|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | **Ángulos y triángulos** |
| Código del guion | **MA\_10\_02\_CO** |
| Descripción | Especificaciones relativas a los elementos, representaciones y notaciones de los ángulos, como parte de los elementos básicos de los triángulos. |

[SECCIÓN 1] **1 Ángulos**

Las definiciones 8 y 9 del primer libro de los Elementos de Euclides diferencian un *ángulo* de un *ángulo rectilíneo*. Según Euclides, un *ángulo plano* es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a la otra en un plano y no están en línea recta. Si, además, las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo será un *ángulo rectilíneo*. Es decir que Euclides incluye dentro de la noción de “línea”, lo que nosotros solemos llamar “curva”. El contexto espacial de este tema será siempre un plano y diremos simplemente “ángulo”, sin especificar que siempre se trata de ángulos rectilíneos, aunque reconociendo que, en matemáticas, se pueden definir otro tipo de ángulos, por ejemplo ángulos entre planos, ángulos diedros y triedros, etc.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** | Diferencia entre *ángulo* y *ángulo rectilíneo*. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Diferencia entre *ángulo* y *ángulo rectilíneo*. |

Así, entenderemos por *ángulo* la inclinación mutua de dos rectas que se encuentran una a la otra en un plano y no están en línea recta. El punto de encuentro se llamará *vértice* del ángulo, y las rectas serán sus *lados*. En la imagen, la recta ha sido levantada sobre la recta , definiendo el ángulo . El vértice del ángulo es *C*, mientras que sus lados son y .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG02 |
| **Descripción** | Ángulo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulo |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dos rectas se dicen perpendiculares si al cortarse entre sí, dividen al plano en cuatro regiones iguales. |

La clasificación de los ángulos se hace siempre en términos comparativos con el ángulo recto. Un ángulo será *agudo* si es menor a uno recto, u *obtuso*, si es mayor que un ángulo recto. Un *ángulo recto* es aquel que se obtiene al levantar un rayo sobre una recta, generando ángulos adyacentes iguales. En la imagen, es perpendicular a , lo cual se escribe y significa que los ángulos y son rectos.

Así, al animar el lado , pueden definirse ángulos a partir del lado , en el sentido inverso al de las manecillas del reloj. Aparecen en el primer momento múltiples ángulos agudos, en el segundo los dos ángulos rectos y en el último, múltiples ángulos obtusos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG03 |
| **Descripción** | Ángulos agudos, rectos y obtusos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulos agudos, rectos y obtusos |

[SECCIÓN 2] **1.1 Ángulo en posición normal o canónica**

En el tratamiento que se da a las figuras planas sin considerar un sistema de coordenadas, la posición de los ángulos no es fundamental. Sin embargo, en el momento en que se incluye un sistema de coordenadas, aparece naturalmente la noción de *inicio* y *fin* de un ángulo, además de la consideración de su *dirección*. El vértice de los ángulos canónicos es el origen del sistema de coordenadas, es decir el punto 0 = (0, 0), mientras que el lado inicial coincide con el lado positivo del eje *X*.

El lado final estará ubicado en la posición que corresponda, según cómo se establezca la forma de medir el ángulo y el sentido del giro. Un ángulo será positivo si el giro se hace en sentido antihorario o en contra de la rotación de las manecillas de un reloj, mientras que será negativo si el giro se hace en la dirección de giro de las manecillas del reloj.

En ese sentido, respecto a los ángulos de la imagen, la diferencia es que la recta *AB* sobre la que se marca el lado inicial del ángulo no es una recta cualquiera, sino que es una recta horizontal, que corresponde exactamente al eje *X*. Ya que la recta perpendicular al eje *X* por el punto 0 = (0, 0) es el eje *Y*, entonces, los ángulos agudos positivos son los que están en el primer cuadrante, los obtusos positivos los que están en el segundo cuadrante, los obtusos negativos son los que están en el tercer cuadrante y, finalmente, los agudos negativos los que están en el cuarto cuadrante.

Un ángulo llano es aquel con vértice en el origen, para que el lado inicial y el lado final están en sobre el eje ; un ángulo convexo es aquel menor que uno llano, mientras que un ángulo cóncavo es mayor que uno llano.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Ve al buscador del Aula Planeta y busca el tema “¿Qué sabes de los ángulos”. Obsérvalo para que recuerdes temas que trataste en grados anteriores.** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Identifica tipos de ángulos ubicados en posición canónica. |
| **Descripción** | Actividad en la que debes hacer correspondencia entre ángulos en posición canónica y sus características. |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M3A: Asociar imagen-texto |

[SECCIÓN 2] **1.2 Medición de ángulos en el sistema sexagesimal**

La medición de ángulos puede hacerse de múltiples maneras, que dependen de la forma de elegir la unidad de medición que se elija para lograrlo. Entre las unidades posibles se encuentran el grado sexagesimal, el grado centesimal y el radian, aunque se podrían plantear otras formas de medir los ángulos.

La unidad *un grado sexagesimal*, resulta por tomar completa una circunferencia y dividirla en 360 partes iguales. Por su parte, la unidad *un grado centesimal* resulta por tomar completa una circunferencia y dividirla en 400 partes iguales. Es usual denotar los grados sexagesimales con un superíndice circular “°”, mientras que se puede denotar a los grados centesimales con una letra “C” como superíndice del ángulo correspondiente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG04 |
| **Descripción** | Determinación de un grado sexagesimal: División del círculo en 360 partes iguales |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Determinación de la unidad *grado sexagesimal*: Cada pareja de radios consecutivos describe un ángulo de dos grados sexagesimales. El ángulo naranja mide 2 grados sexagesimales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG05 |
| **Descripción** | Determinación de un grado centesimal: División del círculo en 400 partes iguales |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Determinación de la unidad *grado centesimal*: Cada pareja de radios consecutivos describe un ángulo de dos grados centesimales. El ángulo morado mide 2 grados centesimales. |

Por lo anterior, resulta ser que un ángulo de 90° corresponde a uno de 100 grados centesimales. Entonces 90° = 100*C*. La circunferencia total tiene 400 grados centesimales, es decir que 360° = 400 *C*.

La tercera forma de medir los ángulos, es tomando como unidad un radián, es decir, un segmento de la misma longitud del radio, pero puesto sobre la circunferencia. En la imagen aparece tanto un radio como, *un radián*, de color rojo, para denotar que son iguales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG06 |
| **Descripción** | Definición de un radián: Arco que mide lo mismo que el radio |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La unidad *radián* corresponde a un arco que mide lo mismo que el radio de la circunferencia. |

La cantidad de “veces” que cabe un radián en la circunferencia no es exacta. En la imagen se hace visible que hay “un poco más de 6” radianes para completar la circunferencia. Identificar cuánto más fue un problema matemático que resultó en la emergencia del número . No es un proceso sencillo identificar cómo se concluyó que hay radianes en la circunferencia, por lo cual trataremos los ángulos según la medición por grados sexagesimales, que suele llamarse “medición en el sistema sexagesimal”.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG07 |
| **Descripción** | Determinación de un radián: División del círculo en “un poco más de 6” partes iguales. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Determinación de la unidad *radián*: Cada pareja de radios consecutivos describe un ángulo de dos radianes. El ángulo azul mide 2 radianes. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** |  |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4º ESO / Matemática / La trigonometría /Refuerza tu aprendizaje: La medida de ángulos |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Diapositiva 1  Cambiar título por “Refuerza tu aprendizaje: Conversión entre medidas angulares”  El recurso tiene 2 diapositivas. La diapositiva 1, pasará a ser la 6. La diapositiva 2 pasará a ser la cuarta  Incluir como primera diapositiva una que pregunte: “Si un ángulo mide 30 grados sexagesimales, ¿cuántos grados centesimales mide?  Incluir una segunda diapositiva que pregunte: “¿A qué ángulo sexagesimal corresponde uno de 250 grados centesimales?”  Incluir como tercera diapositiva una que pregunte: “Describe con tus palabras el procesos que realizas para pasar de grados sexagesimales a grados centesimales.”  La cuarta diapositiva será la que inicialmente era la segunda  Una nueva quinta diapositiva debe preguntar: “¿Qué correspondencia tiene en los sistemas sexagesimal y centesimal un ángulo de radianes?”  La sexta diapositiva será la que inicialmente era la primera |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Conversión entre medidas angulares |
| **Descripción** | Conjuntos de preguntas abiertas acerca de conversión entre medidas angulares |

[SECCIÓN 2] **1.3 Ángulos especiales**

Entre las vivencias diarias hay varias en las que, aun sin que lo reconozcamos, aparecen de manera natural los ángulos, las medidas angulares o algunos movimientos entre dos rectas a partir de un vértice común.

Nuestra posición y la dirección de nuestros movimientos oculares genera un campo visual, que marca un ángulo específico. Del mismo modo, nuestra posición y movimientos articulares tienen rangos de cierre y apertura, medibles en ángulos.

Por ejemplo, sentados ante el computador hay una línea horizontal de visión frente a nuestros ojos que determina el lado inicial de los ángulos de elevación y de depresión de nuestra visual. Para evitar la fatiga ocular, la pantalla debería estar en un ángulo de depresión y no en uno de elevación. En el mismo sentido, entre la columna vertebral y las piernas se marca un rango de movimiento amplio, que en posición sentados debería ser de un ángulo recto, mientras que de pie debería corresponder a un ángulo llano.

[SECCIÓN 3] **1.3.1 Ángulo de elevación**

En el marco del campo de visión de un observador, los ángulos de elevación y de depresión están determinados por dos líneas rectas imaginarias que tienen vértice en el ojo del observador y cuyos lados son la recta horizontal y la recta de la visual.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG08 |
| **Descripción** | Imagen de una persona sentada frente a un ordenador, en la que se especifica el ángulo de elevación y de depresión |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Tomar la imagen que aparece en el recurso “La ergonomía en el uso del ordenador”, quitar la imagen del reproductor y añadirle algún objeto como un reloj que esté en el ángulo de elevación, marcando los elementos como en: |
| **Pie de imagen** | Ángulo de elevación y de depresión |

La altura a la que están los ojos del observador determinará la recta horizontal o línea de visión. Por su parte, el objeto observado puede encontrarse, bien sea por encima o bien por debajo de esa línea de visión, lo que determinará si se trata de un ángulo de elevación o de uno de depresión.

Los ángulos de elevación están determinados por dos líneas rectas imaginarias que tienen vértice en el ojo del observador y cuyos lados son la recta horizontal a la altura del ojo y la recta de la visual que une el ojo con el objeto a observar, que debe encontrarse por encima de la horizontal al ojo del observador.

Es importante no confundir el ángulo de elevación con un ángulo positivo en el sentido de la posición canónica del ángulo, pues aunque parezca que la línea de visión puede ser el eje , y que el ángulo de elevación corresponde al ángulo que antes llamamos “positivo”, eso depende de la ubicación del observador.

La medición el ángulo de elevación está más asociado al *sistema cuadrantal* de medición de ángulos, en el que la medición de ángulos se llama medición de *rumbos*, para lo que se usa una medición en grados de entre y hasta , y el sistema cardinal Norte-Sur, Oriente-Occidente.

Para medir los ángulos en el *sistema cuadrantal*, primer se especifica el punto cardinal vertical en el que se encuentra el ángulo a medir, es decir Norte o Sur. Luego, se mide el ángulo en grados cuyo lado inicial está sobre el eje Norte-Sur. Por último se indica el punto cardinal horizontal en el que se encuentra el ángulo a medir, es decir Este-Oeste –aunque en Colombia es más común llamarlos Oriente-Occidente–. Algunos ejemplos de rumbos se muestran en la imagen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG09 |
| **Descripción** | Rumbos en el sistema cuadrantal. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunos rumbos en el sistema cuadrantal de medición de ángulos |

Como se observa, cada rumbo es menor a 90°, primero va la componente N ó S del cuadrante seguida de la amplitud del ángulo y del componente E u O. El cuadrante al que corresponde cada rumbo es:

Cuadrante I =: Rumbo NE

Cuadrante II =: Rumbo NO

Cuadrante III =: Rumbo SO

Cuadrante IV =: Rumbo SE

Así, los ángulos de elevación son los complementarios a los rumbos que tengan componente Norte.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Identifica ángulos de elevación en la cotidianidad |
| **Descripción** | Se proponen situaciones de la cotidianidad, en las cuales tomar la decisión respecto a nuestra posición como observador, con el fin de identificar contextos en que los ángulos de elevación son importantes |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M5A: Test - con imagen |

[SECCIÓN 3] **1.3.2 Ángulo de depresión**

Los ángulos de depresión están determinados por dos líneas rectas imaginarias que tienen vértice en el ojo del observador y cuyos lados son la recta horizontal a la altura del ojo y la recta de la visual que une el ojo con el objeto a observar, que debe encontrarse por debajo de la horizontal al ojo del observador.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG10 |
| **Descripción** | Imagen de una persona que mira de derecha a izquierda, y los ángulos de elevación y depresión respectivos.  Incluir una imagen como la que aparece en  http://4.bp.blogspot.com/-DS_Ea1MdD1o/UDqHb8G44yI/AAAAAAAAACw/nssflFvyebs/s400/%C3%81ngulos+de+elevaci%C3%B3n+y+%C3%A1ngulos+de+depresi%C3%B3n.jpg  Cambiar “línea horizontal o normal” por “recta horizontal” |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [AQUÍ](http://4.bp.blogspot.com/-DS_Ea1MdD1o/UDqHb8G44yI/AAAAAAAAACw/nssflFvyebs/s1600/%C3%81ngulos+de+elevaci%C3%B3n+y+%C3%A1ngulos+de+depresi%C3%B3n.jpg) |
| **Pie de imagen** | Angulo de elevación y depresión |

En el sistema cuadrantal, los ángulos complementarios a los rumbos con componente Sur, serán los ángulos de depresión.

Los ángulos de elevación y de depresión se han medido a lo largo de la historia, usando instrumentos de medición como el cuadrante, el sextante, el astrolabio, entre otros, surgidos principalmente de la necesidad de establecer rumbos en astronomía y navegación. La medición de ángulos de elevación y depresión pueden capturarse también de acuerdo al *Sistema circular*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Practica ángulos de elevación y depresión |
| **Descripción** | Recurso para asociar los nombres de los elementos de ángulos de elevación y depresión. |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M9B: Posicionar etiquetas en imagen |

[SECCIÓN 3] **1.3.3 Ángulos complementarios**

La relación de complementariedad está dada siempre entre dos ángulos. Dos ángulos se dicen *complementarios*, si tomados juntos son iguales a un ángulo recto. En el sistema de medición por grados sexagesimales, eso significa que, sumados, son iguales a . Nótese que en el sistema de medición por grados centesimales, la suma debería ser igual a .

Ejemplo de ángulos complementarios se encuentra entre los rumbos y los ángulos de elevación en el mismo cuadrante. En la imagen, los rumbos están sombreados, mientras que los ángulos de inclinación o depresión están rayados.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG11 |
| **Descripción** | Ángulos complementarios medidos como rumbos o como ángulos de elevación o depresión. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulos complementarios medidos como rumbos o como ángulos de elevación o depresión. |

Así, los ángulos del mismo color son complementarios entre sí. En el caso particular, el ángulo de elevación es complementario con el rumbo , el ángulo de elevación es complementario con el rumbo , el ángulo de depresión es complementario con el rumbo y, finalmente, el ángulo de depresión es complementario con el rumbo . La suma entre parejas de ellos es igual a :

y,

Una propiedad adicional de los ángulos complementarios es que son los ángulos de los vértices agudos para los triángulos rectángulos. Como seguramente sabes, la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo equivale a dos ángulos rectos, que en la medición por grados corresponde a . Ya que uno de los ángulos es recto, mide en grados , así que necesariamente los dos restantes suman los otros , por lo que resultan complementarios.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios |
| **Descripción** | Animación en Geogebra que muestra la propiedad de que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios |
| Motor y código | Ejercicio Genérico M5B: Test - con video |

[SECCIÓN 3] **1.3.4 Ángulos suplementarios**

La relación de suplementariedad está dada siempre entre dos ángulos. Dos ángulos se dicen *suplementarios*, si tomados juntos son iguales a dos ángulos rectos. En el sistema de medición por grados, eso significa que, sumados, son iguales a . Nótese que en el sistema de medición por grados centesimales, la suma debería ser igual a .

Ejemplo de ángulos suplementarios se encuentran en la inclinación mutua entre la pantalla de un portátil y el escritorio o mesa sobre el que descansa. También en los ángulos que describe la columna vertebral cuando se ejercitan algunas posiciones de yoga mientras la persona se encuentra arrodillada. En general, cuando hay un movimiento de vaivén respecto a un plano, se generan ángulos suplementarios.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG12 |
| **Descripción** | Galería de imágenes en la que aparecen ángulos suplementarios en contextos de realidad.  Crear imágenes o seleccionar aquellas de las que se indican en las URL’s y hacer lo mismo (marcar la medida en grados de los ángulos suplementarios coloreándolos de color NARANJA y VERDE) que con el ejemplo del portátil siguiente: |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [URL1](http://www.fotomat.es/fotos/fotomat/suplementario-fotomat-2012-02-10.jpg)  [URL2](http://www.fotomat.es/fotos/fotomat/medida-de-angulos-fotomat-2012-03-03.jpg)  [URL3](http://enforma.hola.com/imagenes/en-forma/20140716376/yoga-estiramientos-running/0-0-830/postura2--z.jpg)  [URL4](http://www.chiledepot.com/pic/productos/1461_CL.jpg) |
| **Pie de imagen** | Ángulos suplementarios en la vida real. |

En las imágenes se marcan diferentes ángulos suplementarios presentes en la vida real. Nota que la suma de los ángulos naranja y verde es siempre igual a dos ángulos rectos, que en la medición en el sistema sexagesimal equivale a y en la medición en el sistema centesimal equivaldría a .

Así, cada par de ángulos naranja y verde son suplementarios entre sí. En el caso particular de la apertura de la pantalla del portátil, el ángulo es suplementario con el ángulo , pues ambos están medidos respecto a la recta roja que representa la mesa de apoyo, sobre la que incide la semirrecta azul, que es la que indica en qué apertura está la pantalla. En el mismo ejemplo, el ángulo es suplementario con el ángulo . La suma entre parejas de ellos es igual a :

y

Una propiedad adicional de los ángulos suplementarios es que si se toman dos ángulos cuyas medidas en grados sumen , eso generará una línea recta entre los lados no comunes. Es lo que se conoce comúnmente como ángulo llano.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | El ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de sus internos opuestos |
| **Descripción** | Animación en Geogebra que muestra la propiedad de que el ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de sus internos opuestos |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M5B: Test - con video |

[SECCIÓN 2] **1.4 Ángulos coterminales**

Algunos fenómenos en cuya explicación aparecen las mediciones angulares son principalmente fenómenos cíclicos. Piensa por ejemplo en la órbita que describe la tierra alrededor del sol, o en la que describe la luna alrededor de la tierra. Se trata de fenómenos que se repiten cada cierto tiempo.

Por ejemplo, la cantidad de giros que da la luna alrededor de la tierra es igual a la cantidad de meses de nuestro sistema calendario. Si se eliminan gran cantidad de variables que participan del fenómeno del movimiento de la luna alrededor del sol, podemos decir que al cabo de un mes la luna ha dado una vuelta completa alrededor de la tierra, al cabo de un mes ha dado dos vueltas, al cabo de tres, tres vueltas, y así sucesivamente hasta que completa 12 vueltas, que es el tiempo que le ha tomado la tierra en dar un solo giro alrededor del sol.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG13 |
| **Descripción** | Imagen de la órbita de la luna alrededor de la tierra |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://acer.forestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/dinamsist/tierraluna_files/tierra_luna.gif |
| **Pie de imagen** | Órbita de la luna alrededor de la tierra |

La medición de ángulos con el mismo lado inicial y el mismo lado final puede hacerse en sentido positivo o en sentido negativo, pero también se pueden dar varios giros antes de marcar el ángulo. En cualquiera de los tres casos, si los lados inicial y final son los mismos, se dice que los ángulos son coterminales.

En la representación canónica, el lado inicial del ángulo es siempre el eje . Ya que la medición puede hacerse en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario, un par de ángulos coterminales debe sumar .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG14 |
| **Descripción** | Imagen del sistema tierra-luna con las marcaciones de ángulos coterminales asociados. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulos coterminales en el sistema Tierra-Luna. |

En el caso particular del sistema Tierra-Luna, el ángulo es coterminal tanto con el ángulo como con el ángulo , pues los tres están medidos a partir de la recta roja que representa el eje que corresponde al lado inicial de cada ángulo, y hasta la semirrecta azul, que corresponde al lado final.

Nótese que si al ángulo se suma o se resta un ángulo de , se obtienen los otros dos.

y

Así, en el sistema de grados o sexagesimal, para encontrar ángulos coterminales a un ángulo dado basta, bien sumar, o bien restar otro ángulo de .

Una propiedad adicional de los ángulos coterminales cuyas medidas estén en grados es que si se restan parejas de ángulos coterminales positivos, resulta un múltiplo de . Por su parte, si se resta uno negativo de uno positivo, resulta también un múltiplo de . Es lo que se conoce comúnmente como ángulo completo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Practica ángulos coterminales |
| **Descripción** | Contenedor de imágenes para agrupar imágenes que representen ángulos coterminales iguales |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M10B: Contenedores de imágenes |

[SECCIÓN 2] **1.5 Consolidación**

La representación y medición de ángulos se puede hacer de múltiples maneras, para las cuales lo más importante es elegir una unidad que sirva para medir, y un sistema de coordenadas para marcar los lados inicial y final y el sentido del giro.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Definición y tipos de ángulos coordenados |
| **Descripción** | Actividades sobre definición y tipos de ángulos coordenados |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M101: Preguntas de respuesta libre (NO AUTOEVALUABLE) |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** |  |
| **Ubicación en Aula Planeta** | **1º ESO/TECNOLOGÍA/El ordenador: hardware/12 La ergonomía en el uso del ordenador** |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | **Diapositiva 1**    Cambiar el título por: “Los ángulos y la ergonomía”  Cambiar la foto por otra que aparezca en el Gran Artículo Temático: Ergonomía  **Diapositiva 2**    Cambiar “ordenadores por “computadores”. Cambiar “Averiguad” por “Averigua”. Cambiar “debeís intentar sentaros en” por “intenta sentarte en”. Cambiar “taburete” por “banco”    En la opción incorrecta cambiar la frase por “Los dispositivos técnicos deben adaptarse al hombre. Las fábricas y los puestos de trabajo deben diseñarse pensando en las personas que los van a utilizar. Un banco no ofrece apoyo piernas, brazos ni espalda”    En la respuesta correcta, cambiar “vuestras” por “tus”  **Diapositiva 3**    Cambiar “ordenador” por “computador”  En la primera opción cambiar “tendreís” por “tendrás  La segunda queda igual  En la tercera cambiar “podeís” por “puedes”  **Diapositiva 4**    Cambiar “ordenador” por “computador”  Cambiar “podeís” por “puedes”  En la respuesta correcta, cambiar “vuestra” por tu”, “llegais” por “llegas” y “teneís” por “tienes”.  En la respuesta incorrecta cambiar “adoptaís” por “adoptas” y “ordenador” por “computador”  **Diapositiva 5**    Eliminar la diapositiva y en lugar de ella crear una nueva con la información:  Es muy importante supervisar la correcta disposición del monitor, el teclado y el ratón, y procurar que las muñecas y los antebrazos estén alineados con el teclado, con el codo flexionado en unos 90°. La silla debe regularse a la altura adecuada y el respaldo ha de sujetar especialmente la zona lumbar de la espalda. También es aconsejable:    Permanecer la mayor cantidad de tiempo sentado: Respuesta incorrecta. Debes cambiar a menudo de postura.  Levantarse y andar un poco: Respuesta correcta. Se recomienda levantarse y caminar aproximadamente cada 45 minutos.  **Diapositiva 6**    Dejar igual, cambiando la imagen por alguna de una persona de entre 15 y 20 años  En la primera opción, cambiar “podreís” por “podrás”, “acercaros” por “acercarte” y “vuestras” por “tus”  En la segunda opción cambiar “os” por “te” y “vuestro” por “tu”  En la tercera, cambiar“vuestras” por “tus”  **Diapositiva 7:**    Queda igual  **Diapositiva 8:**    Queda igual  **Diapositiva 9**    En la primera opción, cambiar “escuchaís” por “escuchas”, “utilizaís” por “utilizas” y “podeís” por “puedes”  En la segunda, cambiar “usaís” por “usas” y “os” por “te” |
| **Título** | Los ángulos y la ergonomía |
| **Descripción** | Interactivo que expone elementos propios de la ergonomía en los que se ponen en juego definición, medición y propiedades de los ángulos. |

[SECCIÓN 1] **2 Medición de ángulos en el sistema cíclico o en radianes**

Como se indicó en la sección anterior, una forma de medir los ángulos es tomando como unidad un radián, es decir, un segmento de la misma longitud del radio, pero puesto sobre la circunferencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG15 |
| **Descripción** | Definición de un radián: |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://es.wikipedia.org/wiki/Radi%C3%A1n#/media/File:Circle_radians.gif> |
| **Pie de imagen** | Determinación de la unidad *radián* |

[SECCIÓN 2] **2.1 Relación entre grados y radianes**

El número indica las “veces que cabe” un radián en una semicircunferencia, así que en la circunferencia completa caben radianes. Por otra parte, en la semicircunferencia, un grado cabe 180 veces. Ya que un ángulo de 180 grados sexagesimales corresponde a uno de 200 grados centesimales, entonces ambos son iguales a radianes. Así, tenemos la siguiente equivalencia:

Dado que la equivalencia anterior es directamente proporcional, tenemos que:

Al escribir la proporción como razón, se obtiene que:

Por lo anterior, se puede realizar la conversión, bien de grados sexagesimales a radianes o bien de radianes a grados sexagesimales.

En caso de que se tengan grados sexagesimales y se quiera convertir a radianes, entonces

de donde, multiplicando en ambos lados por , se tiene

por lo que

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Conversión de grados sexagesimales a radianes** |
| **Contenido** |  |

En el caso contrario, es decir si se tiene radianes y se quiere convertir a grados sexagesimales, entonces:

de donde, despejando se obtiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Conversión de radianes a grados sexagesimales** |
| **Contenido** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG16 |
| **Descripción** | Correspondencias entre grados sexagesimales y radianes |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Tomar la imagen presente en la URL, eliminando la mención de las funciones trigonométricas (sen, cos)  <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9a/Degree-Radian_Conversion.svg> |
| **Pie de imagen** | Correspondencias entre grados sexagesimales y radianes |

Debes prestar atención cuando uses tu calculadora, pues la palabra que en el idioma inglés corresponde a “grados sexagesimales” es “degrees”, por lo que en la calculadora aparece la abreviatura DEG. Por su parte, los “grados centesimales” se traducen al inglés como “grades”, por lo que en la calculadora aparece la abreviatura GRA.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG17 |
| **Descripción** | Imagen de las abreviaturas y convenciones para identificar el tipo de unidad de medida angular que aparece en las calculadoras científicas |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Abreviaturas para identificar el tipo de unidad de medida angular que aparece en las calculadoras científicas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Ángulos de polígonos inscritos en la circunferencia |
| **Descripción** | Actividad para identificar las medidas en grados y en radianes de ángulos de polígonos inscritos en la circunferencia. |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M3A: Asociar imagen-texto |

[SECCIÓN 2] **2.2 Longitud de arco de circunferencia**

Uno de los atributos medibles de la circunferencia que es más reconocible es el perímetro. El perímetro es la longitud de la circunferencia, que habitualmente se calcula como y que indica la medición en unidades lineales del contorno del círculo. El perímetro de la circunferencia se obtiene por la definición misma de radián, ya que si el radio de la circunferencia es de una unidad lineal –medida en metros, centímetros, pulgadas o cualquier otra magnitud lineal–, la longitud de la circunferencia completa será unidades.

Sin embargo, si el radio de la circunferencia es –medido en metros, centímetros, pulgadas o cualquier otra magnitud lineal–, la longitud de la circunferencia completa será unidades.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Perímetro de una circunferencia** |
| **Contenido** | El perímetro de una circunferencia de radio se calcula como |

Un arco de circunferencia es una parte del contorno del círculo, que es una fracción de su perímetro el cual queda completamente determinado por el ángulo que lo subtiende. El arco de una circunferencia se identifica tomando dos puntos y de la circunferencia que lo delimitan. Algunos ejemplos de arco se muestran a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG18 |
| **Descripción** | Imágenes que muestran arcos de circunferencia. Incluir la imagen de la URL y otra como la que se muestra. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7a/Arco\_circ.png |
| **Pie de imagen** | Arcos de circunferencia. |

La longitud de un arco de circunferencia, así como la medición del perímetro total , depende de la medida del radio que define la circunferencia. Ya que la medida del perímetro completo es , entonces por proporcionalidad entre el perímetro total y la medida en ángulos sexagesimales de la circunferencia total, tenemos que la longitud de un arco subtendido por un ángulo de en una circunferencia de radio satisface que:

Al escribir la proporción como razón, se obtiene que:

Por lo anterior, se puede realizar la conversión, bien de grados sexagesimales a longitud de arco o bien de longitud de arco a grados sexagesimales.

En caso de que se tengan grados sexagesimales y se quiera hallar la medida del arco, entonces:

por lo que

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Conversión de grados sexagesimales a longitud de arco de circunferencia** |
| **Contenido** |  |

En el caso contrario, es decir si se tiene una longitud de arco de unidades y se quiere conocer el valor del ángulo sexagesimal que determina ese arco, entonces:

de donde, multiplicando por en ambos lados se tiene:

y despejando se obtiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Conversión del arco de circunferencia de unidades, a grados sexagesimales** |
| **Contenido** |  |

Un análisis análogo, pero en el que se toma, yo no el perímetro de la circunferencia, sino su área, permite encontrar el área de cualquier sector circular. Veamos:

Un sector circular es una parte del interior del círculo, que es una fracción de su área, la cual queda completamente determinada por el ángulo que la subtiende. El sector circular de un círculo se identifica tomando dos puntos y de la circunferencia que lo delimitan. Algunos ejemplos de sectores circulares se muestran a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG19 |
| **Descripción** | Imágenes que muestran sectores circulares. Incluir la imagen de la URL y otra como la que se muestra, con sombreado estándar, en colmena y en ladrillo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://es.wikipedia.org/wiki/Sector\_circular#/media/File:Circle\_arc.svg |
| **Pie de imagen** | Sectores circulares. |

El área de un sector circular, así como la medición del área total , depende de la medida del radio que define la circunferencia. Ya que la medida del área del círculo completo es , entonces por proporcionalidad entre el área total y la medida en ángulos sexagesimales del círculo total, tenemos que el área de un sector circular subtendido por un ángulo de en un círculo de radio satisface que:

Al escribir la proporción como razón, se obtiene que:

Por lo anterior, se puede realizar la conversión, bien de grados sexagesimales a área de sector circular o bien de área de sector circular a grados sexagesimales.

En caso de que se tengan grados sexagesimales y se quiera hallar la medida del sector circular asociado, entonces:

por lo que

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Conversión de grados sexagesimales a área de sector circular** |
| **Contenido** |  |

En el caso contrario, es decir si se tiene un área de sector circular de unidades y se quiere conocer el valor del ángulo sexagesimal que determina esa área, entonces:

de donde, multiplicando por en ambos lados se tiene:

y despejando se obtiene:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Conversión de un área de sector circular que mida unidades, a grados sexagesimales** |
| **Contenido** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Longitud de arco y área de sectores circulares de polígonos inscritos en la circunferencia |
| **Descripción** | Actividad para identificar el cálculo de la longitud de arco y el área de un sector circular de polígonos inscritos en la circunferencia. |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M3A: Asociar imagen-texto |

[SECCIÓN 2] **2.3 Consolidación**

La consideración de hacer la medición angular tomando como unidad de medida el radián permite, no solo efectuar la medición de los ángulos, sino también medir arcos de circunferencia, áreas de sectores circulares, y otros elementos del círculo y de la circunferencia, a través del reconocimiento de la proporcionalidad subyacente. Entonces, conociendo el radio de la circunferencia y la medida angular, bien sea en grados sexagesimales, centesimales o en radianes, es posible hallar otros elementos desconocidos.

Además, como sistema de medición, el sistema cíclico tiene aplicaciones principalmente en física, asociados a la medición de fuerzas centrípetas, centrífugas y otras asociadas a movimientos circulares

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** |  |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 6º Primaria/Matemáticas/Las figuras geométricas/Resuelve problemas de aplicación con longitudes de circunferencia. |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | **Diapositiva 1**    “Si el arco entre las cintas grises de un salvavidas es de 71,75 cm, calcula cuánto mide su diámetro.”  Mismas respuestas  **Diapositiva 2**    Dejar igual  **Diapositiva 3**    Cambiar pregunta por:  “El arco entre dos rayos consecutivos de la rueda de madera es de 49,16 cm. Calcula cuánto mide su radio”  Mismas respuestas  **Diapositiva 4**    Cambiar la imagen para que se vea que son 8 porciones  Cambiar pregunta por: “Calcula la medida aproximada del lado de la caja de pizza, si el área de cada porción es 10,2 ”  Las mismas respuestas, multiplicando cada una por 2, es decir:  204 cm  20,4 cm  102 cm  **10,2 cm**  **Diapositiva 5**    Dejar igual    Cambiar la pregunta por: “¿Cuántas vueltas da la llanta de un auto que tiene llanta modelo 185/60R15 cuando avanza 10 metros?”  Respuestas.  2,8 vueltas  **4,24 vueltas**  9.9 vueltas  3,8 vueltas    Cambiar la pregunta por: “Si el diámetro de un bombo es de 20 pulgadas, ¿Cuál es la distancia entre sus caballetes de tensión?  **19,94 cm**  39,87 cm  35.52 cm  12,76 cm    Quitar |
| **Título** | Resuelve problemas de aplicación de arcos de circunferencia y sectores de círculo. |
| **Descripción** | Actividad para resolver problemas de aplicación de arcos de circunferencia y sectores de círculo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** |  |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4º ESO/Física y química/La dinámica/El movimiento circular y la fuerza centrípeta |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Queda igual |
| **Título** | Mediciones angulares en el movimiento circular |
| **Descripción** | Interactivo que describe las características del movimiento circular y la fuerza centrípeta, en el que intervienen mediciones angulares |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** |  |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 4º ESO/Física y química/Las ondas de luz y sonido/La reflexión y la refracción de la luz |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Queda igual |
| **Título** | Ángulos en los fenómenos de reflexión y refracción de la luz |
| **Descripción** | Interactivo para mostrar la aplicación de medición angular en la variación de los fenómenos de refracción y reflexión de la luz según el ángulo de incidencia y el medio |

[SECCIÓN 1] **3 Triángulos**

Antes del primera año de vida, los bebés pueden reconocer cuándo un objeto “rueda” o no. Aparte de la noción de circularidad que te ha acompañado desde la niñez, la idea de triangularidad ha estado presente también a lo largo de tu vida escolar.

En las definiciones 19, 20 y 21 de los Elementos de Euclides, se definen sucintamente las nociones griegas:

**Definición 19**: Figuras rectilíneas son las comprendidas por líneas rectas, trilaterales las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, y multiláteras las comprendidas por más de cuatro líneas rectas.

[**Definición 20**](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=es&ie=UTF8&prev=_t&rurl=translate.google.com&sl=en&tl=es&u=http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/defI20.html&usg=ALkJrhgCHsbmGtIJEQDRZu7ujTjDGmr3MA)**:** De entre las figuras trilaterales, triángulo equilátero es la que tiene sus tres lados iguales, isósceles la que tiene solo dos lados iguales, y escaleno la que tiene los tres lados desiguales.

[**Definición 21**](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=es&ie=UTF8&prev=_t&rurl=translate.google.com&sl=en&tl=es&u=http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/defI20.html&usg=ALkJrhgCHsbmGtIJEQDRZu7ujTjDGmr3MA): Además, de entre las figuras trilaterales, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, y acutángulo la que tiene los tres ángulos agudos.

[SECCIÓN 2] **3.1 Clasificación de triángulos**

Ubicados en un sistema de referencia no coordenado, los elementos de un triángulo son los siguientes:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG20 |
| **Descripción** | Figura trilátera o triángulo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Elementos del triángulo |

* Tres vértices, nombrados con letras arábigas mayúsculas, generalmente , y .
* Tres lados, nombrados con letras arábigas minúsculas, según la letra mayúscula que se encuentre en su lado opuesto, generalmente , y .
* Tres ángulos, nombrados con letras griegas minúsculas, iguales a las arábigas del vértice, generalmente , y .

Para conservar la notación a través tan solo de los vértices, los lados y ángulos, esos elementos también se pueden nombrar como aparece a continuación. Sin embargo, se usará la notación según el tipo de letra, más sencilla de manejar.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **NOTACIÓN DE ELEMENTOS DE LOS TRIÁNGULOS** | **Notación diferenciando el tipo de letra** | **Notación dependiente de los vértices** |
| **Vértices** | , , | , , |
| **Lados** | , , | , , |
| **Ángulos** | , , | , , |

La definición euclídea de figura trilátera o *triángulo* considera para su clasificación dos elementos importantes: la relación de igualdad entre las medidas de sus lados, y la comparación respecto a un ángulo recto de sus medidas angulares.

Si para un triángulo se indican las medidas de los lados, como por ejemplo , y

, o cualquier otra tripla de medidas para los lados, muy rápidamente, incluso sin dibujarlo, podrás indicar si se trata de un triángulo equilátero, isósceles o escaleno. Para este caso en particular, como los tres lados son diferentes, se concluye que el triángulo es escaleno.

Sin embargo, quizá tarde un poco más decidir si se trata de un triángulo acutángulo, obtusángulo o rectángulo. Para tomar la decisión, inicia por trazar el triángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Los pasos para construir un triángulo conociendo las medidas de sus lados son (tomado del Aula Planeta [AQUÍ](http://profesores.aulaplaneta.com/DesktopModules/PPP_EditorGuionesKO/RecursoProfesor.aspx?IdGuion=12525&IdRecurso=624122&Transparent=on)) |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Identifica condiciones de existencia de un triángulo |
| **Descripción** | Actividad para conjeturar y verificar condiciones de existencia de un triángulo |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M5B: Test - con video |

Ya con el triángulo construido, se puede apelar tanto a la medición, como a las propiedades de los triángulos, para proponer y aplicar un criterio de decisión acerca del tipo de clasificación angular del triángulo obtenido. El triángulo que se forma aplicando los pasos anteriores resulta como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG21 |
| **Descripción** | Resultado de construir el triángulo de medidas , y |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Construcción del triángulo de medidas , y . |

Un primer criterio puede ser elegir el ángulo mayor, que es el opuesto al lado mayor, y trazar una perpendicular a uno de sus lados adyacentes, para comparar el ángulo con un ángulo recto y así proponer una conjetura acerca de si es acutángulo, obtusángulo o rectángulo.

El resultado de esa construcción es el siguiente:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG22 |
| **Descripción** | Construcción de una perpendicular sobre un lado adyacente al ángulo mayor en el triángulo de medidas , y |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Construcción de una perpendicular sobre un lado adyacente al ángulo mayor en el triángulo de medidas , y |

De este modo, se concluye que el triángulo cuyos lados miden , y es un triángulo escaleno obtusángulo.

Otros criterios para decidir el tipo de triángulo sin tener las medidas de sus lados están basados en las propiedades de cada uno de los posibles tipos de triángulo. Usando algunos de los puntos notables del triángulo, se puede determinar su tipo, ya que, por ejemplo, el ortocentro de los triángulos está en su interior si es acutángulo, sobre un vértice si es rectángulo, o en el exterior si es obtusángulo.

En general, los triángulos se pueden clasificar según la medida de sus lados y de sus ángulos como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG23 |
| **Descripción** | Clasificación de los triángulos, según la medida de sus lados y de sus ángulos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | Tomada de [AQUI](http://1.bp.blogspot.com/-qari6pjGILc/ThUkrKLycZI/AAAAAAAAABE/_jCmpY9nL4w/s1600/Tri%252525C3%252525A1ngulos%252B-%252BClasificaci%252525C3%252525B3n%252B2.jpg), con las modificaciones marcadas sobre la imagen en rojo.  La la  EN TODOS LOS TRIÁNGULOS PONER A, a ó ROJAS, B, b ó VERDES y C, c o AZULES Y SOMBREAR NARANJA EL INTERIOR DEL TRIÁNGULO DEL MODO QUE APARECE EN LA IMAGEN PREVIA |
| **Pie de imagen** | Clasificación de los triángulos, según la medida de sus lados y de sus ángulos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** |  |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 1º ESO/Matemáticas/Polígonos y circunferencia/ Identifica los triángulos |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Cambiar las imágenes que actualmente aparecen, por las que se creen en la digitalización de la imagen de clasificación de los triángulos, es decir: |
| **Título** | Identifica los triángulos, según sea su clasificación. |
| **Descripción** | Actividad para clasificar triángulos a partir de características marcadas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** |  |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 5º Primaria/Matemáticas/Las figuras geométricas/Identifica los triángulos |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Dejar igual (Si no es posible tomar este recurso de un grado tan inferior, simplemente quitarlo. Aunque parece que es un tema de primaria, en Colombia no necesariamente se desarrolla) |
| **Título** | Identifica los triángulos |
| **Descripción** | Actividad para clasificar triángulos según sus características |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | **Los puntos notables de un triángulo son los puntos de corte de sus rectas notables. Son el baricentro, circuncentro, ortocentro e incentro, según si el corte se da entre las medianas, metriatrices, alturas o bisectrices.** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Posición de los puntos notables en cada tipo de triángulo |
| **Descripción** | Actividad para clasificar triángulos según la ubicación de sus puntos notables |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M2A: Rellenar huecos |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** |  |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 5º Primaria/Matemáticas/Las figuras geométricas/ Visualiza los elementos de un triángulo |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Dejar igual (Si no es posible tomar este recurso de un grado tan inferior, simplemente quitarlo. Aunque parece que es un tema de primaria, en Colombia no necesariamente se desarrolla) |
| **Título** | Visualiza las rectas y los puntos notables de un triángulo |
| **Descripción** | Interactivo para visualizar las rectas y los puntos notables de un triángulo, desde puntos creados en pantalla |

[SECCIÓN 2] **3.2 Propiedades de los triángulos**

El libro I de los Elementos de Euclides contiene 48 proposiciones, que tratan principalmente las propiedades de los triángulos. Algunas de tales propiedades se satisfacen para todos los tipos de triángulos, y otras dependen del tipo de triángulo al que se haga referencia.

Algunas de las propiedades generales de los triángulos son las siguientes:

* **Proposición 18:** En todo triángulo, el lado mayor subtiende al ángulo mayor.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG24 |
| **Descripción** | Imagen en la que se describen los elementos para la propiedad de que el lado mayor subtiende al ángulo mayor |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El lado mayor subtiende al ángulo mayor |

Así, si es el lado mayor, entonces será el ángulo mayor.

* **Proposición 19:** En todo triángulo, el ángulo mayor está subtendido por el lado mayor.

Es la propiedad recíproca de la anterior, es decir que si Así, si es el ángulo mayor, entonces será el lado mayor.

* **Proposición 20:** En todo triángulo, dos lados tomados juntos (sumados) de cualquier manera son mayores que el restante.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG25 |
| **Descripción** | Imagen en la que se describen los elementos para la propiedad de que en todo triángulo, dos lados tomados juntos (sumados) de cualquier manera son mayores que el restante. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En todo triángulo, dos lados tomados juntos (sumados) de cualquier manera son mayores que el restante. |

En este caso, la propiedad indica que todas las afirmaciones siguientes son verdaderas:

La anterior propiedad es la llamada *desigualdad triangular*, que en ocasiones se formula diciendo que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta.

* **Proposición 32:** En todo triángulo, el ángulo externo es igual a la suma de los internos opuestos y los tres ángulos internos son iguales a dos rectos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG26 |
| **Descripción** | Imagen en la que se describen los elementos para la propiedad de que la suma de los tres ángulos internos son iguales a dos rectos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La suma de los tres ángulos internos son iguales a dos rectos. |

En el triángulo , al prolongar el lado en dirección al vértice y trazando una paralela al lado por el vértice , se tiene que es un ángulo llano, es decir, igual a dos rectos. Si se miden los ángulos en el sistema sexagesimal, entonces:

* **Proposición 37:** Los triángulos que están sobre la misma base y están entre las mismas paralelas, son iguales entre sí (en área).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG27 |
| **Descripción** | Imagen en la que se describen los elementos para la propiedad de que los triángulos que están sobre la misma base y están entre las mismas paralelas, son iguales entre sí (en área) |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los triángulos que están sobre la misma base y están entre las mismas paralelas, son iguales entre sí (en área) |

La propiedad indica que, ya que los triángulos y están construidos sobre la misma base AB y entre las paralelas y , entonces los dos son iguales en área. Nótese que si se elige cualquier punto sobre la recta paralela al lado , los triángulos tendrán la misma altura. Como los triángulos tienen la misma base y altura, tienen igual área.

* **Recta de Euler:** El baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un triángulo son colineales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG28 |
| **Descripción** | Imagen en la que se describen los elementos para la propiedad de que el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un triángulo son colineales. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | El baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un triángulo son colineales. |

En el triángulo se construyen el baricentro, el ortocentro y el circuncentro, a partir de las medianas, mediatrices y alturas a cada lado. De esa manera, al unir los puntos notables se obtiene una recta que se llama *Recta de Euler*.

* **Teorema de la bisectriz:** En todo triángulo, la razón entre dos lados es igual a la razón de las partes en las que queda dividido el tercer lado por la bisectriz de ángulo interno opuesto a ese tercer lado. Esta última propiedad no se encuentra en el Libro I.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG29 |
| **Descripción** | Imagen en la que se describen los elementos para el teorema de la bisectriz |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Teorema de la bisectriz |

El teorema de la bisectriz aplicado sobre el ángulo del triángulo dice que la bisectriz BD divide al lado AC de manera que se satisface la relación de proporcionalidad , que escrito como razón es:

Propiedades que son específicas para triángulos isósceles son las siguientes:

* **Proposición 5:** En los triángulos isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales, y si se prolongan los lados iguales, los ángulos bajo las prolongaciones también son iguales.
* **Proposición 6:** Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, entonces es isósceles.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG30 |
| **Descripción** | Imagen en la que se describen los elementos para la propiedad de que en los triángulos isósceles los ángulos sobre y bajo el lado desigual son iguales. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En los triángulos isósceles los ángulos sobre y bajo el lado desigual son iguales. |

En este caso, dado el triángulo isósceles , en el que los lados iguales son , entonces los ángulos y sobre el lado desigual son iguales entre sí, al igual que los ángulos y bajo el lado desigual son iguales entre sí. Se tiene pues que si , entonces:

* **Bisección:** La mediana, mediatriz, altura y bisectriz sobre el lado desigual o el ángulo desigual de todo triángulo isósceles es la misma y lo divide en dos triángulos congruentes.

Lo que indica esta propiedad es que en el triángulo isósceles , los triángulos y son congruentes.

* **Recta de Euler:** Los puntos notables de un triángulo isósceles están sobre la bisectriz del ángulo desigual.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG31 |
| **Descripción** | Imagen en la que se describen los elementos para la propiedad de que los puntos notables de un triángulo isósceles están sobre la bisectriz del ángulo desigual |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los puntos notables de un triángulo isósceles están sobre la bisectriz del ángulo desigual |

Finalmente, la principal propiedad de los triángulos rectángulos es el Teorema de Pitágoras, sobre el que dedicaremos la siguiente sección. Otras propiedades de los triángulos rectángulos, son las siguientes:

* En los triángulos rectángulos, la altura trazada sobre la hipotenusa lo divide en triángulos semejantes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG32 |
| **Descripción** | Imagen en la que se describen los elementos para la propiedad de que, en los triángulos rectángulos, la altura trazada sobre la hipotenusa lo divide en triángulos semejantes. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | En los triángulos rectángulos, la altura trazada sobre la hipotenusa lo divide en triángulos semejantes. |

En este caso, dado el triángulo rectángulo , al trazar la altura CD el triángulo queda dividido en triángulos semejantes, puesto que los tres triángulos , y tienen tres ángulos iguales respectivamente. Nótese que los tres triángulos tienen como ángulos uno recto, y , así que son triángulos semejantes.

Separando cada uno de los triángulos y haciendo razones entre parejas de ellos, tenemos por ejemplo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Triángulo** | **Triángulo** | **Triángulo** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Por las propiedades de la semejanza se puede concluir que:

Y también que:

O qué:

Así que, en general, se puede hacer una razón entre cualquier par de lados correspondientes en cada uno de los triángulos, y las razones resultantes serán iguales.

* La bisectriz interna del ángulo rectángulo biseca el cuadrado formado sobre la hipotenusa.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG33 |
| **Descripción** | Imagen en la que se describen los elementos para la propiedad de que la bisectriz interna del ángulo rectángulo biseca el cuadrado formado sobre la hipotenusa |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La bisectriz interna del ángulo rectángulo biseca el cuadrado formado sobre la hipotenusa. |

La propiedad indica que dado el triángulo rectángulo , en el que se ha trazado la bisectriz del ángulo rectángulo, los cuadriláteros y son congruentes.

* Cualquier triángulo trazado sobre una semicircunferencia, es rectángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG34 |
| **Descripción** | Imagen en la que se describen los elementos para la propiedad de que cualquier triángulo trazado sobre una semicircunferencia, es rectángulo. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cualquier triángulo trazado sobre una semicircunferencia, es rectángulo. |

Como un caso particular del teorema del ángulo central se tiene que cualquier triángulo trazado sobre una semicircunferencia, es rectángulo. En este caso, El ángulo central es el doble que el ángulo inscrito . Ya que el ángulo central es llano, el ángulo inscrito debe ser recto.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Practica propiedades de los triángulos |
| **Descripción** | Actividad para practicar propiedades de triángulos |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M5A: Test - con imagen |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Polígonos inscritos en una circunferencia |
| **Descripción** | Vínculo entre ángulos, polígonos y círculos |
| **Motor y código** | F13: WebQuest |

[SECCIÓN 2] **3.3 Teorema de Pitágoras**

Aparte de las propiedades para los triángulos rectángulos descritas, el Teorema de Pitágoras es un teorema emblemático de las matemáticas. Euclides lo reconoció así, pues buena parte de la armazón deductiva que construye en el libro I de sus *Elementos* sirve justo para demostrar ese Teorema.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Las palabras “cateto” e “hipotenusa” surgieron en el contexto de la construcción de relojes solares de la antigüedad. En ese sentido, los lados de un triángulo se llaman “catetos” e “hipotenusa”, solamente si el triángulo es rectángulo. La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto, mientras los catetos son los lados que comprenden ese ángulo recto. |

El Teorema de Pitágoras pone en relación la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, respecto del área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Su formulación en los Elementos de Euclides, que corresponde a la proposición 47 del libro I dice:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Teorema de Pitágoras** |
| **Contenido** | En los triángulos rectángulos, el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto. |

Hay muchas y variadas formas de demostrar el famoso teorema. La demostración debida a Euclides hace uso de algunas de las propiedades que se han mencionado previamente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_10\_02\_CO\_IMG35 |
| **Descripción** | Demostración euclídea del Teorema de Pitágoras. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Demostración euclídea del Teorema de Pitágoras. |

* Inicialmente, luego de la construcción, se observa que el área del triángulo es la mitad del área del cuadrado verde.
* A continuación se nota que, esa mitad del cuadrado verde es igual en área al triángulo morado , pues tienen la misma base y están entre las paralelas y .
* Luego, se muestra que los triángulos morados y son iguales por el criterio .
* Finalmente se muestra que el triángulo morado tiene la misma área que el triángulo , pues tienen la misma base y están entre las paralelas y .
* Como el área del triángulo es la mitad del área del cuadrilátero , entonces las áreas verdes son iguales.
* Por un razonamiento análogo, las áreas rosadas son iguales y con ello el cuadrado de la hipotenusa queda completo por las áreas de los cuadrados de los catetos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** |  |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 3º ESO/Matemáticas/Los triángulos y la semejanza/Resuelve problemas de triángulos |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Queda igual (Si no se puede usar este recurso en este grado, simplemente quitarlo) |
| **Título** | Ejercicios de aplicación del Teorema de Pitágoras |
| **Descripción** | Ejercicios creados para practicar la resolución de triángulos rectángulos usando el teorema de Pitágoras |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso aprovechado** | |
| **Código** |  |
| **Ubicación en Aula Planeta** | NO ESTÁ ASOCIADO A ALGÚN GRADO |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** | Dejar igual ((Si no se puede usar este recurso en este grado, simplemente quitarlo) |
| **Título** | El Teorema de Pitágoras |
| **Descripción** | Interactivo que explica en qué consiste el teorema de Pitágoras y ofrece un ejemplo de su aplicación en ejercicios de cálculo |

Para ver otras demostraciones geométricas del Teorema de Pitágoras, puedes visitar [VER](http://tube.geogebra.org/student/m658387) o [VER](http://tube.geogebra.org/student/m123521), en donde aparecen algunos de los llamados Puzzles Pitagóricos, o visitar [VER](http://tube.geogebra.org/student/m123963) en la que se encuentra una versión de la demostración del Teorema, debida a Bhaskara.

[SECCIÓN 2] **3.4 Consolidación**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Demostración geométrica del Teorema de Pitágoras |
| **Descripción** | Test para identificar propiedades de los triángulos aplicadas en una demostración geométrica del Teorema de Pitágoras |
| **Motor y código** | Ejercicio Genérico M5B: Test - con video |

[SECCIÓN 1]**Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Ángulos y triángulos en sistemas de referencia |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** |  |
| **Título** | Evaluación: Ángulos y triángulos |
| **Descripción** | Actividad que permite evaluar los conocimientos del alumno sobre el tema Ángulos y triángulos |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** |  | |
| **Web 01** | **Aplicaciones del Teorema de Pitágoras** | [*URL*](http://nea.educastur.princast.es/repositorio/RECURSO_ZIP/1_jantoniozu_Fig_plan_espac/Fig_plan_espac/DOCS/problem%201.swf) |
| **Web 02** | **Demostraciones del Teorema de Pitágoras** | [*URL*](http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm) |
| **Web 03** | **La Matemática y la Arquitectura: Trigonometría** | [*URL*](http://uncavim10.unc.edu.ar/file.php/220/2013-AUTOEVALUACIONES_ENTES_GEOMETRICOS_Y_TRIGONOMETRIA-_PRACTICA_PARA_EL_PARCIAL/Trigonometr%C3%ADa%20y%20ejercicios.pdf) |