|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Funciones |
| Código del guion | MA\_11\_02\_CO |
| Descripción | Las funciones desempeñan un papel fundamental en la construcción del pensamiento matemático, puesto que tienen múltiples aplicaciones en modelar situaciones de variación, tanto en contextos cotidianos como de aplicación en diversas ciencias. Aquí se estudia el concepto de función, su clasificación, propiedades y operaciones. |

[SECCIÓN 1] **1 Relaciones y funciones**

El concepto de **función** es uno de los más importantes en matemáticas. Las funciones expresan una relación de **dependencia** entre dos magnitudes. Por ejemplo, cuando se lanza un balón al aire, la altura a la que se encuentra depende del tiempo transcurrido desde su lanzamiento; el área de un círculo depende de su radio y el costo de enviar un paquete depende de su peso. La representación de estas y otras situaciones de dependencia, así como el análisis de la variación de una magnitud respecto a otra, se constituye en el centro de estudio de la función, por lo que las funciones son herramientas claves en la modelación de distintos fenómenos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG01 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagena** | Algunas aplicaciones del concepto de función en la economía, se establecen a través de la relación de dependencia entre el capital adquirido y el tiempo transcurrido para obtenerlo. |

El estudio de las funciones empieza con un concepto más general: las relaciones.

[SECCIÓN 2] **1.1 Concepto de relación**

Una relación entre dos conjuntos se define como un conjunto de parejas ordenadas que pertenecen al **producto cartesiano** de los conjuntos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Dados dos conjuntos *A* y *B*su **producto cartesiano,** que se denota como *A ⨯ B* se define como:  *A ⨯ B = {(a, b)| a ⋲ A y b ⋲ B}*  es decir, el producto cartesiano de dos conjuntos es el conjunto de todas las **parejas ordenadas** tales que el primer elemento de la pareja (primera componente) pertenece al conjunto *A* y el segundo elemento de la pareja (segunda componente) pertenece al conjunto *B*. |

En matemáticas una relación se define como

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de relación** |
| **Contenido** | Una relación *R* entre dos conjuntos *A* y *B* es un subconjunto de su producto cartesiano, es decir, si R ⊆ *A ⨯ B,* entonces *R* es una relación entre los conjuntos *A* y *B*. El conjunto A se llama **conjunto de salida** y el conjunto *B* se denomina **conjunto de llegada** de la relación *R*. |

Por ejemplo:

Si *A = {a, b, c}* y *B = {m, n},* se tiene que:

*A ⨯ B = {(a, m), (a, n), (b, m), (b, n), (c, m), (c, n)}.*

Algunas relaciones entre *A* y *B* o de *A* en *B* son:

* *R1 = {(a, m), (a, n), (b, m), (b, n)}.*
* *R2 = {(a, m), (a, n), (b, m), (b, n), (c, m), (c, n)}.*
* *R3 = {(c, m), (c, n)}.*
* *R4 = {(b, n)}.*
* *R5 = {(a, m), (b, m), (c, m)}.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC10 |
| **Título** | Relaciones en contextos reales |
| **Descripción** | Interactivo que permite conocer ejemplos de relaciones en situaciones de contextos cotidianos |

Las relaciones también se pueden definir mediante una regla o ley que permita determinar la correspondencia establecida.

Por ejemplo:

En la relación *R* entrenúmeros naturales se establece que a está relacionado con *b*, si *a* es divisor de *b*, es decir

*R = {(a, b) ⋲ ℕ⨯ℕ | a* es divisor de *b}*

Por lo tanto

(1, 2) ⋲ *R*, ya que, 1 es divisor de 2.

(4, 8) ⋲ *R,* ya que, 4 es divisor de 8.

(3, 2) ∉ R, ya que, 3 no es divisor de 2.

(-1, 2) ∉ R, ya que, -1 ∉ ℕ.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC20 |
| **Título** | Formas de representación de relaciones |
| **Descripción** | Interactivo que presenta el diagrama sagital y el diagrama cartesiano como formas de representar relaciones entre conjuntos. |

[SECCIÓN 3] **1.1.1 Dominio y rango de una relación**

Los elementos de una relación son el conjunto de salida, el conjunto de llegada, el dominio y el rango de la relación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Dominio y rango de una relación** |
| **Contenido** | Dada una relación *R* entre los conjuntos A y B, se define el **dominio de la relación *R*,** que se denota como *Dom R*, como el conjunto de todas las primeras componentes de las parejas que pertenecen a la relación, es decir, todos los elementos de *A* que están relacionados por lo menos con un elemento de *B*.  El **rango de la relación R**, que se denota como *Rang R*, es el conjunto de todas las segundas componentes de las parejas de la relación, es decir, el conjunto de todos los elementos de *B* relacionados por lo menos con un elemento del conjunto *A*. |

Por ejemplo, los siguientes diagramas sagitales representan relaciones de *A* en *B.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG02 |
| **Descripción** | Representación sagital de relaciones |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Algunas relaciones entre el conjunto de salida *A = {a, b, c}* y el conjunto de llegada *B = {m, n}* |

* *Dom R1 = {a, b}* y Rang *R1 = {m, n}*
* *Dom R2 = {a, b, c}* y Rang *R2 = {m, n}*
* *Dom R3 = {c}* y Rang *R3 = {m, n}*
* *Dom R4 = {b}* y Rang *R4 = {n}*
* *Dom R5 = {a, b, c}* y Rang *R5 = {m}*

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC30-10 |
| **Título** | Determinación del dominio y del rango de una relación |
| **Descripción** | Actividad para identificar en diferentes relaciones sus conjuntos de salida y llegada, así como sus dominios y rangos |

[SECCIÓN 2] **1.2 Funciones**

Las funciones son un caso particular de las relaciones, es decir, toda función es una relación, pero no toda relación es función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función** |
| **Contenido** | Una relación *f*  entre los conjuntos *A* y *B* es una **función** si cada elemento del dominio está relacionado con un único elemento del conjunto *B*. |

En otras palabras, si en una relación es posible determinar al menos un elemento del dominio que esté relacionado con más de un elemento del conjunto de llegada, entonces la relación **no** es una función.

Por ejemplo:

Sea el conjunto A = {-5, -1, 2, 3} y las relaciones *R1, R2, R3* del conjunto *A* en sí mismo, tal que

*R1 = {(-1, -1), (2, 2), (3, 3), (-5, -5)}, R2= {(-1, -1), ((-1, -5), (3, 2)} y R3 = {(-1, 2), (3, -5), (-5, 3)}*. Como se muestra en la figura

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG03 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de las relaciones |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representaciones por el diagrama sagital de las relaciones R1, R2 y R3. |

Acerca de estas relaciones se afirma que:

* R2 **no es función,** porque -1 está relacionado con dos elementos, -1 y .
* R1 y R3 **son funciones.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | La definición de función no permite relacionar ningún elemento del conjunto de salida A con más de un elemento del conjunto de llegada B, pero no impide que elementos de se relacionen con más de un elemento de . |

**Plano cartesiano de funciones**

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC40 |
| **Título** | Criterio de la recta vertical |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presenta el criterio de la recta vertical que permite identificar relaciones que son funciones a través de su representación en el plano cartesiano |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC50-20 |
| **Título** | Relaciones que son funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica el reconocimiento de las relaciones que son funciones y las que no lo son |

[SECCIÓN 3] **1.2.1 Codominio, imagen y preimagen de funciones**

Todas las funciones son relaciones. Por tanto, establecen una correspondencia entre elementos de un conjunto de salida *A* y un conjunto de llegada *B*, de modo que tienen definido un dominio y un rango. Además de estos, hay otros elementos que se deben tener en cuenta al trabajar con funciones: el **codominio**, la **imagen** y la **preimagen**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definición de codominio, imagen y preimagen de funciones** |
| **Contenido** | Dada una función *f* de *A* en *B* que se denota como:  *f: A → B*  tal que *x ⋲ A, y ⋲ B*.  El conjunto de llegada de la función *f* se denomina el **codominio de la función** y se denota como *Codm f***.**  La **imagen** **de *x* por *f*** o ***f(x)*** es el único elemento del conjunto B que está relacionado con *x* a través de la función *f*.  Las **preimágenes de *y* por *f*** sontodos los elementos del dominio cuya imagen es *y*. |

En otras palabras, la afirmación *f(x) = y* indica que el valor de y **queda determinado** por el valor de *x*.

Por ejemplo:

Sea la función f de A en B como se muestra en el diagrama sagital

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG04 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de la función f cambiar *R5* por f |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | *a*, *b* y *c* son preimágenes de *m* por la función f |

*f* es una función con *Dom f = {a, b, c}, Rang f = {m} y Codm f = {m, n}*. Además se tiene que:

*f(a) = m*

*f(b) = m*

*f(c) = m*

y *{a, b, c}* es el conjunto de las preimágenes de *m*.

[SECCIÓN 2] **1.3 Funciones de números reales**

En el estudio del cálculo se hace énfasis en las funciones de números reales, que se definen a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funciones de números reales** |
| **Contenido** | Las funciones con dominio y codominio en el conjunto de los números reales se denominan **funciones de números reales**. |

Por lo general, las funciones de números reales se expresan en forma gráfica o analítica. La gráfica corresponde a su representación en el plano cartesiano y la forma analítica, a la ecuación que relaciona cada uno de los elementos del dominio con sus imágenes por medio de una expresión matemática. Las siguientes expresiones son ejemplos de la forma analítica de funciones de números reales:

MA\_11\_02\_IMG05

, , , .

Sin embargo, no siempre es posible encontrar una expresión analítica o trazar la gráfica de una función de números reales. Por ejemplo, dada la función *f* que relaciona a cada número real *x* con su imagen por *f*, donde *f(x)* es la cantidad de cifras periódicas que tiene la expansión decimal de *x*, se tiene que:

MA\_11\_02\_IMG06

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Dom f = ℝ, Codm f = ℝ y Rang f = ℕ ∪ {0}*

En el caso de esta función no es posible determinar una expresión analítica o construir una gráfica que la represente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC60-30 |
| **Título** | Dominio y rango de funciones con alguna restricción |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presentan los procedimientos para determinar el dominio de funciones de números reales a partir de su expresión analítica |

[SECCIÓN 2] **1.4 Consolidación**

Estas actividades te permitirán afianzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC70 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Dominio, rango, codominio, imágenes y preimágenes de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se refuerzan los conocimientos adquiridos acerca de los conceptos de dominio, rango, codominio, imágenes y preimágenes de funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC80 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: dominio de funciones de números reales |
| **Descripción** | Actividad en la que se practican los procedimientos para determinar el dominio de funciones de números reales |

[SECCIÓN 1] **2 Propiedades de las funciones**

Para profundizar el estudio de las funciones, es necesario explorar ciertas características o propiedades de ellas, y que se evidencian tanto en el comportamiento de la función como en la gráfica de la misma. Algunas de estas propiedades se pueden definir para cualquier tipo de función, mientras que otras se definen únicamente para las funciones de números reales.

[SECCIÓN 2] **2.1 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas**

Una funcion *f*  puede ser inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, de acuerdo a la siguiente definición.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas** |
| **Contenido** | La función *f* es **inyectiva**, si para todo *a, b ⋲ Dom f,*  *f(a) = f(b)* implica que *a = b*  En otras palabras, una función es inyectiva, si todo elemento del rango tiene una única preimagen.  Una función es **sobreyectiva** si y solo si, todos los elementos de su codominio son imágenes de los elementos del dominio la función.  Una función es **biyectiva,** si y solosi es a la vez inyectiva y sobreyectiva. |

Por ejemplo, considera el diagrama cartesiano de la función *f*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG07 |
| **Descripción** | Diagrama sagital de una función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación de una función biyectiva por medio de diagrama sagital |

Se observa que el *Rang f = {a, b, c, d} = Codm f*. Luego *f* es una función **sobreyectiva,** ahora las preimágenes para cada uno de estos valores son:

La preimagen de *a* es 2.

La preimagen de *b* es -1.

La preimagen de *c* es 3.

La preimagen de *d* es -5.

Como las preimágenes son únicas, *f* **es inyectiva.**

En conclusión, *f* es sobreyectiva e inyectiva; por lo tanto, *f* **es una función biyectiva.**

Para funciones de números reales, se puede determinar si la función es inyectiva trazando rectas horizontales sobre su gráfica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Criterio de la recta horizontal** |
| **Contenido** | Una función de números reales es inyectiva si y solo si ninguna recta horizontal corta su gráfica en más de un punto. |

Por ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG08 |
| **Descripción** | Prueba de la recta horizontal |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ninguna recta horizontal corta la gráfica e la función *f(x) = √x* en más de un punto. Luego, de acuerdo con el criterio de la recta horizontal la función es inyectiva. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG09 |
| **Descripción** | Prueba de la recta vertical |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Hay rectas horizontales que cortan la gráfica de la función *f(x) = x2* en más de un punto. Luego, de acuerdo con el criterio de la recta horizontal, la función no es inyectiva. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC90 |
| **Título** | Funciones biyectivas |
| **Descripción** | Interactivo que muestra funciones teniendo en cuenta sus características en relación con la biyectividad |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC100 |
| **Título** | Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas |
| **Descripción** | Actividad para identificar funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas |

[SECCIÓN 2] **2.4 Propiedades de funciones de números reales**

Las características de las funciones de números reales se estudian teniendo en cuenta las propiedades y operaciones de este conjunto numérico.

[SECCIÓN 3] **2.4.1 Funciones pares e impares**

La gráfica de una **función par** es simétrica con respecto al eje *Y* en el plano cartesiano. Esto significa que la gráfica no cambia al reflejarla por el eje *Y*. Formalmente:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función Par** |
| **Contenido** | Una función *f* es **par** si para todo *a ⋲ Dom f* se tiene que *(-a) ⋲ Dom f* y además  *f(a) = f(-a).* |

**Ejemplo 1.** La función *f(x) = x2*.

El dominio de la función son todos los números reales y para todo a ⋲ ℝ se tiene que:

*f(-a)=(-a)2 = (a)2 = f(a)*

Por tanto, *f* es par.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG10 |
| **Descripción** | Animación sobre La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica de que es una función par |

Por ejemplo, La función *f(x) = (x – 2)2*.

Esta función no es par. Por ejemplo para *1 ⋲ Dom f* se tiene que:

*f(1) = (1 – 2)2 = 1 ≠ 9 = (-1 – 2)2 = f(-1)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG11 |
| **Descripción** | Animación sobre La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica de que la función *f(x) = (x – 2)2* no es una función par |

Una **función impar** se identifica porque su gráfica en el plano cartesiano no cambia al ser reflejada consecutivamente por los ejes *Y* y *X*. Formalmente:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función impar** |
| **Contenido** | Una función es **impar** si para todo *a ⋲ Dom f* se tiene que *(-a) ⋲ Dom f* y además  *-f(a) = f(-a)* |

Por ejemplo, la función *f(x) = x3*

El dominio de la función son todos los números reales, ahora si se tiene que:

*f(-a) = (-a)3 = (-a)(-a)(-a) = -(a)3 = -f(a)*

Por lo tanto, *f* es impar.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG12 |
| **Descripción** | Animación: La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica de que *f(x) = x3* es una función impar |

Por ejemplo, la función *f(x) = 3x – 2*.

Esta no es una función impar, ya que tomando un caso particular, por ejemplo *1 ⋲ Dom f,* se tiene que:

*f(-1) = 3(-1) – 2 = -5 ≠ -1 = -(3(1) – 2) = -f(1)*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG13 |
| **Descripción** | Animación: La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Prueba gráfica de que *f(x) = 3x – 2*  no es una función impar |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC110 |
| **Título** | Funciones pares, impares o ninguna de las dos |
| **Descripción** | Actividad en la que se practica cómo se identifican las funciones pares e impares |

[SECCIÓN 3]**2.4.3 Funciones crecientes y decrecientes**

La gráfica de una **función creciente** se identifica en el plano cartesiano porque asciende de izquierda a derecha. En forma general:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función creciente** |
| **Contenido** | Una función es creciente en un intervalo *(a, b)* si está definida en ese intervalo y además se cumple que,  Si *c < d*, entonces *f(c) < f(d)*  Para todo *c, d ⋲ (a, b).* |

Por ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG14 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función f(x) = 2x es creciente en todo su dominio |

En el plano cartesiano la gráfica de una **función decreciente** se identifica porque a medida que aumentan los valores del dominio, los valores del codominio disminuyen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función decreciente** |
| **Contenido** | Una función es creciente en un intervalo *(a, b)* si está definida en ese intervalo y además se cumple que,  Si *c < d*, entonces *f(c) > f(d)*  para todo *c, d ⋲ (a, b)*. |

Por ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG15 |
| **Descripción** | La función |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La función *f(x) = -ln(x)* es decreciente. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función monótona creciente y monótona decreciente** |
| **Contenido** | Una función se denomina **monótona creciente** si es creciente en todo su dominio y **monótona decreciente** si es decreciente en todo su dominio. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC120 |
| **Título** | ¿Crece o decrece? |
| **Descripción** | Actividad para identificar funciones crecientes o decrecientes |

[SECCIÓN 2] **2.5 Consolidación**

Estas actividades te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC130 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Análisis de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se relacionan las propiedades de las funciones con su representación gráfica |

[SECCIÓN 1] **3 Clasificación de las funciones de números reales**

Las funciones de números reales que tienen una expresión analítica se clasifican en dos tipos: algebraicas y trascendentes.

[SECCIÓN 2] **3.1 Funciones algebraicas**

**Las funciones algebraicas** son todas aquellas cuya expresión analítica se construye usando suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponentes racionales y radicales de índice natural, por ejemplo:

MA\_11\_02\_IMG16

, , , ,

Las funciones algebraicas más usuales son: las funciones polinómicas, las funciones racionales y las funciones radicales.

[SECCIÓN 3]**3.1.1 Funciones polinómicas**

Una función polinómica se define como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función polinómica** |
| **Contenido** | Una función de la forma  *f(x) = anxn + an – 1xn – 1 +…+ a2x2 + a1x + a0*  con *n ⋲ ℕ ∪ {0}* y *ai ⋲ ℝ,* se denomina función polinómica. |

El dominio de las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales. Las demás propiedades y características dependen del grado que tenga la función.

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | El **grado** de una función polinómica es la mayor potencia de la variable independiente que aparece en su expresión algebraica. |

Por ejemplo:

La función *f(x) = 3x – 6* tiene grado 1 puesto que el mayor exponente de *x* es 1.

La función *f(x) = 4x3 – x2 + 1* tiene grado 3, puesto que el mayor exponente de la expresión algebraica de la función es 3.

Las funciones polinómicas que se pueden caracterizar completamente son las funciones de grado cero o funciones constantes, las funciones de grado uno, que se clasifican en lineales y afines, y las de grado dos, que son las funciones cuadráticas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función constante** |
| **Contenido** | Una función de la forma  *f(x) = a0*  con *a0 ⋲ ℝ*, se denomina función constante. |

Las gráficas de las funciones constantes siempre son rectas horizontales y se caracterizan porque su *Dom f = ℝ* y su *Rang f = {a0}.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG17 |
| **Descripción** | Función constante |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función constante *f(x) = 2* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función lineal** |
| **Contenido** | Una función de la forma  *f(x) = a1x,*  con a1 ⋲ ℝ - {0} se denomina función lineal. |

Las gráficas de las funciones lineales son líneas rectas con inclinación que pasan por el origen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG18 |
| **Descripción** | Gráficas de varias funciones lineales en el mismo plano cartesiano, en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión algebraica que las define. Como en la imagen 47, se sugiere graficar f(x)=x, f(x)=-x, f(x)=2x, f(x)=-2x, f(x)=3x, f(x)=-3x |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones lineales. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función afín** |
| **Contenido** | Una función de la forma  *f(x) = a1x + a0*  con a0, a1 ⋲ ℝ - {0}, se denomina función afín. |

La gráfica de una función afín es una línea recta con inclinación que no pasa por el origen.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG19 |
| **Descripció**n | Grafica de varias funciones afines en el mismo plano cartesiano, en distintos colores con su rotulo, es decir con la expresión algebraica que las define. Como en la imagen 47, se sugiere graficar f(x)=x+1, f(x)=-x+1, f(x)=2x+1, f(x)=-2x+1, f(x)=3x-1, f(x)=-3x-2 |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones afines |

Las funciones lineales y afines, son funciones biyectivas con *Dom f = ℝ* y *Rang f = ℝ*. Estas funciones son crecientes o decrecientes según el signo del coeficiente que acompaña a la variable *x*. Si *a*1 es positivo, la función es creciente; si *a*1 es negativo, la función es decreciente. En cualquiera de los dos casos es una función monótona.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función cuadrática** |
| **Contenido** | Una función de la forma  f(x) = a2x2 + a1x + a0,  con *a0, a1*, *a2 ⋲ ℝ* y a2 ≠ 0 se denomina función cuadrática. |

La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG20 |
| **Descripción** | Gráficas de funciones cuadráticas en el mismo plano cartesiano, en distintos colores y rotuladas con la expresión algebraica que las define, por ejemplo *f*(x) = x2, *f*(x) = 1 – x2, *f*(x) = x2 – *x* + 2, *f*(x) = –x2 + 2*x* – 1. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones cuadráticas |

El dominio de cualquier función cuadrática es el conjunto de los números reales, otras de sus características se determinan según el signo del coeficiente que acompaña a la variable al cuadrado, debido a que si *a2 > 0* la parábola abre hacia arriba, si *a2 < 0* la parábola abre hacia abajo**.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC140 |
| **Título** | Identificación de funciones polinómicas |
| **Descripción** | Actividad que permite identificar tipos de funciones polinómicas |

[SECCIÓN 3] **3.1.2 Funciones racionales**

Una función racional es un cociente de dos polinomios algebraicos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional** |
| **Contenido** | Una función *f* es racional si tiene la forma  Con *n, m ⋲ ℕ ∪ {0}* y *ai, bj ⋲ ℝ.* |

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales excepto los valores de *x* para los cuales denominador es cero.

Por ejemplo, considera la función

.

Para determinar el dominio de la función, se iguala a cero el denominador y se halla el conjunto solución:

*x2 – 1 = 0*

*(x – 1)(x + 1) = 0*

*x = 1 o x = -1*

El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los valores para los cuales el denominador es cero:

*Dom f = ℝ - {-1, 1} = (-∞, -1) ∪ (-1, 1) ∪ (1, ∞).*

Por ejemplo, considera la función

Para calcular el dominio se iguala a cero la expresión del denominador y se determina el conjunto solución:

*x2 + 1 = 0*

Esta expresión nunca es cero para *x ⋲ ℝ*, por lo tanto *Dom g = ℝ*.

Por ejemplo, considere la función

.

Para determinar el dominio de la función se iguala a cero el denominador y se halla el conjunto solución:

de donde,

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función racional propia e impropia** |
| **Contenido** | Una función racional es **propia** si y solo si el grado del polinomio en el numerador es menor que el grado del polinomio del denominador.  Una función racional es **impropia**, si el grado del polinomio en el numerador es mayor o igual al grado del polinomio del denominador. |

Son ejemplos de funciones racionales impropias



Son ejemplos de funciones racionales propias

* ,

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC150 |
| **Título** | Tipos de asíntotas |
| **Descripción** | Interactivo en el que se clasifican y se definen las asíntotas oblicuas de una función racional y se presentan algunos métodos para calcularlas |

[SECCIÓN 3] **3.1.3 Funciones radicales**

Las funciones radicales son aquellas que contienen raíces en su expresión algebraica. Formalmente,

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función radical** |
| **Contenido** | Una función de la forma:  con *n ⋲* ℕ y *n > 1*, se denomina **función radical**. |

Las características de las funciones radicales dependen de si n es par o impar.

Las funciones radicales con índice par están definidas únicamente para los valores de *x* cuyo radicando es mayor o igual que cero como se muestra en la figura.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG21 |
| **Descripción** | Radicales pares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de funciones radicales con índice par |

Las funciones radicales con índice impar tienen de dominio al conjunto de los números reales. Como se muestra en la figura.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG59 |
| **Descripción** | Radicales impares |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de funciones radicales con índice impar. |

El rango de las funciones radicales se identifica a través de su gráfica

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC160 |
| **Título** | Reconociendo aspectos de las funciones |
| **Descripción** | Actividad para practicar la clasificación de funciones |

[SECCIÓN 2] **3.2 Funciones trascendentes**

Las funciones de números reales que no son algebraicas se llaman **trascendentes**. Algunas de las funciones trascendentes tienen expresión analítica; otras carecen de ella. A continuación se estudian tres tipos de funciones trascendentes: las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

[SECCIÓN 3] **3.2.1 Funciones trigonométricas**

Las funciones trigonométricas surgen al ampliar el concepto de razón trigonométrica de modo que se pueda trabajar con cualquier valor del ángulo y no solo con los que se encuentran entre *0* y *2𝜋* radianes. Las seis funciones trigonométricas son: seno, coseno, tangente, cotangente, cosecante y secante. A continuación se presentan las gráficas y las propiedades de las tres primeras.

Las funciones trigonométricas relacionan un ángulo con un número real que se obtiene de establecer una razón entre los lados de un triángulo rectángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **La función seno: *f(x) = sen(x)*** | Grafica de la función *f(x) = sen(x)*  MA\_11\_02\_IMG23 |
| *Dom f = ℝ*, *Rang f = [-1, 1]*  Es una función periódica e impar, su periodo es 2𝜋 |
| **La función coseno: *f(x) = cos(x)***  *Dom f = ℝ*, *Rang f = [-1, 1]*  Es una función periódica y par, su periodo es 2𝜋 | Grafica de la función *f(x) = cos(x)*  MA\_11\_02\_IMG24 |
| **La función tangente: *f(x) = tan(x)***  *Rang f = ℝ*  Es una función periódica e impar, su periodo es 𝜋. | Grafica de la función *f(x) = tan(x)*  MA\_11\_02\_IMG25 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC170 |
| **Título** | Características y propiedades de las funciones trigonométricas |
| **Descripción** | Actividad de interpretación de las gráficas de algunas funciones trigonométricas e identificar sus características y propiedades |

[SECCIÓN 3] **3.2.2 Funciones exponenciales**

En las funciones exponenciales la variable se encuentra en el exponente. La definición precisa de función exponencial es la siguiente:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función exponencial** |
| **Contenido** | Las funciones de la forma  *f(x) = ax,*  con a ⋲ ℝ+, reciben el nombre de **función exponencial.** |

Se observa que *a* debe ser positivo puesto que si *a* fuese negativo encontraríamos problemas para determinar el dominio y no sería posible trazar la gráfica en el plano cartesiano.

Las funciones exponenciales tienen como dominio el conjunto de los números reales y como rango el conjunto los reales positivos y son funciones inyectivas. Sus otras características dependen del valor de *a*. Se consideran dos casos: cuando *a > 1* y cuando *a < 1*, si *a = 1* se tiene la función constante 1.

La función exponencial de la forma *f(x) = ax* con *0 < a < 1* se caracteriza por ser una función monótona decreciente. Como se muestra a continuación:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG26 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones exponenciales de la forma , con *0 < a < 1.* |

La función exponencial de la forma *f(x) = ax* con a > 1 se caracteriza por ser una función monótona creciente. Como se muestra en la siguiente figura:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG27 |
| **Descripción** | La función exponencial |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de funciones exponenciales de la forma *f(x) = ax* con *a > 1.* |

[SECCIÓN 3] **3.2.3 Funciones logarítmicas**

Las funciones logarítmicas se caracterizan de la siguiente manera:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función logarítmica** |
| **Contenido** | Las funciones de la forma  *f(x) = loga x,*  con a ⋲ ℝ+ y *a ≠ 1*, reciben el nombre de **función logarítmica.** |

El dominio de las funciones logarítmicas es Dom f = (0, ∞) y el rango es Rang f = ℝ.

Si a > 1 la función es monótona creciente y si 0 < a < 1 la función es monótona decreciente.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG28 |
| **Descripción** | La función logarítmica |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La grafica de la izquierda representa la función f(x) = loga*x* con *a > 0* y la gráfica de la derecha representala función *f(x) = logax con* 0 < a < 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC180 |
| **Título** | Aplicaciones de la función logarítmica y la función exponencial |
| **Descripción** | Interactivo que presenta información sobre la función logarítmica y la función exponencial |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC190 |
| **Título** | Practica en funciones exponenciales y logarítmicas |
| **Descripción** | Actividad para identificar funciones exponenciales y logarítmicas a través de su gráfica o de si expresión algebraica |

[SECCIÓN 2] **3.3. Funciones a trozos**

Una **función está definida a trozos o por partes** si el dominio se divide en dos o más subconjuntos disyuntos (la intersección entre los subconjuntos es vacía) que se denominan trozos y cada uno de ellos tiene una expresión o regla de correspondencia propia que permite relacionar los elementos del dominio con su imagen.

Por ejemplo, una función *f* de dominio *(-4, ∞)* definida en tres trozos presenta las siguientes reglas de correspondencia:

* **Primer trozo:** Si el elemento del dominio está en el intervalo *(-4, -1)*, las imágenes se determinan mediante la expresión *f(x) = 3*.
* **Segundo trozo:** Si el elemento del dominio está en el intervalo [-1, 2], las imágenes están determinadas por la expresión *f(x) = x2 + 2*.
* **Tercer trozo:** Si el elemento del dominio pertenece al intervalo (2, ∞), las imágenes están determinadas por la expresión f(x) = x+2

La expresión algebraica que representa esta función es:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG29 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función a trozos |

Por ejemplo, considera la función *g*, con dominio los reales, definida en la forma

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG30 |
| **Descripción** | La función a trozos, modificarla para que se note el hueco que se dan el segmento cuando |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función a trozos *g(x)* de ejemplo 2. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Recuerda** | |
| **Contenido** | Es necesario que los trozos en los que está definida la función sean disyuntos, porque de lo contrario se pierde la condición de función. |

Por ejemplo, considera la expresión

Esta expresión no corresponde a una función, puesto que los dos primeros intervalos de la definición no son disyuntos, lo que ocasiona que existan valores de *x* con dos imágenes. Por ejemplo, para *x = 0*, hay una imagen *r*(0) = 3, según la definición del primer tozo, y otra *r*(0) = (0)2 + 2 = 2, según la definición del segundo trozo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG31 |
| **Descripción** | Realizar la gráfica de la expresión dada  y mostrar con una recta vertical entre -1 y 1 que la gráfica es cortada en dos puntos |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | PRESENTAR LA GRÁFICAS AQUÍ |
| **Pie de imagen** | Gráfica de una relación no funcional definida por trozos, la prueba de la recta vertical permite comprobar que la relación *r(x)* no es función |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Análisis de funciones a trozos |
| **Descripción** | Actividad para practicar la interpretación gráfica de funciones a trozos |

Las funciones a trozos más comunes son la función valor absoluto y la función parte entera. Las estudiaremos a continuación.

[SECCIÓN 3] **3.3.1 Función valor absoluto**

La función valor absoluto es una función definida en dos trozos, los números reales negativos y los numero reales no negativos, como se sigue:

*f(x) = |x|* es una función par que tiene *Dom f = ℝ* y *Rang f = ℝ*, como se muestra en la figura:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG32 |
| **Descripción** | Gráfica del valor absoluto de x |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de la función *f(x) = |x|* |

[SECCIÓN 3] **3.3.2 Función parte entera**

La función parte entera está definida en infinitos trozos de la forma *[k, k + 1)*, con *k ⋲ ℤ*, en el modo siguiente:

La función parte entera, denotada como *⟦x⟧*, también se puede definir como la función que hace corresponder a cada número real el mayor número entero que es menor o igual al número real considerado. Como se muestra en la siguiente tabla

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x*** | *-3,5* | *-0,75* | *0,1* | *1,8* | *2,1* | *3,9* |
| ***f(x)*** | *-4* | *-1* | *0* | *1* | *2* | *3* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG33 |
| **Descripción** | La función parte entera |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Gráfica de la función *f(x) = ⟦x⟧* |

El dominio de la función parte entera es el conjunto de los números reales, *Dom f = ℝ*. El rango es el conjunto de los números enteros *Rang f = ℤ*.

[SECCIÓN 2] **3.4 Consolidación**

Estas actividades te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC210 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: transformación de funciones |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudia cómo obtener gráficas de ciertas funciones a partir de otras |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC220 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: clasificación de funciones de números reales |
| **Descripción** | Actividad en que se practica lo aprendido sobre las funciones usuales de números reales |

[SECCIÓN 1] **4 Operaciones con funciones**

Las funciones poseen una estructura aditiva y multiplicativa que permiten operarlas entre sí para obtener otras funciones.

[SECCIÓN 2] **4.1 Suma, diferencia, producto y cociente de funciones**

A continuación se define la adición de funciones, la diferencia de funciones, el producto por un escalar, el producto y el cociente de funciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Operaciones con funciones** |
| **Contenido** | Dadas *f* y *g* dos funciones de números reales y *c* un número real, se definen las siguientes operaciones entre funciones:   * *(f + g)(x) = f(x) + g(x)* para todo *x ⋲ Dom f ∩ Dom g*. * (f – g)(x) = f(x) – g(x) para todo *x ⋲ Dom f ∩ Dom g*. * *(cf)(x) = cf(x)* para todo *x ⋲ Dom f*. * *(fg)(x) = f(x)g(x)* para todo *x ⋲ Dom f ∩ Dom g*. * *(f/g)(x) = f(x)/g(x)* para todo   *x ⋲ (Dom f ∩ Dom g) – {x ⋲ ℝ| g(x) = 0}*. |

Para que las operaciones entre las funciones *f* y *g*, tengan sentido, es necesario que *x* pertenezca tanto al dominio *de f como al* dominio de *g*.

Por ejemplo, considera las funciones



Los dominios de *f* y *g* son: *Dom f = [-2, ∞)* y *Dom g = ℝ - { 3} = (-∞, 3) ∪ (3, ∞)*.

Por lo tanto, el dominio de las funciones *(f + g)(x),* (f – g)(x), *(cf)(x) y (fg)(x)* se calcula así:

*Dom (f + g) = Dom f ∩ Dom g = [-2, ∞) ∩ ((-∞, 3) ∪ (3, ∞)) = [-2, 3) ∪ (3, ∞)*.

* (f + g)(x) se calcula como

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG34 |
| **Descripción** | Gráficas de y en distintos colores y con etiquetas de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de las funciones *f(x)*, *g(x)* y la suma de funciones *(f + g)(x)* |

* (f – g)(x) se calcula como

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG35 |
| **Descripción** | Gráficas de , con distintos colores y etiquetas de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de las funciones *f(x)*, *g(x)* y la diferencia de funciones *(f - g)(x)* |

* *(fg)(x)* se determina así:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG36 |
| **Descripción** | Graficas de y con distintos colores y etiqueta de cual es cada una. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica de las funciones *f(x)*, *g(x)* y el producto de funciones *(fg)(x)* |

* (f/g)(x) se calcula así:

donde

como la ecuación

no tiene solución en el conjunto de los reales, entonces

Cuando se opera con funciones, el dominio de la función resultante no solo está dado por la expresión que se obtiene, también es necesario tener en cuenta los dominios de las funciones que se operan. En el ejemplo anterior, la expresión resultante fue

Esta función no se indetermina en *3*; sin embargo *3* no hace parte del dominio, puesto que no está en el domino de .

* *(g/f)(x)* nos queda:

donde

Aquí, como la ecuación

tiene por solución en el conjunto {-2}, entonces:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG37 |
| **Descripción** | Graficas de y, , con distintos colores y etiquetas de cual es cada una, en el caso de que se resalte el hueco que se presenta en |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cociente de funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC230 |
| **Título** | Álgebra de funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se practican las operaciones con funciones |

[SECCIÓN 2] **4.2 Composición de funciones**

Dadas dos funciones *f* y *g*, se define una función *g ∘ f* llamada ***g* compuesta** Esta nueva función aplica sucesivamente *f* y *g* a elementos del dominio de *f*, es decir, calcula valores *g(f(x))*.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG38 |
| **Descripción** | Diagrama que muestra la composición de funciones |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://iesaricel.org/rafanogal/funciones/funciones-archivos/composicion.gif> |
| **Pie de imagen** | El diagrama sagital de la composición de funciones revela que para poder establecer la composición *g ∘ f*, el rango de *f* debe ser igual al dominio de *g* |

Formalmente,

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Composición de funciones** |
| **Contenido** | Dadas *f* y *g* dos funciones de los números reales se define la **composición de funciones** como:  *(g ∘ f)(x) = g(f(x))*  Para todo *x ⋲ (Dom f) – {x ⋲ Dom f | f(x) ∉ Dom g}.* |

Entonces, para hallar el dominio de *g ∘ f* se debe tomar el dominio de f y eliminar de este conjunto los valores que estén restringidos en la expresión que resulta al evaluar *g* en *f*.

Por ejemplo, considera las funciones f(x) = 2x – 4 y f(x) = 3x + 1.

* f ∘ g se determina como sigue:

*(f ∘ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = 2(3x +1) – 4 = 6x + 2 – 4 = 6x – 2*

Dom g = ℝ y como la expresión resultante *(f ∘ g)(x) = 6x – 2* no tiene restricciones, luego *Dom (f ∘ g) = ℝ.*

* g ∘ f se calcula así:

*(g ∘ f)(x) = g(f(x)) = g(2x – 4) = 3(2x – 4) + 1 = 6x – 12 + 1 = 6x – 11.*

Asimismo, Dom f = ℝ y como la expresión resultante *(g ∘ f)(x) = 6x – 11 no tiene restricciones luego, Dom (f ∘ g) = ℝ.*

En este ejemplo se observa que f ∘ g ≠ g ∘ f. Por lo tanto, la composición de funciones **no es conmutativa**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC240 |
| **Título** | Propiedades de la composición de funciones |
| **Descripción** | Interactivo en el que se presentan las propiedades de la composición de funciones |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC250 |
| **Título** | Hallando la composición entre dos funciones |
| **Descripción** | Actividad para practicar la forma en la que se realiza la composición entre dos funciones |

[SECCIÓN 3] **4.2.1 Funciones inversas**

La composición de funciones cumple la propiedad asociativa, elemento neutro y no es conmutativa. A continuación se define la función inversa de la composición de funciones:

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Función inversa** |
| **Contenido** | Dada una función *f* de números reales, se dice que ***g*** **es la función inversa de *f*** si el *Dom g = Rang f* y además  *(g ∘ f)(x) = x*  para todo *x ⋲ Dom f* y  *(f ∘ g)(x) = x*  para todo *x ⋲ Rang f*. En este caso se denota a g como *f -1*. |

No todas las funciones de números reales tienen una función inversa; para ello se necesita que la función sea inyectiva.

Por ejemplo, si *f(x) = x3*, entonces *f -1(x) = ∛x*. como se muestra en la siguiente gráfica.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_IMG74 |
| **Descripción** | Grafica de las función *f(x) = x3, f -1(x) = ∛x y I(x)=x* |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <http://iesaricel.org/rafanogal/funciones/funciones-archivos/composicion.gif> |
| **Pie de imagen** | El diagrama sagital de la composición de funciones revela que para poder establecer la composición , el rango de *f* debe ser igual al dominio de *g* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC260 |
| **Título** | Inversas de las funciones exponenciales y trigonométricas |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudian las funciones logarítmicas y las inversas de las funciones trigonométricas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC260 |
| **Título** | Inversas de las funciones exponenciales y trigonométricas |
| **Descripción** | Interactivo en el que se estudian las funciones logarítmicas y las inversas de las funciones trigonométricas |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC270 |
| **Título** | Gráfica de una función y su inversa |
| **Descripción** | Interactivo que muestra la relación gráfica entre una función y su inversa |

[SECCIÓN 2]**4.4 Consolidación**

Estas actividades te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC280 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Operaciones con funciones |
| **Descripción** | Actividad para practicar las operaciones con funciones |

[SECCIÓN 1] **5 Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC240 |
| **Título** | Competencias: Análisis de funciones de números reales |
| **Descripción** | Actividad en la que se propone analizar varias de las propiedades de una función de números reales |

[SECCIÓN 1] **Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC250 |
| **Título** | Evalúa tus conocimientos sobre funciones |
| **Descripción** | Actividad en la que se evalúan los conceptos que hemos trabajado en este tema |

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_G11\_01\_CO\_REC260 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Relaciona los contenidos del tema |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_11\_02\_CO\_REC270 | |
| **Web 01** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 02** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 03** | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
|  | *Transformaciones 1 geogebra* |  |
| **Web 04** |  | <http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/coordenadascartesianas/sec/MATE30_imprimible_alumnado.pdf> |
|  |  | http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/mate/Matematicas\_VI/Applets\_Geogebra/operacionesconfunciones.html |
| **Web 05** |  | [*http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf*](http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2010/elementales/cap2.pdf) |
|  |  | <http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/servicio_docente/maria_victoria/rectas.pdf> |
|  |  |  |