|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Las funciones |
| Código del guion | MA\_10\_01\_CO |
| Descripción | La conceptualización, clasificación y propiedades de las funciones. |

[SECCIÓN 1] **1 Las funciones reales**

Entre diversos conjuntos de personas, instituciones y objetos se pueden encontrar múltiples formas de relación. Por ejemplo, la relación “ser madre de” vincula a un conjunto de personas con otro conjunto de personas, mientras que la relación “ser proveedor de” podría vincular conjuntos mixtos de empresas, instituciones y personas. Por su parte la relación “ser sinónimo de” vincula conjuntos de palabras, mientras la relación “ser componente del ecosistema marino” vincula conjuntos mixtos de sistemas, procesos y microorganismos. Finalmente, la relación “cantidad de diagonales de” vincula un conjunto de números con uno de polígonos.

Para la relación “ser madre de”, en el primer conjunto, necesariamente deben haber mujeres que han tenido hijos, y en el segundo conjunto podrían existir mujeres que están en el primer conjunto. Lo que es importante, para definir la relación, son las “flechas” que comunican los elementos de cada conjunto. En el caso de la relación expuesta, ser madre vincula parejas madre-hijo y no solo a personas aisladas. Se procura que los elementos que están en los conjuntos aparezcan porque efectivamente cumplen, según la relación descrita. Ello es lo que se especifica al definir el dominio y el rango de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** | La relación “ser madre de” entre conjuntos de personas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Crear un par de conjuntos M (madres) y H (hijos) y una relación entre conjuntos como la siguiente:    en la que Mercedes es madre de Carlos, Laura y Mauricio, Gilma es madre de Diana, César y Rubén, mientras que Alicia es madre de Rocío. Así, en el conjunto M están Mercedes, Gilma y Alicia, mientras que en el conjunto H están todos los demás. |
| **Pie de imagen** | Ejemplo de la relación “ser madre de” entre conjuntos. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG02 |
| **Descripción** | La relación “cantidad de diagonales de” entre números y polígonos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Crear un par de conjuntos D (diagonales) y P (polígonos), y una relación entre conjuntos como la que se muestra a continuación:    en la que a cada polígono, se le asigna la cantidad de diagonales correspondiente.  NO OLVIDAR: Cambiar los nombres de los conjuntos.  NO OLVIDAR: Incluir el número 0 y el 1 en el conjunto de números.  NO OLVIDAR: Incluir polígonos cóncavos y no regulares.  Los triángulos tendrán correspondencia con el 0  Los cuadriláteros con el 2,  Los pentágonos con el 5,  Los hexágonos con el 9  El conjunto de salida siempre ponerlo en color rojo, y el llegada en color azul. |
| **Pie de imagen** | Ejemplo de la relación “cantidad de diagonales de” entre conjuntos. |

[SECCIÓN 2] **1.1 El concepto de función**

Las **funciones** son tipos particulares de relación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función** |
| **Contenido** | Una **función** es una relación entre dos conjuntos que satisface la condición: “a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo uno de los elementos del segundo conjunto”. |

Aunque habitualmente una función define la relación entre los elementos de cada uno de los conjuntos, en muchas ocasiones se confunde que dos conjuntos están relacionados con la idea de que siempre debe haber una ecuación que presenta la relación entre ellos; no necesariamente toda función ofrece una regla algorítmica para pasar de un conjunto al otro por medio de esta, ni toda expresión que relaciona variables es una función. Las representaciones de las funciones como flechas entre conjuntos, como columnas de una tabla o como gráfica en el plano cartesiano son tan relevantes para comprender la función como la expresión analítica .

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC10 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 1° ESO/Matemáticas/Las funciones y gráficas/El concepto de función/¿Qué es una función? |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Quitar las diapositivas 1, 2 y 3  Conservar las diapositivas 4, 5, 6 y 7, pero incluyendo entre la 4 y la 5 una nueva diapositiva con los cambios señalados en la imagen:  FAVOR HACER VERDES TODAS LAS FLECHAS    Creada 1 |
| **Título** | Algunos ejemplos de función. |
| **Descripción** | Actividad para identificar funciones a partir de las “flechas” o correspondencias entre los conjuntos relacionados |

Por ejemplo, la expresión representa el lugar geométrico del conjunto de los puntos que corresponden a la relación existente entre los puntos que yacen en un diámetro horizontal de una circunferencia de radio 1 y los puntos que están en la circunferencia; esta expresión no se trata de una función, porque para cada número entre 1 y -1, existen dos imágenes que le corresponden.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG03 |
| **Descripción** | Una relación que no es una función. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Crear una correspondencia entre conjuntos que represente la relación entre los puntos en un diámetro horizontal de una circunferencia y los puntos que están en la circunferencia. Los conjuntos se llamarán D (por ser los puntos en el diámetro horizontal) y C (por ser los puntos sobre la circunferencia).  La imagen debe quedar muy similar a la siguiente:  FAVOR HACER VERDES LAS FLECHAS    Creada 2  Nota al ilustrador: La selección de colores rojo y azul para los conjuntos de salida y llegada y de verde o naranja no es arbitraria, se usa todo el tiempo para identificar DominIo, codominio y Rango, además para identificar la ubicación de los conjuntos en las diferentes representaciones |
| **Pie de imagen** | La expresión no representa una función, pues a cada elemento del conjunto de salida le corresponden dos elementos del conjunto de llegada. |

La expresión representa la manera en la que se obtienen los números de Fibonacci. Este es un ejemplo de una ecuación que, aunque indica la forma en que se obtiene un número a partir de los dos números previos, no ofrece una regla específica para obtener uno de los números haciendo operaciones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG04 |
| **Descripción** | Función recursiva: Aunque es una función, no ofrece una regla directa para obtener los números. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Del mismo modo que en la imagen, dejar el mismo conjunto de partida N rojo, pero en el de llegada poner los respectivos números de Fibonacci. (Es decir , el listado azul es 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 377, 610 y 196418)    No olvidar: poner en desorden los números de Fibonacci.  Hacer VERDES las flechas de asignación |
| **Pie de imagen** | Representación como correspondencia entre conjuntos para la función “ser el número de Fibonacci de la posición \_*x*\_\_”. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC20 |
| **Título** | Relaciona el dominio y el codominio de una función |
| **Descripción** | Interactivo para relacionar dos conjuntos mediante la relación “ser el número siguiente del cuadro de” |

[SECCIÓN 2] **1.2 La representación de funciones**

El concepto mismo de función como *relación entre dos conjuntos que satisface la condición de que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo uno de los elementos del segundo conjunto*, implica inicialmente una referencia en términos de representación.

Una primera idea que se hace del concepto de función es la de **correspondencia entre elementos de dos conjuntos**, como las que aparecen a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG05 |
| **Descripción** | Representación de función como correspondencia entre conjuntos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Crear una representación entre dos conjuntos N y C, no ordenados de números naturales y cuadrados, con sus correspondencias puestas como flechas (VERDES), como:    Creada 3 |
| **Pie de imagen** | Representación como correspondencia entre conjuntos para la función “ser cuadrado de”. |

En efecto, algunos conjuntos se pueden definir por comprensión valiéndose de una regla o de un algoritmo que permita obtener la **variable dependiente** (es decir, la del conjunto de llegada), en función de la **variable independiente** (la del conjunto de salida). Algunos ejemplos de función son: el conjunto de los números cuadrados, el de los números triangulares o el de los puntos que están en una recta que no sea vertical, entre otros, etc.

Una segunda idea o forma de representar funciones, es la que presenta una **ecuación** como correspondencia entre variables. Esta forma de representación se conoce como representación **analítica** de la función. En ese caso, los elementos del conjunto de partida cambian según varíe , o la variable independiente, mientras que los valores del conjunto de llegada, o valores de la variable dependiente , se obtienen mediante una regla o ecuación, que condensa, en términos matemáticos, la relación de correspondencia entre los conjuntos y la forma en que se obtiene a partir de . Ello se expresa diciendo que o que está *en función* de .

Veamos algunos ejemplos:

1. La relación “ser cuadrado de” se puede escribir como . Esta relación **Sí** es una función, ya que a cada número le corresponde un único número cuadrado. Sin embargo, la relación “ser raíz cuadrada de” no es una función, ya que cada número positivo tiene dos raíces cuadradas. Lo que sí es función es “ser raíz cuadrada positiva de” y “ser raíz cuadrada negativa de”, que se escriben respectivamente como y .
2. La relación “ser el -*ésimo* número triangular”, en el conjunto de los números naturales, asigna a cada natural la suma de los números naturales desde 1 hasta . Se puede escribir como , y **sí** es una **función discreta**. Que la función sea discreta significa que los valores del conjunto de salida solamente son los números naturales y se observa en el hecho de que la variable que se usa es en lugar de .
3. La relación “ser el -*ésimo* número de Fibonacci”, en el conjunto de los números naturales, asigna a cada natural el resultado de la adicción de los dos números de Fibonacci que lo preceden. Para describir la generación de números de Fibonacci se usa la expresión , y **sí** es una función, pero debemos notar que no *funciona* como una forma de obtener el -*ésimo* término haciendo operaciones sobre él mismo. Debido a que para obtener un nuevo número de Fibonacci se requiere conocer los dos números de Fibonacci previos, ello la hace una *función recursiva*.

Una tercera idea que sirve como representación del concepto de función es la de **tabulación**, en la que se ubican los valores del conjunto de salida en la primera columna de una tabla, y sus valores respectivos al conjunto de llegada se sitúan al frente, en la segunda columna.

Como parte de los procesos asociados a la representación de funciones, la posibilidad de *ordenar* los elementos del conjunto de salida está siempre latente. En la representación tabular habitualmente los valores en la tabla van de menor a mayor, aunque no es un requerimiento, siempre que frente a cada elemento de la primera columna esté su correspondiente. La anterior es una de las razones por las que la noción de orden es fundamental en matemáticas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La recta real contiene el conjunto de los números reales, y su ubicación horizontal suele representarse con los números ordenados de menor a mayor, de izquierda a derecha. Es decir, para saber si un número es mayor que otro, siempre será mayor el que está a su derecha.  En el plano cartesiano, los ejes son dos rectas reales perpendiculares, en el que la recta vertical presenta los números ordenados de menor a mayor, de abajo hacia arriba. |

Veamos la descripción tabular asociada a la función “ser cuadrado de”:

|  |  |
| --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “ser el cuadrado de \_*x*\_\_” | |
| **Elementos del conjunto de partida:** todos los números reales | |
| **Elementos del conjunto de llegada:** todos los números reales positivos (fíjate que no son solo los que se conocen como números cuadrados). | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos.** | |
|  |  |
|  |  |
|  | 18,49 |
|  | 2 |
|  | 1 |
|  | 0,25 |
|  | 0 |
|  | 1 |
|  | 1,9999616 |
|  | 4 |
|  | 9 |
|  |  |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |

Ahora, veamos el ejemplo con la relación “ser la suma de los números consecutivos desde 1 hasta \_\_*x*\_\_”

|  |  |
| --- | --- |
| **Descripción de la relación:** “ser la suma de los números consecutivos desde 1 hasta este” o “ser el respectivo número triangular” | |
| **Elementos del conjunto de partida:** todos los números naturales | |
| **Elementos del conjunto de llegada:** los números triangulares | |
| **Ecuación o regla para relacionar los elementos. :** | |
|  |  |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  |  |
|  |  |
|  | No está en el conjunto de salida |
|  |  |
|  |  |
|  | No está en el conjunto de salida |
| 4 |  |
| 5 |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC30 |
| **Título** | Completa la representación tabular |
| **Descripción** | Completar la representación tabular para la función “ser raíz cuadrada negativa de”. |

Finalmente, una **cuarta idea** con relación a la representación de funciones es la **gráfica** de la función. En esta representación, los conjuntos de salida y de llegada se sitúan respectivamente en los ejes *X* y *Y* de un plano cartesiano, y se ubica un punto para la coordenada , donde el elemento pertenece al conjunto de salida, y el elemento es su correspondiente en el conjunto de llegada. Desde la representación tabular, cada punto corresponde a la pareja ordenada que aparece en cada una de las filas de la representación tabular.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG06 |
| **Descripción** | Representación de función como gráfica en el plano cartesiano |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Esta gráfica se construyó como una captura de pantalla desde el archivo de Geogebra que indica el tránsito entre la representación conjuntista y la gráfica de la función  **mantener los colores de la gráfica de ejemplo y colocar los nombres de los ejes del plano cartesiano en mayúscula e itálica.**    Creada 4 |
| **Pie de imagen** | Representación como gráfica cartesiana para la función “ser cuadrado de”. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC40 |
| **Título** | Conversión entre representaciones de la función |
| **Descripción** | Interactivo que muestra los pasos para obtener la representación de la función desde la representación como correspondencia entre conjuntos hasta la representación gráfica de la función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC50 |
| **Título** | Identifica diferentes tipos de representación de funciones |
| **Descripción** | Agrupar diferentes tipos de representación para tres funciones diferentes |

[SECCIÓN 2] **1.3 Dominio, codominio y rango de una función**

Tanto en la representación conjuntista, como en la tabular y gráfica del concepto de función, se habla del conjunto de salida, del conjunto de llegada y de las flechas entre los elementos en cada conjunto. Los nombres técnicos de este par de conjuntos son, respectivamente, *dominio* y *codominio* de la función, mientras que las flechas o la relación misma representa el *rango* o *imagen* de la función.

Así, en el *dominio* de una función se encuentran todos los valores que pueden estar en el conjunto de salida, mientras que, en el *codominio*, aparecen justamente los valores presentes en el conjunto de llegada. El *rango* o imagen son los vínculos entre los elementos del dominio y del codominio, y es lo que realmente captura la función.

Por ejemplo, para la función “ser raíz cuadrada negativa de”, no se pueden incluir en el dominio los números reales negativos, pues ellos no tienen raíz cuadrada. Del mismo modo, la función “La suma de los números consecutivos desde 1 hasta *x*” solo es aplicable sobre el conjunto de los números naturales, es decir que su dominio es el conjunto de los números naturales.

En el caso de la función “Costo de una llamada telefónica que duró *x* minutos”, cuando el conjunto de salida incluye los tiempos de duración de la llamada y el conjunto de llegada incluye los costos correspondientes en pesos, el dominio de la función es el de los números reales positivos, mientras que en el codominio estarán solo los múltiplos del valor por minuto. En caso de que se esté llamando desde una cabina o lugar público el costo deberá ser múltiplo de $50, pues no hay forma de pagar con monedas de menor valor (por ejemplo una llamada no podrá tener un costo de $269 pesos).

En la representación tabular propuesta podemos cambiar la descripción “Elementos del conjunto de partida” por “Dominio de la función”, mientras que “Elementos del conjunto de llegada” se puede denominar “Codominio de la función”:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Dominio, codominio y rango de una función** |
| **Contenido** | El *dominio* de las funciones es importante para determinar cuáles de los valores aparecerán en el conjunto de salida en la representación conjuntista, o en la primera columna de la representación tabular, o en el eje *X* de la representación gráfica cartesiana. Por su parte, el *codominio* de una función contiene los elementos del conjunto de llegada en la representación conjuntista, o en la segunda columna de la representación tabular, o en el eje *Y* de la representación gráfica cartesiana. El *rango* es la imagen de la función, lo cual es evidente en su representación gráfica cartesiana; propiamente, la función es el conjunto de parejas ordenadas cuyas entradas están respectivamente en el dominio y en el codominio de la función. Tales parejas coinciden con la gráfica cartesiana y, a lo largo de la exposición, se ha identificado con los colores de los puntos en el rango o imagen como . |

[SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC60 |
| **Título** | La representación de funciones |
| **Descripción** | Agrupar diferentes tipos de representación para la misma función |

[SECCIÓN 1] **2 la clasificación del tipo de funciones según su saturación y tránsito**

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Una *función* es una relación que captura la correspondencia entre dos conjuntos, el *dominio* y *codominio* de la función, de manera que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento en el codominio. El conjunto de todas las imágenes del dominio en el codominio se llama *rango* o *imagen* de la función que se representa, bien sea en forma *conjuntista* mediante flechas del dominio al codominio, de manera *tabular* como puntos en un sistema de coordenadas, como *gráfica* en el plano cartesiano o bien como una *ecuación* que indica la relación entre los elementos del dominio para obtener los del codominio. |

En cada una de las representaciones de la función, bien sea la conjuntista, la tabular, la gráfica o la analítica, hay diferentes maneras en que, desde el dominio de la función, se *satura* el codominio. Según la forma de saturación, las funciones pueden ser inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

El reconocimiento de las formas de saturación de las funciones permite identificar si las flechas son unidireccionales o bidireccionales, de manera que se pueda ir y volver de un conjunto a otro, con lo cual será posible definir luego operaciones de composición entre las funciones.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC70 |
| **Título** | Clasificación de funciones |
| **Descripción** | Interactivo que explica la clasificación de funciones según su saturación y tránsito |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_REC80 |
| **Título** | Determina si una función es inyectiva |
| **Descripción** | Determinar si una función es inyectiva, desde las diferentes representaciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC90 |
| **Título** | Determina si una función es sobreyectiva |
| **Descripción** | Determinar si una función es sobreyectiva, desde las diferentes representaciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | **MA\_10\_01\_CO\_REC100** |
| **Título** | Funciones biyectivas |
| **Descripción** | Determinar si una función es biyectiva, desde las diferentes representaciones |

[SECCIÓN 2] **2.4 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** | **MA\_10\_01\_REC110** |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4°ESO/Matemáticas/Las funciones de proporcionalidad inversa/Las funciones de proporcionalidad inversa/ La función y = 1/x. Gráfica y propiedades. |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Queda igual  Queda igual  Queda igual  CAMBIAR LO INDICADO    CAMBIAR LO INDICADO  Dejar el mismo “Practica”  En el segundo menú:  Cambiar el título “Asíntotas” por “Biyectividad”  Eliminar la frase y escribir: “En la gráfica de la función se puede observar el cumplimiento del criterio de la recta horizontal y vertical, que a lo largo de la función solo la corta en un punto. La animación no será de las flechas actuales, sino que debe moverse una “cruz”, como las moradas, a lo largo de la función.  Eliminar la frase y escribir: “La recta vertical es la paralela al eje *Y* que corta la función y garantiza que es inyectiva. La animación debe mover, de izquierda a derecha, la recta morada .  Eliminar la frase y escribir: “La recta horizontal es la paralela al eje *X* que corta la función y garantiza que es sobreyectiva. La animación debe mover, de izquierda a derecha, la recta morada . Si se cumple el criterio de la recta horizontal y vertical simultáneamente, la función será biyectiva.    El “practica”, debe cambiarse. La frase debe decir: “¿Es la función biyectiva según el criterio de la recta horizontal y vertical? El dibujo es muy similar en el cuadrante I, pero lo del cuadrante 3 es simétrico al eje *X*, en el cuadrante II. Es decir, la gráfica será similar a la de abajo, de color naranja, con eje *X* rojo y eje *Y* azul.    En la solución debe decir: “No, porque la recta horizontal corta a la gráfica de la función en dos puntos cada vez”. |
| **Título** | Criterio de la recta vertical y horizontal |
| **Descripción** | Interactivo diseñado para aprender y aplicar los criterios de la recta horizontal y vertical, así como para identificar funciones biyectivas desde su representación gráfica |

[SECCIÓN 1] **3 Las propiedades de las funciones**

La clasificación de las funciones según como se saturan mutuamente el dominio y el codominio de cada función, ayuda a tener una idea *global* de ella. Una biyección entre conjuntos permite los tránsitos de ida y vuelta entre los conjuntos de salida y llegada de la función.

Para efectos de identificar el tipo de cambio *local* que tienen las funciones, se estudian los cambios entre elementos cercanos. Según los cambios de crecimiento de la función, las funciones se clasifican en crecientes, decrecientes o constantes. Por otra parte, según su simetría y regularidad, las funciones se clasifican en pares o impares. Si hay condiciones de repetibilidad o monotonía, se dirá que las funciones son periódicas.

Lograr hacer una identificación precisa de cada tipo de función permite, entre otras cosas, no repetir procesos en varios cuadrantes, tener una idea previa de la gráfica de la función, identificar qué operaciones se puede realizar con ella, identificar si tiene inversa, etc.; esto nos facilita argumentar y deducir propiedades desconocidas obteniendo información más rápida y fiable.

[SECCIÓN 2] **3.1 La función creciente**

El estudio del crecimiento y decrecimiento de una función se realiza por intervalos, es decir, en “cercanías” de un sector a estudiar. Una función puede ser creciente en un intervalo y decreciente en otro, ser estrictamente creciente o no ser lo uno ni lo otro, en cercanías de algunos lugares que se considerarán “críticos”.

Una función es creciente cuando los cambios ascendentes en elementos del dominio implican, a su vez, cambios ascendentes en los elementos del codominio. Veamos lo que ello significa en cada tipo de representación.

En la representación conjuntista, teniendo ordenados de menor a mayor los elementos en el dominio y en el codominio, una función será creciente si las flechas entre los conjuntos preservan el orden. Ello será evidente en la representación tabular, pues teniendo ordenados de menor a mayor los elementos en el dominio o columna *x*, los correspondientes en el codominio o columna *y* resultarán ordenados, a su vez, de menor a mayor.

Por su parte, en la representación analítica, una función se denomina *creciente* en un intervalo si al tomar dos elementos y cualesquiera del dominio en ese intervalo, tales que , entonces también .

Gráficamente el crecimiento de una función se observa verificando si al tomar valores en el eje *X* que aumentan –es decir que se mueven de izquierda a derecha–, las imágenes respectivas según la orientación del eje *Y* también aumentan, moviéndose respectivamente de abajo hacia arriba.

El crecimiento de una función continua en un intervalo puede asociarse a que la recta que une dos elementos y cualesquiera del dominio en ese intervalo, tiene pendiente positiva.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG07 |
| **Descripción** | Ejemplo de función creciente |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función creciente representada gráficamente. |

[SECCIÓN 2] **3.2 La función decreciente**

El concepto de función *decreciente* es completamente análogo al de función creciente, salvo porque los cambios ascendentes en elementos del dominio implican, a su vez, cambios *descendentes* en los elementos del codominio.

En la representación conjuntista, teniendo ordenados de menor a mayor los elementos en el dominio y en el codominio, una función será decreciente si las flechas entre los conjuntos invierten el orden. Ello será evidente en la representación tabular, pues teniendo ordenados de menor a mayor los elementos en el dominio o columna , los correspondientes en el codominio o columna , resultarán ordenados en el orden inverso, es decir, de mayor a menor.

Por su parte, en la representación analítica, una función se denomina *decreciente* en un intervalo si al tomar dos elementos y cualesquiera del dominio en ese intervalo, tales que , entonces .

Gráficamente el decrecimiento de una función se observa verificando si al tomar valores en el eje *X* que aumentan –es decir que me mueven de izquierda a derecha–, las imágenes respectivas según la orientación del eje *Y* disminuyen, es decir que van de arriba hacia abajo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG08 |
| **Descripción** | Ejemplo de función decreciente |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función decreciente, en un intervalo, representada gráficamente. |

El decrecimiento de una función continua en un intervalo puede asociarse a que la recta que une dos elementos y cualesquiera del dominio en ese intervalo, tiene pendiente negativa.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La pendiente de una recta que pasa por dos puntos y es un índice, es decir, una razón entre los cambios en , frente a los cambios en *.* Los cambios en y en se calculan haciendo la diferencia entre las componentes, por lo que la pendiente será: |

[SECCIÓN 2] **3.3 La función constante**

Como su nombre lo indica, una función es *constante* si no cambia, es decir, si no hay variación en sus imágenes, con lo que se trata de una relación que asigna a todos los elementos del dominio el mismo elemento en el codominio.

En la representación conjuntista, una función es constante cuando relaciona todos los elementos del dominio con un único elemento del codominio.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG09 |
| **Descripción** | Ejemplo de función constante |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Función constante, representada conjuntistamente. |

Tabularmente la función constante aparece con elementos que presentan variación en la primera columna, pero con elementos constantes, es decir que no varían.

En resumen, una función constante tendrá como representación tabular, analítica y gráfica las capturadas en la siguiente tabla:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG10 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Descripción de la relación:** “ser igual a ” | | | | **Dominio: elementos del conjunto de partida:** todos los números reales | | | | **Codominio: elementos del conjunto de llegada:** | | | | **Ecuación o regla para relacionar los elementos:** | |  | |  |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | | 4 |  | | 5 |  | |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de . |

Para un caso específico, por ejemplo la función constante tendría las siguientes representaciones tabular, gráfica y analítica:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG11 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Descripción de la relación:** “ser igual a 8” | | | | **Dominio: elementos del conjunto de partida:** todos los números reales | | | | **Codominio: elementos del conjunto de llegada:** | | | | **Ecuación o regla para relacionar los elementos:** | |  | |  |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | | 4 |  | | 5 |  | |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de |

La representación gráfica de una función constante es una recta paralela al eje *X*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** | **MA\_10\_01\_CO\_REC120** |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4° ESO/ Matemáticas/Las funciones/El estudio de una función/El crecimiento y el decrecimiento de una función |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Queda igual  Cambiar lo indicado en la imagen. Además, eliminar la frase y escribir: “Observa la representación gráfica de esta función. Si la sigues de izquierda a derecha, ¿es creciente o decreciente?”  Cambiar lo indicado. Además, eliminar la frase y escribir: “El crecimiento de la función se observa, pues al tomar valores en el eje *X* que aumentan –es decir que se mueven de izquierda a derecha–, las imágenes respectivas según la orientación del eje *Y* también aumentan, moviéndose respectivamente de abajo hacia arriba.  Cambiar lo indicado para todas las gráficas de las funciones. Además, eliminar la frase y escribir: “Observa la representación gráfica de esta función. Si la sigues de izquierda a derecha, ¿es creciente o decreciente?”  Cambiar lo indicado. Además, eliminar la frase y escribir: “El decrecimiento de la función se observa, pues al tomar valores en el eje *X* que aumentan, es decir que se mueven de izquierda a derecha, las imágenes respectivas según la orientación del eje *Y* disminuyen, moviéndose respectivamente de arriba hacia abajo.  Dejar igual, quitando los puntos suspensivos.  Dejar la misma “Actividad” |
| **Título** | Funciones crecientes, decrecientes y constantes |
| **Descripción** | Interactivo para identificar funciones crecientes, decrecientes y constantes desde su representación gráfica. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC130 |
| **Título** | Practica crecimiento, decrecimiento y constancia de funciones |
| **Descripción** | Identificar condiciones de crecimiento, decrecimiento y constancia de algunas funciones, desde distintas representaciones. |

[SECCIÓN 2] **3.4 La función par**

Una función *par* es aquella cuyo comportamiento para cada número positivo y su negativo o inverso aditivo es el mismo. Otra forma de expresar esa idea es que, para obtener la parte negativa de la función (cuadrantes II y III), basta hacer simetría sobre el eje *Y* del comportamiento de la función en la parte positiva (cuadrantes I y IV).

En la representación conjuntista y en la tabular, al ubicar parejas de números opuestos (inversos para la suma, como 1 y 1, y y ), la imagen en el codominio es la misma, es decir que la flecha que sale de los opuestos llega al mismo número. Así, la organización de los elementos del dominio respecto a los elementos del codominio se hace por *pares*:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG12 |
| **Descripción** | Función par |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación conjuntista de una función par. |

Analíticamente la característica de paridad para las funciones se expresa de la siguiente manera: una función es par si y solo si . Entonces, para verificar si una función es par o no, desde su representación analítica, basta elegir un par de números opuestos y aplicar la función en ellos. Si los resultados son iguales, hay un indicio de que la función puede ser par.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC140 |
| **Título** | Aprende a identificar una función par |
| **Descripción** | Calcula las imágenes de números opuestos mediante la misma función como indicio para identificar la paridad de una función |

Finalmente, desde la representación gráfica, una función es par si es simétrica respecto al eje *Y*. Visualmente significaría que si la función se grafica en los cuadrantes I y IV y se pone un espejo sobre el eje *Y*, el reflejo hacia los cuadrantes II y III generará la función completa.

Las siguientes son representaciones múltiples de funciones pares:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG13 |
| **Descripción** | Ejemplo de función par |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Descripción de la relación:** “ser el cuadrado de *x*” | | | | **Dominio: elementos del conjunto de partida:** todos los números reales | | | | **Codominio: elementos del conjunto de llegada:** los números reales positivos | | | | **Ecuación o regla para relacionar los elementos:** | |  | |  |  |  | |  |  | |  | 18,49 | |  | 2 | |  | 1 | |  | 0,25 | |  | 0 | |  | 1 | |  | 1,9999616 | |  | 4 | |  | 9 | |  |  | | 4 | 16 | | 5 | 25 | |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de una función par. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG14 |
| **Descripción** | Ejemplo de función par |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Descripción de la relación:** “ser el recíproco de la cuarta potencia de *x*” | | | | **Dominio: elementos del conjunto de partida:** todos los números reales | | | | **Codominio: elementos del conjunto de llegada:** los números reales positivos | | | | **Ecuación o regla para relacionar los elementos:** | |  | |  |  |  | |  |  | |  | 0,00391 | |  | 0,25 | |  | 1 | |  | 16 | |  | Indeterminado | |  | 1 | |  | 0,25001 | |  | 0,0625 | |  | 0,01235 | |  |  | | 4 | 0,003906 | | 5 | 25 | |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de una función par. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG15 |
| **Descripción** | Ejemplo de función par |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Descripción de la relación:** “ser el coseno de *x*” | | | | **Dominio: elementos del conjunto de partida:** todos los números reales. | | | | **Codominio: elementos del conjunto de llegada:** los números reales entre -1 y 1 | | | | **Ecuación o regla para relacionar los elementos:** | |  | |  |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  | 1 | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | | 4 |  | | 5 |  | |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de una función par. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC150 |
| **Título** | Simetría de la función par |
| **Descripción** | A partir de la expresión analítica de una función, determinar los sectores simétricos para que la función sea par |

[SECCIÓN 2] **3.5 La función impar**

Una función *impar* es aquella cuyo comportamiento para cada número es el inverso aditivo al que se aplica a su inverso aditivo. Otra forma de expresar esa idea es que, para obtener la parte negativa de la función (cuadrantes II y III), se aplica una simetría sobre el origen.

En la representación conjuntista y en la tabular, al ubicar parejas de números opuestos (inversos para la adición, como 1 y 1, y y ), la imagen en el codominio resulta también en opuestos, es decir que la flecha que sale de los opuestos llega a opuestos. Así que, si es una función impar y si , entonces .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG16 |
| **Descripción** | Función impar |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación conjuntista de una función impar. |

Lo anterior se generaliza en la expresión de imparidad, según la cual una función es impar si y solo sí . De la misma manera que para las funciones pares, para verificar si una función es impar o no, dada su representación analítica, basta elegir un par de números opuestos y aplicar la función en ellos. Si los resultados son también opuestos, hay un indicio de que la función puede ser impar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC160 |
| **Título** | Aprende a identificar una función impar |
| **Descripción** | Calcula las imágenes de números opuestos bajo la misma función como indicio para identificar la imparidad de una función |

Finalmente, desde la representación gráfica, una función es impar si es simétrica respecto al origen. Visualmente significaría que la distancia entre cualquier imagen de la función y el origen se replica en esa misma dirección, hasta otro punto en la función.

Los siguientes son representaciones múltiples de funciones impares:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG17 |
| **Descripción** | Ejemplo de función impar |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Descripción de la relación:** “ser el cubo de *x*” | | | | **Dominio: elementos del conjunto de partida:** todos los números reales | | | | **Codominio: elementos del conjunto de llegada:** todos los números reales | | | | **Ecuación o regla para relacionar los elementos:** | |  | |  |  |  | |  |  | |  | -79,507 | |  |  | |  |  | |  |  | |  | 0 | |  | 1 | |  | 2,8283458 | |  | 8 | |  | 27 | |  |  | | 4 | 64 | | 5 | 125 | |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de una función impar. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG18 |
| **Descripción** | Ejemplo de función impar |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Descripción de la relación:** “ser el recíproco de *x*” | | | | **Dominio: elementos del conjunto de partida:** todos los números reales, excepto el cero. | | | | **Codominio: elementos del conjunto de llegada:** todos los números reales, excepto el cero. | | | | **Ecuación o regla para relacionar los elementos:** | |  | |  |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  | Indeterminado | |  | 1 | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | | 4 |  | | 5 |  | |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de una función impar. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG19 |
| **Descripción** | Ejemplo de función impar |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Descripción de la relación:** “ser el seno de *x*” | | | | **Dominio: elementos del conjunto de partida:** todos los números reales | | | | **Codominio: elementos del conjunto de llegada:** los números reales entre -1 y 1 | | | | **Ecuación o regla para relacionar los elementos:** | |  | |  |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  | 0 | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | | 4 |  | | 5 |  | |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de una función impar. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC170 |
| **Título** | Simetría de la función par e impar |
| **Descripción** | Anima un punto sobre el eje *X* y observa la imagen de él y de su opuesto, según si elige que la función sea par o impar |

[SECCIÓN 2] **3.6 La función periódica**

Algunas funciones son repetitivas o monótonas, en el sentido de que provienen de un fenómeno cuyo comportamiento cíclico se revela en la función y por ello se preserva en intervalos iguales. Una función *periódica* es aquella cuyo comportamiento en un intervalo se repite en intervalos sucesivos, que se denominarán *periodos*. Otra forma de expresar esta idea es que, para obtener toda la función, basta con repetirla en periodos iguales.

Para las funciones periódicas, la representación conjuntista y la tabular, se caracterizan porque muchos elementos en el dominio llegan al mismo elemento del codominio. Además, si se ordenan de los elementos del dominio, el conjunto de llegada se repetirá cada vez. Para lograr capturar la noción de función periódica desde la expresión analítica, se dice que es una función periódica siempre que , donde *P* es el *periodo* de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG20 |
| **Descripción** | Ejemplo de función periódica |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación conjuntista de una función periódica. |

Para verificar si una función es o no periódica, dada su representación analítica, habrá que disponer de información acerca del periodo de la función y aplicar la función en y en . Si los resultados son idénticos, hay un indicio de que la función puede ser periódica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC180 |
| **Título** | Aprende a identificar una función periódica |
| **Descripción** | Calcula las imágenes de un número y de ese número más un periodo, bajo la misma función, como indicio para identificar la periodicidad de la función |

Finalmente, desde la representación gráfica, una función es periódica si las imágenes de puntos equidistantes en el dominio, son también equidistantes en el codominio. Visualmente significaría que la función se repite a lo largo del eje *X*, de izquierda a derecha, a todo lo largo del dominio de la función. Un criterio de identificación de la periodicidad de una función puede hacerse vía una prueba de recta horizontal: Si al trazar una recta horizontal que corte a la gráfica de la función, los cortes son infinitos y repetitivos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_IMG21 |
| **Descripción** | Ejemplo de función periódica |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba de la recta horizontal para una función periódica. |

Debido a que las principales funciones periódicas en matemáticas capturan fenómenos cíclicos que modelan la naturaleza, como por ejemplo las ondas de radio o los ciclos solares, se estudiará más detalladamente los cambios cíclicos en las circunferencias. Así, los fenómenos mencionados serán variaciones de las condiciones de los ángulos y de las razones trigonométricas que se estudiarán después.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_REC190 |
| **Título** | Identifica el ciclo de una función periódica. |
| **Descripción** | Observa el trazo que describe un punto, que corresponde a la noción de “seno” del arco de circunferencia, que se repite en cada ciclo de giro |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC200 |
| **Título** | Las funciones “valor absoluto” y “parte entera”. |
| **Descripción** | Interactúa con algunas representaciones de las funciones “valor absoluto” y “parte entera”, además de si son crecientes, decrecientes, pares, impares, periódicas o ninguna de las anteriores. |

[SECCIÓN 2] **3.7 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC210 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Funciones pares e impares |
| **Descripción** | Identificar paridad e imparidad de algunas funciones, según si la simetría entre los puntos es axial o puntual. |

[SECCIÓN 1] **4 Competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC220 |
| **Título** | Competencias: funciones reales |
| **Descripción** | Actividad para comunicar tus ideas de lo aprendido de las funciones reales. |

[SECCIÓN 1]**Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC230 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC240 |
| **Título** | Evaluación de tema |
| **Descripción** | Evaluación del tema: funciones |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_10\_01\_CO\_REC250 | |
| **Web 01** | *Tipos de función* | [*URL*](http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Funciones_tipos.html)  *http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Funciones\_tipos.html* |
| **Web 02** | *Matemáticas Magdalena Ortega* | [*URL*](http://matematicasmagdalena.blogspot.com/p/calculo.html)  *http://matematicasmagdalena.blogspot.com/p/calculo.html* |
| **Web 03** | *Funciones y gráficas* | [*URL*](http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/funciones1/impresos/quincena8.pdf)  *http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/funciones1/impresos/quincena8.pdf* |