|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Las derivadas y sus aplicaciones |
| Código del guion | MA\_11\_04\_CO |
| Descripción | ¿Cómo determinar el valor máximo de una función curva? ¿Cómo determinar la tasa de cambio de una variable respecto a otra? La derivada permite resolver esta y otras preguntas, de orden geométrico, analítico y numérico. |

[SECCIÓN 1] **1 El concepto de derivada**

Las preguntas que dieron origen al estudio de las derivadas surgieron en Grecia, tres siglos antes de Cristo: el problema de la tangente a una curva y el teorema de los máximos y mínimos. A mediados del siglo XVII los matemáticos perdieron el miedo que los griegos le habían tenido a los infinitos y Johannes Kepler y Bonaventura Cavalieri fueron los primeros en usarlos como entrada al cálculo infinitesimal.

El concepto de derivada revolucionó la matemática usando técnicas poderosas de cálculo en la resolución de problemas cotidianos y especializados. Su justificación, formas de uso y aplicaciones numéricas en campos como la física, la economía y la biología son algunas de las aplicaciones que hacen de este concepto uno de los primordiales del cálculo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC10 |
| **Título** | El concepto de derivada |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia el concepto de derivada, desde la perspectiva analítica y geométrica, con sus aplicaciones |

[SECCIÓN 2] **1.1 La interpretación geométrica de la derivada**

Determinar la pendiente de una recta es útil para establecer la razón de cambio de una variable respecto a otra, cuando su comportamiento es lineal. La velocidad de un móvil que se mueve constantemente, el cambio de altura respecto al piso cuando se avanza por una escalera, etc. son ejemplos claros de esta variación a la que llamamos razón de cambio.

Cuando se estudió la ecuación de la recta, se estableció que, a través de la forma explícita de la función, (*y* = *mx* + b) es posible medir el cambio de la variable dependiente (*y*) en intervalos fijos de la variable independiente (*x*) por medio de la ecuación:

donde *m* es la pendiente de la recta y (*x, f* (*x*)) son las coordenadas de dos puntos cualquiera en la recta.

Con esta pendiente es posible determinar en una recta (es fácil, es una recta) la proporción que crece o decrece una variable respecto al crecimiento de la otra, es decir, la pendiente de la recta determina la razón de cambio de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG01 |
| **Descripción** | Gráfica de la pendiente de una recta |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La pendiente de una recta se determina a partir de los puntos en ella. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Pero, ¿qué ocurre si se quiere determinar la razón de cambio de una función que no es recta? ¿Cómo calcular la pendiente de una curva?

Evidentemente no es posible calcular la pendiente de una curva, pero sí tener una aproximación de esta pendiente trazando una recta secante que pase por dos puntos *P* y *Q* de la curva y determinando la pendiente de esta recta.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG02 |
| **Descripción** | Recta secante a una curva |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Al unir dos puntos *P* y *Q* sobre la curva se forma una recta secante. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

La aproximación que se propone será precisa solo en términos de la cercanía de los dos puntos escogidos. Como se busca establecer la variación de *y* respecto a *x*, quien determina la distancia entre los puntos *P* y *Q* es la variación de *x*. En consecuencia, si son dos puntos distantes, el nivel de precisión de la razón de cambio será muy bajo comparado con dos puntos muy cercanos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG03 |
| **Descripción** | Gráfica de la pendiente de una curva con puntos más cercanos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Si *Q* se acerca a *P*, la recta que forman se acerca más a la variación de la curva en el punto *P*. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Y… ¿si se acercan los puntos sobre la curva tanto como sea posible? ¿Si la distancia fuera muy pequeña entre un punto fijo de *x* y el siguiente?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG04 |
| **Descripción** | Gráfica de la pendiente de una curva con puntos aún más cercanos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El acercamiento de *Q* a *P* es cada vez menor y la distancia (*h*) entre *x*1 y *x*2 también es cada vez menor. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Si se reduce la distancia entre *x*1 y *x*2 hasta que sea casi cero, estaríamos mejorando la precisión de la medida geométricamente, al convertir los dos puntos que definen la secante en un **virtual único punto**, lo que convertiría la recta en una tangente. A esta distancia entre los dos valores de *x* se le llama *h*, y está definida como *h* = *x*2 – *x*1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG05 |
| **Descripción** | Gráfica de la pendiente de una tangente a la curva |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | *P* y *Q* están tan cerca, que la secante es considerada una tangente. |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC40 |
| **Título** | Aproxima algunas derivadas usando límites laterales |
| **Descripción** | Actividad en que se aproxima el valor de la pendiente de la recta tangente a una función en un punto aplicando límites laterales |

Según la definición de pendiente que se planteó al principio, los puntos *P* y *Q* en la tangente estarían muy cerca, apenas separados por un pequeñísimo *h,* tan pequeño que tiende a cero, así que la ecuación debería re escribirse en términos de un límite, así:

Como sabemos que *h* = *x*2 – *x*1 el mismo límite se puede escribir de la siguiente manera:

Expresión a partir de la cual se genera el límite universalmente usado para determinar la pendiente de la recta tangente a una curva.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | La pendiente de la recta tangente a una curva vista como un límite |
| **Contenido** |  |

Con este simple método de límite, estaría determinándose el valor de la pendiente de la recta tangente a un punto de una curva, que a su vez es interpretada como una medida con precisión infinitesimal de la razón de cambio de esta función en ese punto.

Ejemplo

Encontrar la pendiente de la recta tangente a la parábola *f*(*x*) = *x*2 – 8*x* + 9 en el punto (3, –6). Graficar la parábola y su recta tangente.

Partiendo de la definición de pendiente, es posible definir una función general para m. Recordemos que:

1. Inicialmente reemplazando *f* (*x*)*:*

2. Desarrollando los paréntesis:

3. Simplificando la expresión y factorizando:

4. Evaluando el límite en *h*:

Es decir, la función de la pendiente en cualquier punto para esta parábola es, *m =* 2*x –* 8*.* Ahora, evaluando esta función en el punto (3, –6) tenemos que:

*m =* 2*x* –8 *=* 2 *×* (3) *–* 8 *= –*2

De manera que la pendiente de la recta tangente en ese punto debe ser –2. Con esta información es posible construir la ecuación de la recta, usando su ecuación canónica.

*y = m x + b*

*–*6= (–2)× (3) *+ b*

0 = *b*

Como *b* = 0entonces la ecuación de la recta es *y* = –2*x*.

Con ayuda de la calculadora o un asistente gráfico, se construye una tabla de datos para la parábola *f* (*x*) *= x*2 *–* 8*x +* 9, así:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x*** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| ***y*** | 9 | 2 | –3 | –6 | –7 | –6 | –3 |

La siguiente gráfica muestra la función y su respectiva tangente en (3, –6)

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG06 |
| **Descripción** | Parábola y su tangente en (3,–6) |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En el punto (3, –6) la recta tangente a *f* (*x*) = *x*2 – 8*x* + 9  es *y* = –2*x* |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

Ejemplo

Determinar la velocidad de un auto cuya función de desplazamiento está dada por *x* (*t*) = *t*2en el segundo 5 de su recorrido. La distancia se determina en metros.

1. Utilizando el concepto de límite, es posible determinar la pendiente de la recta tangente a esta curva, que en este caso definiría la velocidad:

2. Desarrollando la expresión:

3. Simplificando y factorizando:

4. Evaluando el límite en *h* = 0:

En consecuencia, la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto será *m* = 2*t.*

Ahora, evaluando *m* en el tiempo *t* = 5 s:

*m* = 2 × 5 = 10

Por tanto, a los 5 segundos de recorrido, la velocidad del objeto será de 10 metros por segundo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG07 |
| **Descripción** | Automóvil en movimiento |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 110407001 |
| **Pie de imagen** | El vehículo viaja a 10 metros por segundo. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC20 |
| **Título** | Calcula algunas derivadas como límite de secantes |
| **Descripción** | Actividad en la que se aplica el límite de secantes para hallar algunas derivadas |

[SECCIÓN 2] **1.2 La función derivada**

Algebraicamente las funciones continuas que pueden ser representadas en un plano de coordenadas cartesianas poseen una función asociada llamada **función derivada,** y representada *f* ´(*x*), que está determinada como la función que representa la razón de cambio de esta función original, en todos los puntos de un intervalo. Si esto se cumple, la función se define como derivable. De este modo, la función derivada es definida como la pendiente de la recta tangente a un punto de la función, igual que en la ecuación planteada para la pendiente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Las formas de escribir la derivada** |
| **Contenido** | Las notaciones cambian según los autores. Se puede leer como *f* prima de *x*, *y* prima o la derivada de *y* respecto a *x*. |

Si *f* (*x*) es una función, como 2*x*2 + 3, por ejemplo, se puede utilizar el álgebra de los límites para encontrar la función derivada. Este proceso se conoce como “derivación” y su acción es “derivar”.

De esta forma *f´*(*x*) es la función derivada de *f* (*x*), es decir que la función *f* (*x*)*=* 2*x*2 + 3 que es cuadrática, tiene una función derivada *f´*(*x*) *=* 4*x*, que es una recta.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC30 |
| **Título** | Identifica distintas concepciones sobre la derivada |
| **Descripción** | Actividad sobre las distintas concepciones del concepto de derivada |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC50 |
| **Título** | Obtiene la gráfica de la derivada a partir de la función |
| **Descripción** | Actividad en la que se relaciona la función y la función derivada |

[SECCIÓN 2] **1.3 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC70 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: El concepto de derivada |
| **Descripción** | Actividad sobre El concepto de derivada |

[SECCIÓN 1] **2 Las reglas de derivación**

Existen reglas algebraicas que simplifican el ejercicio de derivación en funciones específicas; estas permiten obtener la derivada de una función siguiendo algunos pasos muy puntuales. Es importante tener en cuenta que al combinar las reglas es posible resolver casi cualquier derivada.

[SECCIÓN 2] **2.1 Reglas de derivación básica de polinomios**

Muchas funciones derivables son fácilmente identificables como polinomiales, como parte de una estructura más amplia, o pueden ser separadas en elementos polinomiales más pequeños. Si se está atento a la forma que tiene cada expresión, se puede encontrar una regla adecuada para derivarla.

[SECCIÓN 3] **2.1.1 La derivada de una constante**

La derivada de una constante (número real) es cero.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La derivada de una constante** |
| **Contenido** | Si *f*(*x*) = *c* entonces *f* ´(*x*) = 0 |

Ejemplo

Si *f* (*x*) = 23 entonces *f* ´(*x*) = 0

[SECCIÓN 3] **2.1.2 La derivada de las potencias enteras de *x***

Para derivar un valor de *x* elevado a una potencia positiva, se debe multiplicar el valor *n* de la potencia por *x* y reducir en uno el valor de la potencia, así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | La derivada de las potencias enteras de *x* |
| **Contenido** | Si *f*(*x*) = *xn*, entonces *f* ´(*x*) = *nxn*–1 |

Ejemplo

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

Para la primera función *n* = 4, por lo tanto, al aplicar la regla vista se tiene:

*f* ´(*x*) = 4*x*4–1= 4*x*3

Para la segunda función se tiene que *n* = –1, por consiguiente, al aplicar la regla vista se tiene:

*f* ´(*x*) = ­–*x* ­–1–1= –*x* –2

Para la tercera función, y gracias a las leyes de los exponentes, el valor de la raíz se puede escribir como el denominador de un exponente, así que *n* = ½.

Y la función será

por lo tanto, al aplicar la regla vista se tiene:

Utilizando la nomenclatura original, la derivada de la función será:

Para la cuarta función, igual que en el ejemplo anterior, el valor de *x* que se encuentra en el denominador se puede escribir en el numerador como un exponente negativo, así que la función será:

*f* (*x*) = *x* –2

y aplicando la regla:

*f* ´(*x*) = (­–2) *x* –2 – 1 = –2*x* –3

[SECCIÓN 3] **2.1.3 La derivada de una constante por una función**

Cuando una función está multiplicada por una constante, esta puede ser extraída de la derivada y multiplicarse posteriormente por el resultado de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La derivada de una constante por una función** |
| **Contenido** | Si *f*(*x*) = *axn*, entonces *f* ´(*x*) = *a f* ´(*xn*) = *anxn*–1 |

Ejemplo

Hallar la derivada de las siguientes funciones: *f* (*x*) = 7*x*3  y *f* (*x*) = –2*x*5

Para *f* (*x*) = 7*x*3 se tiene que:

*f* ´(*x*) = 7*f* ´(*x*3)

*f* ´(*x*) = 7(3*x*2)

*f* ´(*x*) = 21*x*2

Para *f* (*x*) = –2*x*5 se tiene que:

*f* ´(*x*) = ­–2 *f* ´(*x*5)

*f* ´(*x*) = –2(5*x*4)

*f* ´(*x*) = –10*x*4

Ejemplo

Hallar la derivada de la siguiente función:

1. Extrayendo la constante:

2. Derivando:

3. Reduciendo términos:

[SECCIÓN 3] **2.1.4 La derivada de la suma y de la resta**

Si se debe derivar la suma (o la resta) de dos o más funciones, simplemente se calcula la derivada de cada una y sus resultados se suman.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La derivada de la suma y de la resta** |
| **Contenido** | Sean *u* y *v* dos funciones derivables  *f* ´(*u* + *v*) = *f* ´(*u*) + *f* ´(*v*) |

Ejemplo

Hallar la derivada de la siguiente función:

1. Al ser una suma, se puede calcular la derivada de cada término:

2. Por último, organizando la expresión, obtenemos que:

*f* ´(*x*) = 10*x* + 2*x*5

Ejemplo

Hallar la derivada de la siguiente función *f* (*x*) = 2*x*3 – *x*2 + 3*x* – 1

1. Escribiendo *f* ´(*x*) como la derivada de cada término:

*f* (*x*) = 2*x*3 – *x*2 + 3*x* – 1

*f* ´(*x*) = *f* ´ (2*x*3) – *f* ´ (*x*2) + *f* ´ (3*x*) – *f* ´ (1)

2. Hallando las derivadas de cada término:

*f* ´(*x*) = 6*x*2 – 2*x* + 3 – 0

Así, la derivada de la función: *f* (*x*) = 2*x*3 – *x*2 + 3*x* – 1 es *f* ´ (*x*) = 6*x*2 – 2*x* + 3.

Ejemplo

Dada la función *f* (*x*) = *x*3 + 1, determinar la ecuación de la recta tangente al punto de la abscisa *x* = 1, así como la ecuación de la recta normal a esta. Graficar las tres funciones.

1. Con la abscisa del punto es posible encontrar las coordenadas, sustituyendo en la función:

*f* (*x*) = *x*3 + 1

*f* (1) = 13 + 1 = 2

En consecuencia, el punto que se debe evaluar es *P* (1, 2).

2. Ahora, para encontrar la pendiente de la recta tangente es necesario derivar la función:

*f* (*x*) = *x*3 + 1

*f ´*(*x*) = 3*x*2

donde *f* ´(*x*) es la función de la pendiente en cualquier punto. Específicamente para el punto

*x* =1, la pendiente *m* será:

*m* = 3*x*2 = 3 × (12) = 3

3. Con la información de la recta tangente es:

*mT* = 3; *x* = 1; *y* = 2

con la forma canónica de la recta es posible construir la ecuación.

*y* = *mT x* + *b*

2 = (3 × 1) + *b*

2 – 3 = *b*

–1 = *b*

De esta manera, la ecuación de la recta tangente a la curva es:

*y* = 3*x* – 1.

4. Ahora, una recta normal, o perpendicular a esta tangente debe cumplir que su pendiente sea tal que, al multiplicarse con la pendiente de la recta, su resultado sea –1. Es decir, que una recta normal a la tangente debe cumplir:

Si *m*T = 3, entonces *m*N = –1/3, para que *m*T × *m*N = 1

Repitiendo el procedimiento anterior, se construye la ecuación de la recta normal teniendo en cuenta que *m*N = –1/3, además, *x* = 1; *y* = 2:

Entonces, la ecuación de la recta normal a la tangente es:

La gráfica de la función y de las rectas tangente y normal se muestran a continuación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG08 |
| **Descripción** | La función, su tangente y su normal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las rectas azul y verde son, respectivamente, la tangente y la normal de la función en el punto (1, 2). |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

[SECCIÓN 3] **2.1.5 La derivada de un producto**

Para derivar el producto de dos funciones derivables *u* y *v*, es necesario derivar cada una por separado, para así obtener *u´* y *v´*. Luego multiplicar los resultados siguiendo la regla:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La derivada de un producto** |
| **Contenido** | Sean *u* y *v* dos funciones derivables, entonces,  *f* ´(*u* × *v*) = *u*´× *v* + *u* × *v´* |

Ejemplo

Dada la función *f* (*x*) = (*x*2+1) (*x*3+3) hallar su derivada.

1. Hay que identificar las funciones que forman el producto, en este caso:

*u* = *x*2 + 1 *v* = (*x*3 + 3)

2. Se calculan las derivadas correspondientes:

*u*´ = 2*x*

*v*´ = 3*x*2

3. Se aplica la regla de la derivada del producto, así:

*f* ´ (*u* × *v*) = *u* × *v*´ + *v* × *u*´

*f* ´((*x*2 + 1) (*x*3 + 3)) = ((*x*2 + 1) × 3*x*2) + ((*x*3 + 3) × 2*x*)

4. Se multiplican los polinomios:

*f* ´*(x) =* 3*x*4 *+* 3*x2 +* 2*x*4 *+* 6*x*

5. Por último, se simplifican los términos semejantes

*f* ´(*x*) = 5*x*4 + 3*x*2 + 6*x*

En conclusión si *f* (*x*) *=* (*x*2*+*1)(*x*3*+*3), entonces *f ´*(*x*) *=* 5*x*4*+* 3*x*2*+* 6*x*

[SECCIÓN 3] **2.1.6 La derivada de un cociente**

Para derivar el cociente de dos funciones derivables *u* y *v*, es necesario derivar cada una por separado, obteniendo *u*´ y *v*´. Luego se aplica la siguiente regla:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La derivada de un cociente** |
| **Contenido** | Sean *u* y *v* dos funciones derivables, entonces: |

Ejemplo

Hallar la derivada de la siguiente función:

1. Antes de derivar, es necesario identificar las funciones que forman el cociente y hallar sus derivadas:

*u* = 2*x*2 – 4*x* + 3

*v* = 2 – 3*x*

*u*´= 4*x* – 4

*v*´ = –3

2. Se aplica la regla presentada, así:

3. Se resuelven las multiplicaciones indicadas en la expresión anterior:

4. Finalmente, se simplifica la expresión y se obtiene una expresión simplificada para la derivada:

En conclusión, si

Entonces:

[SECCIÓN 2] **2.2 La derivada de orden superior**

Mientras una función sea derivable, se puede derivar las veces que se requiera, encontrando así las razones de cambio de cada una de sus funciones derivadas. A este proceso se le conoce como **derivada de orden superior** o **derivada de una derivada** y el resultado es cada vez una función de un grado menor a la función anterior, hasta llegar a cero.

Cuando se habla concretamente de la segunda derivada, se refiere a la derivada de una función que previamente se había derivado, y se denota como *f´´*(*x*)

Ejemplo

Hallar la segunda derivada de la función *f* (*x*) = 3*x*3 + 2*x* – 3.

1. Inicialmente se halla la primera derivada

*f* ´ (*x*) = 9*x*2 + 2

2. Se deriva para obtener la segunda derivada, así:

*f* ´´(*x*)= *f* ´ (9*x*2 + 2)

*f ´´*(*x*) *=* 18*x*

Como se puede observar, el grado de la función original es 3, el de su derivada es 2 y el grado de la segunda derivada es 1.

Ejemplo

Un objeto se mueve sobre una línea recta ocupando posiciones que están definidas por la función del tiempo *x* (*t*) = 4,9*t*2 +5 (la posición esta medida en metros y el tiempo en segundos). Determinar la velocidad y la aceleración de su movimiento.

Debe aclararse que la velocidad está definida como la variación de la posición de un objeto en el tiempo, así que la primera derivada de la función posición debería dar cuenta de la velocidad del vehículo. Por tanto:

Si *x* (*t*) = 4,9*t*2 + 5, entonces *x´*(*t*) = *v*(*t*)

Así que la velocidad se puede hallar derivando

*x*(*t*) = 4,9*t*2 + 5

*x´*(*t*) = 2 × 4,9*t*2 – 1 + 0

*x´*(*t*) = 9,8*t* = *v*(*t*)

En conclusión, la velocidad del objeto cambia a razón de 9,8 veces el tiempo que dure su movimiento.

De igual manera, la aceleración está definida como la variación de la velocidad de un objeto en el tiempo, así que la primera derivada de la función velocidad debería dar cuenta de la aceleración del objeto. Entonces:

*v´* (*t*) = *a* (*t*)

9,8*t* = *v* (*t*)

*v*´(*t*) = 9,8 (*t* 1 – 1)

*v*´(*t*) = 9,8

En conclusión, se puede afirmar que la aceleración del movimiento es *a* (*t*) = 9,8

Verificando las unidades, es claro que se trata de la aceleración de la gravedad terrestre, así que se puede asumir que el objeto está experimentando una caída libre.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG09 |
| **Descripción** | Segunda derivada |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 62339212 |
| **Pie de imagen** | La aceleración se puede calcular usando la segunda derivada de una función de posición. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | * *Si f (x) = C* entonces *f* ´(*C*) = 0 * Si *f* (*x*) = *xn*, entonces *f* ´(*x*) = *nxn*–1 * Si *f* (*x*) = *axn*, entonces *f* ´(*x*) = *a f* ´(*xn*) = *anxn*–1 * Si *u* y *v* son dos funciones derivables:   *f*´(*u*+*v*) = *f*´(*u*)+*f*´(*v*)  *f* ´(*u* × *v*) = *u*´× *v* + *u* × *v´* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC80 |
| **Título** | Ejercita el cálculo de derivadas |
| **Descripción** | Actividad para emparejar funciones, con su primera y segunda derivada |

[SECCIÓN 2] **2**.**3 La derivada de las funciones compuestas. La regla de la cadena**

Las reglas básicas de derivación que se tienen hasta ahora, no son suficientes para derivar algunas funciones más complejas, como aquellas que implican composición entre funciones. Para este proceso se debe aplicar una técnica conocida como **la regla de la cadena**, que permite encontrar la razón de cambio de una función respecto a otra, que a su vez tiene una razón de cambio.

Antes de explicar la regla de la cadena es importante tener en cuenta la forma de escritura de una función compuesta.

Por ejemplo, dada la función compuesta *f* (*x*) = (2*x*3– 5)2es posible hacer la sustitución

*u* = 2*x*3– 5. A partir de esta sustitución, la función quedaría en términos de *u* como

*f* (*u*) = *u*2

Las funciones compuestas pueden derivarse como el producto de las derivadas de cada una de las funciones compuestas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La regla de la cadena** |
| **Contenido** | Dada la función (*f* ° *g*),  ( *f* ° *g*)´= *f* ´(*x*) × *g*´(*x*) |

Ejemplo

Hallar la derivada de la función

1. Inicialmente, es necesario definir *u* y *f* (*u*):

2. Se calculan las derivadas de las funciones:

3. Se aplica la regla de la cadena:

4. Sustituyendo *u* se tiene:

Así, la derivada de la función es:

Ejemplo

Hallar la derivada de la función *f* (*x*) = (2*x*3 + 3*x*)3

1. Se definen *u* y *f (u)*:

*u* = 2*x*3 + 3*x*

*f* (*u*) *= u*3

2. Se calculan las derivadas de las funciones:

*u´=* 6*x*2 + 3*x*

*f ´*(*u*) *=* 3*u*2

3. Se aplica la regla de la cadena:

*f ´*(*x*) *=* 3*u*2 × (6*x*2 *+* 3)

4. Se sustituye *u*:

*f* ´(*x*)= 3(2*x*3 + 3*x*)2 *×* (6*x*2 *+* 3)

5. Se desarrollan las expresiones algebraicas:

*f* ´(*x*)= 3(2*x*3 + 3*x*)2 *×* (6*x*2 + 3)

*f* ´(*x*)= 3(4*x*6 + 12*x*4 + 9*x*2) (6*x*2 + 3)

*f* ´(*x*)= (12*x*6 + 36*x*4 + 27*x*2) (6*x*2 + 3)

*f* ´(*x*)= 72*x*8 + 216*x*6 + 162*x*4 + 36*x*6 + 108*x*4 + 81*x*2

*f* ´(*x*)= 72*x*8 + 216*x*6 + 36*x*6 + 162*x*4 + 108*x*4 + 81*x*2

*f* ´(*x*)= 72*x*8 + 252*x*6 + 270*x*4 + 81*x*2

En conclusión la derivada de la función

*f* (*x*) = (2*x*3 + 3*x*)3 es *f* ´(*x*) = 72*x*8 + 252*x*6 + 270*x*4 + 81*x*2

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC90 |
| **Título** | Ejercita el cálculo de derivadas de funciones compuestas |
| **Descripción** | Actividad para ejercitar el cálculo de derivadas de funciones compuestas |

[SECCIÓN 2] **2.4 La derivada de las funciones exponencial y logarítmica**

Para derivar funciones exponenciales y logarítmicas existen reglas sencillas que, combinadas con las anteriores, permiten encontrar las derivadas de funciones complejas.

[SECCIÓN 3] **2.4.1 La derivada de las funciones exponenciales**

Recordemos que las funciones exponenciales son de la forma *y* = *ax* donde *a* es un número real y la variable *x* está en el exponente.

Las reglas para derivas las funciones exponenciales son:

**Primera regla.** Si *y = ax*,entonces *y´ = ax ×* ln *a*

Por ejemplo, si *y = 3x* entonces *y´=* 3*x* ln 3

**Segunda regla.** Si *y* = *au*, entonces *y´= au* ×ln *a × u´ ,* donde *u* es una función interna de *x* en *y*; se aplica la regla de la cadena.

Ejemplo:

Hallar la derivada de la función:

Se debe tener en cuenta que la función planteada es una función compuesta, por lo cual hay que aplicar la regla para la derivada de las funciones exponenciales pero además hay que aplicar la regla de la cadena.

1. Se identifican *a, u* y se calcula *u´*:

*a =* 5

*u =* 3*x*2 + 1

*u´=* 6*x*

2. Se aplica la regla:

**Tercera regla.** Si *y = ex,* entonces *y´= ex*, donde **e** es el número de Euler

Ejemplo

Hallar la derivada de la función *y= x2ex*

Para encontrar la derivada de esta función se debe aplicar la regla del producto. Se tiene que:

*y´ =* 2*xex + x2ex*

*y´= xex* (2 *+ x*)

**Cuarta regla.** *Si y* = *eu ,* entonces *y´= euu´ ,* donde *u* es una función interna de *x* en *y*. Se aplica la regla de la cadena.

Ejemplo

Hallar la derivada de la función *y* = *e*(4*x* + 3).

1. Se identifican *u* y *u*´:

*u =* 4*x* + 3

*u*´*=* 4

2. Se aplica la regla:

*y*´= *e*(4*x* + 3) × 4

*y*´= 4*e*(4*x*+3)

Estas son, en resumen, las reglas de derivación de funciones exponenciales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | Derivación de funciones exponenciales |
| **Contenido** | * Si *y = ax*, entonces *y´ = ax ×* ln *a* * Si y = *au*, entonces *y´= au×*ln *a × u´* * *Si y = ex*, entonces *y´= ex* * *Si y = eu,* entonces *y´= eu u´* |

[SECCIÓN 3] **2.4.2 La derivada de las funciones logarítmicas**

Recordemos que las funciones logarítmicas son de la forma *y =* log*a* *x* donde *a* es la base del logaritmo.

Las reglas para derivar funciones logarítmicas son las siguientes.

**Primera regla.** Si *y* = loga *x*, entonces

Ejemplo

Hallar la derivada de la función

Utilizando la regla, se obtiene directamente que

**Segunda regla.** Si *y* = loga *u*, entonces

donde *u* es una función interna de *x* en *y*. En estos casos se debe aplicar la regla de la cadena.

Ejemplo

Hallar la derivada de la función

1. Se identifican *u* y *u´*

*u* = *x*4 – 7

*u´=* 4*x*3

2. Se deriva según la regla:

**Tercera regla.** Si *y* = ln *x*, entonces

Ejemplo

Hallar la derivada de la función *y* = *x*3ln *x*.

1. Derivando la función según la regla

2. Se simplifica:

*y*´ = 3*x*2ln *x* + *x*2

**Cuarta regla.** Si *y* = ln *u*, entonces

donde *u* es una función interna de *x* en *y*; se aplica la regla de la cadena.

Ejemplo

Hallar la derivada de la función *y* = ln (*x*2 + 1).

1. Se identifican *u* y *u´*:

*u* = *x*2 + 1

*u* = 2*x*

2. Se deriva directamente:

La siguiente tabla resume las reglas de derivación de funciones logarítmicas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | Reglas de derivación de funciones logarítmicas |
| **Contenido** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC100 |
| **Título** | Soluciona problemas de aplicación con funciones exponenciales y logarítmicas |
| **Descripción** | Actividad para especificar problemas de aplicación solucionables por cálculo de derivadas |

[SECCIÓN 2] **2.5 La derivada de las funciones trigonométricas**

La derivación de las funciones trigonométricas está estrechamente ligada a las características mismas de estas, en especial dos:

* Las funciones trigonométricas son continuas en sus respectivos dominios
* La variable *x* representa un ángulo medido en radianes.

A continuación, se presentan las derivadas de las funciones trigonométricas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La derivada de las funciones trigonométricas** |
| **Contenido** | * Si *y* = sen *x*, entonces *y*´ = cos *x* * Si *y* = cos *x*, entonces *y*´ = –sen *x* * Si *y* = tan *x*, entonces *y*´ = sec2 *x* * Si *y* = cot *x*, entonces *y*´ = –csc2 *x* * Si *y* = sec *x*, entonces *y*´ = sec *x* tan *x* * Si *y* = csc *x*, entonces *y*´ = –csc *x* cot *x* |

Ejemplo

Determinar la derivada de *y* = sec2 5*x*.

En este caso se puede identificar una función compuesta en la cual hay tres funciones:

secante, la potencia 2 y 5*x*

Aplicando la regla de la cadena, hay que encontrar las derivadas de cada una de las funciones y multiplicarlas así:

*y´* = 2sec 5*x* × sec5*x* tan5*x* × 5

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC110 |
| **Título** | Relaciona funciones trigonométricas con su familia de derivadas |
| **Descripción** | Actividad para ejercitar el cálculo de derivadas de funciones trigonométricas |

[SECCIÓN 2] **2.6 La derivación implícita y la derivación logarítmica**

Las dos nuevas técnicas que se describen a continuación permiten encontrar la derivada de funciones presentadas en forma implícita y funciones que, a partir de las propiedades de los logaritmos, se pueden derivar en formas más sencillas.

[SECCIÓN 3] **2.6.1 La derivación implícita**

Hasta el momento se han presentado herramientas para derivar funciones de varios tipos, pero todas ellas tienen una cosa en común: están representadas en su forma explícita (*y* = *f*(*x*); no obstante, algunas funciones están escritas de manera que ninguna de las variables está explícita y despejar no es un procedimiento algebraicamente sencillo. En estos casos la derivación implícita permite derivar funciones en las que la variable dependiente (*y*) no se encuentra despejada o en función de *x* solamente.

El método consiste básicamente en derivar ambas variables, teniendo en cuenta que la variable dependiente debe quedar en términos de la independiente. Es decir, manteniendo la derivada de *y* respecto a *x* en la expresión derivada.

Ejemplo

Derivar la función *y*2 *+ x*2 *=* 1*.*

La función está en su forma canónica. Si se despeja la variable *y* la expresión sería:

que es posible derivar utilizando las reglas de las potencias y la regla de la cadena, pero su tratamiento sería largo y tedioso.

Ahora, si se aplica la derivación implícita, el procedimiento sería el siguiente:

1. Se escribe la función en términos de *f* (*x*):

*y*2 + *x*2 = 1

[*f*(*x*)]2 + *x*2= 1

2. Se deriva la función teniendo en cuenta que hay una función interna dada en la expresión [*f*(*x*)]2, por esta razón hay que aplicar la regla de la cadena:

2*f* (*x*) *f* ´(*x*) + 2*x* = 0

3. Como el objetivo es encontrar la derivada de la función, se debe despejar de la expresión anterior *f ´*(*x*)y escribir nuevamente *f* (*x*)como *y*, así:

Ejemplo

Derivar la función *x*3*y*2 + *xy* = 1

1. Se escribe la función en términos de *f*(*x*):

*x*3[*f* (*x*)]2 + *x f* (*x*)

2. Se deriva la función teniendo en cuenta la regla del producto y la regla de la cadena:

3*x*2[*f* (*x*)]2 + *x*3(2 *f* (*x*) *f ´*(*x*)+ *f* (*x*) + *x f ´*(*x*)) = 0

3. Se resuelven las expresiones y se despeja *f ´*(*x*):

3*x*2[*f* (*x*)]2 + 2*x*3 *f* (*x*) *f ´*(*x*)+ *f* (*x*)+ *x f ´*(*x*) = 0

2*x*3 *f* (*x*) *f ´*(*x*)+ *x f ´*(*x*)= ­–3*x*2[*f* (*x*)]2 – *f*(*x*)

*f ´*(*x*) [2*x*3 *f* (*x*)+ *x*] = –3*x*2[*f* (*x*)]2 – *f* (*x*)

Finalmente, al despejar y escribir nuevamente *f*(*x*) como *y* se tiene que la derivada es:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC120 |
| **Título** | Calcula derivadas de funciones dadas en forma implícita |
| **Descripción** | Actividad para ejercitar el cálculo de derivadas de funciones implícitas |

[SECCIÓN 3] **2.6.2 La derivación logarítmica**

Es una técnica de derivación implícita que aprovecha las leyes de los logaritmos para simplificar procesos dentro de una función, especialmente cuando se tiene una función en el exponente o cuando aplicar la regla de la cadena se hacen muy complejo.

Consiste en calcular el logaritmo a ambos lados de la expresión, para luego aplicar las propiedades de estos y convertir funciones presentadas como cocientes o funciones compuestas en operaciones más simples, como adiciones o sustracciones.

Ejemplo:

Derivar la siguiente función:

Se podría resolver por la regla de la cadena teniendo en cuenta que la derivada interna sería la derivada de un cociente. Este proceso resultaría largo y algebraicamente complicado.

Si antes de derivar se aplican las leyes de los exponentes la expresión quedaría:

Al calcular el logaritmo natural a ambos lados de la expresión se tendría:

Aplicando las leyes de los logaritmos:

Esta expresión ya es fácilmente derivable, usando las reglas de derivación de logaritmos, pero es importante no olvidar la condición de derivación implícita que obliga a dejar indicada la derivada de *y* respecto a *x*.

Despejando *y´*:

Si se quiere, es posible sustituir *y* para que la expresión quede en términos de *x* solamente:

[SECCIÓN 2] **2.7 El teorema de Rolle y el teorema del valor medio**

Estos dos teoremas se presentan para denotar la existencia de puntos críticos dentro de una función continua, es decir puntos en los cuales la función cambia de ser creciente a decreciente.

Se presentan gráficamente, para justificar las condiciones en las que se cumple dicha afirmación. El teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio, expresado por Lagrange.

[SECCIÓN 3] **2.7.1 Teorema de Rolle**

El teorema presenta la situación en la que, dadas tres condiciones, en una función existe un punto *c* cuya pendiente es cero. Estas condiciones son:

1. La función es continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*]*.*
2. La función es derivable en el intervalo abierto (*a*, *b*)*.*
3. Hay dos valores *f*(*a*) y *f*(*b*)*,* que son iguales en el intervalo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **El teorema de Rolle** |
| **Contenido** | Si una función es continua en el intervalo [*a*, *b*] y es derivable en el intervalo abierto (*a*, *b*) y si *f* (*a*) *= f* (*b*), entonces *f´*(*c*) *=* 0 para al menos un número *c* en (*a, b*). |

Gráficamente, estas condiciones se cumplen para 3 casos, a saber:

* Las funciones constantes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG10 |
| **Descripción** | Función constante |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En una función constante, para cualquier valor de *a* y de *b* se tiene que  *f* (*a*) = *f* (*b*). |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

* Las funciones con concavidad positiva o negativa

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG11 |
| **Descripción** | Funciones cóncavas hacia arriba. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | *a* y *b* son iguales y mayores que *c*. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG12 |
| **Descripción** | Funciones cóncavas hacia abajo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | *a* y *b* son iguales y menores que *c*. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

* Las funciones periódicas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG13 |
| **Descripción** | Funciones periódicas |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | *a* y *b* son iguales y hay más de un valor *c* en el que la pendiente es cero. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC130 |
| **Título** | Identifica condiciones de aplicabilidad del Teorema de Rolle |
| **Descripción** | Actividad para identificar las condiciones necesarias que debe cumplir una función para que sea aplicable el Teorema de Rolle |

[SECCIÓN 3] **2.7.2 El teorema del valor medio**

El teorema sostiene que dada cualquier función *f* continua en el intervalo [*a, b*]y derivable en el intervalo abierto (*a, b*) entonces existe al menos algún punto *c* en ese intervalo en el que la tangente a la curva en *c* es paralela a la recta que une los puntos (*b, f* (*b*))y (*a, f*(*a*))*.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **El teorema del valor medio** |
| **Contenido** | Si *f* es una función continua en [*a, b*] y derivable en el intervalo abierto (*a, b*), existe un número *c* en (*a, b*) tal que:  http://facultad.bayamon.inter.edu/ntoro/Teorema%20de%20Rolle%20y%20Teorema%20del%20Valor%20Medio_files/image002.gif |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG14 |
| **Descripción** | Tangente del valor medio |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En el punto *c*, su tangente es paralela a la línea que une a *a* y *b* |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC150 |
| **Título** | Diferencias entre el teorema de Rolle, el del valor medio y el del valor intermedio |
| **Descripción** | Actividad para especificar los enunciados de los distintos teoremas |

[SECCIÓN 2] **2.8 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC160 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Las reglas de derivación |
| **Descripción** | Actividad para reforzar Las reglas de derivación |

[SECCIÓN 1] **3 El análisis de gráficas**

En las secciones anteriores se revisaron algunos teoremas que permiten analizar gráficamente funciones derivables y definir las regiones en las que se encuentran valores críticos utilizando las derivadas. En esta sección se expondrá concretamente cómo encontrar valores máximos, mínimos, definir crecimientos y decrecimientos en una función siguiendo unos simples pasos.

[SECCIÓN 2] **3.1 Máximos y mínimos**

Los valores **máximo** o **mínimo** en la gráfica de una función son aquellos puntos en los cuales dicha función tiene el punto más alto o más bajo. Analíticamente, esta definición tiene otros aspectos que considerar.

Se dice que una función tiene un máximo si hay un valor *c* para el que *f* (*c*) es mayor que cualquier *f* (*x*) en sus cercanías. Igualmente, existe un mínimo en *c* si *f* (*c*) es menor que cualquier *f* (*x*)*.*

Estos valores máximos o mínimos no siempre existen en una función; ahora, si existe ese mínimo o máximo punto en la función, estaríamos hablando de un extremo superior o inferior, así que una recta tangente a ese punto tendría pendiente cero, es decir que su derivada sería cero (teorema de Fermat).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG15 |
| **Descripción** | Tangente en un punto crítico de la función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En el punto *c*, la tangente tiene pendiente 0. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

Usando estas condiciones, se puede encontrar en valor máximo o mínimo de cualquier función continua, derivable en un intervalo [*a, b*] teniendo en cuenta los siguientes pasos:

* Definir el intervalo
* Derivar la función
* Igualar a cero.
* Encontrar los valores en los que la derivada se hace cero.
* Evaluar los valores anteriores en la función.
* Evaluar los extremos del intervalo en la función.
* Escoger los valores máximo y mínimo respectivos.

Ejemplo

Determinar los valores críticos de la función *y* = *x*3 – 3*x*2 + 1

en el intervalo [0,5; 4].

Siguiendo los pasos antes citados se tiene que:

* Al derivar se obtiene:

*y* = 3*x*2 – 6

* Al igualar a cero la derivada se obtiene:

0 = 3*x*2 – 6*x*

0 = 3*x*(*x* – 2)

* Los únicos valores que cumplen esta condición son *x =* 0y *x =* 2.
* Al evaluar la función en los valores anteriores y en los extremos del intervalo, se tiene que:

*y*(0) = 03 – 3(0)2 + 1 = 1

*y*(2) = 23 – 3(2)2 + 1 = –3

*y*(0,5) = 0,53 – 3(0,5)2 + 1 = 0,375

*y*(4) = 43 – 3(4)2 + 1 = 17

Al comparar los resultados, encontramos que el valor máximo está en (4, 17) y el mínimo en (2, –3).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG16 |
| **Descripción** | *y* = *x*3 – 3*x*2 + 1 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *y* = *x*3 – 3*x*2 +1 en donde se observan los puntos críticos en el intervalo [0,5; 4] |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

Ejemplo

La cotización de las acciones de cierta empresa, suponiendo que la Bolsa de Valores funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

*c* = 0,01*x*3 – 0,45*x*2 + 2,43*x* + 300

Determinar las cotizaciones máxima y mínima, así como los días en que ocurrieron, en días distintos del primero y del último.

Partiendo de la función *c* = 0,01*x*3 – 0,45*x*2 + 2,43*x* + 300 y definiendo el intervalo como los 30 días del mes, se deriva:

*c*´(*x*) = 0,03*x*2 – 0,9*x* + 2,43

Luego, se iguala a cero:

0 *=* 0,03*x*2 – 0,9*x* + 2,43

Así, se obtienen dos raíces: *x* = 27 y *x* = 3,

siendo estos los dos días críticos o extremos de la cotización. Ahora, para saber cuál es cual, se debe evaluar la función en estos valores.

*c* (27) = 0,01× (27)3 – 0,45× (27)2 + 2,43× (27) + 300

*c* (27) = 196,83 – 328,05 + 65,61 + 300

*c* (27) = 234,39

*c* (3) = 0.01× (3)3 − 0.45 × (3)2 + 2.43× (3) + 300

*c* (3) = 0,27 – 4,05 + 7,29 + 300

*c* (3) =303,51

Así, el día 3 es el de mayor cotización y el día 27 es el de menor cotización de las acciones de la empresa en la bolsa.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG17 |
| **Descripción** | Acciones en un mes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *c* = 0,01*x*3 – 0,45*x*2 + 2,43*x* + 300 que define la cotización de las acciones. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC170 |
| **Título** | Expresa propiedades relativas a los máximos y mínimos de una función |
| **Descripción** | Actividad para hacer corresponder afirmaciones respecto a máximos y mínimos expresadas en diferentes tipos de referencia |

En la resolución de situaciones reales o problemas de texto que incluyan máximos y mínimos, es necesario expresar las funciones en términos matemáticos para desarrollar la técnica. Aquí es muy útil tener habilidades en álgebra.

[SECCIÓN 2] **3.2 Crecimiento y decrecimiento. Criterio de la primera derivada**

Al analizar la primera derivada se pueden encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, a este proceso se le conoce como **criterio de la primera derivada**.

Para determinar si una función es creciente o decreciente en un punto o en un intervalo usando los máximos y mínimos se debe aplicar la siguiente estrategia:

* Derivar la función, igualar a cero la derivada y hallar los puntos críticos.
* A partir de los puntos críticos, definir los intervalos en los que se va a analizar la función.
* Elaborar una tabla de análisis, usando valores de prueba en cada intervalo.
* Si *f* ´(*x*) > 0 para todo *x* del intervalo, entonces la función es creciente en todo el intervalo.
* Si *f* ´(*x*) < 0 para todo *x* del intervalo, entonces la función es decreciente en todo el intervalo

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC180 |
| **Título** | Los máximos y mínimos de una función |
| **Descripción** | Interactivo para estudiar el crecimiento de las funciones |

Ejemplo

Determinar los intervalos en los que la función *y* = *x*3 + *x*2 – 5*x* – 5 es creciente o decreciente.

Siguiendo el procedimiento sugerido se tiene que:

* Al derivar la función, resulta:

*y*´= 3*x*2 + 2*x* – 5

*y´* = (3*x* + 5)(*x* – 1)

Igualando a cero

0 = (3*x* + 5)(*x* – 1)

Así que los valores son:

Así que los puntos críticos están ubicados en (–1,66; 1,48) y en (1, –8)

* Teniendo en cuenta los valores *x*1 y *x*2 se definen los intervalos en los que se analiza la función. En este caso los intervalos sugeridos para evaluar serán:

(–∞; –1,66), (–1,66; 1) y (1; ∞)

* Ahora solo hay que determinar en cuál de estos intervalos la derivada de la función es positiva y en cuál es negativa. Para esto se organizan los intervalos y la derivada en una tabla.

El resultado del producto de los signos de la segunda y tercera columnas se escribe en la última columna y es el que determina si la función es creciente o decreciente.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **3*x* + 5** |  | **Resultado** |
| (–∞; –1,66) | Negativa | Negativa | Positiva  Creciente |
| (–1,66; 1) | Positiva | Negativa | Negativa  Decreciente |
| (1; ∞) | Positiva | Positiva | Positiva  Creciente |

* Por el signo de la derivada, se concluye que la función es creciente en el primero y tercero intervalos, mientras que es decreciente en el segundo.

La gráfica de la función se muestra a continuación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG18 |
| **Descripción** | *y* = *x*3 + *x*2 – 5*x* – 5 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *y* = *x*3 + *x*2 – 5*x* – 5. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC190 |
| **Título** | Identifica intervalos de crecimiento de funciones |
| **Descripción** | Actividad para especificar, dadas algunas funciones, sus puntos críticos y los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función. |

[SECCIÓN 2] **3.3 La concavidad. Criterio de la segunda derivada**

Calcular la segunda derivada permite determinar la forma de las curvas de una función, estas pueden ser **cóncava hacia abajo** y **cóncava hacia arriba**.

Es importante anotar que:

* Si la función tiene un máximo relativo, entonces *f* ´´(*x*) < 0 y la función es cóncava hacia abajo.
* Si la función tiene un mínimo relativo, entonces *f* ´´(*x*) > 0 y la función es cóncava hacia arriba.

El punto en el que la función cambia de ser cóncava hacia arriba y pasa a ser cóncava hacia abajo se denomina **punto de inflexión**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG19 |
| **Descripción** | El punto de inflexión |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El punto en el que la función cambia de ser cóncava hacia abajo y pasa a ser cóncava hacia arriba se denomina **punto de inflexión**. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

También, es posible encontrar puntos extremos en un intervalo abierto que contenga a un punto *c* sin tener en cuenta los valores del intervalo definido. La secuencia de pasos es muy similar a la usada para determinar los máximos y mínimos absolutos, pero ahora tenemos en cuenta dos reglas muy simples para la segunda derivada de la función.

Entonces, para hallar los extremos relativos (máximo y mínimo) de una función se debe:

* Derivar la función.
* Igualar a cero y encontrar los puntos críticos.
* Hallar la segunda derivada.
* Evaluar *y´´* en los puntos de inflexión.
* Aplicar la prueba de la segunda derivada.
* Encontrar las coordenadas de los puntos máximo y mínimo relativos.

Ejemplo

Determinar los máximos y mínimos relativos de la función *y* = *x*3 – 9*x*2 + 24*x*

1. Se halla la primera y la segunda derivadas:

*y* = *x*3 – 9*x*2 + 24*x*

*y´* = 3*x*2 – 18*x* + 24

*y*´ = 6*x* – 18

2. Se factoriza la expresión de la primera derivada:

*y*´ = (*x* – 4)(3*x* – 6)

*x*1 = 2

*x*2 = 4

3. Se evalúa *y´´* en las raíces

*y*´´= 6*x* – 18

*y*´´(2) = 6(2) – 18 = –6

*y*´´(4) = 6(4) – 18 = 6

4. Se usa el criterio de la segunda derivada:

* *y*´´(2) < 0, entonces 2 es un máximo relativo.
* *y*´´(4) > 0, entonces 4 es un mínimo relativo.

5. Se calculan las coordenadas de los puntos

*y*(2) = 23 – 9(2)2 + 24(2) = 20

*y*(4) = 43 – 9(4)2 + 24(4) = 16

Así que las coordenadas son:

* Máximo relativo: (2, 20)
* Mínimo relativo: (4, 16)

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG20 |
| **Descripción** | Máximo y mínimo relativo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *y* = *x*3 – 9*x*2 + 24*x*. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

Ejemplo

La cotización de las acciones de una determinada empresa, suponiendo que la Bolsa de Valores funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

*c* = 0,01*x*3 – 0,45*x*2 + 2,43*x* + 300

Establecer las cotizaciones máxima y mínima, así como los días en que ocurrieron, en días distintos del primero y del último.

Esta situación se había resuelto en la sección anterior, pero ahora se puede utilizar la prueba de la segunda derivada para simplificar el proceso.

Recordamos que la primera derivada de la función es *c*´(*x*) = 0,03*x*2 – 0,9*x* + 2,43; además sabemos que *x* = 27 y *x* = 3 son los valores en los que *c*´(*x*) = 0, es decir los dos días críticos o extremos de la cotización.

Ahora, para saber cuál es cuál, se debe aplicar la prueba de la segunda derivada, así que se deriva de nuevo c´ y se evalúa en los dos valores mencionados:

*c´*´(*x*) = 0,06*x* – 0,9

*c´*´(27) = 0,06 × (27) – 0,9 > 0

*c´*´(3) = 0,06 × (3) – 0,9 < 0

Dado el criterio de la segunda derivada, se tiene que en 27 hay un mínimo y en 3 hay un máximo.

En conclusión, el día 3 es el de mayor cotización y el día 27 es el de menor cotización de las acciones de la empresa en la bolsa.

Ejemplo

Se quiere construir una caja sin tapa usando una lámina de cartón de 21 cm de largo por 16 cm de ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para que su volumen sea el máximo posible?

Lo más conveniente es realizar un esquema de la situación. Se tiene una lámina rectangular que debe cortarse para construir una caja, así que se retirarán cuadrados de longitud *x* en cada esquina para levantar las caras de la caja.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG21 |
| **Descripción** | Caja de cartón |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las dimensiones de la caja dependen de la altura a la que se corten las tapas. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

Así, las dimensiones de la caja estarán dadas por las expresiones algebraicas:

Largo: *L* = 21 – 2*x*

Ancho: *A* = 16 – 2*x*

Alto: *H* = *x*

El volumen de la caja está dado por la ecuación:

*V* = *L* × *A* × *H*

En función de la altura será:

*V* = (21 – 2*x*) × (16 – 2*x*) × (*x*)

Resolviendo los paréntesis:

*V* = 4*x*3 – 74*x*2 + 336*x*

Para encontrar el máximo volumen posible se debe derivar la función para encontrar los puntos críticos:

*V* = 4*x*3 – 74*x*2 + 336*x*

*V´* = 12*x*2 – 148*x* + 336

Luego se deben encontrar las raíces, igualando a cero:

0= 12*x*2 – 148*x* + 336

Factorizando, se puede simplificar la función:

0= 4(3*x*2 – 37*x* + 84)

Que, al ser igual a cero, puede eliminarse el número 4, y la expresión seguirá siendo cero.

0= (3*x*2 – 37*x* + 84)

Ahora, para encontrar las raíces se puede utilizar la ecuación general:

donde *a* = 3; *b* = -37 y *c* = 84. Sustituyendo los valores se hallan dos posibles soluciones:

Estos son los dos valores críticos de la función. Para saber cuál de ellos es el máximo, se aplica el criterio de la segunda derivada, así que derivando nuevamente la función de volumen se tiene:

*V´* = 12*x*2 – 148*x* + 336

*V´´* = 24*x* – 148

Donde se evalúan los puntos críticos:

*V* ´´(9,33)= 24×(9,33) – 148 > 0 este valor es positivo, así que corresponde al mínimo

*V* ´´(3)= 24 ×(3) – 148 < 0 este valor es negativo, así que corresponde al máximo

De esta forma se determina que el máximo valor de volumen se obtiene cuando *x* = 3 cm. Entonces solo queda sustituir en las ecuaciones iniciales para determinar las dimensiones de la caja:

Largo: *L* = 21 cm – 2 × (3 cm) = 15 cm

Ancho: *A* = 16 cm– 2 × (3 cm) = 10 cm

Alto: *H* = 3 cm

De esta forma se obtiene el volumen total de la caja:

*V* = *L* × *A* × *H*

*V* = 15 cm × 10 cm × 3 cm = 450 cm3

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC210 |
| **Título** | Identifica propiedades de una función, dada la segunda derivada |
| **Descripción** | Actividad para identificar propiedades de una función, dada la segunda derivada |

[SECCIÓN 2] **3.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC220 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: El análisis de gráficas |
| **Descripción** | Actividad sobre El análisis de gráficas |

[SECCIÓN 1]  **4 los problemas de aplicación**

Se han planteado tácitamente en secciones anteriores las aplicaciones de la derivada en la resolución de problemas cotidianos, como en los campos de la física, la biología, la economía, etc. Aquí se presentarán tres modelos específicos de aplicación, como son las diferenciales, las razones de cambio y la regla de L´Hopital.

[SECCIÓN 2] **4.1 Diferenciales**

Inicialmente se expresó la derivada de una función con diferentes notaciones, entre ellas la que proviene de la definición del límite, donde:

Pero si se atiende solo la variación de *y* dejando indicada su dependencia con la variable *x* y con el intervalo de *x* en el que ocurre, se puede expresar como:

Esta expresión se conoce como un **diferencial** de *y* o un *dy.* De igual manera el diferencial de *x* estaría definido solamente por la variación *Δx* en un punto *x*.

Ejemplo

Dada la función , determinar *dy* y el valor de *dy* para *x =*2 y *Δx =* 0,1

1. Se deriva la función:

2. Se sustituyen *x* y *dx*, que por definición es *Δx*

*dy* = (2(2)2 + 4)(0,1)

*dy* = 1,2

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC230 |
| **Título** | Soluciona problemas empleando diferenciales |
| **Descripción** | Actividad para solucionar problemas empleando diferenciales |

[SECCIÓN 2] **4.2 La razón de cambio**

La función derivada se ha interpretado como la función de cambio de una variable respecto a otra

Pero en ocasiones se encuentran funciones que relacionan dos variables, en la que ambas varían respecto a una tercera variable, como el tiempo, por ejemplo.

En este caso es posible expresar la razón de cambio de cada una de las variables respecto a la otra en términos de la variación de esta respecto al tiempo.

A través de las reglas previamente utilizadas, se puede derivar toda la función en términos del tiempo. Se les conoce como **razones de cambio relacionadas** y son prácticas a la hora de determinar la razón de cambio de una variable, si se conoce la otra.

Entonces, para hallar la razón de cambio de una función se debe:

* Identificar la información que da el problema.
* Elaborar el dibujo que describe el problema.
* Relacionar las magnitudes en una expresión algebraica.
* Plantear las razones de cambio.
* Despejar la razón de cambio buscada.
* Evaluar la situación, sustituyendo.
* Reemplazar los valores en la función general derivada.

Ejemplo

Una escalera de 20 m está apoyada en una pared vertical, pero la base de la escalera resbala sobre el suelo a una tasa de 2m cada segundo. ¿A qué velocidad resbala el otro extremo sobre la pared cuando esta se encuentra a 12 m del suelo?

1. Se identifica la información que da el problema.

* *x* es la distancia horizontal que resbala la escalera.
* *y* es la distancia vertical que resbala la escalera.
* *l* es la longitud fija de la escalera.
* *t* es el tiempo que tarda en resbalar.
* *h* es la altura (*y*) en el momento de ser evaluada.

2. Al elaborar el dibujo que describe el problema se tiene lo siguiente:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG22 |
| **Descripción** | Escalera sobre una pared |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 142071442 |
| **Pie de imagen** | La escalera y la pared forman un triángulo rectángulo. |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

3. Al relacionar las magnitudes en una expresión algebraica se tiene que el teorema de Pitágoras es la mejor opción. Así, el triángulo que forma la escalera con el suelo y la pared, cumple que:

*l*2 = *x*2 + *y*2

400 m2 = *x*2 + *y*2

4. Se plantean las razones de cambio.

Se conoce la razón de cambio de la distancia horizontal respecto al tiempo:

Se quiere definir la razón de cambio de la distancia horizontal respecto al tiempo. Si se deriva la función respecto a *t*, usando la regla de la cadena, se obtiene:

5. De la expresión anterior se despeja la razón de cambio buscada:

6. Esta función determina la variación general del movimiento para cualquier pareja (*x, y*), pero como se tiene la altura específica de12 m a la que se debe evaluar la situación, es posible encontrar el valor de *x* sustituyendo, así:

7. Finalmente, al reemplazar los valores en la función general derivada, se tiene:

En conclusión, la escalera se resbala sobre la pared a una tasa de 2,66 metros cada segundo.

Ejemplo

Una cámara de televisión, situada a ras del suelo, está filmando el despegue del transbordador espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación de posición *h* = 50*t*2, donde *h* se mide en metros y *t* en segundos. La cámara está a 200 m de la plataforma de lanzamiento.

Calcular la razón de cambio del ángulo de elevación α de la cámara, diez segundos después del despegue.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_IMG23 |
| **Descripción** | Despegue del transbordador espacial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Se forma un triángulo rectángulo |
| **Ubicación del pie de imagen** | inferior |

Lo primero es definir la altura *h* al pasar 10 s del lanzamiento:

*h* = 50 *t*2 = 50 × (10)2 = 5000 m

La variación de la altura respecto al tiempo, es posible calcularla derivando la función:

que es la velocidad de ascenso del cohete.

Ahora, lo que se pide es encontrar la variación del ángulo de elevación de la cámara:

Es importante recordar que las distancias entre la cámara y el cohete, forman un triángulo rectángulo, donde *h* es el lado opuesto al ángulo α, y *x* = 200 m es el lado adyacente.

Así que la expresión que relaciona los datos es:

Esta expresión se puede derivar respecto a *t*, sin olvidar las derivadas implícitas:

Despejando:

Por identidad trigonométrica:

Reemplazando valores:

Según la misma relación trigonométrica del triángulo expuesto en la gráfica, el coseno de α se puede escribir como:

donde hipes el valor desconocido de la hipotenusa según la relación pitagórica de sus lados:

Así que se puede afirmar que:

Ahora es posible sustituir la derivada así:

Ya se tiene una expresión general para la variación del ángulo α respecto al tiempo.

Solo queda evaluar la función en *t* = 10s y *h* = 5000m:

En conclusión, cuando el cohete lleva 10 s en el aire, α cambia a razón de 0,0079 radianes por segundo (unos 0,45 grados por segundo).

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC240 |
| **Título** | La razón de cambio en problemas cotidianos |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presenta un problema en una ciencia que use la matemática aplicada y la derivada o modelo funcional para la explicación de un fenómeno específico. |

[SECCIÓN 2] **4.3 Regla de L´Hopital**

En secciones anteriores se habló acerca de los límites indeterminados, en los que no era posible calcular su valor cuando se formaba una indeterminación, del tipo “cero sobre cero”.

La **regla de L´Hopital** establece una relación directa entre este tipo de límites y la derivada de dos funciones, donde se cumplan las siguientes condiciones:

* *f* (*a*) = *g*(*a*) = 0
* *f ´*(*a*) y *g´*(*a*)existen
* *g´*(*a*)≠ 0

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **La regla de L´Hopital** |
| **Contenido** | Dadas dos funciones para las cuales:   * *f* (*a*)= *g* (*a*)= 0 * *f* ´(*a*)y *g*´(*a*)existen * *g*´(*a*) ≠ 0   se cumple que |

Esta regla se puede aplicar tantas veces como sea necesaria sobre un par de funciones, hasta que la derivada de *g* deje de ser cero y la expresión arroje un valor.

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

Si se reemplaza directamente, la expresión sería una indeterminación, así que se aplica la regla:

Pero al evaluar en cero, la derivada de *g* es 0, lo que no cumpliría con las condiciones. En consecuencia, el proceso se repite sobre la última función así:

Aún es cero, así que el proceso se repite una vez más:

Como el resultado es distinto de cero, ya se tiene un límite. En conclusión, el límite de la función es:

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC250 |
| **Título** | Calcula límites aplicando la regla de L'Hopital |
| **Descripción** | Actividad para aplicar la regla de L'Hopital en el cálculo de límites |

[SECCIÓN 2] **4.4 Consolidación**

Actividades para afianzar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC260 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Los problemas de aplicación |
| **Descripción** | Actividad para reforzar los problemas de aplicación de la derivación, específicamente en razones de cambio y diferenciales |

[SECCIÓN 1] **5** **Competencias**

Ahora que se han revisado y estudiado con detenimiento los conceptos y herramientas, es hora de ejercitar y demostrar las habilidades adquiridas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC270 |
| **Título** | Competencias: Optimización |
| **Descripción** | Actividad para aplicar la definición de la derivada en problemas de optimización de materiales |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC280 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual sobre La derivada y sus aplicaciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC290 |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Actividades para evaluar La derivada y sus aplicaciones |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_11\_04\_REC300 | |
| **Web 01** | *Calculadora De Derivadas* | *https://es.symbolab.com/solver/derivative-calculator* |
| **Web 02** | *Obteniendo derivadas. Teoría y ejercicios prácticos* | *https://es.khanacademy.org/math/calculus-home/differential-calculus/taking-derivatives* |
| **Web 03** | *Foro de Matemáticas. Ejercicios de todos los niveles* | *http://www.derivadas.es/* |