|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | **Los métodos de razonamiento** |
| Código del guion | MA\_08\_08\_CO |
| Descripción | En este tema estudiaremos la forma en que razonamos matemáticamente para argumentar y proponer la solución a un problema determinado, además, analizaremos rigurosamente algunos conceptos básicos de la geometría plana. |

[SECCIÓN 1] **1 El razonamiento inductivo**

El razonamiento inductivo es un proceso en el que a través de la observación, el análisis y el reconocimiento de patrones o regularidades en situaciones particulares se pueden extraer conclusiones o generalizar el comportamiento de una situación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC10 |
| **Título** | **El razonamiento inductivo** |
| **Descripción** | Interactivo para estudiar qué es el razonamiento inductivo |

Observa la siguiente secuencia numérica: 3 – 6 – 9 – 12 – 15…

¿Qué número ocupa la posición 10? ¿Cómo puedes saber qué número ocupa cualquier posición? ¿Es posible describir una expresión matemática que permita hallar el número que ocupa cualquier posición?

En el caso de esta secuencia se puede observar que aumenta de tres en tres y, por tanto, si la continúas, te darás cuenta que en la posición 10 está el número 30, por consiguiente, para hallar cualquier número multiplicas por 3 la posición del número que quieres hallar.

El método de inducción completa que permite demostrar que cierta propiedad geométrica o aritmética que denominaremos *Pn* (siendo *n* un número natural) es cierta para todos los casos, requiere dos pasos:

Verificar que el resultado *P*1, es cierto.

Plantear la hipótesis de inducción donde se supone válida *Pn*, y de aquí se debe poder mostrar que *Pn* + 1 también es válida.

Por ejemplo, la proposición de la secuencia numérica anterior se puede expresar de la forma *Pn =* 3*n*; en este caso, para *n* = 1 es cierta la proposición, al igual que para *n* = 2, *n* = 3 y así sucesivamente, de forma que *P* será verdad para todos los *n*. Así por ejemplo, para hallar el número de la posición 35 lo que se debe hacer es reemplazar *n* por 35:

*Pn =* 3*n*

*P*35 *=* 3(35) = 105

Por tanto, en la posición 35 se encuentra el número 105.

En esta situación se partió desde unos casos particulares y se llegó a una generalización por simple inducción u observación.

Observa la siguiente secuencia de imágenes:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** | Construir las figuras con fósforos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Secuencia numérica con formas geométricas. |

¿Cuántos fósforos se necesitan para construir la figura 10, la figura 123 y, en general, para cualquier figura?

Al **observar** la figura se tiene:

La figura 1 tiene 3 fósforos.

La figura 2 tiene 5 fósforos.

La figura 3 tiene 7 fósforos.

La figura 4 tiene 9 fósforos.

Esto significa que a medida que se van agregando las figuras la secuencia de fósforos aumenta de dos en dos, entonces si continuamos la secuencia hasta la figura 10 se puede afirmar que estará compuesta por 21 fósforos.

Ahora se debe **formular** una conclusión general que permita decir cuántos fósforos tiene la figura *n*. Como la secuencia aumenta de dos en dos vamos a reescribirla de la siguiente forma:

*P*1 = 2(1) + 1 = 3

*P*2 = 2(2) + 1 = 5

*P*3 = 2(3) + 1 = 7

*P*4 = 2(4) + 1 = 9

El dos representa la forma como aumenta la secuencia, el número dentro de cada paréntesis corresponde al número de la figura y en cada caso se adiciona uno como una constante. Por tanto, si decimos que *n* es el número de la figura se puede escribir la expresión:

*Pn* **=** 2*n* + 1

En consecuencia, para la figura 123 se puede afirmar que está compuesta por 247 fósforos.

*Pn* = 2(123) + 1 = 247

Este ejemplo también se inició con la observación de casos particulares hasta llegar a un caso general que representa la situación que se propone y es lo que se denomina razonamiento inductivo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC20 |
| **Título** | **Practica el razonamiento inductivo** |
| **Descripción** | Actividad para practicar el razonamiento inductivo |

[SECCIÓN 2] **1.1 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC40 |
| **Título** | **Refuerza tu aprendizaje: El razonamiento inductivo** |
| **Descripción** | Actividades sobre El razonamiento inductivo |

[SECCIÓN 1] **2 El razonamiento deductivo**

El razonamiento deductivo es una forma de pensamiento matemático en el que a través de una serie de argumentos generales y verdaderos, se llega a demostrar la veracidad de una situación particular, en otras palabras, se parte de lo general para demostrar algo particular.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC50 |
| **Título** | **El razonamiento deductivo** |
| **Descripción** | Interactivo para estudiar en qué consiste el razonamiento deductivo |

El razonamiento deductivo que se basa en la demostración se da a través de tres pasos:

1. Partir de las condiciones dadas (hipótesis).
2. Emplear definiciones, postulados, axiomas o teoremas previamente demostrados para justificar los pasos o proposiciones.
3. Afirmar el resultado (conclusión o tesis).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG02 |
| **Descripción** | Teoría tiene tilde en la i. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Secuencia numérica con formas geométricas. |

Por ejemplo, se sabe que **todo ser humano es mortal** y también que **el filósofo Aristóteles es un ser humano**, por tanto, podemos deducir que **Aristóteles es mortal**.

En este ejemplo se partió de una regla general: “todo ser humano es mortal”.

Se analizó un caso particular: “el filósofo Aristóteles es un ser humano”.

Aplicando la regla general a este caso particular se logra realizar una deducción: “Aristóteles es mortal”.

El esquema de un razonamiento deductivo es de la forma ***A* → *B*,** es decir**,** que a través de una serie de pasos justificados se llega de una tesis *A* a una conclusión *B*.

A través de una serie de pasos lógicos se prueba o demuestra la validez de proposiciones. Las partes de una demostración son:

* Figura: es la ilustración gráfica de la proposición que se desea demostrar. Debe contener únicamente los trazos fundamentales.
* Hipótesis: es lo que se acepta sin discusión como cierto y que sirve de punto de partida para el razonamiento.
* Figura auxiliar: son los trazos que se agregan a la figura inicial y que ayudan a la demostración.
* Tesis: es lo que se quiere demostrar.
* Razonamiento: son las afirmaciones y justificaciones que ligan a la hipótesis con la tesis.
* Conclusión: es el resultado final de los pasos seguidos en el razonamiento.

Por ejemplo, para probar o demostrar que los ángulos opuestos por el vértice son iguales se debe hacer un análisis y después los pasos lógicos para probar la validez de la proposición.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC60 |
| **Título** | **Aplica el razonamiento deductivo** |
| **Descripción** | Actividad para resolver situaciones aplicando el razonamiento deductivo |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC90 |
| **Título** | **Relaciona cada enunciado con su conclusión** |
| **Descripción** | Actividad para formar proposiciones que corresponden a teoremas, postulados o proposiciones |

[SECCIÓN 2] **2.1 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC100 |
| **Título** | **Refuerza tu aprendizaje: El razonamiento deductivo** |
| **Descripción** | Actividades sobre El razonamiento deductivo |

[SECCIÓN 1] **3 Los métodos de demostración en geometría**

En matemáticas, una demostración es un argumento deductivo que asegura la verdad de una proposición matemática.La argumentación la constituye un conjunto de afirmaciones que están sustentadas en **definiciones** (enunciado con las características de un objeto, persona, animal, planta o idea), **axiomas** o **postulados** (verdad que no necesita ser demostrada) o **teoremas** (verdad que puede ser demostrada) previamente demostrados y aceptados.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC110 |
| **Título** | **Los métodos de demostración en geometría** |
| **Descripción** | Interactivo para estudiar los distintos métodos de demostración en geometría |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG03 |
| **Descripción** | Dejar solo la ilustración de Euclides |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 185405648 |
| **Pie de imagen** | Euclides de Alejandría 325 a. C. – 265 a. C. aproximadamente. |

Euclides es considerado el padre de la geometría y su obra trascendental *Los elementos* es un tratado de geometría en el que, a partir de un conjunto de axiomas o postulados, expone deductivamente toda la geometría plana que estudiamos en la escuela. Los 5 postulados de Euclides son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG04 |
| **Descripción** | 1. Dos puntos cualesquiera determinan una recta. 2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta. 3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y una recta cualquiera. 4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí. 5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única recta paralela.   Construir la imagen de forma que cada enunciado quede junto a la imagen que lo explica (tienen el mimo número romano). |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclid%27s_postulates.png> |
| **Pie de imagen** | Representación geométrica de los postulados de Euclides. |

En geometría se utilizan diferentes métodos para demostrar una afirmación; a continuación estudiaremos algunos de estos métodos

[SECCIÓN 2] **3.1 El método directo**

Para el método directo se utilizan el razonamiento deductivo de la forma ***A* → *B***, mediante un esquema de dos columnas para representar la situación **afirmación – razón** en la que cada afirmación particular que se hace se justifica con una ley general.

* Por ejemplo, si se desea demostrar el teorema “dada una recta y un punto exterior a ella existe un único plano que contiene a la recta y al punto”.

Para esta demostración se hace uso de las siguientes definiciones:

Tres puntos *A*, *B* y *C* no son colineales si no están contenidos en una única recta.

Un plano queda determinado por 3 puntos.

En este caso **la** **hipótesis** es que tenemos una recta y un punto *P* fuera de ella. **La conclusión** a la que se debe llegar es que existe un único plano que los contiene.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG05 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Las letras deben ir en cursiva y mayúscula. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Dada una recta y un punto exterior a ella existe un único plano que contiene a la recta y al punto. |

|  |  |
| --- | --- |
| Esquema en el que cada afirmación particular se justifica con una ley general | |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. Sea α el plano determinado por *A*, *B* y *C*. 2. Sea *l* la recta que pasa por *A* y *B*. 3. *P* ∉ *l.* 4. *A*, *B* y *P* no son colineales. 5. *l* ∈ α.   *P* ⋀ *l* ∈ α que es lo que se quería demostrar. | 1. Definición de plano. 2. Postulado 1. 3. Dato dado. 4. Por definición de puntos no colineales. 5. Por axioma: “Si dos puntos están en un plano, la recta que los contiene está en el mismo plano”. |

* Otro ejemplo es demostrar el teorema de Pitágoras que se enuncia del siguiente modo:

Para todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

*a*2 + *b*2= *c*2

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG06 |
| **Descripción** | http://thumb1.shutterstock.com/display_pic_with_logo/97684/167329544/stock-photo-retro-looking-pythagoras-theorem-of-right-triangles-167329544.jpg  Dejar sin el color de fondo, las letras deben estar en cursiva y las que están en el interior de las figuras deben tener cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [167329544](http://www.shutterstock.com/pic-167329544/stock-photo-retro-looking-pythagoras-theorem-of-right-triangles.html?src=Jibj-9HIb_pTWKJJbawZYg-1-30) |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica del teorema de Pitágoras. |

Para la demostración vamos a partir de la siguiente construcción:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG07 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Todas las letras van en cursiva, las letras minúsculas corresponden a las medidas de los lados y deben tener cotas, las letras en mayúscula son el nombre del punto. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | A través del concepto de área se puede demostrar el teorema de Pitágoras. |

|  |  |
| --- | --- |
| Esquema en el que cada afirmación particular se justifica con una ley general | |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. *ABCD* es un cuadrado. 2. *EFGH* es un cuadrado. 3. *a* + *b* es el lado de *ABCD*. 4. *c* es el lado de *EFGH*. 5. (*a* + *b*)2 es área de *ABCD*. 6. (*a* + *b*)2 = *a*2 + 2*ab* + *b*2. 7. *c*2 es el área de *EFGH*. 8. *ab*/2 es el área de cada triángulo. 9. 2*ab* + *c*2 es el área de *ABCD*. 10. *a*2 + 2*ab* + *b*2 = 2*ab* + *c*2. 11. *a*2 + *b*2 = *c*2;cancelamos 2*ab* en cada lado de la igualdad.   *a*2 + *b*2 = *c*2 queda demostrado el teorema de Pitágoras. | 1. Por construcción. 2. Por construcción. 3. Por construcción. 4. Por construcción. 5. Por definición de área de un cuadrado. 6. Por desarrollo de un binomio cuadrado. 7. Por construcción. 8. Por definición de área de un triángulo. 9. Por suma de áreas. 10. Por igualdad de áreas. 11. Por propiedad uniforme de la igualdad. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC120 |
| **Título** | **Identifica la tesis y la hipótesis** |
| **Descripción** | Actividad para identificar la tesis y la hipótesis de los teoremas |

[SECCIÓN 2] **3.2 El método indirecto**

Este método de demostración también es conocido como demostración por contradicción, pues en este caso se niega la hipótesis y se debe llegar a la tesis.

Por ejemplo, demostremos por contradicción el siguiente teorema: Todo triángulo *ABC* tiene un único ángulo obtuso interno.

Dado el Δ*ABC* vamos a suponer que tiene dos ángulos obtusos ∠*A* y ∠*B*, es decir:

*m*∠*A* > 90° y *m*∠*B* > 90°.

Por la propiedad de la adición de los ángulos internos de un triángulo se tiene que:

*m*∠*A* + *m*∠*B* + *m*∠*C* = 180°

Si se sustrae la medida de los ángulos *A* y *B* en ambos lados de la igualdad se llega a:

*m*∠*C* = 180° − *m*∠*A* − *m*∠*B*

*m*∠*C* = 180° − (*m*∠*A* + *m*∠*B*)

Factorizando el signo menos, como *m*∠*A* > 90° y *m*∠*B* > 90° entonces:

180° − (*m*∠*A* + *m*∠*B*) < 0

Es decir que:

*m*∠*C* < 0

lo cual contradice la definición de ángulo interno de un triángulo, ya que la medida de todo ángulo interno de un triángulo es mayor que cero, por tanto, se concluye que la negación de la hipótesis es falsa, es decir que se demuestra que todo triángulo *ABC* tiene un único ángulo obtuso.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC130 |
| **Título** | **Organiza los pasos de la demostración** |
| **Descripción** | Actividad para organizar los pasos de una demostración siguiendo el método directo |

[SECCIÓN 2] **3.3 Generalizaciones falsas y demostración por contraejemplo**

Hasta el momento hemos revisado cómo se realiza una demostración en geometría a partir de dos métodos y en qué consisten los métodos deductivo e inductivo, sin embargo, cuando hacemos una generalización por el método inductivo, podemos cometer un error al suponer que con varios ejemplos revisados se cumple una conjetura. En este caso se dice que hemos realizado una **generalización falsa** y para demostrarlo mostramos un **contraejemplo**, que no es otra cosa que un ejemplo que hace que la generalización no sea cierta.

Observemos la siguiente imagen y pensemos qué podemos decir acerca de lo que le sucede a cada cuadrilátero cuando es cortado por su diagonal mayor. ¿Lo que ocurre en la figura se cumplirá para todos los cuadriláteros?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG08 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  La letra va en cursiva, la diagonal (línea al interior de las figuras) debe ser una línea punteada. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Todo cuadrilátero es dividido por su diagonal mayor en dos triángulos iguales. |

En la imagen se puede observar que la diagonal divide a cada cuadrilátero en dos triángulos de igual forma y tamaño; esta afirmación corresponde a una generalización que se ha realizado por simple observación, entonces, ¿cómo puedes refutar o contradecir dicha afirmación?

Si se encuentra un cuadrilátero que no cumpla con la afirmación, puede decirse que se ha hallado un **contraejemplo**, por tanto, la afirmación es una generalización falsa, como se muestra en la siguiente figura.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG09 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los triángulos *ABD* y *BCD* que se forman en el cuadrilátero *ABCD*, no son iguales en forma ni en tamaño, lo que contradice la afirmación <<Todo cuadrilátero es dividido por su diagonal mayor en dos triángulos iguales>>. |

[SECCIÓN 2] **3.4 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC150 |
| **Título** | **Refuerza tu aprendizaje: Los métodos de demostración en geometría** |
| **Descripción** | Actividades sobre Los métodos de demostración en geometría |

[SECCIÓN 1] **4 Los ángulos y las rectas**

Las formas geométricasestán presentes en nuestro entorno: las encontramos en la naturaleza, en el arte, la arquitectura, etc. Conocer las **rectas** y los **ángulos que se forman entre ellas** nos ayudarán a comprender el estudio de las formas geométricas y la forma del entorno que nos rodea.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG10 |
| **Descripción** | Street Map with GPS Icons. Navigation - stock photo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 127728257 |
| **Pie de imagen** | Las rectas y los ángulos nos sirven para estudiar los mapas y la posición de las calles en diferentes lugares. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definiciones de recta, semirrecta y ángulo** |
| **Contenido** | **Recta:** conjunto de puntos que se prolongan indefinidamente en una dirección.  **Semirrecta:** porción de recta que tiene inicio, pero no fin.  **Ángulo**: espacio del plano comprendido por la unión de dos semirrectas con el mismo punto de origen denominado vértice. |

Para nombrar las rectas y las semirrectas se realiza a través de una letra minúscula o mediante dos puntos que estén contenidos en ellas.

Para los ángulos se usa el símbolo ∠ y la letra del vértice o una letra del alfabeto griego o mediante tres puntos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG11 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Notación para rectas, semirrectas y ángulos. |

[SECCIÓN 2] **4.1 Los ángulos formados entre rectas perpendiculares**

Dos rectas *l* y *m* son perpendiculares si al intersecarse forman un par de ángulos adyacentes congruentes; se representan de la forma:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG12 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta *l*es perpendicular a la recta *m.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC180 |
| **Título** | **Los ángulos formados entre rectas perpendiculares** |
| **Descripción** | Interactivo que explica los ángulos formados entre rectas perpendiculares |

[SECCIÓN 2] **4.2 Los ángulos formados entre rectas paralelas**

Dos rectas *l* y *m* son paralelas si están en el mismo plano y no tienen puntos en común. Se denotan como:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG13 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta ***l*** es paralela a la recta ***m.*** |

Dos ángulos son consecutivos si están en el mismo plano, tienen el mismo vértice y un lado en común.

* Dadas *m* || *n* rectas paralelas que son cortadas por la recta *t* transversal a *m* y *n,* se forman ángulos denominados **ángulos congruentes**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG14 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Pares de ángulos congruentes entre paralelas:  ∠5 ≅ ∠1  ∠6 ≅ ∠2  ∠4 ≅ ∠8  ∠3 ≅ ∠7 |

* Los ángulos que se encuentran al mismo lado de la transversal son llamados **ángulos colaterales**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG15 |
| **Descripción** | OJO cambiar el 5 azul por un 8. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los ángulos ∠1, ∠2, ∠5 y ∠6 son colaterales.  También son colaterales los ángulos ∠4, ∠3, ∠8 y ∠7. |

* Dadas *m* || *n* rectas paralelas que son cortadas por la recta *t* transversal a *m* y *n,* se forman ángulos entre las rectas que se conocen como **ángulos externos** e **internos**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG16 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los ángulos ∠1, ∠4, ∠6 y ∠7 son llamados ángulos externos y los ángulos ∠2, ∠3, ∠5 y ∠8 son llamados ángulos internos. |

* Los **ángulos alternos externos** se caracterizan porque no son colaterales ni son adyacentes (dos ángulos son adyacentes si son consecutivos y sus lados no comunes pertenecen a la misma recta).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG17 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Pares de ángulos alternos externos:  ∠6 ≅ ∠4  ∠7 ≅ ∠1 |

* Los ángulos que no son colaterales y no son adyacentes son llamados **ángulos alternos internos**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG18 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Pares de ángulos alternos internos:  ∠8 ≅ ∠2  ∠5 ≅ ∠3 |

Ahora vamos a usar el hecho de los ángulos correspondientes entre paralelas para demostrar la congruencia de los ángulos alternos internos.

Si *m* || *n* y *t* transversal a *m* y *n*,entonces ∠8 ≅ ∠2 y ∠5 ≅ ∠3.

|  |  |
| --- | --- |
| Demostración de la congruencia de los ángulos internos alternos | |
| Afirmación | Razón |
| 1. *m* || *n* y *t* transversal a *m* y *n*. 2. ∠1 ≅ ∠3 y ∠4 ≅ ∠2 3. ∠1 ≅ ∠5 y ∠2 ≅ ∠6 4. ∠5 ≅ ∠3 y ∠8 ≅ ∠2 | 1. Dato dado. 2. Son ángulos opuestos por el vértice. 3. Son ángulos correspondientes entre paralelas. 4. Por transitividad. |

* Los ángulos ∠4 y ∠8 son colaterales, uno es externo y el otro es interno, y no son adyacentes; los ángulos entre paralelas con estas características son conocidos como **ángulos correspondientes**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG19 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Son ángulos correspondientes:  ∠4 y ∠8  ∠3 y ∠7  ∠2 y ∠6  ∠1 y ∠5 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC190 |
| **Título** | **Identifica ángulos entre rectas paralelas** |
| **Descripción** | Actividad para identificar ángulos entre rectas paralelas |

[SECCIÓN 2] **4.3 Las rectas paralelas y los triángulos**

A partir del concepto de rectas paralelas se puede estudiar y demostrar propiedades y conceptos relacionados con los triángulos.

* Propiedad fundamental de los triángulos.

En todo triángulo *ABC* la adición de las medidas de sus ángulos internos siempre es igual a 180°.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG20 |
| **Descripción** | Las letras van en itálica, dejar el interior del triángulo sin color, los ángulos deben tener los colores que se indican. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Para demostrar la propiedad fundamental de los triángulos se traza por uno de los vértices una recta paralela al lado opuesto. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. Por *C* se traza una recta paralela a *AB*. 2. ∠1 ≅ ∠4 y ∠2 ≅ ∠5. 3. ∠1 = ∠4 y∠2 = ∠5 4. ∠4 + ∠3 + ∠5 = 180° 5. ∠1 + ∠3 + ∠2 = 180° | 1. Postulado de la recta paralela. 2. Son ángulos internos alternos entre paralelas. 3. Por ser ángulos internos entre paralelas. 4. Por construcción. 5. Al reemplazar *m* ∠4 y *m* ∠5 por lo obtenido en la afirmación 2. |

* Dadas dos rectas paralelas y dos rectas transversales a ellas, los triángulos *ABC* y *AB’C’* son semejantes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG21 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las rectas y los ángulos nos sirven para estudiar los mapas y la posición de las calles en diferentes lugares. |

Esto se debe a que sus ángulos homólogos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC210 |
| **Título** | **Completa el teorema** |
| **Descripción** | Actividad para completar enunciados que corresponden a teoremas de rectas paralelas y triángulos |

[SECCIÓN 2] **4.4 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC220 |
| **Título** | **Refuerza tu aprendizaje: Los ángulos y las rectas** |
| **Descripción** | Actividad sobre los ángulos y las rectas |

[SECCIÓN 1] **5 Los ángulos en polígonos**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC230 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 2 ESO/Matemáticas/Los ángulos/Calcula la suma de los ángulos de un polígono |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** |  |
| **Título** | **Calcula la suma de los ángulos de un polígono** |
| **Descripción** | Actividad para calcular la suma de los ángulos de un polígono |

Todo polígono tiene dos clases de ángulos, un ángulo interno y uno externo. Los ángulos internos se forman a partir de dos lados consecutivos del polígono, mientras que un ángulo externo es la unión de uno de los lados y la prolongación de uno de sus lados adyacentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG22 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los ángulos azules son internos, mientras que los ángulos verdes son externos. |

A continuación, vamos a hallar por inducción dos fórmulas para determinar la suma de los ángulos internos de cualquier polígono y la medida de los ángulos internos para cualquier polígono regular.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG23 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulos internos en diferentes polígonos. |

La suma de los ángulos internos de cada figura es:

Triángulo 180°

Cuadrilátero 360°

Pentágono 540°

Hexágono 720°

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG24 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cada polígono se puede dividir en triángulos. |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Relación entre el número de triángulos y de lados del polígono | | | |
| Polígono | Número de lados | Número de triángulos | Suma total de la medida de los ángulos internos |
| Triángulo | 3 | 1 | 1 × 180 = 180 |
| Cuadrilátero | 4 | 2 | 2 × 180 = 360 |
| Pentágono | 5 | 3 | 3 × 180 = 540 |
| Hexágono | 6 | 4 | 4 × 180 = 720 |

Partiendo de la propiedad fundamental de los triángulos, se puede ver una relación entre el número de lados de un polígono y el número de triángulos que se forman desde un vértice.

Si el polígono tiene ***n*** lados, el número de triángulos es ***n* − 2** que es el número que multiplica a 180 para hallar la suma total de la medida de los ángulos internos.

Suma total de la medida de los ángulos internos de un polígono = 180 ∙ (*n* − 2)

Y para la medida de los ángulos internos de cada polígono simplemente dividimos su suma por el número de lados del polígono, así se tiene la fórmula:

(*n* – 2) ∙ 180/*n*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG25 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Medida de los ángulos internos de un polígono de tres lados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG26 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Medida de los ángulos internos de un polígono de cuatro lados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG27 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Medida de los ángulos internos de un polígono de cinco lados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG28 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Medida de los ángulos internos de un polígono de seis lados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | Ángulos internos de un polígono |
| **Contenido** | En todo polígono de *n* lados se cumple que la suma de sus ángulos internos viene dada por:  **180° ∙ (*n* − 2)**  La medida de los ángulos internos de un polígono regular con *n* lados viene dada por:  **180°(*n* − 2)/*n*** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC240 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 2 ESO/Matemáticas/Los ángulos/Averigua el número de lados de un polígono |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** |  |
| **Título** | **Averigua el número de lados de un polígono** |
| **Descripción** | Actividad para relacionar la suma de la medida de los ángulos interiores con la cantidad de lados de un polígono |

[SECCIÓN 2] **5.1 Los ángulos en la circunferencia**

Al dibujar líneas que estén dentro de una circunferencia o que tengan relación con ella, se pueden definir distintos tipos de ángulos.

**Ángulo central**: tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados se apoyan en la circunferencia (coinciden con radios).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG29 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulo central de una circunferencia. |

**Ángulo inscrito**: tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados se apoyan sobre la circunferencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG30 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulo inscrito de una circunferencia. |

**Ángulo semiinscrito**: tiene su vértice sobre la circunferencia, uno de sus lados se apoya sobre ella y el otro es tangente a la circunferencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG31 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulo semiinscrito de una circunferencia. |

**Ángulo interior**: tiene su vértice en el interior de la circunferencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG32 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulo interior de una circunferencia. |

En toda circunferencia se cumplen las siguientes propiedades:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG33 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son congruentes.  ∠α ≅ ∠β ≅ ∠γ |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG34 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Si en una circunferencia el ángulo central y el ángulo inscrito tienen el mismo arco, entonces la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito.  *m*∠β = 2*m*∠α |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC250 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 2 ESO/Matemáticas/Los ángulos/Identifica ángulos en la circunferencia |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** |  |
| **Título** | **Identifica ángulos en la circunferencia** |
| **Descripción** | Actividad para relacionar la suma de los ángulos interiores con la cantidad de lados de un polígono |

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso aprovechado** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC260 |
| **Ubicación en Aula Planeta** | 2 ESO/Matemáticas/Los ángulos/Deduce ángulos |
| **Cambio (descripción o capturas de pantallas)** |  |
| **Título** | **Deduce la medida de ángulos en polígonos** |
| **Descripción** | Actividad para identificar las diferentes relaciones entre ángulos y la circunferencia |

[SECCIÓN 2] **5.2 Las construcciones geométricas**

Realizar una construcción geométrica implica que cada paso que se realiza usando únicamente regla y compás, debe estar debidamente justificado por un postulado, definición o teorema. Revisemos algunas de ellas:

* Construcción de la **mediatriz** de un segmento.

La **mediatriz** es la recta que corta perpendicularmente el segmento por su punto medio.

Para trazar la mediatriz de un segmento *AB* debe hacerse lo siguiente:

1. Se sitúa la aguja del compás en el punto *A* y, con una abertura mayor que la mitad del segmento *AB*, se traza un arco de circunferencia.
2. Con la misma abertura, se sitúa la aguja del compás en *B* y se traza otro arco que corte al anterior, por encima y por debajo del segmento.
3. Se unen con una regla los dos puntos de corte de los arcos. Esta recta es la **mediatriz** del segmento.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG35 |
| **Descripción** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14607/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_07_18_img18_small.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14607/InfoGuion/cuadernoestudio/images\_xml/MT\_07\_18\_img18\_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Mediatriz de un segmento. |

* Construcción de la **bisectriz** de un ángulo.

La **bisectriz** es la recta que divide un ángulo en dos ángulos iguales. Para trazarla se debe hacer lo siguiente:

1. Se sitúa la aguja del compás en el vértice *A* y se traza un arco que corte los lados del ángulo.
2. Desde los dos puntos de corte *B* y *C*, se trazan dos arcos, con la misma abertura del compás, que se corten en el interior del ángulo.
3. Se une con una regla el punto de corte *D* y el vértice *A*. Esta recta es la **bisectriz** del ángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_CO\_IMG36 |
| **Descripción** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14607/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_07_18_img19_small.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14607/InfoGuion/cuadernoestudio/images\_xml/MT\_07\_18\_img19\_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Bisectriz de un ángulo. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC280 |
| **Título** | **Construye polígonos regulares** |
| **Descripción** | Interactivo que muestra la construcción geométrica de algunos polígonos regulares |

[SECCIÓN 2] **5.3 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC290 |
| **Título** | **Refuerza tu aprendizaje: Los ángulos en polígonos** |
| **Descripción** | Actividades sobre Los ángulos en polígonos |

[SECCIÓN 1] **6 Ejercitación y competencias**

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC300 |
| **Título** | Proyecto: Los métodos de razonamiento |
| **Descripción** | Proyecto para aplicar los distintos tipos de razonamiento |

[SECCIÓN 1] **7** **Fin de tema**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC310 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** | Mapa conceptual sobre el tema Los métodos de razonamiento |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC320 |
| **Título** | Evaluación |
| **Descripción** | Evalúa tus conocimientos sobre el tema Los métodos de razonamiento |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC340 | |
| **Web 01** | *Demostraciones geométricas* | [*https://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionCantabria2012/Andalucia-Geometria.pdf*](https://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionCantabria2012/Andalucia-Geometria.pdf) |
| **Web 02** | *Demostración en geometría* | [*http://www.eplc.umich.mx/salvadorgs/matematicas2/contenidos/demostracion.html*](http://www.eplc.umich.mx/salvadorgs/matematicas2/contenidos/demostracion.html) |
| **Web 03** | *Ángulos y rectas* | [*http://www.profesorenlinea.cl/geometria/angulos\_y\_rectas.html*](http://www.profesorenlinea.cl/geometria/angulos_y_rectas.html) |