométrica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG29 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la compresión y alargamiento horizontal de la función *y* =sen *x.* |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Analizando las gráficas resultantes de *y*' y *y*'' podemos deducir que la compresión o alargamiento horizontal de las funciones no afectan, en el caso de la función seno, su rango ni su dominio, pero si afecta su periodo.

En el caso de las funciones que tienen asíntotas verticales, la comprensión o alargamiento horizontal también las modifica debido a que se afectan las segundas componentes (ordenadas).

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Una comprensión o alargamiento horizontal de la función *f* (*x*) presenta la forma analítica:  *f* ' (*x*) = *f* (*Ax*)  Donde *A* es una constante que pertenece a los números reales y cumple que:   * Si |*A*| > 1, la función se contrae horizontalmente por un factor de 1/*A*. * Si |*A*| < 1, la función se alarga horizontalmente por un factor de 1/*A*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC90 |
| **Título** | Identifica la compresión y alargamiento de funciones |
| **Descripción** | Actividad para identificar en una gráfica la compresión o el alargamiento y asociarla a la función correspondiente |

[SECCIÓN 2] **2.4 La amplitud de las funciones**

La amplitud es una característica de movimientos ondulatorios u oscilatorios, esta describe la magnitud de la oscilación, y por lo tanto la amplitud de una curva que se construye a partir de la función seno o la función coseno.

Analíticamente, la amplitud es el valor |*B*| del factor por el que se multiplica una función seno o coseno, o alguna de sus variaciones a través de transformaciones:

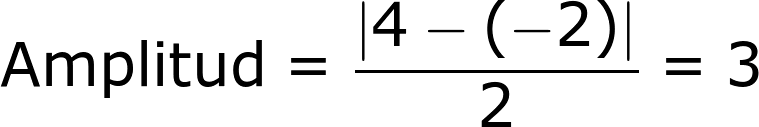
*B* sen (*Ax* + *D*) + *C*

*B* cos (*Ax* + *D*) + *C*

Ejemplo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG30 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función *y* = 3sen *x* + 1 cuya amplitud es igual a 3. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

En la gráfica de la función *y* = 3sen *x* + 1, podemos observar que su máximo valor es 4 y su valor mínimo es –2, por tanto la amplitud también puede definirse como el valor absoluto de la mitad de la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la función, así:



De esta manera puedes determinar la amplitud determinando el valor absoluto la diferencia entre el máximo y el mínimo valor a partir del gráfico, o bien determinar este valor a partir de la expresión analítica de la función.

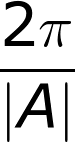
[SECCIÓN 2] **2.5 El periodo de las funciones**

El intervalo en el que se repite la porción principal de una gráfica se denomina periodo.

Para las funciones trigonométricas seno y coseno:

*y* = *B* sen (*Ax* + *D*) + *C y* = *B* cos (*Ax* + *D*) + *C*

Se puede definir una fórmula que nos permite calcular su periodo, así:



Y un intervalo apropiado para realizar un bosquejo de la porción principal de la gráfica es:

****

Ejemplo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG31 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *y* = 4cos *x*, tiene un periodo de π/ 2. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Ten presente que las funciones tangente y cotangente no están incluidas en la fórmula para hallar el periodo antes expuesta, de hecho, si las consideramos a través de transformaciones de la forma:

*y* = *B* tan *(Ax* + *D*) + *C*  *y* = *B* cot *(Ax* + *D*) + *C*

Su periodo está determinado por:



|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Una función es periódica cuando su comportamiento se repite en intervalos regulares, es decir *f (x)* es una función periódica, si existe un número real *p >* 0 tal que:  *f* (*x* + *p*) = *f (x),*  ∀ todo *x* ∈ dominio de *f*.  Al menor número *p* que tiene la propiedad anterior se denomina el período de *f*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC100 |
| **Título** | Determina el periodo de funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad para determinar el periodo de una función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC120 |
| **Título** | Identifica la amplitud y el periodo de funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad para determinar la amplitud y el periodo de una función y la expresión algebraica que la describe |

[SECCIÓN 2] **2.6 El desfase de las funciones**

Si consideramos una función *f* (*x*) como una función trigonométrica, podemos representar analíticamente sus diferentes transformaciones de la forma:

*Bf* (*Ax* + *D*) + *C*

Con *A*, *B*, *C* y *D* constantes reales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Si *f* (*x*) es una función trigonométrica, las transformaciones de la función definidas como:  *y* = *Bf* (*Ax* + *D*) + *C*  Determinan:   * *B*: Compresión o alargamiento vertical. * *A*: Compresión o alargamiento horizontal. * *D*: Traslación horizontal. * *C*: Traslación vertical. |

Como se puede evidenciar, estas constantes modifican de diferentes maneras el gráfico de la función *f* (*x*), sin embargo, una pregunta natural que surge es: si se conocen los valores de las constantes *A*, *B*, *C* y *D*, ¿cómo se puede saber qué tanto se ha desplazado horizontalmente la función *Bf* (*Ax* + *D*) + *C* resultante con relación a la función *Bf* (*Ax*)?

La respuesta a esta pregunta es precisamente lo que se denomina desfase.

El desfase de una función trigonométrica de la forma *Bf* (*Ax* + *D*) + *C*, con relación a la función *Bf* (*Ax*), es el número:



|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Desfase de una función trigonométrica** |
| **Contenido** | El desfase de una función trigonométrica de la forma  *Bf* (*Ax* + *D*) + *C*  Depende de dos parámetros: *A* y *D*; es decir, depende de una ampliación (o contracción) y de una traslación.  El valor *D*/*A* representa la cantidad de unidades que se desplazó (desfasó) la función horizontalmente con relación a la función *Bf* (*Ax*) en la que solo hay ampliaciones (o contracciones) pero no hay traslaciones. |

El desfase de la función *Bf* (*Ax + D*) + *C*, no es el valor *D* como se podría intuir al hablar de desplazamiento horizontal, observa por qué con la siguiente forma de re-escribir la función:

Al analizar esta representación, se puede deducir que primero hay una traslación de *D/A* y luego una ampliación (contracción) de *A* unidades.

Para el desfase se aplican las mismas reglas de un desplazamiento horizontal, sin embargo en este caso es necesario evaluar el parámetro *D*/*A*:

* Si *D*/*A* > 0, el desfase es hacia la izquierda.
* Si *D*/*A* < 0, el desfase es hacia la derecha.

Ejemplo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG32 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función 2sen (4*x* – π) tiene un desplazamiento de fase de π/4 hacia la derecha, como puedes observar al comparar las dos gráficas. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Para analizar con mayor profundidad el desfase de las funciones seno y coseno, visita el link [[VER](http://www.geogebra.org/m/AUbsEpGa?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Fdesfase%2Fmaterials%2F)] y cambia los valores a las constantes para ver el comportamiento de las gráficas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC110 |
| **Título** | Analiza diferentes características en las gráficas |
| **Descripción** | Actividad para analizar y determinar la función a partir de condiciones dadas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC130 |
| **Título** | Analiza transformaciones de las funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad que permite el análisis de las trasformaciones de las funciones trigonométricas |

[SECCIÓN 2] **2.7 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_REC150 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: El análisis de gráficas de funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividades sobre El análisis de gráficas de funciones trigonométricas |

[SECCIÓN 1] **3 Las funciones trigonométricas inversas**

Antes de abordar las funciones inversas trigonométricas recordemos algunos conceptos básicos:

**Función inyectiva**

Una función es inyectiva o uno a uno, si cada elemento *f* (*x*) del rango tiene un único valor en el dominio. Es decir dada la pareja ordenada (*x*, *y*) que pertenece a la función, los valores de *y* no se repiten.

Por ejemplo, al analizar la función *f* (*x*) = 3*x*² + 1 en algunos puntos específicos, obtenemos valores como:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Tabla de valores para *f* (*x*) = 3x² + 1** | | | | | |
| ***x*** |  |  |  |  |  |
| ***f* (*x*)** | 13 | 4 | 1 | 4 | 13 |

Por lo que podemos afirmar que en la función *f* (*x*) = 3*x*² + 1, los valores de *y* son generados por más de un elemento *x* del dominio, por tanto esta función no es inyectiva.

Existe otra forma de verificar si una función es inyectiva a través de su gráfica, con el uso de la prueba de la recta horizontal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG33 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La prueba de la recta horizontal consiste en trazar en cualquier punto de la gráfica de la función una recta horizontal, de tal forma que si llega a cortar la gráfica en más de un punto, la función no es inyectiva. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

De acuerdo con la prueba de la recta horizontal, la función *f* (*x*) = 3*x*² + 1 no es inyectiva, puesto que las rectas horizontales trazadas demuestran claramente que cortan en más de un punto a la gráfica de la función.

Veamos ahora la función *f* (*x*) = 5*x*³, que de acuerdo con la prueba de la recta horizontal si resulta ser una función inyectiva.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG34 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f* (*x*) = 5*x*³ es inyectiva, pues además de cumplir con la prueba de la recta horizontal, podemos verificar que cada valor *y* del rango es generado por un único valor *x* del dominio de la función. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Una función es inyectiva o uno a uno si *f* (*x*1) = *f* (*x*2) entonces *x*1 = *x*2. |

De acuerdo con la clasificación de las funciones en inyectivas o no inyectivas, podemos iniciar la definición de las funciones inversas, así:

Sea *f* (*x*) una función cualquiera, se cumple que:

* Si *f* (*x*) es una función uno a uno o inyectiva, existe una función *f* –1 (*x*) definida como su inversa.
* Si *f* (*x*) no es una función inyectiva o uno a uno, no existe una *f* –1 (*x*) definida como su inversa, ∀ *x* ∈ al dominio de *f* (*x*).

Ahora que podemos determinar qué tipos de funciones pueden o no tener función inversa, partamos de la definición formal para las funciones inversas:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de función inversa** |
| **Contenido** | Sea *f* una función inversa con dominio *Af* y rango *Bf*. Si existe una función *g* con dominio *Ag* y rango *Bg*, tal que:   * *f* (*g* (*x*)) = *x* ∀ *x* ∈ *Ag* * *g* (*f* (*x*)) = *x* ∀ *x* ∈ *Af*   Entonces decimos que las funciones *f* y *g* son inversas la una de la otra. |

La función inversa cumple con las siguientes propiedades:

* La función inversa de *y* = *f* (*x*) se denota como *y* = *f* –1 (*x*).
* Para cada par ordenado (*x*, *y*) de la función *f*, existe una pareja ordenada (*y*, *x*) que pertenece a la función *f* –1 (*x*).
* El dominio de *f* (*x*) es el rango de *f* –1 (*x*).
* El rango de *f* (*x*) es el dominio de *f* –1 (*x*).
* Las funciones *f* (*x*) y *f* –1 (*x*) son reflexivas entre sí, con respecto a la recta *y* = *x*.

Debes tener en cuenta que:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20f%5E%7B-1%7D%28x%29%20%5Cneq%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bf%28x%29%7D

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Cleft%20%28f%5Cleft%20%28x%20%5Cright%20%29%20%5Cright%20%29%5E%7B-1%7D%20%3D%20%5Cfrac%7B1%7D%7Bf%28x%29%7D

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | * Solo las funciones inyectivas o uno a uno tienen función inversa. * Para que una función que no es inyectiva o uno a uno tenga inversa, se puede restringir su dominio. * Si una función tiene inversa se debe cumplir que cada elemento del rango le debe corresponder uno y solo uno del dominio. |

Con respecto a las funciones trigonométricas, debido a su periodicidad solo se pueden definir sus inversas en un intervalo específico para que cumpla con las condiciones antes expuestas.

[SECCIÓN 2] **3.1 La función arcoseno**

Teniendo en cuenta que la función seno es una función periódica por tanto no es una función inyectiva o uno a uno para todo su dominio, podemos limitar el trabajo al intervalo:

En el cual están definidos todos los valores que adquiere la función *y* = sen *x*, obteniendo una función inyectiva y creciente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG35 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función *y* = sen *x*, limitando su intervalo para obtener una función inyectiva que permita hallar su inversa. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Gracias a la limitación descrita de la función seno, podemos determinar su función inversa denominada arcoseno y definida analíticamente así:

*y* = arcsen *x* ⇔ sen *y* = *x*

Donde:

* –1 ≤ *x* ≤ 1
* El dominio de *y* = arcsen *x* es [–1, 1].
* El rango de *y* = arcsen *x* es [–π/2, π/2].

Ten en cuenta que la función arcoseno también se denota:

*y* = arcsen *x* = sen–1 *x*

Utilizando la definición de función inversa podemos plantear las siguientes relaciones:

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Ctext%7Bsen%7D%5E%7B-1%7D%5Cleft%20%28%5Ctext%7Bsen%7D%5Cleft%20%28x%20%5Cright%20%29%20%5Cright%20%29%3Dx%20%5Ctext%7B%20para%20%7D-%5Cfrac%7B%5Cpi%20%7D%7B2%7D%5Cleq%20x%5Cleq%20%5Cfrac%7B%5Cpi%20%7D%7B2%7D

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20%5Ctext%7Bsen%7D%5Cleft%20%28%5Ctext%7Bsen%7D%5E%7B-1%7D%5Cleft%20%28x%20%5Cright%20%29%20%5Cright%20%29%3Dx%20%5Ctext%7B%20para%20%7D-1%5Cleq%20x%5Cleq%201

Observa la gráfica de la función *y* = arcsen *x*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG36 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función *y* = arcsen *x*. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Para hallar el valor de la función arcsen puedes hacer un análisis de la gráfica, así:

Ejemplo.

Para determinar los valores de:

Podemos analizar el intervalo [–π/2, π/2]

* El número en el intervalo donde

Es

* El número en el intervalo donde

Es

* El número en el intervalo donde

Es

[SECCIÓN 2] **3.2 La función arcocoseno**

Se reconoce la función coseno al igual que la función seno, como una función periódica de manera que no es una función inyectiva para todo su dominio, sin embargo al limitarlo en el intervalo [0, π] se obtiene una función inyectiva y decreciente, donde están definidos los valores del coseno una sola vez.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG37 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función coseno delimitado su dominio en el intervalo [0, π] para obtener una función inyectiva que permita hallar su inversa. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

A partir de la limitación en el dominio de la función coseno, se denomina la función arcocoseno a la función inversa de coseno y está definida como:

*y* = arccos *x* ⇔ cos *y* = *x*

Donde:

* –1 ≤ *x* ≤ 1
* 0 ≤ *y* ≤ π
* El dominio de la función *y* = arccos *x* es [–1, 1].
* El rango de la función *y* = arccos *x* es [0, π].

Aplicando la definición función inversa podemos concluir las siguientes afirmaciones:

cos–1 (cos (*x*)) = *x* para 0 ≤ *x* ≤ π

cos (cos–1 (*x*)) = *x* para –1 ≤ *x* ≤1

Ten en cuenta que la función arcocoseno también se denota:

*y* = arccos *x* = cos–1 *x*

Observa la gráfica de la función *y* = arccos *x*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_03\_CO\_IMG38 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función *y* = arccos *x*. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Para hallar el valor de la función arccos puedes hacer un análisis de la gráfica o uso de la calculadora, así:

Ejemplo.

Para determinar los valores de:

Podemos analizar el intervalo [0, π].

* El número en el intervalo donde cos *y* = 1 es *y* = 0.
* El número en el intervalo donde cos *y* = 0 es *y* = π /2 .
* El número en el intervalo cuando cos *y* = 3/7, se halla el valor de *y* usando una calculadora, ya que no existe un múltiplo racional de π cuyo coseno sea 3/7. Se obtiene:

[SECCIÓN 2] **3.3 La función arcotangente**

[SECCIÓN 2] **3.4 La función arcocotangente**

[SECCIÓN 2] **3.5 La función arcosecante**

[SECCIÓN 2] **3.6 La función arcocosecante**

[SECCIÓN 2] **3.7 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 (Se numeran de 10 en 10) |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** |  |
| **Contenido** |  |

[SECCIÓN 2] **1.1 Subtítulo sección**

[SECCIÓN 1] **2 Título**

[SECCIÓN 2] **2.1 Subtítulo sección**

[SECCIÓN 3] **2.1.1 Sub-subtítulo sección**

(No es posible tener una Sección 4)

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 | |
| **Web 01** | *Título* | *URL* |
| **Web 02** | *Título* | *URL* |
| **Web 03** | *Título* | *URL* |