|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Vectores |
| Código del guion | MA\_10\_08\_CO |
| Descripción | Conoce los vectores, sus componentes y las operaciones que se pueden realizar con ellos, esto permitirá que potencialices los conocimientos física y otros campos del saber. |

[SECCIÓN 1] **1 Vectores**

 Los vectores, la representación de las rectas y sus posiciones relativas se aplican a diversas situaciones en las que es necesario establecer la posición y el desplazamiento de objetos, por ejemplo, en los radares y los localizadores empleados en la navegación aérea y marítima, entre otros**.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG01 |
| **Descripción** | En el radar de la torre de control de un aeropuerto, cada punto de la pantalla representa la posición de un avión y está determinado por vectores. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img1_zoom.jpg> |
| **Pie de imagen** | Manejo de radares. |

Algunas magnitudes, como la longitud, quedan definidas mediante un único número: son las llamadas *magnitudes escalares*. Por otro lado, existen magnitudes, como la fuerza, que para poder definirlas (además de indicar un valor numérico) debemos señalar su sentido y dirección: estas son las *magnitudes vectoriales* y se representan mediante vectores.

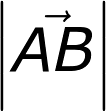
|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Los elementos fundamentales de la geometría plana son los puntos, las rectas y el plano:   * Un punto no tiene longitud ni anchura. Sirve para indicar una posición y se representa con letras mayúsculas: *A*, *B*… * Una recta tiene solo una dimensión: la longitud. Está formada por infinitos puntos alineados en una misma dirección. Una recta indica una dirección y dos sentidos contrarios. Se representa con una letra minúscula: *r*, *s*, *t*… * Un plano tiene dos dimensiones: longitud y anchura. Se nombra con letras griegas *α*, *β*, *γ*… |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Vector** |
| **Contenido** | Un vector es una flecha o un segmento orientado que se determina mediante un par ordenado de puntos, *A* y *B*: el primero se llama *origen* y el segundo es el *extremo*, y lo representamos así: |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG02 |
| **Descripción** | El vector*AB* tiene su origen en el punto *A* y su extremo en el punto *B*. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img2_zoom.jpg> |
| **Pie de imagen** | Vector |

Además los vectores están formado por los siguientes elementos:

* El módulo: es la longitud o magnitud del segmento *AB*. Se representa:



* La **dirección**: es la recta sobre la cual está situado el vector.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG03 |
| **Descripción** | Dos vectores tienen la misma dirección si están situados sobre la misma recta o sobre rectas paralelas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img3_zoom.jpg> |
| **Pie de imagen** | Vectores con la misma dirección |

* El sentido: es la orientación hacia un lado u otro de la recta sobre la que se sitúa el vector.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG04 |
| **Descripción** | Un par de puntos determinan dos vectores con el mismo módulo y la misma dirección, pero con **sentidos** opuestos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img4_small.jpg> |
| **Pie de imagen** | Dos vectores con el mismo módulo y la misma dirección, pero con sentidos opuestos. |

[SECCIÓN 2] **1.1 Vectores fijos en R (al cuadrado)**

Un vector fijo en es un segmento orientado determinado por un par ordenado de puntos, *A* (origen) y *B* (extremo), ubicado en el plano cartesiano con ejes e

También es consideradovector fijo nulo, como aquel vector fijo en el cual el origen coincide con el extremo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG05 |
| **Descripción** | Observa un ejemplo de **vector fijo**, definido por su origen y su extremo. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img11_zoom.jpg> |
| **Pie de imagen** | Vector fijo |

Por otra parte, un vector es equipolente o igual a otro cuando tiene igual módulo, dirección y sentido que el primero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG06 |
| **Descripción** | Todos estos vectores tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido: son **vectores equipolentes**. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img12_small.jpg> |
| **Pie de imagen** | Vectores equipolentes o iguales |

[SECCIÓN 2] **1.2 Vectores libres en R (al cuadrado)**

El conjunto de todos los vectores equipolentes entre sí, se define como vector libre.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG07 |
| **Descripción** | El vector libre es el conjunto de todos los vectores equipolentes. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img13_small.jpg> |
| **Pie de imagen** | Vector libre |

Un vector libre se representa mediante una letra minúscula con una flecha encima. Por ejemplo:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (4).gif

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG08 |
| **Descripción** | Cada vector fijo es un representante de su vector libre. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img14_small.jpg> |
| **Pie de imagen** | Vector libre en |

Aplicaremos las definiciones anteriores para determinar si los vectores de la ilustración son equipolentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG09 |
| **Descripción** | Determine los vectores que son equipolentes. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img17_small.jpg> |
| **Pie de imagen** | ¿Son **equipolentes**estos tres vectores? |

Los vectores *AB* y *CD* son equipolentes, es decir, tienen el mismo módulo, dirección y sentido. En cambio, el vector *EF* es paralelo a los anteriores, pero no es equipolente a ellos, pues tiene diferente módulo.

**¡Atención!** Dos vectores son **paralelos** cuando tienen la **misma dirección**, es decir, sus componentes son proporcionales.

Finalmente se considera el **vector posición**, siendo aquel que tiene su punto inicial en el punto de coordenadas y su punto final con coordenadas

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG10 |
| **Descripción** | el **vector posición**, siendo aquel que tiene su punto inicial en el punto de coordenadas y su punto final con coordenadas |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Vector posición |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Vector posición** |
| **Contenido** | Los vectores posición se representan de la forma donde es la componente horizontal o primera componente, mientras es la componente vertical o segunda componente. |

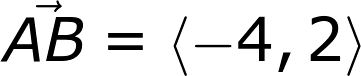
Sin embargo cuando se requiera determinar las componentes del vector posición equipolente a un vector que no es de posición, de realiza la diferencia de las componentes horizontales y de las componentes verticales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Vector posición equipolente** |
| **Contenido** | Dado el vector con punto inicial y punto final es equipolente al vector posición |

Por ejemplo para encontrar el vector posición equivalente a con y, se procede de la siguiente manera:



El vector posición equivalente es:



[SECCIÓN 2] **1.3 Operaciones con vectores**

En cualquier conjunto de vectores libres, se pueden realizar las operaciones de suma, resta y multiplicación, así como la multiplicación de un vector por un número. Estas operaciones se pueden resolver de forma gráfica y de forma analítica.

Para sumar dos vectores *u* y *v* mediante el procedimiento gráfico, seguimos estos pasos:

1. Dibujamos el vector *u* desde el origen de coordenadas y, a continuación de este, es decir, desde el extremo del vector *u*, trazamos el vector *v*.
2. Unimos el origen de coordenadas con el extremo del vector *v* y obtenemos el vector suma, también conocido como la resultante de la suma de vectores:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (8).gif

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG11 |
| **Descripción** | Observa que el vector suma tiene su origen en el origen del primer vector y su extremo coincide con el del segundo vector de la suma. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img18_zoom.jpg> |
| **Pie de imagen** | Vector suma |

Otro procedimiento gráfico para resolver una suma de vectores es el de la **regla del paralelogramo**:

1. Dibujamos los dos vectores *u* y *v* con el mismo origen.
2. Completamos un paralelogramo trazando lo siguiente:
   * Por el extremo del vector *u*, un segmento de recta paralelo al vector *v*.
   * Por el extremo del vector *v*, un segmento de recta paralelo al vector *u.*
3. La suma de los dos vectores es la diagonal orientada del paralelogramo obtenido, que tiene su origen en el origen común de los dos vectores *u* y *v*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG12 |
| **Descripción** | Este es el procedimiento gráfico o regla del paralelogramo, que se emplea para sumar vectores; en este caso, los vectores *u* y *v*. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img36_small.jpg> |
| **Pie de imagen** | Regla del paralelogramo |

Por otra parte para restar dos vectores *u* y *v* mediante el procedimiento gráfico, requerimos inicialmente definir el opuesto de un vector, tal como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Vector opuesto o opuesto del vector** |
| **Contenido** | El **vector opuesto**: un vector fijo es opuesto a otro cuando ambos tienen el mismo módulo y dirección, pero sentidos contrarios. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG13 |
| **Descripción** | Ejemplo de vectores opuestos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | - |
| **Pie de imagen** | Vectores opuestos |

Luego, seguimos estos pasos:

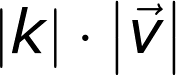
1. Dibujamos el vector *u* desde el origen de coordenadas y, a continuación de este, es decir, desde el extremo del vector *u*, trazamos el opuesto del vector *v*.
2. Unimos el origen del vector *u* con el extremo del vector *v* y obtenemos el vector resta:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (9).gif

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG14 |
| **Descripción** | Observa que el vector resta tiene su origen en el origen de coordenadas y su extremo en el extremo del vector opuesto del vector *v*. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img19_small.jpg> |
| **Pie de imagen** | Resta de vectores |

Por otra parte, si  un número real  *k*  se multiplica por un vector *u*, se obtiene otro vector con las siguientes características:

* Tiene la misma dirección que el vector *u*.
* Tiene el mismo sentido que el vector *u* si , y sentido contrario al vector *u* si
* Su módulo es igual al producto del módulo del vector *u* por el valor absoluto de *k*:



La solución gráfica de la multiplicación de un vector por un número consiste en repetir el módulo del vector sobre la misma recta de acción, uno a continuación de otro tantas veces como indique el número *k*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG15 |
| **Descripción** | Solución gráfica del producto del vector *u* por el número *k* = 3. |
| **ódigo Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img21_small.jpg> |
| **Pie de imagen** | Multiplicación de un vector por un número. |

Para ampliar tus conocimientos con respecto a las operaciones con vectores, usando la representación geométrica, consulta el siguiente enlace [[VER](http://tube.geogebra.org/m/69770)]

[SECCIÓN 2] **1.4 Dependencia lineal**

Para interpretar la definición de dependencia lineal es necesario precisar el significado de combinación lineal.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Combinación lineal** |
| **Contenido** | Un vector es combinación lineal de los vectores si corresponde al resultado de sumar los productos de estos vectores por los escalares : |

Por ejemplo el vector es combinación lineal de y

Ya que cumple

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (12).gif

La combinación lineal solicitada es

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (13).gif

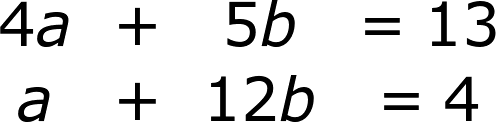
Tal solución se estableció anteriormente por tanteo, sin embargo existen otras maneras de resolver estas situaciones, como por ejemplo usando los sistemas de ecuaciones.

A continuación se usará un sistema de ecuaciones con la información en el último ejemplo para encontrar los valores faltantes de la combinación lineal.

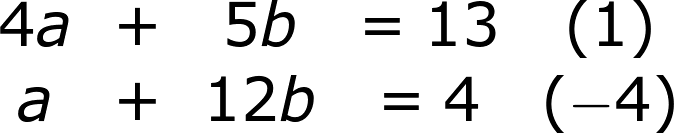
Escrito como una combinación lineal:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (16).gif

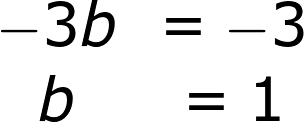
Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones



Usando el método de eliminación,

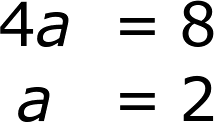


Por tanto



Sustituyendo

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (20).gif



Escrito como combinación lineal, también se obtiene

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (22).gif

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La solución de sistemas de ecuaciones , es posible realizarla por diferentes métodos; como eliminación, sustitución, matrices, etc. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG16 |
| **Descripción** | El vector es combinación lineal de y . |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Combinación lineal. |

El vector **depende linealmente** de los vectores y si se puede enunciar como:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (23).gif

Por ejemplo, el vector de la figura, se puede expresar en función de los

Vectores y (los cuales son diferentes de cero de forma simultanea), tal como

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (25).gif

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG17 |
| **Descripción** | Vector , expresado en función de los vectores y como |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Dependencia lineal |

Por ejemplo, los vectores son linealmente dependientes ya que

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (26).gif

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Si los son linealmente dependientes, significa geométricamente que los puntos y están alineados con el origen . |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG18 |
| **Descripción** | Si un par de vectores en el son linealmente dependientes, significa geométricamente que estos vectores están alineados con el punto de origen. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Vectores linealmente dependientes en el plano. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Si los son linealmente dependientes, cumplirá que ; es decir sus componentes son proporcionales. |

Continuando, con el ejemplo dado los vectores se debe cumplir para que sean linealmente dependientes que

Por otra parte, dados un par de vectores cuyas coordenadas no son proporcionales se definen como **vectores**  **linealmente independientes.**

[SECCIÓN 2] **1.5 Vectores unitarios**

Los vectores unitarios son aquellos que no poseen dimensiones y su módulo corresponde a la unidad. En el plano cartesiano existen dos vectores muy especiales,

https://latex.codecogs.com/gif.latex?%5Cdpi%7B300%7D%20%5Cfn_jvn%20%5Clarge%20i%3D%5Cleft%20%5Clangle%201%2C0%20%5Cright%20%5Crangle%5Ctext%7B%20%7Dj%5Cleft%20%5Clangle%200%2C1%20%5Cright%20%5Crangle

Conocidos también como base canónica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG19 |
| **Descripción** | Los vectores unitarios que se señalan en el plano cartesiano o , tienen su punto de origen, en el punto de coordenadas |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Vectores unitarios |

Estos permiten expresar en términos de ellos cualquier otro vector.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Vector unitario** |
| **Contenido** | En términos de yse puede expresar el vector , así: |

Por ejemplo, al expresar el vector en términos de y **j** se tendrá:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (27).gif

[SECCIÓN 2] **1.6 Consolidación**

[SECCIÓN 1] **2 Coordenadas de un vector**Las coordenadas o componentes de un vector son las coordenadas del punto extremo  menos las del punto de origen



|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG20 |
| **Descripción** | Representación de las **componentes de un vector** en un sistema de coordenadas cartesianas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img5_small.jpg> |
| **Pie de imagen** | Coordenadas de un vector. |

Por ejemplo, ¿cuáles son las coordenadas del siguiente vector?:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG21 |
| **Descripción** | El vector representado tiene **origen** y **extremo** |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img6_small.jpg> |
| **Pie de imagen** |  |

Dados los puntos de coordenadas:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (29).gif



**Las coordenadas del vector *AB* son**

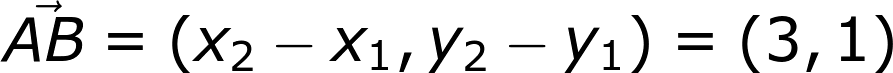
|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG22 |
| **Descripción** | Las **coordenadas (3, 4)** del vector del ejemplo indican que el vector se orienta tres unidades a la derecha y cuatro hacia arriba. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img7_small.jpg> |
| **Pie de imagen** |  |

Otro ejemplo:

Hallar el origen de un vector, conocidos su extremo *B* (3, 4) y sus componentes (3, 1):

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (31).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (32).gif



Para resolver el ejercicio, procedemos así:

1. Escribimos las componentes del vector, expresadas en función de las coordenadas del extremo y del origen del mismo.
2. Resolvemos las ecuaciones para obtener las coordenadas del origen del vector:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (34).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (35).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (36).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (37).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (38).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (39).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (40).gif

Por tanto, las coordenadas del origen del vector son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG23 |
| **Descripción** | Representación gráfica del **vector del ejemplo** en el sistema de coordenadas cartesianas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img8_small.jpg> |
| **Pie de imagen** | Vector del ejemplo |

[SECCIÓN 2] **2.1 Operaciones de vectores con coordenadas**

Las operaciones de vectores usando coordenadas, se define como procedimiento analítico

Para sumar dos vectores *u* y *v* mediante el procedimiento analítico, seguimos estos pasos:

Dados los vectores:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (41).gif

Los sumamos componente a componente:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (42).gif

Para **restar** dos vectores *u* y *v* mediante el **procedimiento analítico**, seguimos estos pasos:

Dados los vectores:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (41).gif

1. Los restamos componente a componente:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (43).gif

Por ejemplo, realizaremos la suma y la resta, de forma analítica y gráfica, de los vectores *u* y *v*:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (45).gif

La **suma** y la **resta** de los vectores dados mediante el **procedimiento analítico** son:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (46).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (47).gif

La **suma** y la **resta** de los vectores dados mediante el **procedimiento gráfico** son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG24 |
| **Descripción** | **Suma** (izquierda) y **resta** (derecha) **gráficas** de los vectores *u* y *v* . |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img20_small.jpg> |
| Pie de imagen | Procedimiento analítico o gráfico, usando coordenadas en el plano cartesiano. |

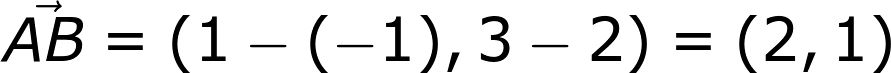
Con respecto a la **solución analítica** de la multiplicación de un vector con número, se procede de la siguiente manera:

Se multiplica cada componente del vector por el número *k*:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (48).gif

Por ejemplo, dado el vector  definido por los puntos  y  calculamos su producto por los números  y :

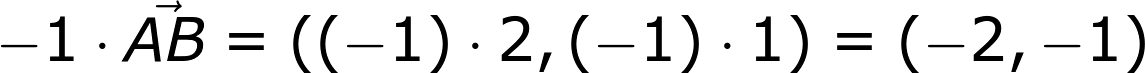
1. Las componentes del vector son:



1. Efectuamos el producto del vector por el número 2, componente a componente:



1. Efectuamos el producto del vector por el número −1, componente a componente:



1. A continuación, dibujamos la resolución gráfica de ambos productos:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG25 |
| **Descripción** | Representaciones gráficas del **vector *AB*** (izquierda) y de sus **multiplicaciones** por −1 y 2 (derecha). |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img22_small.jpg> |
| **Pie de imagen** |  |

Para profundizar en el tema debe seguir el siguiente enlace, [[VER](https://tube.geogebra.org/m/64980) ]

[SECCIÓN 2] **2.2 Módulo y argumento**

Si las coordenadas de un vector son , el módulo del vector se calcula mediante el teorema de Pitágoras:



|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG26 |
| **Descripción** | Un vector y sus coordenadas forman un triángulo rectángulo, en el cual el **módulo** del vector está representado por la hipotenusa. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img9_small.jpg> |
| **Pie de imagen** | Módulo de un vector. |

Por ejemplo, para determinar el módulo del vector de origen  y extremo procedemos de la siguiente forma:

1. Representamos el vector en un sistema de coordenadas cartesianas:

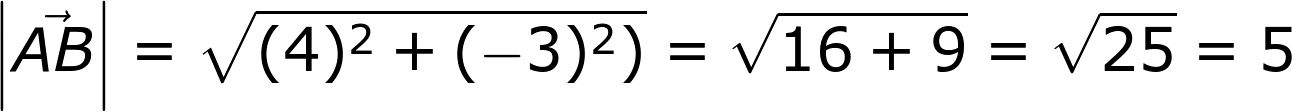
|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG27 |
| **Descripción** | Representación del **vector de origen  y extremo** en un sistema de coordenadas cartesianas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14638/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_10_05_img10_small.jpg> |
| **Pie de imagen** |  |

1. Sabemos que las coordenadas del vector son:

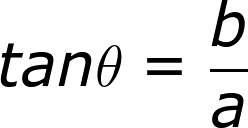
C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (53).gif



Por tanto, el módulo del vector es:

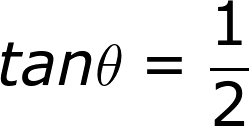


Con respecto al **argumento,** se definecomoel ángulo positivo, ubicado en posición normal. Se calcula usando la razón trigonométrica tangente, sin ir más lejos, teniendo el vector definiremos como el argumento,





Por ejemplo, con el vector , su argumento o dirección es:





C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (62).gif

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG28 |
| **Descripción** | La ubicación del argumento del vector en el plano cartesiano. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Argumento del vector |

[SECCIÓN 2] **2.3 Vector unitario**

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Los vectores unitarios son aquellos que no poseen dimensiones y su módulo corresponde a la unidad. |

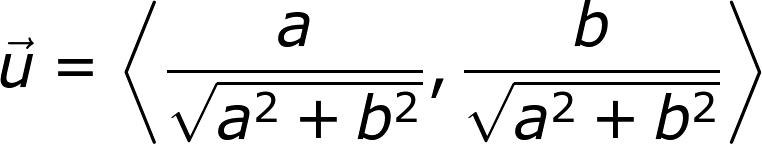
Se obtiene un vector unitario, con la misma dirección y sentido de un vector diferente al vector nulo, con los siguientes pasos:

Sea

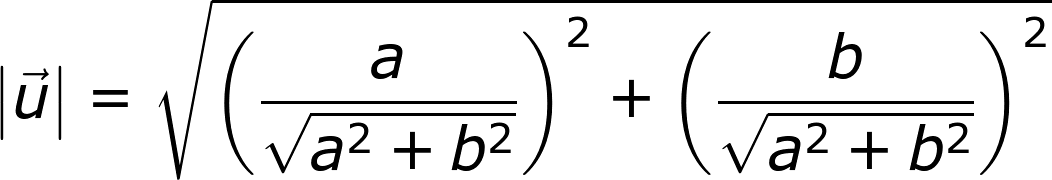
Siendo su modulo



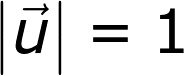
Por tanto las coordenadas del vector unitario , son:



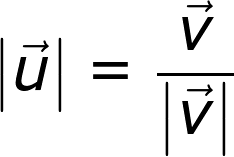
Ya que cumple







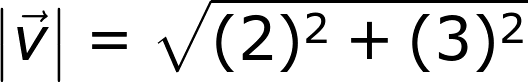
En resumen, **el vector unitario** se expresa como:

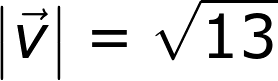


Este proceso también es conocido como la normalización del vector .

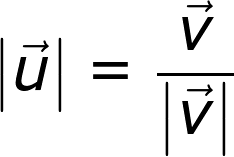
Por ejemplo, para encontrar el vector unitario que posee la misma dirección y sentido, que se procede de la siguiente manera:

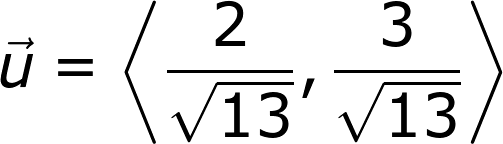
* 1. Se halla el modulo del vector





2. Para encontrar un vector con la misma dirección y sentido, usando:





[SECCIÓN 2] **2.4 Consolidación**

[SECCIÓN 1] **3 Sistema de referencia euclidiano**

El sistema de referencia euclidiano u orto normal del plano, se define como:. Donde , es un punto cualquiera llamado origen de coordenadas, además es la base canónica de .

Con respecto a las coordenadas de los vectores en un sistema de referencia Euclideo, se establece como:

Las coordenadas del punto del sistema de referencia Euclideo , son las mismas coordenadas del vector posición , esto es, por tanto las coordenadas del punto son .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG29 |
| **Descripción** | Coordenadas del vector posición , esto es,  Por tanto las coordenadas del punto son . |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Sistema de referencia Euclideo. |

Para ampliar los concept sobre sistema de referencia Euclido o Ortonormal es necesario que sigas el siguiente enlace [VER](https://www.youtube.com/watch?v=mJ5BT5li-R4) y prestar especial atención hasta el minuto 5:00.

[SECCIÓN 2] **3.1 Consolidación**

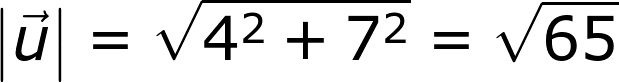
[SECCIÓN 1] **4 Producto escalar de dos vectores**

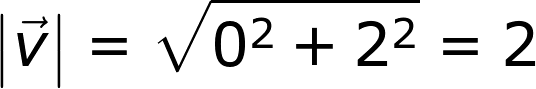
El producto punto o producto escalar de vectores, permite obtener un número o escalar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | Producto escalar de dos vectores |
| **Contenido** | Dados dos vectores y en el plano, y sea un ángulo entre y , entonces el producto escalar se define como el producto de los módulos de , y el coseno del ángulo formado entre ellos, algebraicamente se obtiene: |

Por ejemplo, sea y y .

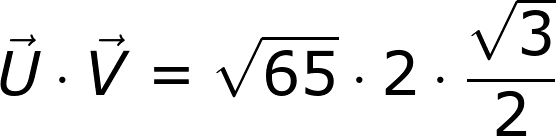
Hallando los módulos:

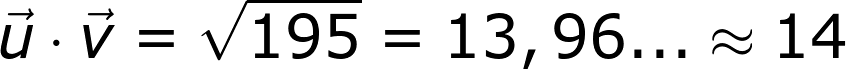




Remplazando en la ecuación







El valor del producto vectorial de los vectores dados es .

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El resultado obtenido en el producto vectorial de dos vectores , siempre será un número o dicho en termino de vectores un escalar. |

El producto escalar también se puede expresar de forma analítica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Producto escalar o producto punto de dos vectores de forma analítica.** |
| **Contenido** | Dados los vectores y, el producto escalar en forma analítica se expresa como: |

Ahora con los mismos valores del ejemplo anterior, pero usando la expresión analítica, hallar el producto escalar.

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (82).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (83).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (84).gif

Así mismo, se determina el producto punto de los vectores en y , de la siguiente manera:

Descomponiendo la notación del vector posición:

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (85).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (86).gif

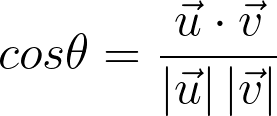
C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (87).gif

C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (88).gif

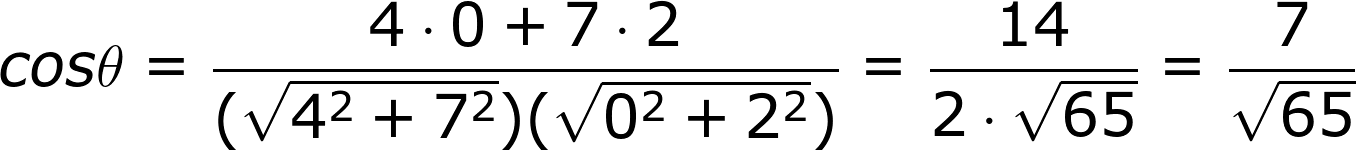
Sin embargo angulas ocasiones es necesario, conocer el ángulo que forman los vectores, para tal fin se usa la expresión:

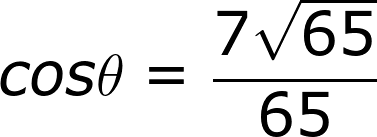
C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (89).gif

Despejando , se obtiene:



Por ejemplo al usar los vectores y , y determinar el ángulo que forman se obtiene:





C:\Users\usuario\Downloads\CodeCogsEqn (94).gif

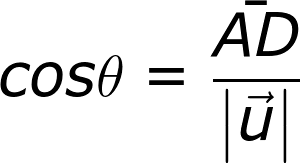
Por tanto la medida del ángulo formado entre los dos vectores aproximadamente

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Vectores Ortogonales** |
| **Contenido** | Dados y en el plano son ortogonales (o perpendiculares) si solo si |

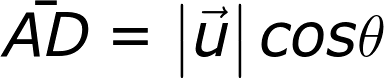
En relación con la interpretación geométrica que atribuida al producto escalar, se evidencia a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_08\_IMG30 |
| **Descripción** | Interpretación geométrica del producto escalar. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En la interpretación geométrica del producto escalar es posible identificar la proyección de en el vector |

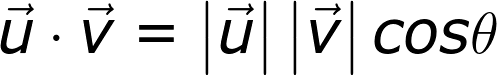
Por tanto, en la MA\_10\_08\_IMG28 se visualiza que:



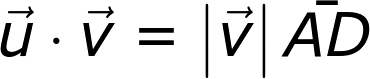
El es la proyección escalar , este segmento está contenido en la recta perpendicular a que contiene al punto final del .



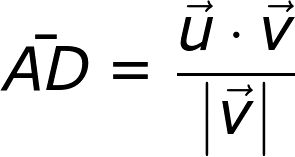
Reemplazando en



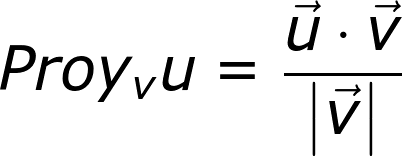
Se obtiene,



Despejando



Finalmente resulta,

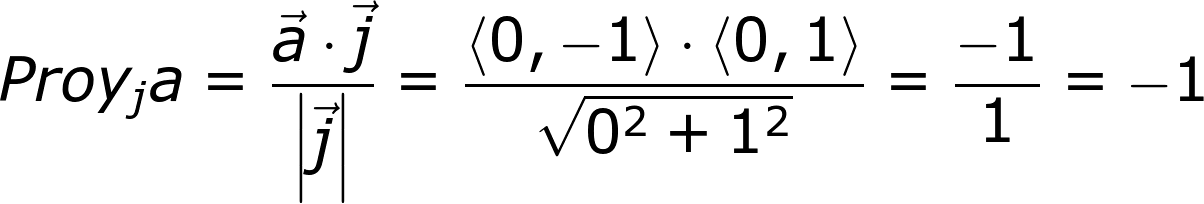


Se lee, proyección escalar de sobre la dirección de .

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Proyección escalar** |
| **Contenido** | La proyección escalar de un vector sobre la dirección de otro vector , es el cociente entre el producto escalar de los vectores y el modulo del vector sobre el que proyectamos ortogonalmente. |

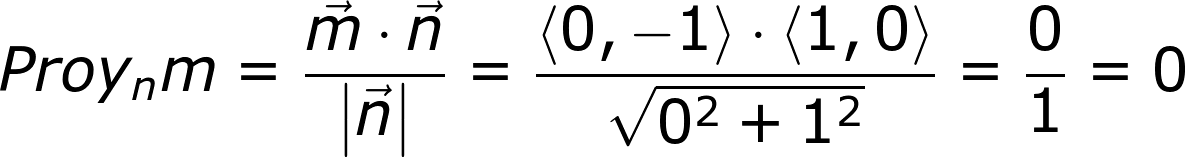
Por ejemplo, calcula la proyección escalar de sobre la dirección del vector

.



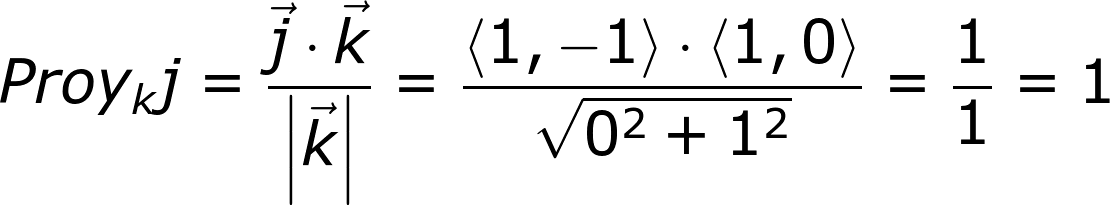
Por otra parte, calcula la proyección escalar de sobre la dirección del vector

.



Finalmente encuentra la proyección escalar de sobre la dirección del vector

.



|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | * En la proyección escalar siempre se encuentra un número real * La proyección escalar es igual a cero si solo si los ángulos dados son ortogonales. * La proyección escalar es positiva si solo si el ángulo entre los vectores es agudo. * La proyección escalar es negativa si solo si el ángulo entre los vectores es obtuso. |

[SECCIÓN 2] **4.1 Consolidación**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_08\_10\_REC00 | |
| **Web 01** | Vectores en el plano | http://tube.geogebra.org/m/6977 |
| **Web 02** | Vector Por Escalar | https://tube.geogebra.org/m/64980 |
| **Web 03** | Sistema de referencia ortonormal | https://www.youtube.com/watch?v=mJ5BT5li-R4 |