|  |  |
| --- | --- |
| **Titulo del guion** | Las funciones |
| **Código de guion** | MA\_09\_04\_CO |
| **Descripción** | Las funciones matemáticas modelan situaciones en todos los campos de la ciencia. Conoce qué es una función, sus características, representaciones y propiedades. |

[SECCIÓN 1] **1. El concepto de función**

Las **funciones** matemáticas se utilizan para relacionar dos variables que intervienen en un determinado fenómeno y, de esta manera, estudiar cómo cambia una de las variables cuando varía la otra. Existen muchos tipos de funciones y se emplean en casi todos los campos de la ciencia como la Física, la Biología, la Economía, la Arquitectura, la Ingeniería, etc.

Ejemplos:

* Los kilómetros recorridos por un automóvil a medida que transcurre el tiempo.
* La reproducción de una bacteria en un objeto y tiempo transcurrido.
* La presión atmosférica y la profundidad del océano.
* El precio por pagar de una factura de servicio público y el consumo.
* El perímetro de un cuadrado al variar la medida de sus lados.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_IMG01 |
| **Descripción** | Recibo acueducto y alcantarillado |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://www.acueducto.com.co/wpsv61/wps/html/swf/noticias/FacturaMinVital.jpg |
| **Pie de imagen** | El total por pagar en la factura de acueducto es el resultado de la aplicación de una función del consumo correspondiente. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Parte inferior |

Una **función** matemática entre dos variables *x*, *y*, asigna a cada valor de *x* o **variable independiente** un único valor de *y* o **variable dependiente**.

El conjunto de valores que puede tomar la **variable independiente**  se denomina ***dominio*** de la función.

La **variable dependiente** o **imagen** se representa con ***y*** o ***f*(*x*)**. El conjunto de valores que puede tomar, o conjunto de llegada, recibe el nombre de ***recorrido*** de la función. En la función *f*(*a*) = *b* se dice que *b* es la **imagen** de *a*.

Las funciones matemáticas se pueden representar por medio de una tabla, una gráfica, una expresión matemática y en forma verbal en lenguaje común.

* La representación de la función *y* = *f*(*x*) = 2*x* en una **tabla de valores** es

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| *f*(*x*) | –4 | –2 | 0 | 2 | 4 |

* Observa la **representación gráfica** de la función *y* = *f*(*x*) = *x3* en el plano cartesiano.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_IMG02 |
| **Descripción** | Gráfica de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 4\imagenes guion 4\MA_S1_04_IMG15_F1.JPG  DEJAR EN EL EJE X HASTA 3 Y -3. |
| **Pie de imagen** | *y* = *f*(*x*) = *x3* |
| **Ubicación del pie de imagen** | Parte inferior de la gráfica |

Por medio de una **ecuación** se representa la función *y* = 2*x* + 3.

Finalmente, un ejemplo de representación de una función en **lenguaje común** es:

Cantidad de dinero recibida en cierto tiempo por un conductor de transporte masivo si el pasaje cuesta $1800 pesos.

Los siguientes son ejemplos de funciones.

* *f*(*x*) = 2, a todos los valores de *x* se les asigna el valor de 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *f*(*x*) | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

* *f*(*x*) = *x*, a todos los valores de *x* se les asigna el mismo valor en *y*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *f*(*x*) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

* *f*(*x*) = 2x, cada valor de *x* se multiplica por 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *f*(*x*) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |

* El consumo de energía eléctrica tiene un cargo fijo de $3500 y cada kilovatio consumido cuesta $250. Luego la función aplicada para determinar el valor total por pagar por el consumo de energía eléctrica es igual a *f*(*x*) = 3500 + 250x.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *f*(*x*) | 3500 | 3750 | 4000 | 4250 | 4500 | 4750 | 5000 | 5250 | 5500 |

[SECCIÓN 2**] 1.1 Las funciones definidas a trozos**

En la mayoría de los casos, al definir una función se hace con una sola expresión matemática como, por ejemplo, *f*(*x*) = 3*x* + 1; pero existen otras funciones que se pueden definir con más de una expresión matemática dependiendo de los subconjuntos o tramos del dominio. Estas funciones reciben el nombre de **funciones definidas por trozos** o **función por partes**. A continuación se definen estas funciones por medio de un ejemplo.

Una empresa de mensajería tiene el siguiente listado de precios de envío desde una ciudad a cualquier parte del país. El precio varía dependiendo del peso del paquete.

|  |  |
| --- | --- |
| **Peso del paquete en gramos** | **Valor envío en pesos** |
| Hasta 200 g | $250 |
| Más de 200 g y hasta 500 g | $500 |
| Más de 500 g y hasta 1000 g | $1000 |
| Más de 1000 g y hasta 2000 g | $2000 |

Se puede observar que la **variable independiente** *x* es el peso del paquete, y la **variable dependiente** es el valor del envío. La función que se establece entre el peso del paquete y el valor de envío no se puede representar con una sola expresión matemática, por tal motivo *f*(*x*) se puede interpretar así:

<<MA\_09\_04\_001.gif>>

Si el peso es menor o igual que 200 g se debe pagar $250; si el peso es mayor que 200 g pero menor o igual que 500 g se paga $500 pesos; si el peso es mayor que 500 g pero menor o igual que 1000 g se paga $1000 pesos; y finalmente, si el peso es mayor que 1000 g pero menor o igual que 2000 g se paga $2000.

En el ejemplo, los diferentes intervalos o partes en que se divide el dominio de la función se representan gráficamente como trozos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_IMG03 |
| **Descripción** | Gráfica de la función por trozos del peso de un paquete y el costo del envío. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 4\imagenes guion 4\MA_S1_04_IMG01_F1.JPG  COLOCAR UN CERO Peso en gramos y Costo en pesos |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función definida a trozos del peso de un paquete y el costo del envío. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Parte inferior de la gráfica |

En la gráfica, los círculos pequeños al comienzo de los tres segmentos de línea indican, respectivamente, que 200 g, 500 g y 1000 g no se incluyen en ese intervalo, sino que hacen parte del inmediatamente anterior.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC20 |
| **Título** | Comportamiento de las funciones a trozos |
| **Descripción** | Actividad para reconocer las formas algebraicas de los trozos de una función |

[SECCIÓN 2**] 1.2 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica : recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_CO\_REC50 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones / El concepto de función/practica/El concepto de función |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | * Quitar del encabezado en las tres preguntas lo que está encerrado en rojo lo demás dejarlo igual      * En la segunda pregunta cambiar el enunciado encerrado en rojo por:   ¿Cuáles de los siguientes enunciados se pueden representar por medio de una función? En el caso de que lo sean, escribe su expresión matemática y represéntala gráficamente.     * En la tercera pregunta en el enunciado cambiar la palabra encerrada en rojo “y pon” por “da”: |
| **Título** | Consolidación de lo aprendido sobre el concepto de función. |
| **Descripción** | El recurso pone a prueba lo aprendido sobre el concepto de función. |

[SECCIÓN 1**] 2 La representación gráfica de funciones**

La **representación gráfica de una función** en el **plano cartesiano** consiste enque acada punto de la función le corresponden dos coordenadas, una en el eje *X* y otra en el eje *Y*. Las coordenadas en el eje *X* pertenecen al dominio y las del eje *Y* a la imagen. Se denominan coordenadas cartesianas en honor a **René Descartes** (1596-1650); son dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en un punto denominado origen.

En general, **la representación gráfica de una función** es el conjunto de puntos en el plano cartesiano que representan la función; los puntos son de la forma (*x*, *f*(*x*)) o (*x*, *y*). Como la mayoría de las funciones se definen en los conjuntos numéricos, es imposible ubicar todos los puntos que determinan la función, ya que son infinitos. Por este motivo, solo se representan algunos puntos de la función y con ellos se traza una gráfica aproximada de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_IMG04 |
| **Descripción** | Gráfica de una función en el plano cartesiano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img2_small.jpg>  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img2_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de una función en el plano cartesiano. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Parte inferior de la gráfica |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Representación gráfica de funciones positivas y funciones negativas** |
| **Contenido** | Las funciones pueden tener signo positivo o negativo y su representación gráfica se determina así.   * Una función es positiva cuando su gráfica está por encima del eje *X*. * Una función es negativa cuando su gráfica está por debajo del eje *Y*. * Algunas funciones tienen tramos positivos y negativos. |

Para representar gráficamente la función *f*(*x*) = 2*x* + 1, *x* ∈ ℝ, se ubican las parejas de coordenadas (*x*, *y*) o (*x*, *f*(*x*)) en una tabla de valores. Como *x* pertenece a los números reales, se le asignarán valores reales a *x* para calcular los valores de *y* o *f*(*x*). Observa.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | 1 | –1 | 2 | –2 | 3 | –3 | 4 | –4 |
| *f*(*x*) | 1 | 3 | –1 | 5 | –3 | 7 | –5 | 9 | –7 |

A continuación se ubican estas coordenadas en el plano cartesiano.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_IMG05 |
| **Descripción** | Gráfica de la función *f*(*x*) = 2*x* + 1 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 4\imagenes guion 4\MA_S1_04_IMG02_F1.JPG  COLOCAR SOLO UN CERO |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *f*(*x*) = 2*x* + 1 |
| **Ubicación del pie de imagen** | Parte inferior de la gráfica |

Un criterio para determinar si una gráfica en el plano cartesiano representa una función es la de la **recta vertical**, que consiste en trazar una línea vertical más de una vez sobre la gráfica y si la interseca en más de un punto, esta no representará una función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC30 |
| **Título** | Criterio de la recta vertical |
| **Descripción** | Actividad para reconocer cuando una representación determina una función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC60 |
| **Título** | Representaciones de funciones |
| **Descripción** | Actividad para reconocer funciones representadas en un diagrama sagital |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC70 |
| **Título** | Gráficas y tablas de una función |
| **Descripción** | Interactivo para mostrar la gráfica de una función y la tabla de valores que la representa |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC80 |
| **Título** | Analizando las representaciones de una función |
| **Descripción** | Interactivo que permite analizar la gráfica, la tabla y la ecuación de una función |

[SECCIÓN 2**] 2.1 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica : recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_CO\_REC90 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones / La representación de funciones/Refuerza tu aprendizaje/ La representación de funciones |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | * Quitar del encabezado en las tres preguntas lo que está encerrado en rojo, lo demás dejarlo igual. |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje sobre la gráfica de funciones |
| **Descripción** | El recurso pone a prueba lo aprendido sobre la gráfica de funciones. |

SECCIÓN 1**] 3 El estudio de una función**

En una función matemática se identifican los siguientes elementos.

* El dominio
* El recorrido
* Puntos de corte con los ejes
* Continuidad y discontinuidad
* El crecimiento y decrecimiento
* Máximos y mínimos
* Simetrías

SECCIÓN 2**] 3.1 El dominio de una función**

El **dominio** de una función matemática se simboliza con la letra *D* o con las letras *Dom*. Es el conjunto formado por todos los valores que puede tomar la variable independiente *x* en la cual la función tiene sentido o está definida, y teniendo en cuenta el conjunto numérico en el que se está trabajando la función. En la mayoría de situaciones se trabaja con el conjunto de los números reales, mientras que en la mayoría de situaciones cotidianas se trabaja con el conjunto de los números naturales, enteros o racionales.

Ejemplo 1

¿Cuál es el dominio de la función *f*(*x*) en el conjunto de los números reales?

<<MA\_09\_04\_002.gif>>

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG06 |
| **Descripción** | Grafica de la función *f*(*x*).  <<MA\_09\_04\_003.gif>> |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 4\imagenes guion 4\MA_S1_04_IMG03_F1.JPG  COLOCAR UN CERO |
| **Pie de imagen** | ¿Cuál es el dominio de la función *f*(*x*) en *x* = –2?  <<MA\_09\_04\_004.gif>> |
| **Ubicación del pie de imagen** | Parte inferior de la gráfica |

El dominio de la función *f*(*x*) es el conjunto de todos los números reales excepto  –2, ¿por qué?

Si se remplaza a *x* por –2, la función es igual a

<<MA\_09\_04\_005.gif>>

En este caso, la división por cero no está definida en los reales y por esa razón el dominio de la función es igual al conjunto de los números reales, excepto -2. Se puede representar de dos formas:

* *D(f)* = ℝ – {–2}
* *D(f)* = (–∞, –2) ⋃ (–2, ∞)

Ejemplo 2

¿Cuál es el dominio de la función *f*(*x*) en el conjunto de los números reales?

*f*(*x*) = *x*2 + 1

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG07 |
| **Descripción** | Gráfica de la función *f*(*x*) = *x*2 + 1 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 4\imagenes guion 4\MA_S1_04_IMG04_F1.JPG  EL CERO A LA DERECHA |
| **Pie de imagen** | El dominio de la función *f*(*x*) = *x*2 + 1 es el conjunto de los números reales. |

El dominio de esta función son todos los números reales, ya que no se encuentra ninguna restricción para los valores de *x*. Se representa

* *D(f)* = ℝ
* *D(f) =* (–∞, ∞)

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC100 |
| **Título** | Estudio de una función |
| **Descripción** | Interactivo que define qué es una función, los puntos de corte y el signo |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica : recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_CO\_REC110 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones /Calcula el dominio de una función/practica/ Calcula el dominio de una función. |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | * Quitar del encabezado la palabra encerrada en rojo “calcula” y cambiarla por “encuentra” en las seis preguntas |
| **Título** | Cambiar por: Encuentra el dominio de las funciones |
| **Descripción** | Cambiar por: Actividad para practicar la forma como se encuentra el dominio de las funciones. |

SECCIÓN 2**] 3.2 El recorrido de una función**

**El recorrido** o conjunto de **imágenes** de una función se simboliza con la letra *R* o con las letras *Rec*. Se define como el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente *y* con respecto a los valores que toma la variable independiente *x* que pertenecen al dominio.

Al observar las siguientes gráficas se puede determinar el recorrido de cada una de las funciones que se representan.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG08 |
| **Descripción** | Gráfica de cuatro funciones en el plano cartesiano. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img4_small.jpg>  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img4_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de cuatro funciones con recorridos distintos. |

En las cuatro gráficas, los recorridos de las funciones son distintos. En la primera gráfica, de izquierda a derecha, el recorrido de la función es igual al conjunto de los números reales positivos, es decir, *R*(*f*) = ℝ+ o *R*(*f*) = [0, ∞); en la segunda gráfica, el recorrido se define desde –3 hasta el infinito y se puede representar como *R*(*f*) = [–3, ∞); en la tercera gráfica, el recorrido va desde 1 hasta el infinito y se define como *R*(*f*) = [1, ∞); y el recorrido de la última función, según la gráfica, son todos los números reales *R*(*f*) = ℝ o *R*(*f*) = [–∞, ∞).

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC120 |
| **Título** | Halla dominios y rangos de una función usando procesos algebraicos |
| **Descripción** | Actividad que permite hallar, apartir del análisis algebraico el dominio y el rango de una función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica : recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_CO\_REC130 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones /Trabaja con el dominio y recorrido de una función/ejercitación/ Trabaja con el dominio y recorrido de una función |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | * La primera pregunta encerrada en rojo cambiarla por: Indica cuál es el conjunto que determina el dominio de la función correspondiente a la gráfica.      * La segunda pregunta encerrada en rojo cambiarla por: Indica cuál es el conjunto que determina el recorrido de la función correspondiente a      * La tercera pregunta encerrada en rojo cambiarla por: Indica cuál es el conjunto que determina el recorrido de la función correspondiente a la gráfica.      * La cuarta pregunta encerrada en rojo cambiarla por: Indica cuál es el conjunto que determina el dominio de la función correspondiente a      * La quinta pregunta encerrada en rojo cambiarla por: Indica cuál es el conjunto que determina el dominio de la función correspondiente a la gráfica.      * La sexta pregunta encerrada en rojo cambiarla por: Indica cuál es el conjunto que determina el dominio de la función correspondiente a .      * La séptima pregunta encerrada en rojo cambiarla por: Indica cuál es el conjunto que determina el dominio de la función correspondiente a la gráfica.      * La octava pregunta encerrada en rojo cambiarla por: Indica cuál es el conjunto que determina el recorrido de la función correspondiente a      * La novena pregunta encerrada en rojo cambiarla por: Indica cuál es el conjunto que determina el recorrido de la función correspondiente a la gráfica.      * La sexta ¿**décima?** pregunta encerrada en rojo cambiarla por: Indica cuál es el conjunto que determina el dominio de la función correspondiente |
| **Título** | Cambiar por: Encuentra el dominio y el recorrido de algunas funciones |
| **Descripción** | Cambiar por: Actividad para identificar el recorrido y el dominio de las funciones. |

[SECCIÓN 2**] 3.3 Los puntos de corte con los ejes**

Como su nombre lo indica, **los puntos de corte con los ejes** son los puntos donde la gráfica de la función intercepta el eje *X* y al eje *Y*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG09 |
| **Descripción** | Gráfica de la función *f*(*x*) = 2*x*2 – 2 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img5_small.jpg>  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img5_small.jpg  A ES EL PUNTO 1,0. CAMBIAR |
| **Pie de imagen** | Los puntos de corte de la función *f*(*x*) = 2*x*2 – 2 con el eje *X* son *C*(–1, 0) y *B*(1, 0); y con el eje *Y,* el punto de corte es *A*(0, –2). |

¿Cómo se hallan los puntos de corte de la gráfica de una función real con los ejes?

Para hallar los puntos de corte de una función real se realizan los siguientes pasos.

Por ejemplo, para hallar los puntos de corte de *f*(*x*) = 2*x*2 – 2:

1. Los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje *Y*: se deben buscar el punto o los puntos de coordenadas (0, *y*), es decir, cuando *x* = 0. Se reemplaza 0 en la función. Así, *f*(*x*) = 2(0)2 – 2 = –2. Luego el punto de corte con el eje *Y* es (0, –2).
2. Los puntos de corte con el eje *X*: se buscan el o los puntos de coordenadas (*x*, 0). Para ello, se iguala la función a 0 y se despeja *x*. En este caso, 0 = 2*x*2– 2; al despejar *x* se obtiene que *x* = ±√1, es decir, *x* = 1 y *x* = –1. Por lo tanto, los dos puntos de corte con el eje *X* son (–1, 0) y (1, 0).

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_CO\_REC40 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones /Qué es una función, Puntos de corte y signo/profundiza/ Qué es una función, Puntos de corte y signo |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Dejar solamente en el titulo: ¿Qué es una función?    **Ficha del profesor**  Objetivo  Este interactivo tiene como objetivo estudiar el concepto de función, su gráfica, los puntos de corte y su signo.  Propuesta  Antes de la presentación  Como se trata de un tema más bien teórico y abstracto, antes de ver el interactivo puede plantear a los alumnos el siguiente juego que les ayudará a entender el concepto de función.  - En primer lugar, dígales que imaginen que tienen una caja mágica que posee la propiedad de transformar números, convierte cada cifra en el número ordinal que le sigue (si el número es el 6, el que le sigue será el 7, etc.).  - Pida a los estudiantes que escriban unos cuantos números así:  - A la izquierda, escriba los números que “entran” en la caja.  - A la derecha, coloque los números “convertidos” o que “salen” de la caja.  - Cuando haya unos 4 o 5 pares de números, diga a los estudiantes que los escriban como pares ordenados, de modo que cada par tenga a la izquierda los números que ellos propusieron y a la derecha los números que resultaron de la “transformación”.  - Después, pídales que representen estos pares de números en los ejes de coordenadas (los números que “entraron” en el eje X y los números “transformados” en el eje Y) y que los unan mediante una línea.  Para terminar, explíqueles que, en realidad, esa caja ha hecho lo mismo que hace una función, ya que las funciones no son más que “transformaciones”. Si dibujan cada número en el eje de las X con su “número transformado” en el eje de las Y, obtendrán la gráfica de dicha función.  Durante la presentación  La primera pantalla del interactivo muestra un menú con cuatro opciones: Concepto de función, Gráfica de una función, Puntos de corte y Signo de una función.  - Conviene que empiece por el recorrido Concepto de función. Aquí debe explicar a los estudiantes que van a ver las reglas que debe cumplir una transformación para ser una función.  Puede hacer una analogía con la idea que se ha expuesto en el juego de la caja mágica. Por ejemplo, cuando decimos que a cada x le corresponde un único valor de y, significa que si se “mete” un número en la caja, solo puede salir otro número. Del mismo modo, cuando se dice que b es la imagen de a, significa que si se “mete” a en la caja, sale b.  - Puede seguir con el recorrido Gráfica de una función. Es importante que entiendan que los puntos que están sobre la curva son siempre de la forma http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/Recurso010/01n.gif.  - Continúe con el apartado Puntos de corte. Antes de pasar a la segunda pantalla de este recorrido, ayude a los estudiantes a deducir por sí mismos cómo se calculan estos puntos.  Para ello, puede dibujar una gráfica similar a la de la primera pantalla pero con números en los ejes, y hacerles preguntas como:  - ¿Cuántas veces puede cruzar la función el eje Y?  - ¿Cuáles son las coordenadas de este punto?  - ¿Cuánto vale x en los puntos de corte con el eje Y?  - ¿Cuánto vale y en los puntos de corte con el eje X?  - Para finalizar, siga el recorrido Signo de una función. En la pantalla tercera aparece una función positiva en unos tramos y negativa en otros. Pida a los alumnos que digan exactamente los intervalos en los que la función es positiva y los intervalos en los cuales es negativa.  Después de la presentación  Para confirmar si han entendido bien el contenido del interactivo, solicíteles que dibujen algunas funciones. Por ejemplo, una función en la que la imagen de 1 sea 3, que sea positiva y que corte el eje Y en x = 5.  Para reforzar estos nuevos conocimientos y habilidades, inste a los estudiantes a investigar en la web sobre cada uno de los temas vistos en **este interactivo**.  **Ficha estudiante**  ¿Sabes qué es una función?  **El concepto de función**  Una función f relaciona dos variables: x (la variable independiente) e y (la variable dependiente). A cada valor de x se le asocia un único valor de y. En la función f(a) = b decimos que b es la imagen de a. Estas funciones se pueden definir en cualquier conjunto numérico. La gran mayoría de las funciones se definen en el conjunto de los números reales, pero también se pueden trabajar en los números naturales, enteros y racionales.  **La gráfica de una función**  Una función se puede representar gráficamente en los ejes de coordenadas del plano cartesiano; los puntos de la gráfica asociada a una función son de la forma http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/Recurso010/01.gif. La gráfica no representa toda la función debido a que los números son infinitos y no se pueden representar infinitos puntos, solo muestra una parte de la función. Se recomienda ubicar estos puntos cerca del origen del punto (0,0) y apoyarse en una tabla donde se fijen las parejas ordenada x y f(x); recuerde que f(x) = y.  **Los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes**  Son aquellos puntos donde la gráfica de la función corta los ejes de coordenadas. Para calcularlos:  - Puntos de corte con el eje Y → x = 0 → el punto de corte es: (0, f(0)).  - Puntos de corte con el eje X → f(x) = 0 → los puntos de corte son de la forma: (a, 0); a son las soluciones de la ecuación.  El signo de la función  Las funciones pueden tener signo positivo o negativo.  - Una función es positiva cuando su gráfica está por encima del eje X.  - Una función es negativa cuando su gráfica está por debajo del eje Y. |
| **Título** | CAMBIAR POR  ¿Qué es una función? Su representación gráfica, los puntos de corte y el signo de la función |
| **Descripción** | Interactivo que define qué es una función y cuáles son sus características: gráfica, puntos de corte y signo. |

[SECCIÓN 2**] 3.4 La continuidad y la discontinuidad**

Una idea intuitiva de **continuidad** en las funciones es que se pueden representar gráficamente en el plano cartesiano con un solo trazo, sin levantar el lápiz de la hoja; existen otras funciones que no se pueden representar gráficamente con un solo trazo, sino que están compuestas de dos o más trazos, estas reciben el nombre de funciones **discontinuas**.

Cuando se habla de continuidad, las funciones deben estar definidas en el conjunto de los números reales; si la función está definida en el conjunto de los números naturales, en el conjunto de los números enteros o en el de los racionales, es **discontinua** y no habrá necesidad de analizarla para determinar si es continua o no. En el siguiente cuadro se muestran las gráficas de cuatro funciones, dos de ellas continuas *f*(*x*) y *g*(*x*), y dos discontinuas, *h*(*x*) y *k*(*x*).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG10 |
| **Descripción** | Gráfica de cuatro funciones. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img6_small.jpg>  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img6_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Las gráficas de las funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) son continuas; y las gráficas de las funciones *h*(*x*) y *k*(*x*) son discontinuas. |

En las gráficas de las funciones *h*(*x*) y *k*(*x*) se presentan los casos más frecuentes de discontinuidad.

* En la gráfica de la función *k*(*x*) se observa que la función **no está definida en un punto**.
* En la gráfica de la función *h*(*x*) se observa que hace un **“salto” en algún punto**. En este caso se dice que el punto donde se interrumpe el gráfico es un **punto de discontinuidad**.Puede ocurrir que la función esté o no definida en ese punto, pero la función toma distintos valores a la izquierda y a la derecha; para *x* = 2 la función vale 3, pero para *x* = 2,1 la función vale 5,9.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La continuidad y la discontinuidad** |
| Contenido | * Se dice que una función es continua si se puede representar gráficamente con un solo trazo. * Una función es continua en un intervalo cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo. * Si la gráfica de la función no se puede representar por medio de un solo trazo, la función es discontinua. * La discontinuidad de un función puede ser de dos tipos:   1. Cuando la gráfica de la función no está definida en un punto o en más de un punto.   2. Cuando la gráfica de la función adquiere valores distintos a la derecha o a la izquierda en un mismo punto. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica : recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_CO\_REC150 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones /Practica con la continuidad y discontinuidad/practica/ Practica con la continuidad y discontinuidad |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | * Cambiar en las 10 preguntas el enunciado encerrado en rojo por: Indica en qué valores de hay discontinuidad en la función representada en la siguiente gráfica. |
| **Título** | Cambiar por: Identifica la continuidad y la discontinuidad de las funciones |
| **Descripción** | Cambiar por: Actividad para practicar la identificación de la continuidad y la discontinuidad de las funciones. |

[SECCIÓN 2**] 3.5 El crecimiento y el decrecimiento de una función**

Si se tiene en cuenta que los valores de la variable *x*, es decir, los valores del dominio, mantienen una relación de orden entre sí, uno es mayor que otro, es posible que exista también una relación de orden entre las imágenes de estos elementos, es decir, entre los valores de la variable dependiente *y*. Analizar esta relación significa estudiar la monotonía de la función, que es lo mismo que determinar si la variable dependiente **aumenta** o la función es **creciente**, si **disminuye** o la función es **decreciente**, o se mantiene **constante**.

Algunas funciones como las lineales son siempre crecientes, decrecientes o constantes. En general, las funciones no son totalmente crecientes, decrecientes o constantes, sino que presentan tramos o intervalos donde crecen, donde decrecen, y donde son constantes.

Una función ***f*(*x*) es creciente** en un intervalo del dominio de la función, si para todo par de puntos *x*1 y *x*2 del intervalo, con *x*1 < *x*2, se cumple que *f*(*x*1) ≤ *f*(*x*2). La función es estrictamente creciente si ***f*(*x*1) < *f*(*x*2)**.

Una función ***f*(*x*) es decreciente** en un intervalo del dominio de la función, si para todo par de puntos *x*1 y *x*2 del intervalo, con *x*1 < *x*2, se cumple que *f*(*x*1) ≥ *f*(*x*2). La función es estrictamente decreciente si ***f(x*1*) > f(x*2*)***.

Una función ***f*(*x*) es constante** en un intervalo del dominio de la función, si para todo par de puntos *x*1 y *x*2 del intervalo, con *x*1 < *x*2, se cumple que ***f(x*1*) = f(x*2*)***.

Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento de las funciones se deben analizar sus gráficas y observar qué ocurre con el valor de *f*(*x*)o la variable *y* a medida que aumenta el valor de *x*. Observa las gráficas de las siguientes funciones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG11 |
| **Descripción** | Gráfica de cuatro funciones. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img7_small.jpg>  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img7_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica del estudio de la monotonía de cuatro funciones. |

La gráfica **E** representa una función lineal: cuando aumenta el valor de *x* se incrementa el valor de *y*.  La gráfica representa una función creciente, ya que en ella se observa, de izquierda a derecha, que la recta va ascendiendo.

La gráfica **F** representa una función lineal, pero en este caso cuando aumenta el valor de *x* disminuye el valor de *y.* La gráfica representa una función decreciente. En la gráfica se observa, de izquierda a derecha, que la recta va descendiendo.

La gráfica **G**  representa una función con tramos crecientes y tramos decrecientes. En este caso, la función es

* creciente en el intervalo (–∞, –1) ⋃ (1, +∞),
* decreciente en el intervalo (–1, 1).

La gráfica **H** representa una función con tramos crecientes y tramos decrecientes. En este caso, la función es

* decreciente en el intervalo (–∞, 0), es decir, para *x* < 0 y
* creciente en el intervalo (0, +∞), es decir, para x > 0.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_CO\_REC160 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones / El crecimiento y el decrecimiento de una función/profundiza/ El crecimiento y el decrecimiento de una función |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | * En la segunda diapositiva cambiar las palabras encerrada en rojo que dicen “diríais que es” por: puedes decir que es * En la cuarta diapositiva cambiar las palabras encerradas en rojo que dicen “ si miramos la curva de izquierda a derecha ¿ diríais” por: Si observas la curva de izquierda a derecha, ¿qué puedes decir?   **Ficha del profesor**  Objetivo  Este interactivo tiene como objetivo estudiar el crecimiento y el decrecimiento de las funciones, de un modo interactivo.  Propuesta  Antes de la presentación  Antes de ver el interactivo es importante que los estudiantes tengan muy claro el concepto de función y cómo se procede para hacer la representación gráfica de ellas. Puede preguntarles si saben qué es una función, dibujar una y pedir que digan las imágenes de algunos números a partir de la gráfica. Asegúrese de que tengan muy claro que los puntos de la gráfica son de la forma  (x, f(x))  Durante la presentación  En la primera y en la tercera pantalla del interactivo, donde se pregunta si la función sube o baja, pida a los estudiantes que se imaginen que están caminando por encima de la curva de izquierda a derecha.  Cuando aparece una función creciente en unos tramos y decreciente en otros, pida a los estudiantes que especifiquen en qué intervalos la función es creciente y en cuáles decreciente. Explíqueles que deben dar los intervalos fijándose en el eje X.  Después de la presentación  Tras la exposición, solicite a los estudiantes que determinen algunas funciones, que las representen y determinen gráficamente; indíqueles los tramos donde han de ser crecientes y donde deben ser decrecientes.  Otro ejercicio que se puede desarrollar es darles unas pautas para que representen gráficamente algunas funciones que cumplan ciertas condiciones como:  - Que dibujen una función creciente para  x < 1 y x < 5  - Que dibujen una función decreciente para  1 < x < 5  Pueden complementar el trabajo con una investigación en Internet sobre funciones crecientes, decrecientes y constantes.  Ficha estudiante  ¿Cómo se valora el crecimiento de una función?  Una función es creciente cuando al aumentar el valor de la x se incrementa el valor de la y. Si miramos la gráfica de izquierda a derecha, esta sube.  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/Recurso070/alumno5a.gif  Una función es decreciente cuando al aumentar el valor de la x disminuye el valor de la y. Si miramos la gráfica de izquierda a derecha, esta baja.  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/Recurso070/alumno5b.gif  Una función es constante cuando al aumentar los valores de x los valores de y se mantiene constantes; observa la gráfica. |
| **Título** | El crecimiento y el decrecimiento de una función |
| **Descripción** | Interactivo que muestra cómo se presentan el crecimiento y el decrecimiento de las funciones. |

#### La tasa de variación media de una función en un intervalo

Dada una función *f*(*x*), se llama **tasa de variación** de la función en el intervalo (*x*1, *x*2), con *x*1 < *x*2, al número que representa el aumento o la disminución experimentado por la función al aumentar la variable independiente del valor *x*1 al valor *x*2. Se calcula haciendo la diferencia entre las ordenadas o valores de la función correspondientes a los puntos de las abscisas *x*1 y *x*2, es decir,

Tasa de variación = *f*(*x*2) − *f*(*x*1)

Se llama **tasa de variación media** (TVM) al número que resulta de operar el cociente entre la tasa de variación y la amplitud del intervalo (*x*1, *x*2). Se calcula

<<MA\_09\_04\_006.gif>>

Por ejemplo, calcular la tasa de variación media para la función representada en la siguiente gráfica que muestra la distancia recorrida por un automóvil durante un viaje. En este caso, la tasa de variación media es la velocidad media del coche durante el trayecto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG12 |
| **Descripción** | Gráfica de la función *f*(*x*) = 2*x*2 – 2 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/#/cuaderno-estudio?UnidadID=592&AsignaturaID=35&CursoID=5>  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14639/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img8_small.jpg  UN SOLO CERO. CON INICIAL MAYÚSCULA Tiempo (min) Distancia (km) |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica del recorrido de un automóvil. El automóvil se ha desplazado 185 km en total durante 3 horas; realizó dos paradas (tramos horizontales), por lo que su velocidad varió a lo largo del recorrido. |

Para calcular la velocidad media del automóvil en todo el viaje se divide la distancia total recorrida entre el tiempo que ha transcurrido para recorrerla. Los datos son

* *t*1 = 0 min; distancia recorrida: *d*1 = 0 km.
* *t*2 = 3 h = 180 min; distancia recorrida: *d*2 = 185 km.

Por lo tanto, la velocidad media en el intervalo (0, 180) es

<<MA\_09\_04\_007.gif>>

La expresión de la velocidad media entre los instantes *t*1 y *t*2 es análoga a la expresión de la tasa de variación media. Se ha sustituido *f*(*x*) por *d* y *x* por *t*, ya que la distancia *d* es la variable dependiente y el tiempo *t* es la variable independiente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC200 |
| **Título** | Repasa conceptos sobre funciones |
| **Descripción** | Actividad para repasar conceptos relacionados con funciones |

[SECCIÓN 2**] 3.6 Puntos máximos y mínimos en la gráfica de una función**

* En una función se denominan **extremos relativos** a los puntos en los cuales la función pasa de ser creciente a decreciente, o de ser decreciente a creciente.

Los puntos donde una función pasa de decreciente a creciente reciben el nombre de **mínimos**. El punto mínimo en el cual el valor de la función es menor que todos los demás valores se denomina **mínimo absoluto**.

Los puntos donde una función pasa de creciente a decreciente se denominan **máximos**. El punto máximo en el cual el valor de la función es mayor que todos los demás valores se denomina **máximo absoluto**.

**Ejemplo 1**

En la gráfica de la función *f*(*x*) = *x*3  – 9*x*2 + 15*x*, para encontrar los máximos y mínimos debemos apoyarnos en su representación gráfica. En ella se observan tres tramos diferenciados de crecimiento y decrecimiento.

* Cuando *x* < 1, la función es creciente: (–∞, 1).
* Cuando 1 < *x* < 5, la función es decreciente: (1, 5).
* Cuando *x* > 5, la función vuelve a ser creciente: (5, +∞).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG13 |
| **Descripción** | Gráfica de la función *f*(*x*) = *x*3  – 9*x*2 + 15*x* |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img10_small.jpgç>  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img10_small.jpg |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función *f*(*x*) = *x*3  – 9*x*2 + 15*x* se observa un máximo relativo en el punto (1, 0) y un mínimo relativo en el punto (5, –25). |

En la gráfica de la función *f*(*x*) = *x*3  – 9*x*2 + 15*x*, cuando *x* = 1 la función pasa de creciente a decreciente; entonces, la función presenta un **máximo relativo** ya que el valor de la función en este punto supera a los de los puntos más próximos. De forma análoga, en *x* = 5 la función presenta un **mínimo relativo**, es decir, pasa de decreciente a creciente.

**Ejemplo 2**

En la gráfica de la función *f*(*x*) = 2*x*2  – 2 se encuentran dos tramos diferenciados de crecimiento y decrecimiento.

* Cuando *x* < 0, la función es decreciente: (–∞, 0).
* Cuando *x* > 0, la función es creciente: (0, +∞).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG14 |
| **Descripción** | Gráfica de la función *f*(*x*) = 2*x*2  – 2 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img11_small.jpg>  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img11_small.jpg |
| **Pie de imagen** | En la gráfica de la función *f*(*x*) = 2*x*2  – 2 se observa un mínimo absoluto en el punto (0, – 2). |

En la gráfica se observa que cuando *x* = 0, *f*(*x*) = 2*x*2  – 2 = – 2, que es el menor que cualquier otro valor del dominio. Cuando esto ocurre se dice que la función alcanza un **mínimo absoluto**; en este caso, en el punto (0, – 2).

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica : recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_CO\_REC210 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones / Opera con máximos y mínimos en una función/practica/ Opera con máximos y mínimos en una función |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | * En la pregunta nueve cambiar las opciones dos y tres de respuesta debido a que se repiten cambiarlas respectivamente por y |
| **Título** | Cambiar por: Ejercicios con máximos y mínimos de funciones |
| **Descripción** | Cambiar por: Actividad para ejercitar el cálculo de los máximos y los mínimos en las funciones. |

[SECCIÓN 2**] 3.7 La simetría par o impar en la gráfica de una función**

Otra clasificación que se puede establecer con las funciones y su representación gráfica es la de ser simétricas o no con respecto al eje *Y* o con respecto al origen (0, 0).

* La gráfica de una función *f*(*x*) es simétrica con respecto al eje *Y* si se cumple

*f*(*x*) = *f*(– *x*)

En este caso, la función es **simétrica  par**. Cualquier función polinómica que solo tenga términos de grado par es una función par.

* La gráfica de una función *f*(*x*) es simétrica con respecto a (0, 0) si se cumple

*f*(–*x*) = –*f*(*x*)

En este caso, la función es **simétrica  impar**. Cualquier función polinómica que solo tenga términos de grado impar es una función impar.

* La gráfica de una función *f*(*x*) es no simétrica si se cumple

*f*(*x*) ≠ *f*(– *x*) y *f*(– *x*) = –*f*(*x*)

**Ejemplos**

* La gráfica de la función *f*(*x*) = *x*2  – 1 es **simétrica par**, ya que se cumple

*f*(*x*) = *f*(– *x*)

*x*2  – 1 = (–*x*2) – 1

* La gráfica de la función *g*(*x*) = *x*3  – 3*x* es **simétrica impar**, ya que se cumple

*g*(–*x*) = – *g*(*x*)

(–x)3 – 3(–*x*) *=* –(*x*3  – 3*x*)

–*x*3  + 3*x* *=* –*x*3  + 3*x*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG15 |
| **Descripción** | Gráfica de una función simétrica par e impar. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img13_small.jpg>  http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package12550/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_06_img13_small.jpg |
| **Pie de imagen** | La gráfica de la función *f*(*x*) = *x*2  – 1 es simetría par respecto al eje *Y*. La gráfica de la función *g*(*x*) = *x*3  – 3*x* es simétrica impar con respecto al origen (0, 0). |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC170 |
| **Título** | Funciones simétricas y no simétricas |
| **Descripción** | Interactivo que muestra funciones que conservan simetrias y funciones que no conservan simetrías |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica : recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_CO\_REC190 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones / Clasifica funciones según su simetría/practica/ Clasifica funciones según su simetría |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | * En el encabezado cambiar “clasificar las siguientes funciones según sean simétricas pares, simétricas impares o no simétricas” por: Clasifica las siguientes funciones de acuerdo con: si son simétrica par, simétrica impar o no simétrica. |
| **Título** | Clasifica funciones según su simetría |
| **Descripción** | Actividad que permite analizar algunas características de la gráfica de una función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica : recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_CO\_REC180 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones /Practica con la simetría de funciones/practica/ Practica con la simetría de funciones |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Eliminar las preguntas 1 y 5 por que trata de funciones trigonométricas.  Pregunta 1:    Pregunta 5: |
| **Título** | Practica la identificación de funciones simétricas |
| **Descripción** | Actividad que permite practicar cómo buscar, analíticamente, el dominio y el rango de una función |

[SECCIÓN 2**] 3.8 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica : recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_CO\_REC220 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones /Refuerza tu aprendizaje: El estudio de una función/practica/ Refuerza tu aprendizaje: El estudio de una función |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | * Quitar del encabezado en todas las preguntas lo que está encerrado en rojo.      * En la pregunta uno cambiar lo que está encerrado en rojo por: Explica qué es el dominio, cómo se puede calcular, y qué es el rango o recorrido y cómo se puede calcular.      * En la pregunta seis cambiar lo que esta encerado en rojo por: Explica qué son las funciones crecientes y las funciones decrecientes. La siguiente función de la imagen ¿es simétrica impar, par o ninguna? Justifica tu respuesta.      * Las preguntas 7 y 8 eliminarlas |
| **Título** | Consolidación de lo aprendido sobre el estudio de las funciones |
| **Descripción** | El recurso pone a prueba lo aprendido sobre el estudio de las funciones. |

[SECCIÓN 1**] 4 Funciones compuestas**

Dadas las funciones *f*(*x*) y *g*(*x*), se llama **función composición** o **función compuesta** a aquella función en la que la imagen de *x* se obtiene aplicando sucesivamente las dos funciones, primero la función *f* y luego la función *g*. La función composición de *f*(*x*) y *g*(*x*) se representa *f* ο *g* = (*f* ο *g*)(*x*) = *f*(*g*(*x*).

El dominio de *f* ο *g* es el conjunto de todas las *x* en el dominio de *g* tal que *g*(*x*) esté contenido en el dominio de *f*.

**Ejemplo**

Sean las funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) definidas como

* <<MA\_09\_04\_008.gif>>
* <<MA\_09\_04\_009.gif>>

Hallar las funciones (*f* ο *g*)(*x*) y (*g* ο *f*)(*x*).

* <<MA\_09\_04\_010.gif>>

Luego,

<<MA\_09\_04\_011.gif>>

* <<MA\_09\_04\_012.gif>>

Entonces,

<<MA\_09\_04\_013.gif>>

Las siguientes son las gráficas de las funciones *f*(*x*), *g*(*x*), (*f* ο *g*)(*x*) y (*g* ο *f*)(*x*).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG16 |
| **Descripción** | Gráfica de la función *f*(*x*). |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 4\imagenes guion 4\MA_S1_04_IMG05_F1.JPG |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función  <<MA\_09\_04\_014.gif>> |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG17 |
| **Descripción** | Gráfica de la función *g*(*x*). |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 4\imagenes guion 4\MA_S1_04_IMG06_F1.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función  <<MA\_09\_04\_015.gif>> |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG18 |
| **Descripción** | Gráfica de la función (*f* ο *g*)(*x*). |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 4\imagenes guion 4\MA_S1_04_IMG07_F1.JPG |
| **Pie de imagen** | Grafica de la función  <<MA\_09\_04\_016.gif>> |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG19 |
| **Descripción** | Gráfica de la función (*g* ο *f*)(*x*). |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 4\imagenes guion 4\MA_S1_04_IMG08_F1.JPG |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función  <<MA\_09\_04\_017.gif>> |

[SECCIÓN 2**] 4.1 Propiedades de la composición de funciones**

La composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa pero sí la propiedad asociativa.

**Propiedad conmutativa**:sean las funciones *h*(*x*) y *f*(*x*), entonces la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa, es decir, de la función compuesta se cumple *h* ο *f* ≠ *f* ο *g.*

Por ejemplo,

Sean las siguientes funciones *f*(*x*) y *g*(*x*); demostrar que *f* ο *g* ≠ *g* ο *f.*

* <<MA\_09\_04\_018.gif>>
* <<MA\_09\_04\_019.gif>>

Entonces,

* <<MA\_09\_04\_020.gif>>

Luego,

<<MA\_09\_04\_021.gif>>

* <<MA\_09\_04\_022.gif>>

Así,

<<MA\_09\_04\_023.gif>>

Queda demostrado que ***f* ο *g* ≠ *g* ο *f***ya que:

<<MA\_09\_04\_024.gif>>

**Propiedad asociativa**:sean las funciones *h*(*x*), *g*(*x*) y *f*(*x*); entonces se cumple *h*ο (*g* ο *f*) = (*h* ο *g*) ο *f.*

Por ejemplo,

Sean las funciones *h*(*x*) = 2 + *x*, *g*(*x*) = *x*2 y *f*(*x*) = √*x*. Demostrar que *h*ο (*f*ο *g*) = (*h*ο *f*) ο *g.*

Como (*f* ο *g*)(*x*) = *f*(*g*(*x*)), entonces

<<MA\_09\_04\_025.gif>>

Luego,

*h* ο (*f* ο *g*)(*x*) = *h*(*x*) = 2 + *x*

Ahora, para hallar (*h* ο *f*) ο *g* primero se calcula

<<MA\_09\_04\_026.gif>>

Por lo tanto,

<<MA\_09\_04\_027.gif>>

Queda demostrado que ***h* ο (*g* ο *f*) = (*h* ο *g*) ο *f****.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC240 |
| **Título** | Practica de las funciones compuestas |
| **Descripción** | Actividad que permite practicar la composición entre dos funciones |

**[SECCIÓN 2] 4.2 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC250 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La función compuesta |
| **Descripción** | Actividad sobre La función compuesta |

**[**SECCIÓN 1**] 5. La función inversa**

Para definir **la función inversa de una función** *f*(*x*) en un intervalo es necesario que *f*(*x*) sea una **función biyectiva**.

La función *f*(*x*) es **biyectiva** si a cada elemento del conjunto de salida o **dominio** *D* siemprele corresponde un elementodiferente del conjunto de llegada o **codominio**;además, si el codominio es igual al recorrido *R* de la función *f*(*x*). Por ejemplo, la función *f*(*x*) = *x*2 no es una función biyectiva, ya que para diferentes valores del dominio le corresponde el mismo elemento del codominio. Observa que *f*(3) = (3)2 = 9 y *f*(–3) = (–3)2 = 9.

La función inversa o función recíproca de una función *h*(*x*) se nota como *h*-1(*x*).

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de función inversa** |
| **Contenido** | Sea *g*(*x*) una **función biyectiva** con dominio *D* y rango *R*. Una función *g-1*(*x*) es la **función** **inversa** de *g*(*x*) siempre que se cumpla la siguiente condición.  Para todo elemento *x* que pertenece a *D* y todo elemento *y* que pertenece a *R,*  *y = g*(*x*) si y solo si *x = g-1*(*x*) |

En otras palabras, en una función biyectiva *g*(*x*) cuyo dominio sea el conjunto *A* y cuyas imágenes sean el conjunto *B* se cumple que la función inversa o recíproca de *g*(*x*), que se nota *g-1*(*x*), tendrá como dominio al conjunto *B* y sus imágenes serán el conjunto *A.*

La composición entre una función *h*(*x*) y su función inversa *h-1*(*x*) es igual a la función idéntica *f*(*x*) = *x.* Es decir,

* *h*(*x*) ο *h-1*(*x*) = *x*
* *h-1*(*x*) ο *h*(*x*) = *x*

Las gráficas de las funciones *h*(*x*) y *h-1*(*x*) son simétricas con respecto a la función *f*(*x*) = *x*.

¿Cómo encontrar la función inversa de una función dada?

Se deben seguir los siguientes pasos.

Paso 1: despejar la variable independiente de la función dada.

Paso 2: intercambiar en la nueva función la variable independiente por la variable dependiente.

**Ejemplos**

* Hallar la función inversa de *h*(*x*) = 2 + 3*x*.

Paso 1:

<<MA\_09\_04\_028.gif>>

Paso 2:

<<MA\_09\_04\_029.gif>>

Luego la función inversa de *h*(*x*) = 2 + 3*x* es igual a

<<MA\_09\_04\_030.gif>>

Las funciones *h*(*x*) y *h-1*(*x*) deben cumplir *h*(*x*) ο *h-1*(*x*) = *x*, y, *h-1*(*x*) ο *h*(*x*) = *x*. Observa.

* <<MA\_09\_04\_031.gif>>
* <<MA\_09\_04\_032.gif>>

Ahora, observa que las gráficas de las funciones *h*(*x*) y *h-1*(*x*) son simétricas con respecto a *f*(*x*) = *x*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_09\_02\_IMG20 |
| **Descripción** | Gráfica de las funciones *h*(*x*), *h-1*(*x*) y *f*(*x*) en el mismo plano. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | H:\planeta\guion 4\imagenes guion 4\MA_S1_04_IMG09_F1.JPG  CAMBIAR LA *f* POR *h* Y LA *g* POR *f* |
| **Pie de imagen** | Gráfica de las funciones *h*(*x*), *h-1*(*x*) y *f*(*x*) en el mismo plano:  <<MA\_09\_04\_033.gif>> |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inversa de una función que no es biyectiva** |
| Contenido | Cuando una función *h*(*x*) no es biyectiva se puede encontrar la función inversa de una parte o intervalo de la función original donde *h*(*x*) sea biyectiva. Por ejemplo,  en la función *k*(*x*) = *x*2 se toman solo los valores donde *x* ≥ 0. Luego la función inversa de *k*(*x*) = *x*2 con *x* ≥ 0 es igual a  <<MA\_09\_04\_034.gif>> |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC270 |
| **Título** | Relaciona funciones con su inversa |
| **Descripción** | Actividad que permite practicar la forma en la que se halla la expresión algebraica de la inversa de una función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC310 |
| Título | ¿Qué sabes de las características de las funciones? |
| Descripción | Actividad para reforzar el tema de las características de las funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC320 |
| **Título** | Resuelve un crucigrama sobre funciones |
| **Descripción** | Actividad para aplicar los principales conceptos de funciones |

[SECCIÓN 14**] 5.1 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC280 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La función inversa |
| **Descripción** | Actividad sobre La función inversa |

[SECCIÓN 15] **6 Competencias**

Pon a prueba tus capacidades y aplica lo aprendido con estos recursos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica : recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC290 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones / Competencias: estudio de la gráfica de una función/actividad/ Competencias: estudio de la gráfica de una función |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | * CAMBIAR LA INSTRUCCIÓN **INICIAL** encerrada en rojo POR: Realiza la actividad. Cuando termines, envíala a tu profesor para que la evalúe.      * Cambiar las funciones del punto uno que están enceradas en rojo por las que están al frente encerradas en negro. |
| **Título** | Competencias: el estudio de la gráfica de una función |
| **Descripción** | Cambiar por: Actividad para desarrollar destrezas para graficar funciones con el programa Geogebra |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC300 |
| **Título** | Competencias: resolución de problemas a partir de modelos de funciones |
| **Descripción** | Actividad que presenta ejemplos de problemas que se solucionan a partir de modelos funcionales |

[SECCIÓN 16] **Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_09\_31\_CO\_REC330 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual sobre Las funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica : recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_09\_04\_CO\_REC340 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4 ESO/matemáticas/las funciones /evaluación/actividad/evaluación |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | * Cambiar la pregunta que dice:” cuál es la tasa de variación media en el intervalo [-1,1] de la función f(x)”, por: Cuál es la función inversa de:     Las respuestas son:     * Anexar una pregunta más que dice: Si y encuentra   Las posibles respuestas son: |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Cambiar por: Actividad que permite evaluar los conocimientos del estudiante sobre el tema funciones. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | LE\_G08\_01\_CO\_REC350 | |
| **Web 01** | Operaciones de números complejos en su representación binomial | <http://www.vadenumeros.es/primero/complejos-en-forma-binomica.htm> |
| **Web 02** | Los números complejos y sus principales características | <http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complejo> |
| **Web 03** | Trabajo sobre la relación de los números complejos con los fractales | <http://es.slideshare.net/Samara/f-r-a-c-t-a-l-e-s> |