**Interactivo F13: Webquest**

**\*** Nombre del guión a que corresponde el ejercicio

MA\_G11\_03\_CO

**DATOS DEL RECURSO**

**\*** Título del recurso (**65** caracteres máx.)

Refuerza tu aprendizaje: Definición formal de límite

**\*** Descripción del recurso

Interactivo en el que se presenta y se explica el concepto formal de límite de una función

**\*** Palabras clave del recurso (separadas por comas ",") límite de una función

**\*** Tiempo estimado (minutos) 20 min

**\*** Acción didáctica (indicar sólo una)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Exposición | x | Ejercitación |  | Preguntas con respuesta libre |  | Juegos |  |
| Estudio |  | Proyecto |  | Evaluación |  | Generador de actividades |  |

**\*** Competencia (indicar sólo una)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| … en comunicación lingüística |  | … matemática | x |
| … en el conocimiento y la interacción con el mundo físico |  | Tratamiento de la información y competencia digital |  |
| … social y ciudadana |  | … cultural y artística |  |
| … para aprender a aprender |  | Autonomía e iniciativa personal |  |

**\*** Tipo de Media (indicar sólo una)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Secuencia de imágenes |  | Video |  | Animación |  | Interactivo | X |
| Actividad |  | Web |  | Mapa conceptual |  | Audio |  |
| Texto |  | Imagen |  | Documento |  |  |  |

**\*** Nivel del ejercicio, 1-Fácil, 2-Medio ó 3-Difícil

2-Medio

**FICHA DEL PROFESOR**

Objetivo

Estudiar el concepto formal de límite de una función y la interpretación gráfica de este concepto.

Antes de la presentación:

Se requiere haber trabajado la noción intuitiva de límite presente en esta unidad desde su interpretación tabular y gráfica, así como la noción de proximidad presente en el interactivo “Infinitamente grande e infinitamente pequeño”.

Durante la presentación:

El profesor puede tomar la presentación de este interactivo y presentarla en una sola sesión o si prefiere presentarla por diapositivas después de la definicion intuitiva de límite, de la definición intuitiva de limites laterales y después de la definicion intuitiva de limites infinitos.

La primera diapositiva presenta la necesidad de definir exactamente el límite de una función, pero también da posibilidad de discutir acerca de las diferentes soluciones que se presentan, según sean los valores que tome la función.

Luego de la segunda diapositiva, se pueden proponer algunos ejercicios como por ejemplo hallar δ dado un ε en una función específica, si lo requiere, se puede apoyar en el siguiente enlace [[VER](http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/LimiteContinuidad.html)]

Después de la presentación:

El profesor puede solicitar al estudiante dar la definición precisa de limite de los casos que no fueron abordados en el interactivo, y fomentar una discusión sobre cual es la manera adecuada de calcular un limite sin usar la gráfica y dado que la tabulación falla, con el fin de llegar a la necesidad de establecer las reglas y propiedades de los limites.

**FICHA DEL ALUMNO**

Para calcular el límite de una función ya sea en un punto o en el infinito generalmente recurrimos a tabular, sin embargo algunas veces es difícil reconocer los valores que debemos escoger en la tabla, aquellos que están lo suficientemente cerca, o son lo suficientemente grandes para asegurar que no vamos a cometer un error a la hora de calcular el límite, recordemos que siempre podemos acercarnos más o siempre podemos tomar números más grandes, por lo que nada garantiza que una tendencia que se observa con unos valores, se pierda con valores más cercanos o con valores más grandes.

En este interactivo se presenta una definición formal de límite que garantiza que se pueda identificar el límite de una función.

**DATOS DEL INTERACTIVO**

**INTERACTIVO**

**\*** Número de pestañas del interactivo (**1, 2, 4, 6 u 8**) PARA CADA PESTAÑA DE ESTE INCISO COPIA EL SIGUIENTE BLOQUE *PESTAÑA #...*

6

**\*** Título (**65** caracteres máx.) COPIA EL TÍTULO DEL RECURSO PARA EL TÍTULO DEL INTERACTIVO AL MENOS QUE SEA DIFERENTE. RECUERDA EL TÍTULO NO DEBE REBASAR LOS 65 CARACTERES. Definición formal de límite

**\*** Instrucción (**68** caracteres máx.) Selecciona la pestaña que desea estudiar

**PESTAÑA** 1

**\*** Título de pestaña (**20** caracteres máximo)

**La noción intuitiva**

Si se pretende usar la pestaña 1 como portada del interactivo éste debe ser de tipo “Solo texto” que llevará solamente una foto PNG y su pie de foto correspondiente (ver ejemplo al final del documento).

**\*** Tipo de pestaña elija una opción:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Texto con una imagen a la derecha | X | Texto con una imagen a la izquierda |  | **Solo texto** |  |
| Texto con dos imágenes a la derecha |  | Texto con dos imágenes a la izquierda |  |  |  |

Imagen 1 (borrar si no se ocupa):

**\*** Nombre de archivo Shutterstock o descripción de ilustración a crear

Crear imagen similar

Gráfica de cerca de cero.

**\*** Nombre de archivo codificado (ejemplo, CI\_S3\_G1\_REC10\_F1.**PNG**)

MA\_11\_03\_REC60\_IMG01

OPCIONAL Pie de imagen 1 (**130** caracteres máx., se puede usar cursivas) un conjunto

Gráfica de

**\*** Texto

En la presente unidad, el límite de una función

se ha trabajado a través de la representación tabular, mediante aproximaciones de las imágenes cercanas a un número real *a* a un valor especifico *L* del codominio de la función.

Sin embargo, es necesario establecer una definición formal de límite que evita algunos errores en la interpretación de este concepto como el que se presenta a continuación.

**Ejemplo 1.** Considera

Al realizar la tabla con algunos números reales cercanos a cero se obtiene

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x |  |  | x |  |
| -1,2 | -0,500000000000000 |  | 1,2 | 0,500000000000000 |
| -0,24 | -0,500000000000001 |  | 0,24 | 0,500000000000001 |
| -0,048 | -0,500000000000002 |  | 0,048 | 0,500000000000002 |
| -0,0096 | -0,500000000000028 |  | 0,0096 | 0,500000000000028 |
| -0,00192 | -0,500000000000153 |  | 0,00192 | 0,500000000000153 |
| -0,000384 | -0,499999999999234 |  | 0,000384 | 0,499999999999234 |
| -0,0000768 | -0,500000000001467 |  | 0,0000768 | 0,500000000001467 |
| -0,00001536 | -0,500000000011568 |  | 0,00001536 | 0,500000000011568 |

Al tomar la tabulación anterior se puede deducir que

No obstante, también es posible realizar la siguiente tabulación:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | f(x) |  | x | f(x) |
| -0,4 | -1 |  | 0,4 | 1 |
| -0,08 | -1 |  | 0,08 | 1 |
| -0,016 | -1 |  | 0,016 | 1 |
| -0,0032 | -1 |  | 0,0032 | 1 |
| -0,00064 | -1 |  | 0,00064 | 1 |
| -0,000128 | -1 |  | 0,000128 | 1 |
| -0,0000256 | -1 |  | 0,0000256 | 1 |
| -0,00000512 | -1 |  | 0,00000512 | 1 |

De donde se deduce que

En las dos tablas anteriores se calcularon las imágenes de valores muy cercanos a cero, sin embargo se obtuvieron dos resultados diferentes, es decir que el método de tabulación no siempre resulta eficaz para calcular el límite de una función, ya que es posible encontrar secuencias de números cercanos al punto *a* cuyas imágenes tiendan a un valor determinado, pero eso no quiere decir que las imágenes de **todos** los valores cercanos al punto *a* tiendan a ese número, por esta razón es necesario transformar la noción de límite por una que permita expresar de forma más exacta el comportamiento deseado.

**PESTAÑA** 2

**\*** Título de pestaña (**20** caracteres máximo)

La definición formal

Si se pretende usar la pestaña 1 como portada del interactivo éste debe ser de tipo “Solo texto” que llevará solamente una foto PNG y su pie de foto correspondiente (ver ejemplo al final del documento).

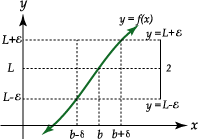
**\*** Tipo de pestaña elija una opción:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Texto con una imagen a la derecha |  | Texto con una imagen a la izquierda | X | **Solo texto** |  |
| Texto con dos imágenes a la derecha |  | Texto con dos imágenes a la izquierda |  |  |  |

Imagen 1 (borrar si no se ocupa):

**\*** Nombre de archivo Shutterstock o descripción de ilustración a crear

Crear imagen similar



Cambiar por , eliminar el 2

**\*** Nombre de archivo codificado (ejemplo, CI\_S3\_G1\_REC10\_F1.**PNG**)

MA\_11\_03\_REC60\_IMG02

OPCIONAL Pie de imagen 1 (**130** caracteres máx., se puede usar cursivas)

Interpretación gráfica de la definición formal de límite.

**\*** Texto

**Definición formal de límite de una función**

|  |
| --- |
| Sea una función *f* definida en un intervalo abierto que contiene al número real a, pero que posiblemente no está definida para el número real a. **El límite cuando una función *f* tiende a *a* es L** y se escribe  si para todo real positivo ε > 0, existe un número real δ > 0 tal que*, |f(x) – L| < ε* siempre que *0 < |x – a| < δ*.  Es decir que, si *0 < |x – a| < δ*  entonces *|f(x) – L| < ε.* |

En la definición anterior, también se utiliza la noción de proximidad, para esto se recurre a definir un ε > 0 tan pequeño como se quiera, de tal forma que la distancia entre las imágenes de *x* por la función *f* y el límite de la función L sea menor que ε que se escribe en la definición anterior como

*|f(x) – L| < ε*

Asimismo, en el dominio de la función, la proximidad al punto a se define a través de un número real δ > 0 tan pequeño como se quiera y se expresa mediante la condición

*0 < |x – a| < δ*

Por lo tanto la definición de límite se interpreta de la siguiente manera:

A medida que *x* toma valores más próximos al punto *a*, es decir *0 < |x – a| < δ, entonces* las imágenes de x se aproximan al límite de la función, es decir *|f(x) – L| < ε*.

Por esta razón, la definición de límite también se puede escribir a través de intervalos como:

si para todo real positivo ε > 0, existe un número real δ > 0, tal que *x ⋲ (a – δ) ∪ (a – δ)* implica que *f(x) ⋲ (L – ε, L + ε).*

La siguiente aplicación muestra gráficamente la definición formal de límite [[VER](http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/LimiteContinuidad.html)]

**PESTAÑA** 3

**\*** Título de pestaña (**20** caracteres máximo)

Límite lateral

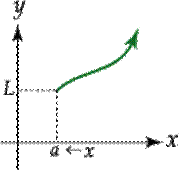
Si se pretende usar la pestaña 1 como portada del interactivo éste debe ser de tipo “Solo texto” que llevará solamente una foto PNG y su pie de foto correspondiente (ver ejemplo al final del documento).

**\*** Tipo de pestaña elija una opción:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Texto con una imagen a la derecha |  | Texto con una imagen a la izquierda |  | **Solo texto** |  |
| Texto con dos imágenes a la derecha | X | Texto con dos imágenes a la izquierda |  |  |  |

Imagen 1 (borrar si no se ocupa):

**\*** Nombre de archivo Shutterstock o descripción de ilustración a crear



Crear una imagen similar a esta en vez de colocar un intervalo , y alrededor de L colocar el intervalo y las líneas de proyección.

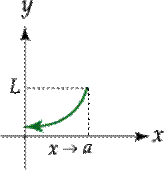
**\*** Nombre de archivo codificado (ejemplo, CI\_S3\_G1\_REC10\_F1.**PNG**)

MA\_11\_03\_REC60\_IMG03

OPCIONAL Pie de imagen 1 (**130** caracteres máx., se puede usar cursivas) Interpretación gráfica de la definición de límite por derecha de una función.

Imagen 2 (borrar si no se ocupa):

**\*** Nombre de archivo Shutterstock o descripción de ilustración a crear



Crear una imagen similar a esta en vez de colocar un intervalo , y alrededor de el colocar el intervalo y las líneas de proyección.

**\*** Nombre de archivo codificado (ejemplo, CI\_S3\_G1\_REC10\_F1.**PNG**)

MA\_11\_03\_REC60\_IMG04

OPCIONAL Pie de imagen 1 (**130** caracteres máx., se puede usar cursivas)

Interpretación gráfica de la definición de límite por izquierda de una función.

**\*** Texto

En el caso de los límites laterales es necesario restringir la definición formal de límite de la siguiente forma:

**Definición formal de límite por derecha de una función**

|  |
| --- |
| **El límite cuando una función *f* tiende a *a* por la derecha es *L***, que se escribe como  si para todo número real ε > 0, existe un número real δ > 0 tal que, si *x ⋲ (a, a + δ)* entonces *|f(x) – L| < ε* |

Esta condición se puede expresar mediante intervalos de la siguiente manera:

Para todo número real ε > 0, existe un número real δ > 0 tal que *x ⋲ (a, a + δ)* entonces *f(x) ⋲ (L – ε, L + ε).*

**Definición formal de límite por izquierda de una función**

|  |
| --- |
| **El límite cuando una función *f* tiende a *a* por izquierda es *L***, que se escribe como  si para todo número real ε > 0, existe un número real δ > 0 tal que, si *x ⋲ (a – δ, a)* entonces *|f(x) – L| < ε* |

Asimismo, esta definición se puede escribir a través de intervalos como:

Si para todo número real ε > 0, existe un número real δ > 0 tal que *x ⋲ (a – δ, a)* entonces *f(x) ⋲ (L – ε, L + ε).*

**PESTAÑA** 4

**\*** Título de pestaña (**20** caracteres máximo)

Límite infinito

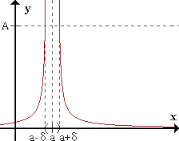
Si se pretende usar la pestaña 1 como portada del interactivo éste debe ser de tipo “Solo texto” que llevará solamente una foto PNG y su pie de foto correspondiente (ver ejemplo al final del documento).

**\*** Tipo de pestaña elija una opción:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Texto con una imagen a la derecha |  | Texto con una imagen a la izquierda |  | **Solo texto** |  |
| Texto con dos imágenes a la derecha |  | Texto con dos imágenes a la izquierda | X |  |  |

Imagen 1(borrar si no se ocupa):

**\*** Nombre de archivo Shutterstock o descripción de ilustración a crear



Crear una imagen similar a esta en vez de Cambiar por y bajarlo un poco para que coincida con las líneas de proyección de y

**\*** Nombre de archivo codificado (ejemplo, CI\_S3\_G1\_REC10\_F1.**PNG**)

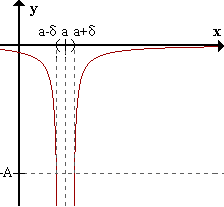
MA\_11\_03\_REC60\_IMG05

OPCIONAL Pie de imagen 1 (**130** caracteres máx., se puede usar cursivas)

Interpretación gráfica de la definición de

Imagen 2(borrar si no se ocupa):

**\*** Nombre de archivo Shutterstock o descripción de ilustración a crear



Crear una imagen similar a esta en vez de Cambiar por *m* y subirlo un poco para que coincida con las líneas de proyección de y

**\*** Nombre de archivo codificado (ejemplo, CI\_S3\_G1\_REC10\_F1.**PNG**)

MA\_11\_03\_REC60\_IMG06

OPCIONAL Pie de imagen 1 (**130** caracteres máx., se puede usar cursivas)

Interpretación gráfica de la definición de

**\*** Texto

|  |
| --- |
| Dada una función *f* definida en un intervalo abierto que contiene al número real *a*, pero que posiblemente no está definida en a mismo, entonces, **el límite cuando una función *f* tiende a *a* es infinito** y se escribe como  Si para todo número real positivo *n* > 0,existe un número real tal que, si *0 < |x – a| < δ,* entonces *f(x) > n*. |

Esta definición expresa que a medida que los valores de x se aproximan a *a,* las imágenes de estos valores se hacen mas grandes.

En el caso de que el límite de una función tienda a menos infinito se presenta la siguiente definición:

|  |
| --- |
| Dada una función *f* definida en un intervalo abierto que contiene al número real *a*, pero que posiblemente no está definida en el número real *a* del intervalo, entonces, **el límite cuando una función *f* tiende a *a* es menos infinito** y se escribe como  Si para todo número real negativo *m* < 0,existe un número real tal que, si *0 < |x – a| < δ,* entonces *f(x) < m*. |

**PESTAÑA** 5

**\*** Título de pestaña (**20** caracteres máximo)

Límite en el infinito

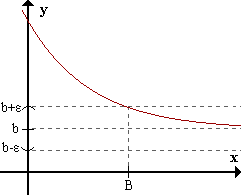
Si se pretende usar la pestaña 1 como portada del interactivo éste debe ser de tipo “Solo texto” que llevará solamente una foto PNG y su pie de foto correspondiente (ver ejemplo al final del documento).

**\*** Tipo de pestaña elija una opción:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Texto con una imagen a la derecha | X | Texto con una imagen a la izquierda |  | **Solo texto** |  |
| Texto con dos imágenes a la derecha |  | Texto con dos imágenes a la izquierda |  |  |  |

Imagen PORTADA (borrar si no se ocupa):

**\*** Nombre de archivo Shutterstock o descripción de ilustración a crear



Crear una imagen similar, pero cambiar por L y que el intervalo delimitado por las líneas punteadas sea más pequeño para que el punto B de la derecha se aleje un poco más, llamar a este punto

**\*** Nombre de archivo codificado (ejemplo, CI\_S3\_G1\_REC10\_F1.**PNG**)

MA\_11\_03\_REC60\_IMG07

OPCIONAL Pie de imagen 1 (**130** caracteres máx., se puede usar cursivas) Interpretación gráfica del límite en el infinito

**\*** Texto

**Definición de límite en el infinito de una función**

|  |
| --- |
| Dada una función definida en un intervalo (a, ∞), entonces el límite de la función *f* cuando *x* tiene a infinito es L y se escribe como  Si para todo número real *n > 0*, existe un número real *δ > 0*, tal que si *x > n*, entonces *|f(x) – L| < ε.* |

De esta forma, a medida que *x* toma valores mas grandes, sus imágenes se aproximan al número real *L*.