|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | **Métodos de razonamiento** |
| Código del guion | MA\_08\_08\_CO |
| Descripción | En este tema estudiaremos la forma en que razonamos matemáticamente para argumentar y proponer la solución a un problema determinado, además analizaremos rigurosamente algunos conceptos básicos de la geometría plana. |

[SECCIÓN 1] **1 El razonamiento inductivo**

El razonamiento inductivo es un proceso en el que a través de la observación, el análisis y el reconocimiento de patrones o regularidades en situaciones particulares se pueden extraer conclusiones o generalizar el comportamiento de una situación.

Observa la siguiente secuencia numérica: 3 – 6 – 9 – 12 – 15…

¿Qué número ocupa la posición 10? ¿Cómo puedes saber qué número ocupa cualquier posición? ¿Es posible describir una expresión matemática que permita hallar el número que ocupa cualquier posición?

En esta secuencia se puede observar que aumenta de tres en tres y por tanto si continuas la secuencia te darás cuenta que en la posición 10 está el número 30 y para hallar cualquier número multiplicas por 3 la posición del número que quieres hallar.

El método de inducción completa que permite demostrar que cierta propiedad geométrica o aritmética que denominaremos *Pn* (siendo *n* un número natural) es cierta para todos los casos, requiere dos pasos:

Verificar que el resultado *P1*, es cierto.

Plantear la hipótesis de inducción donde se supone válida *Pn*, y de aquí se debe poder mostrar que *Pn* + 1 también es válida.

Por ejemplo la proposición de la secuencia numérica anterior se puede expresar de la forma *Pn =* 3*n*, en este caso para *n* = 1 es cierta la proposición, y es cierta para *n* = 2 y *n* = 3, y así sucesivamente, de forma que *P* será verdad para todos los *n*. Así por ejemplo para hallar el número de la posición 35 lo que se debe hacer es reemplazar *n* por 35:

*Pn =* 3*n*

*P*35 *=* 3(35) = 105

Por tanto en la posición 35 se encuentra el número 105.

En esta situación se partió desde unos casos particulares y se llegó a una generalización por simple inducción u observación.

Observa la siguiente secuencia de imágenes:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG01 |
| **Descripción** | Construir las figuras con fósforos. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Secuencia numérica con formas geométricas. |

¿Cuántos fósforos se necesitan para construir la figura 10, la figura 123 y en general para cualquier figura?

Al **observar** la figura se tiene:

La figura 1 tiene 3 fósforos

La figura 2 tiene 5 fósforos

La figura 3 tiene 7 fósforos

La figura 4 tiene 9 fósforos

Esto significa que a medida que va aumentando la figura la secuencia de fósforos aumenta de dos en dos, entonces si continuamos la secuencia hasta la figura 10 se puede afirmar estará compuesta por 23 fósforos.

Ahora se debe **formular** una conclusión general que permita decir cuántos fósforos tiene la figura *n*. Como la secuencia aumenta de dos en dos vamos a reescribir la secuencia de la siguiente forma:

*P*1 = 2(1) + 1 = 3

*P*2 = 2(2) + 1 = 5

*P*3 = 2(3) + 1 = 7

*P*4 = 2(4) + 1 = 9

El dos representa como aumenta la secuencia y el número dentro de cada paréntesis representa el número de la figura y en cada caso se suma uno como una constante. Por tanto si decimos que *n* es el número de la figura se puede escribir la expresión:

*Pn* **=** 2*n* + 1

Por tanto para la figura 123 se puede afirmar que está compuesta por 247 fósforos.

*Pn* = 2(123) + 1 = 247

Este ejemplo también se inició con la observación de casos particulares hasta llegar a un caso general que representa la situación que se propone y es lo que se denomina razonamiento inductivo.

[SECCIÓN 2] **1.1 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **2 El razonamiento deductivo**

El razonamiento deductivo es una forma de pensamiento matemático en el que a través de una serie de argumentos generales y verdaderos, se llega a demostrar la veracidad de una situación particular, en otras palabras se parte de lo general para demostrar algo particular.

El razonamiento deductivo que se basa en la demostración se da a través de tres pasos:

1. Partir de las condiciones dadas (hipótesis).
2. Emplear definiciones, postulados, axiomas o teoremas previamente demostrados para justificar los pasos o proposiciones.
3. Afirmar el resultado (conclusión o tesis).

Por ejemplo se sabe que **todo ser humano es mortal** y también que **el filoso Aristóteles es un ser humano**, por tanto podemos deducir que **Aristóteles es mortal**.

En este ejemplo se partió de una regla general: “todo ser humano es mortal”.

Se analizó un caso particular: “el filoso Aristóteles es un ser humano”.

Aplicando la regla general a este caso particular se logra realizar una deducción: “Aristóteles es mortal”.

El esquema de un razonamiento deductivo es de la forma ***A* → *B*,** es decir**,** que a través de una serie de pasos justificados se llega de una tesis *A* a una conclusión *B*.

A través de una serie de pasos lógicos se prueba o demuestra la validez de proposiciones. Las partes de una demostración son:

* Figura: es la ilustración gráfica de la proposición que se desea demostrar. Debe contener únicamente los trazos fundamentales.
* Hipótesis: es lo que se acepta sin discusión como cierto y que sirve de punto de partida para el razonamiento.
* Figura auxiliar: son los trazos que se agregan a la figura inicial y que ayudan a la demostración.
* Tesis: es lo que se quiere demostrar.
* Razonamiento: son las afirmaciones y justificaciones que ligan a la hipótesis con la tesis.
* Conclusión: es el resultado final de los pasos seguidos en el razonamiento.

Por ejemplo para probar o demostrar que los ´ángulos opuestos por el vértice son iguales se debe hacer un análisis y después los pasos lógicos para probar la validez de la proposición.

[SECCIÓN 2] **2.1 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **3 Los métodos de demostración en geometría**

En matemáticas, una demostración es un argumento deductivo que asegura la verdad de una proposición matemática.La argumentación se constituye por un conjunto de afirmaciones que están sustentadas en **definiciones** (enunciado con las características de un objeto), **axiomas** o **postulados** (verdad que no necesita ser demostrada) o **teoremas** (verdad que puede ser demostrada) previamente demostrados y aceptados.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG03 |
| **Descripción** | Dejar solo la ilustración de Euclides |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | 185405648 |
| **Pie de imagen** | Euclides de Alejandría 325 a. C. – 265 a. C. aproximadamente. |

Euclides es considerado el padre de la geometría y su obra trascendental “Los elementos” es un tratado de geometría en el que a partir de un conjunto de axiomas o postulados expone deductivamente toda la geometría plana que estudiamos en la escuela. Los 5 postulados de Euclides son:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG04 |
| **Descripción** | 1. Dos puntos cualesquiera determinan una recta. 2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta. 3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y una recta cualquiera. 4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí. 5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única recta paralela.   Construir la imagen de forma que cada enunciado quede junto a la imagen que lo explica (tienen el mimo número romano). |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclid%27s_postulates.png> |
| **Pie de imagen** | Representación geométrica de los postulados de Euclides. |

En geometría se utilizan diferentes métodos para demostrar una afirmación, estudiaremos algunos de estos métodos

[SECCIÓN 2] **3.1 El método directo**

Para el método directo se utilizan el razonamiento deductivo de la forma ***A* → *B*** mediante un esquema de dos columnas para representar la situación **afirmación – razón** en la que cada afirmación particular que se hace se justifica con una ley general.

* Por ejemplo si se desea demostrar el teorema <<dada una recta y un punto exterior a ella existe un único plano que contiene a la recta y al punto>>.

Para esta demostración se hace uso de las siguientes definiciones:

Tres puntos *A*, *B* y *C* no son colineales si no están contenidos en una única recta.

Un plano queda determinado por 3 puntos.

En este caso **la** **hipótesis** es que tenemos una recta y un punto *P* fuera de ella. **La conclusión** a la que se debe llegar es que existe un único plano que las contiene.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG05 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Las letras deben ir en cursiva y mayúscula. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Dada una recta y un punto exterior a ella existe un único plano que contiene a la recta y al punto. |

|  |  |
| --- | --- |
| Esquema en el que cada afirmación particular se justifica con una ley general | |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. Sea α el plano determinado por *A*, *B* y *C*. 2. Sea *l* la recta que pasa por *A* y *B*. 3. *P* ∉ *l.* 4. *A*, *B* y *P* no son colineales. 5. *l* ∈ α.   *P* ⋀ *l* ∈ α que es lo que se quería demostrar. | 1. Definición de plano. 2. Postulado 1. 3. Dato dado. 4. Por definición de puntos no colineales. 5. Por axioma “Si dos puntos están en un plano, la recta que los contiene está en el mismo plano”. |

* Otro ejemplo es demostrar el teorema de Pitágoras que se enuncia del siguiente modo:

Para todo triangulo Rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

*a*2 + *b*2= *c*2

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG06 |
| **Descripción** | http://thumb1.shutterstock.com/display_pic_with_logo/97684/167329544/stock-photo-retro-looking-pythagoras-theorem-of-right-triangles-167329544.jpg  Dejar sin el color de fondo, las letras deben estar en cursiva y las que están en el interior de las figuras deben tener cotas. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | [167329544](http://www.shutterstock.com/pic-167329544/stock-photo-retro-looking-pythagoras-theorem-of-right-triangles.html?src=Jibj-9HIb_pTWKJJbawZYg-1-30) |
| **Pie de imagen** | Representación gráfica del teorema de Pitágoras. |

Para la demostración vamos a partir de la siguiente construcción:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG07 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  Todas las letras van en cursiva, las letras minúsculas corresponden a las medidas de los lados y deben tener cotas, las letras en mayúscula son el nombre del punto. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | A través del concepto de área se puede demostrar el teorema de Pitágoras. |

|  |  |
| --- | --- |
| Esquema en el que cada afirmación particular se justifica con una ley general | |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. *ABCD* es un cuadrado. 2. *EFGH* es un cuadrado. 3. *a* + *b* es el lado de *ABCD*. 4. *c* es el lado de *EFGH*. 5. (*a* + *b*)2 es área de *ABCD*. 6. (*a* + *b*)2 = *a*2 + 2*ab* + *b*2. 7. *c*2 es el área de *EFGH*. 8. *ab*/2 es el área de cada triangulo. 9. 2*ab* + *c*2 es el área de *ABCD*. 10. *a*2 + 2*ab* + *b*2 = 2*ab* + *c*2. 11. *a*2 + *b*2 = *c*2 cancelamos 2*ab* en cada lado de la igualdad.   *a*2 + *b*2 = *c*2 queda demostrado el teorema de Pitágoras. | 1. Por construcción. 2. Por construcción. 3. Por construcción. 4. Por construcción. 5. Por definición de área de un cuadrado. 6. Por desarrollo de un binomio cuadrado. 7. Por construcción. 8. Por definición de área de un triángulo. 9. Por suma de áreas. 10. Por igualdad de áreas. 11. Por propiedad uniforme de la igualdad. |

[SECCIÓN 1] **3.2 El método indirecto**

Este método de demostración también es conocido como demostración por contradicción, en este caso se niega la hipótesis y se debe llegar a la tesis.

Por ejemplo demostremos por contradicción el siguiente teorema: <<Todo triángulo *ABC* tiene un único ángulo obtuso interno>>.

Dado Δ*ABC* vamos a suponer que tiene dos ángulos obtusos ∠*A* y ∠*B*, es decir:

*m*∠*A* > 90° y *m*∠*B* > 90°.

Por la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo se tiene que:

*m*∠*A* + *m*∠*B* + *m*∠*C* = 180°

Si se sustrae la medida de los ángulos *A* y *B* en ambos lados de la igualdad se llega a:

*m*∠*C* = 180° − *m*∠*A* − *m*∠*B*

*m*∠*C* = 180° − (*m*∠*A* + *m*∠*B*)

Factorizando el signo menos, como *m*∠*A* > 90° y *m*∠*B* > 90° entonces:

180° − (*m*∠*A* + *m*∠*B*) < 0

Es decir que:

*m*∠*C* < 0

Lo cual contradice la definición de ángulo interno de un triángulo ya que la medida de todo ángulo interno de un triángulo es mayor que cero, por tanto se concluye que la negación de la hipótesis es falsa, es decir que se demuestra que todo triangulo *ABC* tiene un único ángulo obtuso.

[SECCIÓN 1] **3.3 Generalizaciones falsas y demostración por contraejemplo**

Hasta el momento hemos revisado como se realiza una demostración en geometría a partir de dos métodos y en que consiste el método deductivo y el método inductivo, sin embargo cuando hacemos una generalización por el método inductivo, podemos cometer un error al suponer que con varios ejemplos revisados se cumple una conjetura. En este caso se dice que hemos realizado una **generalización falsa** y para demostrar que es falsa mostramos un **contraejemplo**, que es un ejemplo que hace que la generalización no sea cierta.

Observemos la siguiente imagen y pensemos que podemos decir acerca de que le sucede a cada cuadrilátero cuando es cortado por su diagonal mayor. ¿Lo que sucede en la figura se cumplirá para todos los cuadriláteros?

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG08 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png  La letra va en cursiva, la diagonal (línea al interior de las figuras) debe ser una línea punteada. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Todo cuadrilátero es dividido por su diagonal mayor en dos triángulos iguales. |

En la imagen se puede observar que la diagonal divide a cada cuadrilátero en dos triángulos de igual forma y tamaño, esta afirmación corresponde a una generalización que se ha realizado por simple observación, pero, ¿cómo puedes refutar o contradecir dicha afirmación?

Si se encuentra un cuadrilátero que no cumpla con la afirmación, se puede decir que se ha hallado un **contraejemplo**, por tanto la afirmación es una generalización falsa.

Como lo muestra la siguiente figura.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG09 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los triángulos *ABD* y *BCD* que se forman en el cuadrilátero *ABCD* no son iguales en forma y tamaño lo que contradice la afirmación <<Todo cuadrilátero es dividido por su diagonal mayor en dos triángulos iguales>>. |

[SECCIÓN 1] **3.4 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **4 Los ángulos y las rectas**

Las formas geométricasestán presentes en nuestro entorno: las encontramos en la naturaleza, en el arte, la arquitectura, etc. Conocer las **rectas** y los **ángulos que se forman entre ellas** nos ayudarán a comprender el estudio de las formas geométricas y la forma del entorno que nos rodea.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG10 |
| **Descripción** | Street Map with GPS Icons. Navigation - stock photo |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las rectas y los ángulos nos sirven para estudiar los mapas y la posición de las calles en diferentes lugares. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Definiciones de recta, semirrecta y ángulo** |
| **Contenido** | **Recta:** Conjunto de puntos que se prolongan indefinidamente en una dirección.  **Semirrecta:** Porción de recta que tiene inicio pero no fin.  **Ángulo**: Es el espacio del plano comprendido por la unión de dos semirrectas con el mismo punto de origen denominado vértice. |

Para nombrar las rectas y las semirrectas se realiza a través de una letra minúscula o mediante dos puntos que estén contenidos en ellas.

Para los ángulos se usa el símbolo ∠ y la letra del vértice o una letra del alfabeto griego o mediante tres puntos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG11 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Notación para rectas, semirrectas y ángulos. |

[SECCIÓN 2] **4.1 Los ángulos formados entre rectas perpendiculares**

Dos rectas *l* y *m* son perpendiculares si al intersecarse se forman un par de ángulos adyacentes congruentes, se representan de la forma:

***l* ⊥ *m***

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG12 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta *l*es perpendicular a la recta *m.* |

[SECCIÓN 2] **4.2 Los ángulos formados entre rectas paralelas**

Dos rectas *l* y *m* son paralelas si están en el mismo plano y no tienen puntos en común. Se denotan como:

***l* || *m***

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG13 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | La recta ***l*** es paralela a la recta ***m.*** |

Dos ángulos son consecutivos si están en el mismo plano, tienen el mismo vértice y un lado en común.

* Dadas *m* || *n* rectas paralelas que son cortadas por la recta *t* transversal a *m* y *n,* se forman **ángulos congruentes** que se forman entre las rectas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG14 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Pares de ángulos correspondientes entre paralelas:  ∠5 ≅ ∠1  ∠6 ≅ ∠2  ∠4 ≅ ∠8  ∠3 ≅ ∠7 |

* Los ángulos que se encuentran al mismo lado de la transversal son llamados **ángulos colaterales**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG15 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los ángulos ∠1, ∠2, ∠5 y ∠6 son colaterales.  También son colaterales los ángulos ∠4, ∠3, ∠8 y ∠7. |

* Dadas *m* || *n* rectas paralelas que son cortadas por la recta *t* transversal a *m* y *n,* se forman ángulos entre las rectas que se conocen como **ángulos externos e internos**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG16 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los ángulos ∠1, ∠4, ∠6 y ∠7 son llamados ángulos externos y los ángulos ∠2, ∠3, ∠5 y ∠8 son llamados ángulos internos. |

* Los **ángulos alternos externos** se caracterizan porque no son colaterales y no son adyacentes (dos ángulos son adyacentes si son consecutivos y sus lados no comunes pertenecen a la misma recta).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG17 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Pares de ángulos alternos externos:  ∠8 ≅ ∠2  ∠7 ≅ ∠1 |

* Los ángulos que no son colaterales y no son adyacentes son llamados **ángulos alternos internos**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG18 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Pares de ángulos internos alternos:  ∠6 ≅ ∠4  ∠5 ≅ ∠3 |

Ahora vamos a usar el hecho de los ángulos correspondientes entre paralelas para demostrar la congruencia de los ángulos internos alternos.

Si *m* || *n* y *t* transversal a *m* y *n* entonces ∠6 ≅ ∠4 y ∠5 ≅ ∠3

|  |  |
| --- | --- |
| Demostración de la congruencia de los ángulos internos alternos | |
| Afirmación | Razón |
| 1. *m* || *n* y *t* transversal a *m* y *n*. 2. ∠1 ≅ ∠3 y ∠4 ≅ ∠2 3. ∠1 ≅ ∠5 y ∠2 ≅ ∠6 4. ∠5 ≅ ∠3 y ∠6 ≅ ∠4 | 1. Dato dado. 2. Son ángulos opuestos por el vértice. 3. Son ángulos correspondientes entre paralelas. 4. Por transitividad. |

* Los ángulos ∠4 y ∠8 son colaterales, uno es externo y el otro es interno y no son adyacentes, los ángulos entre paralelas con estas características con conocidos como **ángulos correspondientes**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG19 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Son ángulos correspondientes:  ∠4 y ∠8  ∠3 y ∠7  ∠2 y ∠6  ∠1 y ∠5 |

[SECCIÓN 2] **4.3 Las rectas paralelas y los triángulos**

A partir del concepto de recta paralelas se puede estudiar y demostrar propiedades y conceptos relacionados con los triángulos.

* Propiedad fundamental de los triángulos.

En todo triángulo *ABC* la adición de las medidas de sus ángulos internos siempre es igual a 180°.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG20 |
| **Descripción** | Las letras van en itálica, dejar el interior del triángulo sin color, los ángulos deben tener los colores que se indican. |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Para demostrar la propiedad fundamental de los triángulos se traza por uno de los vértices una recta paralela al lado opuesto. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Afirmación** | **Razón** |
| 1. Por *C* se traza una recta paralela a *AB*. 2. ∠1 ≅ ∠4 y ∠2 ≅ ∠5. 3. ∠1 = ∠4 y∠2 = ∠5 4. ∠4 + ∠3 + ∠4 = 180° 5. ∠1 + ∠3 + ∠2 = 180° | 1. Postulado de la recta paralela. 2. Son ángulos internos alternos entre paralelas. 3. Por ser ángulos internos entre paralelas. 4. Por construcción. 5. Al reemplazar *m*∠4 y *m*∠5 por lo obtenido en la afirmación 2. |

* Dadas dos rectas paralelas y dos rectas transversales a ellas, los triángulos *ABC* y *AB’C’* son semejantes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG21 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Las rectas y los ángulos nos sirven para estudiar los mapas y la posición de las calles en diferentes lugares. |

Esto se debe debido a que sus ángulos homólogos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

[SECCIÓN 2] **4.4 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **5 Los ángulos en polígonos**

Todo polígono tiene dos clases de ángulos. Un ángulo interno y un ángulo externo, los ángulos internos se forman a partir de dos lados consecutivos del polígono, mientras que un ángulo externo es la unión de uno de los lados y la prolongación de uno de sus lados adyacentes.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG22 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Los ángulos azules son internos, mientras que los ángulos verdes son externos. |

[SECCIÓN 2] **5.1 Los ángulos en polígonos**

A continuación por inducción vamos a hallar dos fórmulas para determinar la suma de los ángulos internos de cualquier polígono y la medida de los ángulos internos para cualquier polígono regular.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG23 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulos internos en diferentes polígonos. |

La suma de los ángulos internos de cada figura es:

Triángulo 180°

Cuadrilátero 360°

Pentágono 540°

Hexágono 720°

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG24 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Cada polígono se puede dividir en triángulos. |

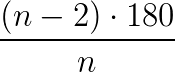
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Relación entre el número de triángulos y de lados del polígono | | | |
| Polígono | Número de lados | Número de triángulos | Suma total de ángulos |
| Triángulo | 3 | 1 | 1 x 180 =180 |
| Cuadrilátero | 4 | 2 | 2 x 180 = 360 |
| Pentágono | 5 | 3 | 3 x 180 = 540 |
| Hexágono | 6 | 4 | 4 x 180 = 720 |

Partiendo de la propiedad fundamental de los triángulos se puede ver una relación entre el número de lados de un polígono y la cantidad de triángulos que se forman desde un vértice:

Si el polígono tiene ***n*** lados, la cantidad de triángulos es ***n* − 2** que es el número que multiplica a 180 para hallar la suma total de los ángulos.

Suma total de los ángulos internos de un polígono = 180 ∙ (*n* − 2)

Y para la medida de los ángulos internos de cada polígono simplemente dividimos su suma por él número de lados del polígono, así se tiene la fórmula:



|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG25 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Medida de los ángulos internos de un polígono de tres lados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG26 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Medida de los ángulos internos de un polígono de cuatro lados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG27 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Medida de los ángulos internos de un polígono de cinco lados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG28 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Medida de los ángulos internos de un polígono de seis lados. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | Ángulos internos de un polígono |
| **Contenido** | En todo polígono de *n* lados se cumple que la suma de sus ángulos internos viene dada por:  **180° ∙ (*n* − 2)**  La medida de los ángulos internos de un polígono regular con *n* lados viene dada por:  **180°(*n* − 2)/*n*** |

[SECCIÓN 2] **5.2 Los ángulos en la circunferencia**

Al dibujar líneas que estén dentro de una circunferencia o que tengan relación con ella se pueden definir distintos tipos de ángulos.

**Ángulo central**: tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados se apoyan en la circunferencia (coinciden con radios).

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG29 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulo central de una circunferencia. |

**Ángulo inscrito**: tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados se apoyan sobre la circunferencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG30 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulo inscrito de una circunferencia. |

**Ángulo semi-inscrito**: tiene su vértice sobre la circunferencia, uno de sus lados se apoya sobre la circunferencia y el otro es tangente a la circunferencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG31 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulo semi-inscrito de una circunferencia. |

**Ángulo interior**: tiene su vértice en el interior de la circunferencia.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG32 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Ángulo interior de una circunferencia. |

En toda circunferencia se cumplen las siguientes propiedades:

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG33 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son congruentes.  ∠α ≅ ∠β ≅ ∠γ |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG34 |
| **Descripción** | C:\Users\MIGUEL MUÑOZ\AppData\Local\Temp\geogebra.png |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Si en una circunferencia el ángulo central y el ángulo inscrito tienen el mismo arco entonces la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito.  *m*∠β = 2*m*∠α |

[SECCIÓN 2] **5.3 Las construcciones geométricas**

Realizar una construcción geométrica implica que cada paso que se realiza usando únicamente regla y compas debe estar debidamente justificado por un postulado, definición o teorema. Revisemos algunas de ellas:

* Construcción de la **mediatriz** de un segmento.

La **mediatriz** es la recta que corta perpendicularmente el segmento por su punto medio.

Para trazar una mediatriz de un segmento *AB* debe hacerse lo siguiente:

1. Se sitúa la aguja del compás en el punto *A* y, con una abertura mayor que la mitad del segmento *AB*, se traza un arco de circunferencia.
2. Con la misma abertura, se sitúa la aguja del compás en *B* y se traza otro arco que corte al anterior, por encima y por debajo del segmento.
3. Se une con una regla los dos puntos de corte de los arcos: esta recta es la **mediatriz** del segmento.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG35 |
| **Descripción** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14607/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_07_18_img18_small.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14607/InfoGuion/cuadernoestudio/images\_xml/MT\_07\_18\_img18\_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Mediatriz de un ángulo. |

* Construcción de la **bisectriz** de un ángulo.

La **bisectriz** es la recta que divide un ángulo en dos ángulos iguales. Para trazarla se debe hacer lo siguiente:

1. Se sitúa la aguja del compás en el vértice *A* y se traza un arco que corte los lados del ángulo.
2. Desde los dos puntos de corte *B* y *C*, se trazan dos arcos, con la misma abertura del compás, que se corten en el interior del ángulo.
3. Se une con una regla el punto de corte *D* y el vértice *A*: esta recta es la **bisectriz** del ángulo.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_IMG36 |
| **Descripción** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14607/InfoGuion/cuadernoestudio/images_xml/MT_07_18_img19_small.jpg |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** | http://profesores.aulaplaneta.com/DNNPlayerPackages/Package14607/InfoGuion/cuadernoestudio/images\_xml/MT\_07\_18\_img19\_small.jpg |
| **Pie de imagen** | Bisectriz de un ángulo. |

[SECCIÓN 2] **5.4 Consolidación**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

[SECCIÓN 1] **6 Ejercitación y competencias**

[SECCIÓN 1] **7.** **Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC00 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | MA\_08\_08\_REC00 | |
| **Web 01** | *Título* | *URL* |
| **Web 02** | *Título* | *URL* |
| **Web 03** | *Título* | *URL* |